Arbre couvrant. Couplage

Alix Munier-Kordon et Maryse Pelletier

LIP6
Université P. et M. Curie
Paris

2I003 Initiation à l'algorithmique

Définition (arbre couvrant)

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe.

Definition

Un *arbre couvrant* de G est un arbre $T = (V, F)$ qui est un sous-graphe de G.

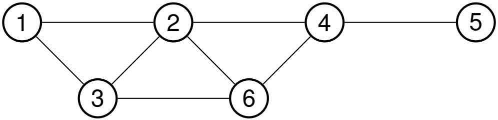
En rouge : un arbre couvrant de G.

Définition (arbre couvrant)

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe.

Definition

Un *arbre couvrant* de G est un arbre $T = (V, F)$ qui est un sous-graphe de G.



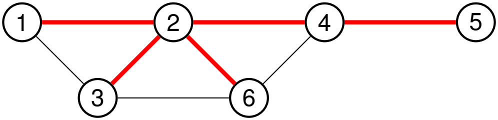
En rouge : un arbre couvrant de G.

Définition (arbre couvrant)

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe.

Definition

Un *arbre couvrant* de G est un arbre $T = (V, F)$ qui est un sous-graphe de G.



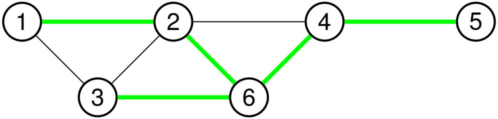
En rouge : un arbre couvrant de G.

Définition (arbre couvrant)

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe.

Definition

Un *arbre couvrant* de G est un arbre $T = (V, F)$ qui est un sous-graphe de G.



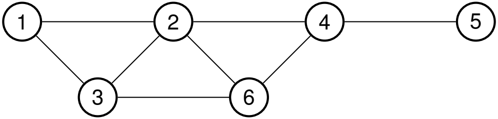
En vert : un autre arbre couvrant de G.

Algorithme (arbre couvrant)

```
Algorithme arbreCouvrant(V, E):
    C = ensemble des singletons de V
    F = ensemble vide
    Pour chaque arête {v1, v2}de E:
        C1 = composante(C, v1)
        C2 = composante(C, v2)
        si C1 n'est pas égal à C2:
            retirer C1 à C
            retirer C2 à C
            ajouter union(C1, C2) à C
            ajouter {v1, v2}à F
    Retourner F
```

où `composante(C, v1)` retourne l'élément de `C` auquel appartient `e1` et `union(C1, C2)` retourne l'union de `C1` et `C2`.

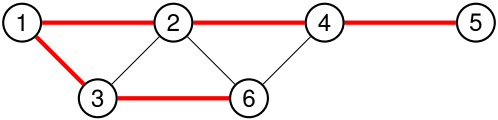
Un exemple (1)




```
E = {{1, 2},{4, 5},{1, 3},{3, 6},{2, 3},{2, 6},{2, 4},{4, 6}}
C = {{1},{2},{3},{4},{5},{6}}; F ={}
Tour 1: C = {{1, 2},{3},{4},{5},{6}}; F ={{1, 2}}
Tour 2: C = {{1, 2}, {3},{4, 5},{6}}; F ={{1, 2},{4, 5}}
Tour 3: C = {{1, 2, 3},{4, 5},{6}}; F ={{1, 2},{4, 5},{1, 3}}
Tour 4: C = {{1, 2, 3, 6},{4, 5}}; F ={{1, 2},{4, 5},{1, 3},{3, 6}}
Tour 5: C = {{1, 2, 3, 6},{4, 5}}; F ={{1, 2},{4, 5},{1, 3},{3, 6}}
Tour 6: C = {{1, 2, 3, 6},{4, 5}}; F ={{1, 2},{4, 5},{1, 3},{3, 6}}
Tour 7: C = {{1, 2, 3, 6, 4, 5}};
        F ={{1, 2},{4, 5},{1, 3},{3, 6},{2, 4}}
Tour 8: C = {{1, 2, 3, 6, 4, 5}};
        F ={{1, 2},{4, 5},{1, 3},{3, 6},{2, 4}}
```

Un exemple (2)

`F =[{1, 2},{4, 5},{1, 3},{3, 6},{2, 4}]`



Validité de l'algorithme (suite)

Proposition

Soit G un graphe non orienté connexe.
L'algorithme `arbreCouvrant(V,E)` *calcule un arbre couvrant $T = (V, F)$ de G.*

Pour $k \in \{0, \ldots, |E|\}$, on note C_k et F_k les valeurs des ensembles C et F.

Lemma

Pour tout $(x, y) \in V^2$ avec $x \neq y$, si x et y sont dans le même élément de C_k alors il existe une chaîne de x à y dans $T_k = (V, F_k)$.

La preuve se fait par récurrence sur k.

Validité de l'algorithme

Theorem

Le graphe $T = (V, F)$ est connexe et sans cycle.

C'est une conséquence du lemme précédent:

- T est connexe : raisonnement par l'absurde
- T est sans cycle : raisonnement par l'absurde

On déduit de ce lemme que T est un arbre couvrant de G puisque T est connexe sans cycle et que $F \subseteq E$ par construction.

Définition (couplage)

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.

Definition

Un ensemble d'arêtes M est un *couplage* si on ne peut trouver deux arêtes e et e' dans M incidentes à un même sommet.

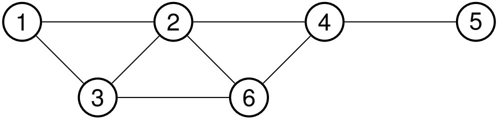
$\{\{1, 2\}\}$ est un couplage
$\{\{1, 2\}, \{4, 6\}\}$ est un couplage
$\{\{1, 3\}, \{2, 6\}, \{4, 5\}\}$ est un couplage
$\{\{1, 2\}, \{2, 6\}, \{4, 5\}\}$ n'est pas un couplage

Définition (couplage)

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.

Definition

Un ensemble d'arêtes M est un *couplage* si on ne peut trouver deux arêtes e et e' dans M incidentes à un même sommet.



$\{\{1,2\}\}$ est un couplage
$\{\{1,2\},\{4,6\}\}$ est un couplage
$\{\{1,3\},\{2,6\},\{4,5\}\}$ est un couplage
$\{\{1,2\},\{2,6\},\{4,5\}\}$ n'est pas un couplage

Définition (sommet couplé)

Soit M un couplage d'un graphe $G = (V, E)$ non orienté.

Definition

Tout sommet $v \in V$ tel que il existe $w \in V$ tel que $\{v, w\} \in M$ est dit *couplé par* M. On note C_M l'ensemble des sommets couplés par M.

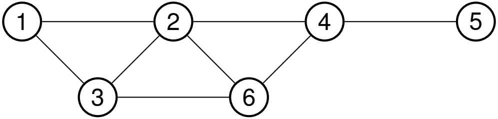
Pour $M = \{\{1, 2\}\}$, $C_M = \{1, 2\}$
Pour $M = \{\{1, 2\}, \{4, 6\}\}$, $C_M = \{1, 2, 4, 6\}$
Pour $M = \{\{1, 3\}, \{2, 6\}, \{4, 5\}\}$, $C_M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Définition (sommet couplé)

Soit M un couplage d'un graphe $G = (V, E)$ non orienté.

Definition

Tout sommet $v \in V$ tel que il existe $w \in V$ tel que $\{v, w\} \in M$ est dit *couplé par M*. On note C_M l'ensemble des sommets couplés par M.



Pour $M = \{\{1, 2\}\}$, $C_M = \{1, 2\}$
Pour $M = \{\{1, 2\}, \{4, 6\}\}$, $C_M = \{1, 2, 4, 6\}$
Pour $M = \{\{1, 3\}, \{2, 6\}, \{4, 5\}\}$, $C_M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Définition (couplage maximum)

Definition

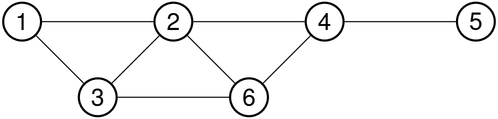
Le *problème du couplage maximum* consiste à construire un couplage M dont le nombre d'arêtes est maximum pour un graphe $G = (V, E)$ fixé.

$\{\{1, 3\}, \{2, 6\}, \{4, 5\}\}$ est un couplage maximum
$\{\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}\}$ est un autre couplage maximum
$\{\{1, 2\}\}$ n'est pas maximum
$\{\{1, 2\}, \{4, 6\}\}$ n'est pas maximum

Définition (couplage maximum)

Definition

Le *problème du couplage maximum* consiste à construire un couplage M dont le nombre d'arêtes est maximum pour un graphe $G = (V, E)$ fixé.



$\{\{1, 3\}, \{2, 6\}, \{4, 5\}\}$ est un couplage maximum
$\{\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}\}$ est un autre couplage maximum
$\{\{1, 2\}\}$ n'est pas maximum
$\{\{1, 2\}, \{4, 6\}\}$ n'est pas maximum

Recherche de stage

1. A, un ensemble d'étudiants, S un ensemble de stages tels que $|A| \leq |S|$;
2. Chaque étudiant $e \in A$ donne l'ensemble de stage $c(e) \subseteq S$ qui l'intéresse.

Peut-on attribuer un stage par étudiant de sorte que chaque stage ne soit attribué qu'à au plus un étudiant et que chaque étudiant ait un stage ?

Recherche de stage

Modélisation par un graphe non orienté $G = (V, E)$.

1. Les sommets sont les stages et les étudiants : $V = A \cup S$;
2. L'arête $a = \{e, s\}$ avec $e \in A$ et $s \in S$ est dans E si $s \in c(e)$.

On peut attribuer un stage par étudiant ssi le graphe G possède un couplage M tel que $|M| = |A|$. Si un tel couplage existe il est forcément maximum car le graphe $G = (V, E)$ a la propriété suivante :

- V est l'union disjointe de A et S,
- toute arête de E a l'une de ses extrémités dans A et l'autre dans S.

Recherche de stage (exemples)

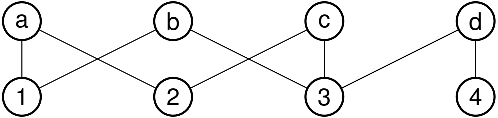
$A = \{a, b, c, d\}$ et $S = \{1, 2, 3, 4\}$

$M = \{\{a, 1\}, \{b, 3\}, \{c, 2\}, \{d, 4\}\}$ est un couplage tel que $|M| = |A|$.

Pas de couplage M tel que $|M| = |A|$.

Recherche de stage (exemples)

$A = \{a, b, c, d\}$ et $S = \{1, 2, 3, 4\}$

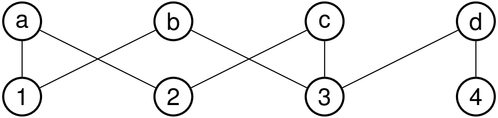


$M = \{\{a, 1\}, \{b, 3\}, \{c, 2\}, \{d, 4\}\}$ est un couplage tel que $|M| = |A|$.

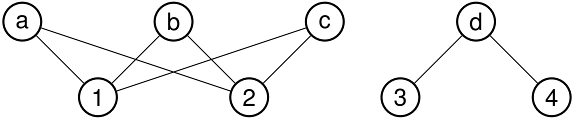
Pas de couplage M tel que $|M| = |A|$.

Recherche de stage (exemples)

$A = \{a, b, c, d\}$ et $S = \{1, 2, 3, 4\}$



$M = \{\{a, 1\}, \{b, 3\}, \{c, 2\}, \{d, 4\}\}$ est un couplage tel que $|M| = |A|$.



Pas de couplage M tel que $|M| = |A|$.

Définition (chaîne M-alternante)

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe et M un couplage.

Definition

Une chaîne élémentaire est *M-alternante* si elle est composée alternativement d’arêtes de $E \setminus M$ et M.

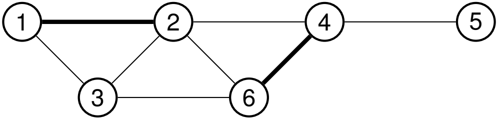
$M = \{\{1, 2\}, \{4, 6\}\}$ est un couplage.

Définition (chaîne M-alternante)

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe et M un couplage.

Definition

Une chaîne élémentaire est *M-alternante* si elle est composée alternativement d'arêtes de $E \setminus M$ et M.



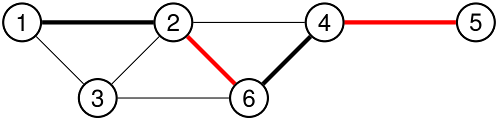
$M = \{\{1, 2\}, \{4, 6\}\}$ est un couplage.

Définition (chaîne M-alternante)

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe et M un couplage.

Definition

Une chaîne élémentaire est *M-alternante* si elle est composée alternativement d'arêtes de $E \setminus M$ et M.



$1, 2, 6, 4, 5$ est une chaîne M-alternante.

Définition (chaîne M-augmentante)

Definition

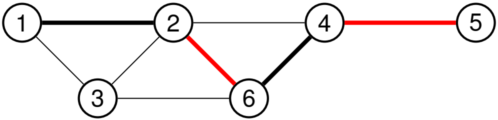
Une chaîne élémentaire est *M-augmentante* si elle est M-alternante et si aucun de ses deux sommets extrémités n'est couplé par M.

$M = \{\{1,2\},\{4,6\}\}$
$1,2,6,4,5$ est une chaîne M-alternante qui n'est pas M-augmentante.

Définition (chaîne M-augmentante)

Definition

Une chaîne élémentaire est *M-augmentante* si elle est M-alternante et si aucun de ses deux sommets extrémités n'est couplé par M.

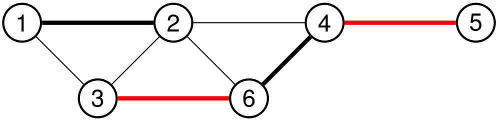


$M = \{\{1, 2\}, \{4, 6\}\}$
$1, 2, 6, 4, 5$ est une chaîne M-alternante qui n'est pas M-augmentante.

Définition (chaîne *M*-augmentante)

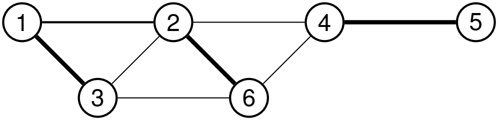
Definition

Une chaîne élémentaire est *M-augmentante* si elle est *M*-alternante et si aucun de ses deux sommets extrémités n'est couplé par *M*.



$M = \{\{1, 2\}, \{4, 6\}\}$
$3, 6, 4, 5$ est une chaîne *M*-alternante qui est *M*-augmentante.

Un couplage *M* sans chaîne *M*-augmentante



$M = \{\{1,3\},\{2,6\},\{4,5\}\}$ est un couplage maximum, il n'y a pas de chaîne *M*-augmentante.

Lemme de la chaîne augmentante

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe et M un couplage.

Lemma

Si P est l'ensemble des arêtes d'une chaîne M-augmentante, alors $M' = M \Delta P = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$ est un couplage de G avec $|M'| = |M| + 1$.

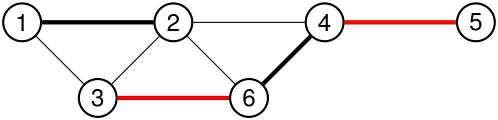
$M = \{\{1,2\},\{4,6\}\}$ et $P = \{\{3,6\},\{4,6\},\{4,5\}\}$
$M' = M \Delta P = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$

Lemme de la chaîne augmentante

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe et M un couplage.

Lemma

Si P est l'ensemble des arêtes d'une chaîne M-augmentante, alors $M' = M \Delta P = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$ est un couplage de G avec $|M'| = |M| + 1$.



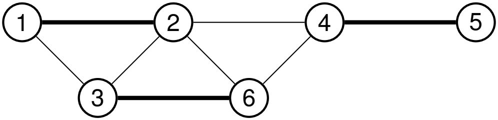
$M = \{\{1, 2\}, \{4, 6\}\}$ et $P = \{\{3, 6\}, \{4, 6\}, \{4, 5\}\}$
$M' = M \Delta P = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$

Lemme de la chaîne augmentante

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe et M un couplage.

Lemma

Si P est l'ensemble des arêtes d'une chaîne M-augmentante, alors $M' = M \Delta P = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$ est un couplage de G avec $|M'| = |M| + 1$.



$M = \{\{1, 2\}, \{4, 6\}\}$ et $P = \{\{3, 6\}, \{4, 6\}, \{4, 5\}\}$
$M' = \{\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}\}$

Théorème de Berge 1957

Theorem

Soit M un couplage dans un graphe G. M est maximum si et seulement si il n'existe pas de chaîne M-augmentante.

Implication : M maximum $\Rightarrow$ pas de chaîne M-augmentante.
Preuve par la contraposée : il existe une chaîne M-augmentante $\Rightarrow$ M non maximum.
Vrai, d'après le lemme de la chaîne augmentante.

Réciproque : pas de chaîne M-augmentante $\Rightarrow$ M maximum (voir TD).