Rappels mathématiques

Alix Munier-Kordon et Maryse Pelletier

LIP6
Université P. et M. Curie
Paris

Algorithmique élémentaire

Plan du cours

Le B-A BA du raisonnement

Trois parties :

- hypothèse
- démonstration
- conclusion

Un raisonnement doit être clair, rigoureux, construit.
Toujours préférer la simplicité à d'inutiles complications.

Types de raisonnement

- Calculatoire
- Raisonnement logique
  - raisonnement direct
  - par l'absurde : pour montrer P on montre que $(non(P))$ donne une contradiction
  - par la contraposée : pour montrer que $a \Rightarrow b$ on montre que $non(b) \Rightarrow non(a)$
- Par récurrence

Exemple 1

- Montrer que $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a+b)^2 - 4ab$
  Enchaînement de calculs à bien présenter

Un peu de logique

- Implication et contraposée

$$
\begin{aligned}
a \Rightarrow b \quad &\equiv \quad non(a) \text{ ou } b \\
&\equiv \quad non[non(b)] \text{ ou } non(a) \\
&\equiv \quad non(b) \Rightarrow non(a)
\end{aligned}
$$

- Négation d'une implication

$$
\begin{aligned}
non(a \Rightarrow b) \quad &\equiv \quad non[non(a) \text{ ou } b] \\
&\equiv \quad a \text{ et } non(b)
\end{aligned}
$$

Exemple 2

- Montrer que tout nombre premier supérieur à 2 est impair
  - raisonnement direct

$$P : \forall n \in \mathbb{N}\ [(n \text{ premier et } n > 2) \Rightarrow n \text{ impair }]$$

  - par l'absurde

$$non(P) : \exists n \in \mathbb{N}\ [n \text{ premier, } n > 2 \text{ et } n \text{ pair }]$$

  - par la contraposée

$$\forall n \in \mathbb{N}\ [n \text{ pair } \Rightarrow (n \text{ non premier ou } n \leq 2)]$$

Exemple 3

- Montrer que

$$[(a \text{ et } b) \Rightarrow c] \Leftrightarrow [(a \text{ et } (\text{non } c)) \Rightarrow (\text{non } b)]$$

C'est encore un enchaînement de calculs à bien présenter

Exemple 3 : preuve

$$
\begin{aligned}
[(a \text{ et } b) \Rightarrow c] &\equiv \text{non}(a \text{ et } b) \text{ ou } c \\
&\equiv \text{non}(a) \text{ ou non}(b) \text{ ou } c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[(a \text{ et } (\text{non } c)) \Rightarrow (\text{non } b)] &\equiv \text{non}(a \text{ et non}(c)) \text{ ou non}(b) \\
&\equiv \text{non}(a) \text{ ou } c \text{ ou non}(b)
\end{aligned}
$$

Exemple 4 : implications équivalentes

Les implications suivantes sont équivalentes

- (n premier et $n > 2$) $\Rightarrow$ n impair
- (n premier et n pair) $\Rightarrow$ $n \leq 2$
- ($n > 2$ et n pair) $\Rightarrow$ n non premier
- n pair $\Rightarrow$ (n non premier ou $n \leq 2$)
- n premier $\Rightarrow$ (n impair ou $n \leq 2$)
- $n > 2 \Rightarrow$ (n non premier ou n impair)

Récurrence faible

Soit $\Pi(n)$, $n \in \mathbb{N}$ une propriété à démontrer.
Récurrence faible :

Base : montrer que la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Induction : montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [\Pi(n) \Rightarrow \Pi(n+1)]$$

Exemple. $\Pi(n)$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Récurrence forte

Soit $\Pi(n)$, $n \in \mathbb{N}$ une propriété à démontrer.
Récurrence forte :

Base : montrer que la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Induction : montrer que,

$$\forall n_0 \geq 0 \quad [(\forall n \leq n_0, \Pi(n)) \Rightarrow \Pi(n_0 + 1)]$$

Exemple. Tout entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.

Permutations

Definition

Une *permutation* d'un ensemble E est une bijection de E dans E.

Theorem

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est égal à $n!$.

Par exemple il y a 6 permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Arrangements

Definition

Un *arrangement* d'ordre k d'un ensemble E à n éléments ($k \leq n$) est une suite ordonnée de k éléments de E.

Remarque : dans un arrangement, il n'y a pas de répétition et l'ordre a de l'importance.
Par exemple, dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$:

- $(2, 3, 5)$ est un arrangement d'ordre 3
- $(5, 2, 3)$ en est un autre
- $(5, 2, 5)$ n'est pas un arrangement.

Definition

Le nombre d'arrangements d'ordre k d'un ensemble E à n éléments est noté A_n^k.

Theorem

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Par exemple il y a 60 arrangements d'ordre 3 dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, autrement dit $A_5^3 = 60$.

Permutations et arrangements

Une permutation d'un ensemble E à n éléments est un arrangement d'ordre n de E.

Par exemple :

- la permutation de $\{1, 2, 3, 4\}$ définie par :

  $$1 \mapsto 3 \quad , \quad 2 \mapsto 4 \quad , \quad 3 \mapsto 1 \quad , \quad 4 \mapsto 2$$

  est notée $(3, 4, 1, 2)$
- les 6 permutations de $\{1, 2, 3\}$ sont $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$.

Combinaisons

Definition

Une *combinaison* d'ordre k d'un ensemble E à n éléments est un sous-ensemble de E ayant k éléments.

Remarque : dans une combinaison, il n'y a pas de répétition et l'ordre n'a pas d'importance.
Par exemple, dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$:

- $\{2, 3, 5\}$ est une combinaison d'ordre 3
- $\{5, 2, 3\}$ est la même combinaison
- $\{5, 2, 5\}$ n'est pas une combinaison.

Definition

Le nombre de combinaisons d'ordre k d'un ensemble E à n éléments est noté C_n^k.

Theorem

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Par exemple il y a 10 combinaisons d'ordre 3 dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, autrement dit $C_5^3 = 10$.

Suites récurrentes linéaires homogènes

Definition

Une suite *récurrente linéaire homogène d'ordre 2* est une suite définie par une relation de récurrence :

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2} \quad \text{si } n \geq 2$$

et des conditions initiales :

$$u_0 = a_0 \qquad u_1 = a_1$$

où a, b, a_0, a_1 sont des constantes réelles.

Un exemple

La suite de Fibonacci est définie par la relation de récurrence :

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{si } n \geq 2$$

et les conditions initiales :

$$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1$$

Polynôme caractéristique

Definition

Le *polynôme caractéristique* associé à la suite récurrente :

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2} \quad \text{si } n \geq 2$$

est le polynôme :

$$r^2 - ar - b$$

Par exemple, le polynôme caractéristique associé à la suite de Fibonacci est :

$$r^2 - r - 1$$

Solution d'une suite homogène : cas 1

Cas 1 : le polynôme caractéristique a deux racines r_1 et r_2. Dans ce cas la solution générale de la récurrence :

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2} \quad \text{si } n \geq 2$$

est de la forme :

$$u_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$$

On détermine α_1 et α_2 en utilisant les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= a_0 \\ \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 &= a_1 \end{aligned}$$

Remarque : les racines peuvent être des nombres complexes

Solution d'une suite homogène : cas 2

Cas 2 : le polynôme caractéristique a une racine double r_1.
Dans ce cas la solution générale est de la forme :

$$u_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 n r_1^n$$

On détermine α_1 et α_2 en utilisant les conditions initiales, comme dans le cas 1.

Exemple : Fibonacci

- Le polynôme caractéristique est : $r^2 - r - 1$.
- Les racines sont : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- La solution générale est de la forme : $\alpha_1(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \alpha_2(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n$.
- Les conditions initiales entraînent :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Suites linéaires d'ordre quelconque

La méthode du polynôme caractéristique se généralise aux suites linéaires d'ordre quelconque, définies par une relation de récurrence :

$$u_n = \lambda_1 u_{n-1} + \lambda_2 u_{n-2} + \ldots + \lambda_k u_{n-k} \quad \text{si } n \geq k$$

et des conditions initiales :

$$u_0 = a_0 \qquad u_1 = a_1 \qquad \ldots \qquad u_{k-1} = a_{k-1}$$

Remarque : si r est une racine d'ordre m du polynôme caractéristique alors les suites r^n, nr^n, ..., $n^{m-1}r^n$ sont solutions de la relation de récurrence.

Cas particulier : suites d'ordre 1

Dans le cas d'une suite d'ordre 1, définie par

$$u_n = au_{n-1} \text{ si } n \geq 1 \text{ et } u_0 = a_0$$

la solution est la suite géométrique de raison a et de premier terme a_0 :

$$u_n = a^n a_0$$

Suites récurrentes linéaires non homogènes

Definition

Une suite *récurrente linéaire non homogène* est une suite définie par une relation de récurrence :

$$u_n = \lambda_1 u_{n-1} + \lambda_2 u_{n-2} + \ldots + \lambda_k u_{n-k} + f(n) \quad \text{si } n \geq k$$

et des conditions initiales :

$$u_0 = a_0 \quad , \quad u_1 = a_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad u_{k-1} = a_{k-1}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $a_0, \ldots, a_{k-1}$ sont des constantes réelles et f est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Suite non homogène d'ordre 1 (1)

$$u_n = au_{n-1} + b \quad \text{si } n \geq 1 \quad \text{et} \quad u_0 = a_0$$

Il existe une méthode générale de calcul pour de telles suites mais on va faire le calcul "à la main".

$$\begin{array}{lcl} u_n & = & au_{n-1} + b = a(au_{n-2} + b) + b \\ u_n & = & a^2 u_{n-2} + (a+1)b \\ u_n & = & a^3 u_{n-3} + (a^2 + a + 1)b \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ u_n & = & a^n u_0 + (a^{n-1} + \ldots + a^3 + a^2 + a + 1)b \end{array}$$

Si $a = 1$ alors $u_n = a_0 + nb$

Si $a \neq 1$ alors $u_n = a^n a_0 + \dfrac{a^n - 1}{a - 1} b$

Exemples

Exemple 1. $u_n = u_{n-1} + 3 \quad \text{si } n \geq 1 \quad \text{et} \quad u_0 = 5$

$$u_n = u_{n-1} + 3 = u_{n-2} + 2 * 3 = ... = u_0 + n * 3 = 5 + 3n$$

Exemple 2. $u_n = 2u_{n-1} + 3 \quad \text{si } n \geq 1 \quad \text{et} \quad u_0 = 5$

$$\begin{array}{rcl} u_n & = & 2u_{n-1} + 3 = 2^2 u_{n-2} + 2 * 3 + 3 \\ & = & 2^3 u_{n-3} + 2^2 * 3 + 2 * 3 + 3 \\ & = & \ldots\ldots \\ & = & 2^n u_0 + 2^{n-1} + ... + 2^2 * 3 + 2 * 3 + 3 \\ & = & 5 * 2^n + 3(2^n - 1) \end{array}$$

Et finalement :

$$u_n = 2^{n+3} - 3$$

Sommes

- Somme des entiers de 1 à n :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Somme algébrique :

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Combinaisons et permutations

- Égalité du triangle de Pascal :

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

- Formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

- Conséquence de Newton : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

- Formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$