Graphes orientés

Alix Munier-Kordon et Maryse Pelletier

LIP6
Université P. et M. Curie
Paris

2I003 Initiation à l'algorithmique

Plan du cours

Personnages en relation

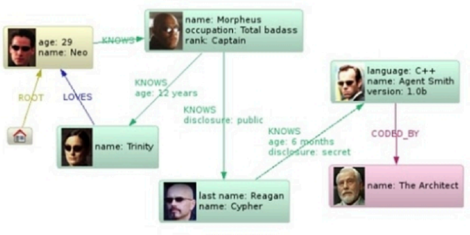


Figure: Graphe $G = (V, A)$. Sommets$\leftrightarrow$personnages, arc$\leftrightarrow$relation

Déterminer toutes les personnes que Morpheus connait ?

Tâches en relation de précédence

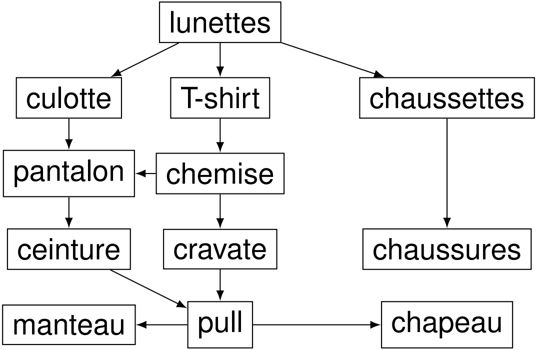


Figure: Sommets$\leftrightarrow$tâches, arc$\leftrightarrow$relation de précédence

Peut-on déterminer un ordre (total) des tâches qui respecte les contraintes de précédence ?

Définition

Definition

Un *graphe orienté* G est défini par un couple $G = (V, A)$, où V est un ensemble de sommets et A un ensemble d'arcs.

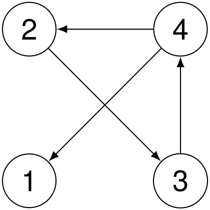


Figure: $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{(4, 1), (4, 2), (2, 3), (3, 4)\}$.

Terminologie

Pour tout sommet $u \in V$,

- $\Gamma^+(u) = \{v \in V, (u, v) \in A\}$ est l'ensemble des *successeurs* de u.
- $\Gamma^-(u) = \{v \in V, (v, u) \in A\}$ est l'ensemble des *prédécesseurs* de u.
- Un *chemin* est une séquence de sommets et d'arcs $\nu = v_1 e_1 v_2 e_2 \cdots v_n e_n v_{n+1}$ avec $v_i \in V$ pour $i \in \{1, \cdots, n+1\}$ et $e_i = (v_i, v_{i+1}) \in A$ pour $i \in \{1, \cdots, n\}$.
- Un chemin *élémentaire* est un chemin qui ne passe pas deux fois par le même sommet.
- Un *circuit* est un chemin ν tel que $v_{n+1} = v_1$.

Degré et $\frac{1}{2}$-degrés d'un graphe orienté

Definition

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté.

- $d^+(u) = |\Gamma^+(u)|$ est le $\frac{1}{2}$-*degré sortant* de u.
- $d^-(u) = |\Gamma^-(u)|$ est le $\frac{1}{2}$-*degré entrant* de u.
- $d(u) = d^+(u) + d^-(u)$ est le degré de u.

Theorem

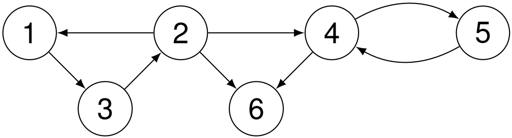
Pour tout graphe $G = (V, A)$ orienté,

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |A|$$

Par récurrence sur le nombre d'arcs.

Forte connexité et composantes fortement connexes

Soit la relation $\mathcal{R}_{FC}$ définie sur V^2 par :
$u\mathcal{R}_{FC}v$ ssi il existe un chemin dans G de u à v et de v à u.



$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{FC} = \quad & \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}\cup \\ & \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(1,3),(3,1),(4,5),(5,4)\}\end{aligned}$$

Relations d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$ une relation définie dans un ensemble A.

Definition

$\mathcal{R}$ est une *relation d'équivalence* sur A si

- $\mathcal{R}$ est *réflexive* : $x\mathcal{R}x$,
- $\mathcal{R}$ est *symétrique* : si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$,
- $\mathcal{R}$ est *transitive* : si $x\mathcal{R}y$ et si $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$.

Definition

Soir $\mathcal{R}$ une *relation d'équivalence* sur A, la *classe d'équivalence* d'un élément x de A est l'ensemble des éléments y de A qui sont en relation avec x.

Remarque : Les classes d'équivalence forment une partition.

Forte connexité et composantes fortement connexes

Theorem

$\mathcal{R}_{FC}$ est une relation d'équivalence sur V.

Definition

Les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}_{FC}$ sont désignées par les composantes fortement connexes de G.
Un graphe est fortement connexe si la relation $\mathcal{R}_{FC}$ ne possède qu'une seule classe d'équivalence.

Pour l'exemple, les classes d'équivalence sont $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5\}$ et $\{6\}$.
Quel(s) arcs(s) faut-il rajouter au minimum pour obtenir un graphe fortement connexe ?

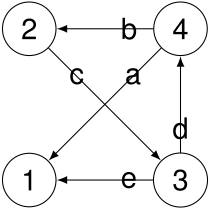
Arborescence

Une arborescence est un graphe orienté $G_r = (V, A)$ construit à partir d'un arbre $T = (V, E)$ et d'un sommet $r \in V$.

1. G_r et T ont les mêmes sommets ;
2. Les arcs de G_r correspondent aux arêtes de T orientés du sommet r vers les feuilles.

r est *la racine* de G_r. Il s'agit de l'unique sommet de G_r sans prédécesseur.

Matrice sommet-arc pour $G = (V, A)$ orienté

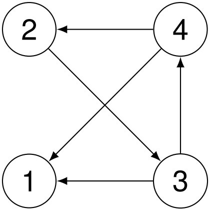


M est une matrice $|V| \times |A|$ telle que, $\forall a = (i, j) \in A$

1. $M[i, a] = 1$, $M[j, a] = -1$;
2. $\forall k \in V - \{i, j\}$, $M[k, a] = 0$.

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice sommet-sommet pour $G = (V, A)$ orienté

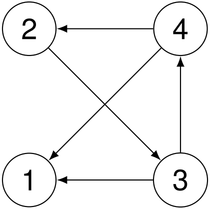


R est une matrice $|V| \times |V|$ telle que, $\forall (i, j) \in V^2$

1. $R[i, j] \in \{0, 1\}$;
2. $R[i, j] = 1$ ssi $a = (i, j) \in A$.

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Listes de successeurs pour $G = (V, A)$ orienté



Pour $i \in V$, $L[i]$ est la liste des sommets successeurs de i.

$$\begin{aligned} L[1] &= \quad [] \\ L[2] &= \quad [3] \\ L[3] &= \quad [1, 4] \\ L[4] &= \quad [1, 2] \end{aligned}$$

Taille en mémoire des trois représentations

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté :

	Taille mémoire
Matrice sommet-arcs	$\Theta(\|V\| \times \|A\|)$
Matrice sommet-sommet	$\Theta(\|V\|^2)$
Listes de successeurs	$\Theta(\max(\|V\|, \|A\|))$

Complexité des primitives d'accès aux arcs

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté :

1. `G.existeArc(i,j)` : *True* ssi $(i, j) \in A$;
2. `G.listeSuccesseurs(i)` : pour $i \in V$, $\Gamma^+(i)$;
3. `G.listePredecesseurs(i)` : pour $i \in V$, $\Gamma^-(i)$.

Num. primitives	1	2	3
Matrice som-a	$\mathcal{O}(m)$	$\mathcal{O}(m \times n)$	$\mathcal{O}(m \times n)$
Matrice som-som	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
Liste de Succ.	$\mathcal{O}(d^+(i))$	$\Theta(1)$	$\Theta(m)$

$n = |V|$, $m = |A|$.

Fermeture transitive

Soit $\mathcal{R}$ une relation définie dans un ensemble V.

Definition

La fermeture transitive de $\mathcal{R}$ est la relation $\mathcal{R}'$ dans V définie par $x\mathcal{R}'y$ ssi il existe $k > 0$ et une suite $x_0, x_1, \cdots, x_k$ d'éléments de V tels que $x_0 = x$, $x_k = y$ et $x_{i-1}\mathcal{R}x_i$ pour $i = 1, \cdots, k$.

La fermeture transitive de $\mathcal{R} = \{(1,2),(2,3),(3,2),(3,4)\}$ est

$$\mathcal{R}' = \{(1,2),(2,3),(3,2),(3,4),(1,3),(2,4),(2,2),(3,3)\}.$$

Calcul de la fermeture transitive

Soit $\mathcal{R}$ une relation définie dans un ensemble V.
La matrice M associée à $\mathcal{R}$ est la matrice booléenne $|V| \times |V|$ définie par :

$$M[x,y] = \begin{cases} 1 & \text{si } x\mathcal{R}y \\ 0 & \mathit{sinon} \end{cases}$$

Pour $\mathcal{R} = \{(1,2),(2,3),(3,2),(3,4)\}$,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcul de la fermeture transitive

On pose $M^1 = M$ et $\forall k > 1$, $M^k = M^{k-1} \times M$, où $\times$ est la multiplication de matrices booléennes.

Lemma

Pour tout entier $k > 0$ et tout couple $(x, y) \in V^2$, $M^k[x, y] = 1$ ssi il existe $x_0, x_1, \ldots, x_k$ tels que $x_0 = x$, $x_k = y$ et $x_{i-1} \mathcal{R} x_i$ pour $i = 1, \ldots, k$.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par exemple, $M^2[1, 3] = 1$ car $1 \mathcal{R} 2$ et $2 \mathcal{R} 3$.

Calcul de la fermeture transitive

Theorem

La matrice M' associée à la fermeture transitive de $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{R}$ vaut

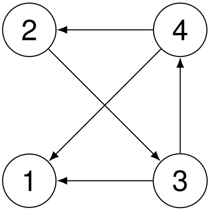
$$M' = \sum_{k=1}^{|V|} M^k.$$

$$M^4 = M^2 \quad M' = M + M^1 + M^2 + M^3 + M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Complexité du calcul : $\Theta(|V|^4)$.

Exemple : existence d'un chemin

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté.
Pour tout $(u, v) \in V^2$, $u\mathcal{R}v$ ssi $u = v$ ou il existe un arc $(u, v) \in A$.



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple : existence d'un chemin

Pour tout couple $(u, v) \in V^2$, $M'[u, v] = 1$ si il existe un chemin de u à v dans G.

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A quelle condition deux sommets u et v sont dans la même composante fortement connexe ?

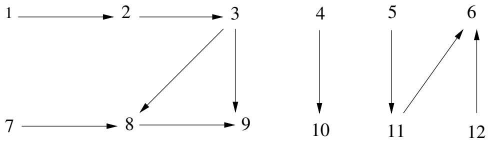
Ordre topologique

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté sans circuit.

Definition

L'*ordre topologique* dans V est défini par :

$$u \leq v \quad \text{ssi il existe un chemin de } u \text{ à } v \text{ dans } G.$$



$1 \leq 1$ $\quad 1 \leq 9$ $\quad 5 \leq 6$ $\quad$ mais $\quad 5 \not\leq 12$

Relations d'ordre

Soit $\mathcal{R}$ une relation définie dans un ensemble V.

Definition

$\mathcal{R}$ est une *relation d'ordre* sur V si

- $\mathcal{R}$ est *réflexive*,
- $\mathcal{R}$ est *antisymétrique* : si $x\mathcal{R}y$ et si $y\mathcal{R}x$ alors $x = y$,
- $\mathcal{R}$ est *transitive*.

Ordre *total* si tous les éléments sont comparables.
Ordre *partiel* sinon.

Relations d’ordre, ordre topologique

Theorem

Si $G = (V, A)$ est un graphe orienté sans circuit alors l’ordre topologique sur V est une relation d’ordre.

Remarques :

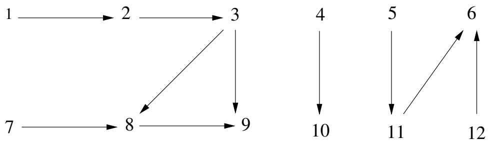
- il est nécessaire que le graphe soit sans circuit pour que la relation soit antisymétrique,
- l’ordre topologique peut être total ou partiel.

Tri topologique

Definition

Soit G un graphe orienté sans circuit. Un *tri topologique* de G est une liste $(u_1, \ldots, u_n)$ des sommets de G telle que :

$$i < j \Rightarrow \text{ il n'y a pas de chemin de } u_j \text{ à } u_i.$$



$(1, 7, 4, 10, 2, 5, 12, 11, 6, 3, 8, 9)$ est un tri topologique
$(1, 7, 4, 10, 2, 5, 8, 12, 11, 6, 3, 9)$ n'en est pas un.

Rang d'un sommet

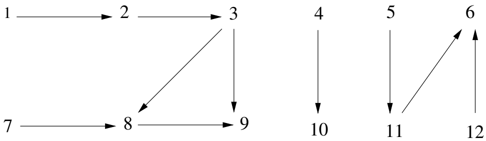
Definition

Soit G un graphe orienté sans circuit. Le *rang* d'un sommet u est défini récursivement :

$$\mathrm{rang}\,(u) = \begin{cases} 0 \text{ si } u \text{ n'a pas de prédécesseur} \\ 1 + \max\{\mathrm{rang}\,(v) \mid v \text{ prédécesseur de } u\} \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque : cette définition a un sens car le graphe est sans circuit.

Rang d'un sommet, exemple



u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
`rang(u)`	0	1	2	0	0	2	0	3	4	1	1	0

Tri topologique, existence

Theorem

Si un graphe orienté est sans circuit alors il admet un tri topologique.

La preuve est basée sur le lemme suivant :

Lemma

Si G est un graphe orienté sans circuit ayant n sommets alors :

- *il existe* $u_1, \ldots, u_n$ *tels que* $\mathrm{rang}\,(u_1) \leq \ldots \leq \mathrm{rang}\,(u_n)$
- *si* $\mathrm{rang}\,(u_1) \leq \ldots \leq \mathrm{rang}\,(u_n)$ *alors* $(u_1, \ldots, u_n)$ *est un tri topologique.*

Tri topologique, algorithme

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté sans circuit.
Initialement L est une liste vide et tous les sommets sont à traiter.

- Pour tout sommet u on pose $\Delta(u) = d^{-}(u)$ (demi-degré entrant de u).
- On choisit un sommet u tel que $\Delta(u) = 0$:
  - on ajoute u à L,
  - pour chaque successeur v de u on pose $\Delta(v) = \Delta(v) - 1$,
  - le sommet u n'est plus à traiter.
- On réitère l'étape précédente tant qu'il y a des sommets à traiter.