Graphes non orientés

Alix Munier-Kordon et Maryse Pelletier

LIP6
Université P. et M. Curie
Paris

2I003 Initiation à l'algorithmique

Plan du cours

Problème d'Euler

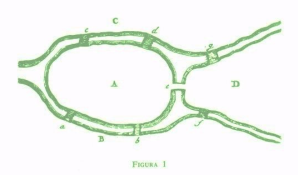


Figure: Plan des 7 ponts de Konigsberg

Peut-on trouver un itinéraire qui passe exactement une fois par chaque pont ?

Modélisation par un graphe non orienté

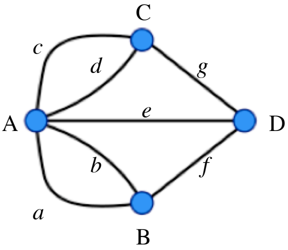


Figure: Graphe $G = (V, E)$. Sommets$\leftrightarrow$quartiers, arêtes$\leftrightarrow$ponts

Peut-on trouver une chaîne qui passe par toutes les arêtes pour le graphe $G = (V, E)$?

Recherche d'un itinéraire

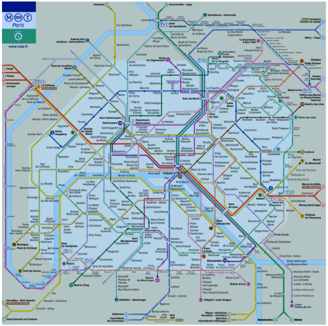


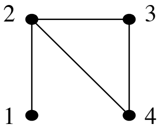
Figure: Plan du métro parisien

Quel est le chemin le plus court (en nombre de stations) pour aller de République à Monparnasse ?

Définition

Definition

Un *graphe non orienté* G est défini par un couple $G = (V, E)$, où V est un ensemble de sommets et E un ensemble d'arêtes.



$$V = \{1, 2, 3, 4\},\ E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}\}.$$

Terminologie pour les graphes non orientés

- Pour tout sommet $u \in V$, $\Gamma(u) = \{v \in V, \{u, v\} \in E\}$ est l'ensemble des sommets *adjacents* à u.
- Toute arête $e = \{u, v\} \in E$ est *incidente* à u et v.
- Un *sous-graphe* de $G = (V(G), E(G))$ est un graphe $H = (V(H), E(H))$ tel que $V(H) \subset V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$.
- Le *sous-graphe induit* par un ensemble de sommets $V' \subset V(G)$ est le sous-graphe $G' = (V', E')$ avec $E' = \{e = \{u, v\} \in E, u \in V', v \in V'\}$.

Terminologie pour les graphes non orientés (suite)

- Une *chaîne* est une séquence de sommets et d'arêtes $\nu = v_1 e_1 v_2 e_2 \cdots v_n e_n v_{n+1}$ avec $v_i \in V$ pour $i \in \{1, \cdots, n+1\}$ et $e_i = \{v_i, v_{i+1}\} \in E$ pour $i \in \{1, \cdots, n\}$.
- Une chaîne élémentaire est une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet.
- Un *cycle* est une chaîne ν tel que $v_{n+1} = v_1$.
- Un graphe *connexe* est tel que, pour tout couple $(u, v) \in V^2$, il existe une chaîne entre u et v.

Degré d'un graphe

Definition

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Le degré de tout sommet $v \in V$ est égal à $d(v) = |\Gamma(v)|$.

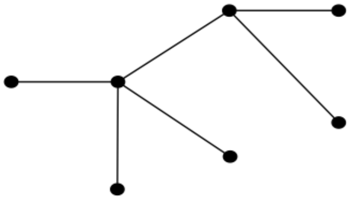
Theorem

Pour tout graphe $G = (V, E)$ non orienté, $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

Définition d'un arbre

Definition

Soit $T = (V, E)$ un graphe non orienté. T est un arbre si T est connexe sans cycle.



Minimal connexe, maximum acyclique

Definition

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. G est minimal connexe si, G est connexe et pour tout $e \in E$, $G' = (V, E - \{e\})$ n'est pas connexe.

Definition

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. G est maximal acyclique si, G est sans cycle et pour tout couple de sommets $\{x, y\}$ non adjacents dans G, $G' = (V, E \cup \{\{x, y\}\})$ contient un cycle.

Caractérisation d'un arbre

Theorem

Soit $T = (V, E)$ un graphe non orienté. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *T est un arbre.*
2. *T est minimal connexe.*
3. *T est maximal acyclique.*
4. *Entre deux sommets quelconques, il existe une chaîne unique.*

Relation entre $|E|$ et $|V|$

Theorem

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Si $|E| \geq |V|$, alors G contient un cycle.

Theorem

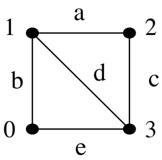
Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Si $|E| < |V|$-1, alors G n'est pas connexe.

Theorem

Si $T = (V, E)$ est un arbre, alors $|E| = |V| - 1$.

Que pensez-vous de la réciproque ?

Matrice sommet-arête pour $G = (V, E)$ non orienté

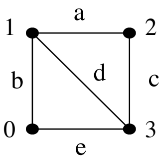


Pour tout couple $(i, j) \in V \times E$,

1. $M[i, j] \in \{0, 1\}$;
2. $M[i, j] = 1$ ssi i est incident à j.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice sommet-sommet pour $G = (V, E)$ non orienté

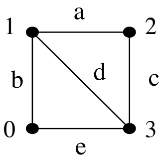


Pour tout couple $(i, j) \in V \times V$,

1. $R[i, j] \in \{0, 1\}$;
2. $R[i, j] = 1$ ssi i est adjacent à j.

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Listes d'adjacence pour $G = (V, E)$ non orienté



Pour $i \in V$, $L[i]$ est la liste des sommets adjacents à i.

$$
\begin{aligned}
L[0] &= [1, 3] \\
L[1] &= [0, 2, 3] \\
L[2] &= [1, 3] \\
L[3] &= [0, 1, 2]
\end{aligned}
$$

Taille en mémoire des deux représentations

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté :

	Taille mémoire
Matrice sommet-arête	$\Theta(\lvert V\rvert \times \lvert E\rvert)$
Matrice sommet-sommet	$\Theta(\lvert V\rvert^2)$
Listes d'adjacence	$\Theta(\max(\lvert V\rvert, \lvert E\rvert))$

Complexité des primitives d'accès aux arêtes

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté :

1. `G.existeArete(i,j)` : pour tout couple $(i, j) \in V^2$, *True* ssi $\{i, j\} \in E$;
2. `G.adjacents(i)` : pour $i \in V$, $\Gamma(i)$.

Représentation	`G.existeArete(i,j)`	`G.adjacents(i)`
Matrice som-a	$\mathcal{O}(m)$	$\mathcal{O}(m \times n)$
Matrice som-som	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$
Matrice Adj.	$\mathcal{O}(d(i))$	$\Theta(1)$

$n = |V|$, $m = |E|$.