Module 2I003 Graphes semaine 9/10/11

Exercice(s)

Exercice 1 – Casse-têtes

Question 1
Monsieur et Madame Mongraf ont organisé une soirée avec quatre couples d'amis. Certaines personnes, issues de couples différents, se sont serré la main. A la fin du repas, Monsieur Mongraf demande à chacun combien de mains il a serrées. Il reçoit neuf réponses différentes. Combien de mains Madame Mongraf a-t-elle serrées ?

Question 2
Un homme veut traverser la rivière avec son chien, sa chèvre et son (énorme) choux. Malheureusement, l'homme ne peut traverser la rivière qu'avec un seul de ceux-ci. De plus, pour des raisons évidentes, l'homme ne peut laisser seuls ni le chien avec la chèvre, ni la chèvre avec le choux sur une rive. Comment l'homme doit il s'y prendre pour traverser la rivière ?

Exercice 2 – Propriétés autour des degrés pour un graphe non orienté

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. On rappelle que $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, où $d(v)$, $v \in V$ désigne le degré du sommet v dans la graphe G.

Question 1
Démontrez que tout graphe possède un nombre pair de sommets de degré impair.

Question 2
Montrer par l'absurde que tout graphe à $n \geq 2$ sommets possède au moins deux sommets de même degré.

Question 3
Un groupe de 7 amis décide que chacun d'eux enverra un paquet à 3 autres. Est-il possible que les paquets reẹs par chacun viennent des personnes à qui il a envoyé un paquet ?

Exercice 3 – Chaînes, cycles

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.

Question 1
Montrer que si il existe une chaîne entre deux sommets u et v, alors il existe une chaîne élémentaire entre u et v (Lemme de Koenig).

Question 2
Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté tel que $d(v) \geq 2$ pour tout $v \in V$. Montrer que G contient un cycle.

Question 3
Montrez que deux chaînes de longueur maximale dans un graphe connexe ont au moins un sommet en commun.

Exercice 4 – Arbres

Soit $T = (V, E)$ un graphe non orienté.

Question 1
Montrer que si T est maximal acyclique, alors entre deux sommets quelconques il existe une chaîne unique ($3 \Rightarrow 4$).

Question 2
Montrer que si entre deux sommets quelconques il existe une chaîne unique, alors T est un arbre ($4 \Rightarrow 1$).

Question 3
Montrer que si $|E| \geq |V|$, alors T contient un cycle.

Question 4
Montrer que si $|E| < |V| - 1$, alors T n'est pas connexe.

Question 5
En déduire que si T est un arbre, $|E| = |V| - 1$.

Exercice 5 – Représentation et primitives d'un graphe non orienté

Le but de cet exercice est de décrire et d'évaluer un ensemble de primitives sur les graphes non orientés en fonction de leur représentation en mémoire (matrice sommet-arête, sommet-sommet et listes d'adjacence).

Question 1
Donnez la représentation du graphe $G = (V, E)$ pour $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et $E = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}\}$ sous la forme d'une matrice sommet-arête, sommet-sommet ou de listes d'adjacence.

Question 2
Ecrire la fonction `degre(G,x)` qui renvoie la valeur du degré d'un sommet x du graphe G. Quelle est sa complexité en fonction de la représentation choisie ? On supposera que la fonction `len(L)` qui retourne le nombre d'éléments de la liste `L` est de complexité proportionnelle au nombre d'éléments de `L`.

Question 3
Ecrire la fonction `listeArete(G)` qui renvoie la liste des arêtes de G. Une arête est un ensemble de deux éléments x et y et peut être créee en écrivant `e=set([x, y])`.

Question 4
Soit $n = |V|$ et $m = |E|$. Donner la complexité dans le pire des cas de `listeArete`.

Exercice 6 – Fermeture transitive et connexité

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et la relation $\mathcal{R}$ définie sur V^2 par $u\mathcal{R}v$ ssi $u = v$ ou il existe une arête entre u et v.

Question 1
Pour cette question (uniquement) on suppose que $G = (V, E)$ est donné par $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}\}$. Que vaut $\mathcal{R}$?

Question 2
Est-ce que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence pour un graphe quelconque ? Justifiez votre réponse ? Pour quelle classe de graphes $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'équivalence.

Question 3
A quoi correspond la fermeture transitive $\mathcal{R}'$ associée à $\mathcal{R}$? Démontrez que $\mathcal{R}'$ est une relation d'équivalence. A quoi correspondent les classes d'équivalence ?

Question 4
Décrire un algorithme qui permet de tester si deux sommets u et v sont dans la même composante connexe. Quelle est sa complexité si le graphe est décrit sous la forme d'une matrice sommet-sommet ?

Question 5
Est-ce que la fermeture transitive $\mathcal{R}'$ associée à une relation quelconque $\mathcal{R}$ est toujours une relation d'équivalence ? Justifiez votre réponse.

Exercice 7 – Fermeture transitive et forte connexité

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté.

Question 1
Déterminer les composantes fortement connexes du graphe $G = (V, A)$ où :
$V = \{1, \ldots, 10\}$
$A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 5), (4, 5), (2, 8), (3, 6), (6, 7), (7, 3), (7, 4), (8, 1), (8, 6), (9, 5), (9, 10), (10, 9)\}$.

Question 2
Décrire un algorithme qui permet de déterminer si deux sommets x et y de V sont dans la même composante fortement connexe.

Exercice 8 – Tri topologique - Extrait de l'examens de Li216 juin 2012

Dans cet exercice, $G = (V, A)$ représente un graphe orienté. On pose $|V| = n$ le nombre de sommets et $|A| = m$ le nombre d'arcs.

Pour tout $x \in V$, $\Gamma^+(x)$ désigne l'ensemble des successeurs de x, soit $\Gamma^+(x) = \{y \in V, (x, y) \in A\}$. De manière symétrique, $\Gamma^-(x)$ désigne l'ensemble des prédécesseurs de x, soit $\Gamma^-(x) = \{y \in V, (y, x) \in A\}$. Pour tout $x \in V$, on note $d^+(x) = |\Gamma^+(x)|$ et $d^-(x) = |\Gamma^-(x)|$.

Question 1
Que valent $\sum_{x \in V} d^+(x)$ et $\sum_{x \in V} d^-(x)$ pour un graphe G orienté quelconque ? Démontrez le.

Question 2
Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté.

1. Donnez la définition d'un ordre topologique $\leq$ d'un graphe orienté.
2. Démontrez que, si G est un graphe orienté sans circuit, l'ordre topologique associé est une relation d'ordre. Est-ce une relation d'ordre total ? partiel ?

Question 3
Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté sans circuit.

1. Donnez la définition d'un tri topologique de G.
2. Donnez un tri topologique pour le graphe $G = (V, A)$ défini par les sommets $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et les arcs $A = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 6)\}$. Est-il unique ?

On suppose dans la suite que G est un graphe sans circuit dont les sommets sont numérotés tels que $V = \{0, \cdots, n-1\}$ et que, pour tout sommet $i \in V$, il existe un chemin de 0 à i. On désigne par `G.nbSommets` le nombre de sommets de G. Pour tout sommet $x \in V$, `G.successeurs(x)` désigne $\Gamma^+(x)$ **dans l'ordre de numérotation croissante**. Soient les deux fonctions suivantes :

```
def triTopologique (G):
        visite=[False]*G.nbSommets
        return parcoursSommets(G,0,visite)

def parcoursSommets(G,x,visite):
        visite[x]=True
        print "debut␣Sommet␣visite␣:", x
        L = []
        for y in G.successeurs(x):
                if (not visite[y]):
                        L = parcoursSommets(G,y,visite)+ L
        print "fin␣Sommet␣visite␣:", x
        return [x]+L
```

Question 4
Exécutez ces deux fonctions pour le graphe G décrit dans la question 3.2. Pour cela, on précisera l'ordre chronologique des messages et l'arbre des appels.

Question 5
On suppose dans cette question que le graphe G est représenté par une matrice sommet-sommet.

1. Rappelez la définition de cette représentation.
2. Evaluez la complexité de l'appel `triTopologique(G)`. Justifiez votre réponse.

Question 6
On suppose maintenant que le graphe G est représenté par des listes d'adjacence.

1. Rappelez la définition de cette représentation.
2. Evaluez la complexité de l'appel `triTopologique(G)`. Quelle représentation vaut-il mieux utiliser pour le graphe du point de vue de la complexité ?

Question 7
Démontrez par l'absurde que, quand on termine un appel `parcoursSommets(G,x,visite)`, alors tous les sommets y descendants de x (*i.e.* pour lesquels il existe un chemin de x à y) vérifient `visite[y]=True`.

Question 8
Soit x un sommet de V. Supposons que l'arc $(x, y) \in A$ et posons $L(x)$ la liste renvoyée par l'appel `parcoursSommets(G,x,visite)`.

1. Peut-on avoir $y \notin L(x)$? Justifiez votre réponse.
2. Que peut-on dire de $L(x)$ par rapport à $L(y)$ si $y \notin L(x)$?
3. En déduire que, si $y \notin L(x)$, alors y est situé après x dans $L(0)$.
4. Conclure que, pour tout arc $(x, y) \in A$, y est situé après x dans $L(0)$.

Question 9
Déduire des questions précédentes que $L(0)$ contient tous les sommets du graphe G et en constitue un tri topologique.

Exercice 9 – Compléments sur le théorème de Berge

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe.

Question 1

On considère dans cette question le graphe non orienté connexe $G = (V, E)$ défini par $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et $E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{4, 5\}, \{4, 8\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}\}$.

1. Vérifiez que $M = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5, 6\}\}$ est un couplage de G ?
2. Peut-on déterminer une chaîne M-alternante ? M-augmentante ?
3. Est-ce que M est un couplage maximum ? Le cas échéant, peut-on utiliser le lemme de la chaîne augmentante pour déterminer un couplage M' plus grand ?

Question 2

Supposons dans cette question que $H = (V, E)$ est un graphe non orienté connexe tel que, $\forall v \in V$, $d(v) \leq 2$. Montrez que H est soit un cycle, soit un chaîne.

Question 3

Soit M un couplage de G. Montrez que si il n'y a pas de chaîne M-augmentante, alors M est un couplage maximum.

Question 4

En déduire le principe d'un algorithme qui calcule un couplage maximum M pour un graphe G connexe.

Exercice 10 – Couplages - Extrait de l'examens de Li216 juin 2011

Soit un graphe non orienté connexe $G = (V, E)$. On note $n = |V|$ le nombre de sommets de G.

On rappelle qu'un *couplage* M est un ensemble d'arêtes inclus dans E tel que l'on ne peut trouver deux arêtes e et e' dans M incidentes à un même sommet. Tout sommet $v \in V$ tel qu'il existe $w \in V$ tel que $\{v, w\} \in M$ est dit *couplé par* M. On note C_M l'ensemble des sommets couplés par M. Le *problème du couplage maximum* consiste à construire un couplage M dont le nombre d'arêtes est maximum. Une chaîne élémentaire est M-*alternante* si elle est composée alternativement d'arêtes de $E \setminus M$ et M. Une chaîne élémentaire est M-*augmentante* si elle est M-alternante et telle que ses deux sommets extrémités ne sont pas couplés par M.

Question 1

On suppose uniquement dans cette question que $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et que $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{5, 8\}, \{6, 8\}, \{6, 7\}\}$.

1. Est-ce que $M = \{\{2, 3\}, \{4, 7\}, \{6, 8\}\}$ est un couplage ? Justifiez votre réponse. Quel est l'ensemble de ses sommets couplés C_M ?
2. Donner une chaîne M-augmentante ν.
3. Si on note P l'ensemble des arêtes de ν, calculer $M' = M \Delta P = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$.
4. Est-ce que M' est un couplage maximum ? Justifiez votre réponse.

Question 2

Soit M un couplage de G. On suppose qu'il existe une chaîne M-augmentante ν et on note P l'ensemble des arêtes de ν. Montrer que $M \setminus P$ et $P \setminus M$ sont des couplages de G. En déduire par un raisonnement par l'absurde que $M' = M \Delta P$ est un couplage de G.

Question 3

Démontrer que $|M'| = |M| + 1$. En déduire une condition suffisante pour déterminer si un couplage M n'est pas maximum.

Question 4

Un couplage M est dit *saturant* si $|C_M| = n$. Montrer que, pour tout couplage (pas forcément saturant), $|C_M|$ est pair. Est-ce que tout graphe admet un couplage saturant ? Justifiez votre réponse.

Question 5

Pour tout graphe G, on note $\mathrm{Imp}(G)$ le nombre de composantes connexes de G qui comportent un nombre impair de sommets. Pour tout sommet $x \in V$, on note également, G_x le sous-graphe induit de G obtenu en enlevant x : $G_x = (V - \{x\}, E')$ où E' est le sous-ensemble des arêtes de E dont les extrémités sont dans $V - \{x\}$. On désigne par $\ell(x)$ le nombre de composantes connexes de G_x.

Pour le graphe G de la question 1, représenter le graphe G_4 et ses composantes connexes. Que valent $\ell(4)$ et $\mathrm{Imp}(G_4)$?

Question 6

Démontrer que, si un graphe $G = (V, E)$ possède un couplage saturant, alors pour tout sommet $x \in V$, $\mathrm{Imp}(G_x) = 1$.

Question 7

On suppose dans cette question que G est un arbre. Montrez que, si pour tout sommet $x \in V$, $\mathrm{Imp}(G_x) = 1$, alors G possède un couplage saturant.