1

СОДЕРЖАНИЕ ПРЕДМЕТА, ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Введение

Ежедневно в призводственной деятельности и в быту возникают такие ситуации, в которых появляется потребность в массовом обслуживании. Очень часто обслуживающие организации располагают ограниченными возможностями удовлетворения спроса на обслуживание. Это, как правило, приводит к созданию очередей. Примеры подобных явлений встречаются на каждом шагу: очереди в магазинах, в билетных кассах, на остановках автобусов и троллейбусов, задержка ремонта бытовых приборов в ателье по обслуживанию населения, скопление самолетов над аэродромами из-за отсутствия свободных посадочных полос, задержка в ремонте вышедших из строя станков, военной техники в боевых условиях и т. д. Хотя приведенные примеры взяты из различных областей человеческой деятельности, всем им присущи одинаковые формальные признаки, которые позволяют их описать с помощью одного и того же математического аппарата. Во всех этих ситуациях перед теорией стоит задача достаточно полно описать суть происходящих явлений и установить с необходимой для практики точностью количественную связь между числом приборов обслуживания, характеристиками входящего потока требований (заявок) и качеством обслуживания. При этом под качеством обслуживания понимается, насколько своевременно проведено обслуживание поступивших в систему требований. Естественно, что качество обслуживания надо как-то количественно оценить. В настоящее время для такой оценки разработано много критериев, полезность каждого из них определяется поставленной задачей исследования. Вопросу выбора критериев для решения различных задач в этой главе отведено значительное место. Как правило, задача исследования систем массового обслуживания сводится к необходимости определения оптимального потока для обеспечения необходимого качества обслуживания.

Общей особенностью всех задач, связанных с массовым обслуживанием, является случайный характер исследуемых явлений. Количество требований на обслуживание и временные интервалы между их поступлениями, длительность обслуживания требований случайны. Время пребывания требований в некоторых видах систем массового обслуживания также случайно. При этом случайные колебания величин не носят характера небольших возмущений. Наоборот, это основная черта рассматриваемых явлений, что накладывает отпечаток на свойства получаемых зависимостей, с помощью которых производится оценка качества функционирования систем.

Теория массового обслуживания — прикладная отрасль математики. Нужно сказать, что первые задачи теории массового обслуживания были достаточно просты и допускали получение окончательных аналитических зависимостей. Однако с каждым годом круг этих задач расширяется. Это развитие идет как по линии увеличения сферы приложения теории массового обслуживания, так и по линии усложнения стоящих перед ней задач. Расширяется и круг ученых, работающих над ее развитием. Большой вклад сделали советские ученые А. Я. Хинчин, Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко, Н. П. Бусленко, Ю. В. Прохоров и многие другие. Подробный обзор литературы дан в ряде монографий [13, 22].

В настоящее время в теории массового обслуживания рассмотрено много математических схем, что усложнило их классификацию. Теперь уже назрела необходимость в построении общей математической теории, которая бы позволила анализировать работу различных систем универсальными методами. Один из возможных вариантов решения этой задачи предложен Н. П. Буленко в [6], где он рассматривает агрегатные системы весьма общей структуры. Для их решения предлагается универсальный метод — метод статистических испытаний (Монте-Карло). В этом направлении интересно также предложение И. Н. Коваленко [12] по использованию в рамках обобщенных схем некоторого класса задач теории марковских процессов для исследования их структуры, установления связи эффективности системы с эффективностью отдельных агрегатов и т. д.

Все, о чем мы говорили, связано с решением задачи: при известных параметрах потока требований в систему дать анализ ее функционирования. Но не менее важным представляется решение обратной задачи — по характеристикам выходящего потока и системы дать метод определения параметров входящего потока, который будет своевременно обслужен. Работы в этом направлении только начинаются.

1.1. Основные элементы системы массового обслуживания

Система массового обслуживания характеризуется структурой, которая определяется составом и функциональными связями. Она состоит из следующих элементов: входящего потока требований, приборов (каналов) обслуживания, очереди требований, ожидающих обслуживания, и выходящего потока требований. Общая схема системы массового обслуживания, состоящей из одной группы приборов, показана на рис. 1.1.1. Эта схема может быть усложнена, если система состоит из ряда последовательных приборов или из ряда последовательно и параллельно связанных приборов или имеет еще более сложную сетевую структуру. Возможны си-

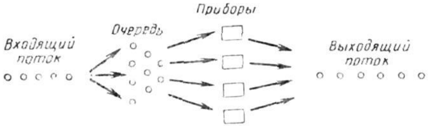

Рис. 1.1.1. Общая схема систем массового обслуживания.

стемы, в которых отсутствует такой элемент, как очередь (системы с отказами).

Входящий поток представляет собой совокупность требований, которые поступают в систему и нуждаются в обслуживании. Само требование можно рассматривать как запрос на удовлетворение какой-то потребности. Часто требование отождествляется с его носителем.

Примеров входящих потоков можно привести много. Это поток информации, поступающей на обработку в ЭЦВМ; поток клиентов, приходящих в парикмахерскую; больных, поступающих в больницу, поликлинику; приходящие в порт суда; налетающие на объект удара самолеты противника и т. д.

В приведенных примерах в качестве требований выступают соответственно клиенты, больные, суда, бомбардировщики. Состав системы определяется еще и количеством каналов (приборов, линий и т. д). По количеству каналов (приборов, линий) системы можно разделить на одноканальные и многоканальные. Примером одноканальной системы может служить парикмахерская с одним мастером, одиночный пункт ОТК на потоке, бензозаправочная колонка и т. д. Естественно, что в многоканальных системах число приборов должно быть равно двум и более. Подобные системы встречаются гораздо чаще. Как правило, число приборов в многоканальных системах массового обслуживания ограничено. Однако возможны случаи, когда их настолько много (число тракторов и другой сельскохозяйственной техники, участвующей в уборке урожая на полях области, края и требующей ремонта в процессе эксплуатации, автомобильный парк области, вооружение крупных соединений, которое требует ремонта в период боевых действий, и т. д.), что выгоднее рассматривать их как системы с бесконечным числом приборов, каналов.

В свою очередь, многоканальные системы массового обслуживания могут состоять из одинаковых, однотипных приборов или (чаще всего) разных, отличаясь производительностью при обслуживании. В самом деле, мастера по ремонту радиоаппаратуры в ателье, продавцы в магазинах, кассиры и т. д., несмотря на практически одинаковые условия работы, из-за различных причин (опыта, психического состояния, способностей и др.) работают с разной производительностью.

При решении многих перечисленных задач под термином «обслуживание» понимается удовлетворение потребностей. Так, в приведенных примерах систем под обслуживанием понимается стрижка, бритье и другие операции, которые производятся над клиентами в парикмахерской, прием больных в больнице, разгрузка судов в порту, обстрел бомбардировщиков системой ПВО объекта и т. д.

Несколько слов о качестве обслуживания. Под качеством работы систем массового обслуживания понимается не то, как хорошо выполнено само обслуживание (качество ремонта, погрузка судов и т. д.) — это оценивается другими критериями, — а как хорошо организовано обслуживание, насколько полно загружены обслуживающие приборы, не создается ли большая очередь или не велик ли уход из системы необслуженных требований.

При решении практических задач, связанных с системами массового обслуживания, очень важно оценить их полнодоступность, т. е. возможность каждого требования поступить на обслуживание любого прибора системы. Если это условие не выдерживается, то система называется неполнодоступной. Примером может служить система противовоздушной обороны объекта, перед которой стоит задача отражения налета самолетов противника в широкой полосе. Если полоса налета достаточно широка и полностью не перекрывается зонами действительного огня всех огневых средств обороны, то, видимо, они не могут обстрелять любой самолет в налете, а «обслуживают» только те, которые пролетают через зоны их действительного огня.

Выходящий поток — это поток требований, покидающих систему. Требования потока могут быть обслужены приборами системы и не обслужены.

Исследование структуры выходящего потока имеет большое значение, так как он может быть входящим потоком для другой группы приборов. Распределение требований в выходящем потоке во времени зависит от плотности входящего потока и характеристик работы приборов обслуживания системы. Например, плотность потока отремонтированных радиоприемников из ателье зависит от производительности мастеров по ремонту и загрузки ателье неисправной аппаратурой, поступающей от населения.

Основной задачей массового обслуживания является определение количественных показателей функционирования систем массового обслуживания и их зависимости от параметров входящего потока и структуры собственно системы (ее состава и функциональных связей). Решение этой задачи дает возможность найти в системе слабые звенья, определить их влияние на эффективность обслуживания и найти пути их улучшения или при заданных характеристиках потока требований и критерии качества обслуживания дать предложения о структуре системы, которая обеспечит выполнение поставленной перед ней задачи. Для решения этого могут быть привлечены различные методы оптимизации: линейное или нелинейное программирование, динамическое программирование, теория игр и др.

1.2. Входящий поток требований (заявок)

Процесс поступления в систему массового обслуживания потока требований является вероятностным и представляет собой поток однородных или неоднородных событий, которые наступают через случайные промежутки времени. Поток требований можно представить в виде графика одной из реализаций случайной функции, принимающей лишь целые неотрицательные значения. При этом каждая из реализаций является неслучайной функцией с конкретными временными интервалами между появлениями событий (рис. 1.2.1). Случайные временные интервалы между наступлениями событий в потоке могут подчиняться различным законам распределения. Однако в подавляющем большинстве работ по теории массового обслуживания, особенно прикладного характера, рассматривается пуассоновский (простейший) поток, в котором вероятность поступления в промежуток времени t ровно k требований задается формулой Пуассона

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \qquad (1.2.1)$$

где $\lambda > 0$ — плотность потока требований (параметр потока).

Это объясняется следующими обстоятельствами:

1) для других видов потоков не получены пока про-

стые формульные зависимости количественной оценки качества функционирования систем массового обслуживания;

2) к простейшему потоку системам массового обслуживания иногда приспособиться труднее. Поэтому при расчете средств обслуживания в этом случае мы ставим их работу в более тяжелые условия. Если средства обслуживания рассчитывать на этот тяжелый случай, то обслуживание системой других случайных потоков тре-

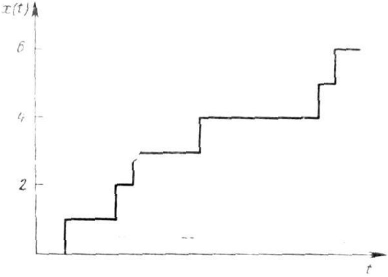

Рис. 1.2.1. График случайной функции, принимающей дискретные целые неотрицательные значения.

бований с одинаковой плотностью поступления требований будет надежнее. Такой вывод был получен И. Н. Коваленко [8];

3) простейший поток в теории массового обслуживания играет такую же роль, как нормальный закон распределения случайных величин в теории вероятностей. При сложении нескольких случайных потоков образуется суммарный поток, который по своим характеристикам приближается к простейшему.

Простейший поток обладает тремя основными свойствами: стационарностью, отсутствием последействия и ординарностью. Случайный поток называется *стационарным*, если вероятность поступления определенного количества требований в течение определенного отрезка времени зависит от его величины и не зависит от начала его отсчета на оси времени. Это значит, что если на временной оси отложить равные, но не пересекающиеся интервалы времени τ (рис. 1.2.2), то вероятность появления в этих интервалах определенного числа требований зависит для данного потока от величины τ и не зависит от положения этого интервала на временной оси (от моментов времени t_1, t_2, t_3, ...). Таким образом, два простейших потока отличаются друг от друга только свои-

Рис. 1.2.2. Стационарный поиск однородных событий.

ми параметрами. Поэтому для задания простейшего потока достаточно задать только его параметр λ.

Отсутствие последействия состоит в том, что вероятность поступления за отрезок времени τ определенного числа требований не зависит от того, сколько требований уже поступило в систему, т. е. не зависит от предыстории изучаемого явления. Отсутствие последействия предполагает взаимную независимость протекания процесса в неперекрывающиеся между собой промежутки времени.

Ординарность потока требований означает практическую невозможность появления двух и более требований в один и тот же момент времени.

Если обозначить вероятность появления более одного требования за отрезок времени Δt через $p_{>1}(\Delta t)$, то условие ординарности запишется так:

$$\frac{p_{>1}(\Delta t)}{\Delta t} \to 0 \text{ при } \Delta t \to 0. \qquad (1.2.2)$$

Таким образом, простейший поток — это стационарный, ординарный поток без последействия. Вывод уравнений простейшего потока широко представлен в имеющейся литературе по теории массового обслуживания [8, 27]. Важной характеристикой потока является его интенсивность, которая определяется как математическое ожидание числа требований, поступающих за единицу времени. Математическое ожидание числа требований, поступающих за промежуток времени $(0, t)$, равно

$$M_t[k] = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \lambda t. \qquad (1.2.3)$$

Следовательно, математическое ожидание числа требований в единицу времени или интенсивность, которая получается при $t=1$, равно

$$M_1[k] = \lambda.$$

Во многих задачах физические условия появления требований таковы, что предположения об их ординарности и отсутствии последействия вполне приемлемы. В то же время предположение стационарности внушает большие сомнения, а иногда заведомо ошибочно. Такие потоки будем называть нестационарными простейшими потоками. Для потоков этого типа вероятность появления k требований за время Δt зависит не только от величины Δt, но и от момента t_0, который является началом

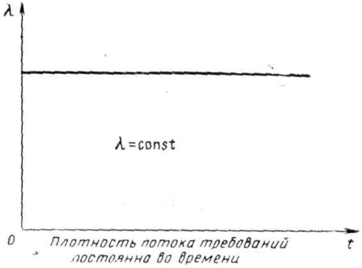

Рис. 1.2.3. Графическое представление постоянной во времени плотности потока требований.

этого промежутка. В этом случае вероятность появления k требований за время Δt обозначим с указанием начала промежутка t_0

$$P_k(t_0, t_0+\Delta t).$$

На рис. 1.2.3 дано графическое изображение потока, для которого плотность поступления требований постоянна. На рис. 1.2.4 дано графическое представление потока, у которого плотность поступления требований во времени переменная. Например, представим поток пассажиров в метро. Здесь пиковые значения интенсивности потока отражают увеличение числа пассажиров в часы «пик». Возможны и другие закономерности изменения плотности поступающих требований, связанных с явлениями сезонного характера и иными причинами.

Рис. 1.2.4. Графическое представление переменной во времени плотности поступления требований.

Рассмотрим характеристики входящего потока с переменной плотностью. Математическое ожидание числа требований, поступивших за период (t_0, t), равно

$$\mu(t_0, t) = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k(t_0, t) = \Lambda(t_0, t)(t - t_0), \qquad (1.2.4)$$

а средняя интенсивность потока равна

$$\frac{\mu(t_0, t)}{t - t_0} = \Lambda(t_0, t). \qquad (1.2.5)$$

Если мгновенный параметр потока в промежутке (t_0, t) постоянен, т. е. $\lambda(t) = \lambda$, то

$$\Lambda(t_0, t) = \lambda = \text{const}.$$

Определим мгновенную интенсивность $\mu(t_0)$ как предел

$$\mu(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\mu(t_0, t)}{t - t_0}.$$

Вероятность появления за время $\Delta t = t - t_0$ хотя бы одного требования определится из выражения

$$\pi_1(t_0, t) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t_0, t) = 1 - P_0(t_0, t), \qquad (1.2.6)$$

а вероятность хотя бы двух требований

$$\pi_2(t_0, t) = \sum_{k=2}^{\infty} P_k(t_0, t) = 1 - P_0(t_0, t) - P_1(t_0, t). \qquad (1.2.7)$$

Тогда требование ординарности в количественных терминах может быть выражено в виде

$$\lim \frac{\pi_2(t_0, t)}{\Delta t} = 0 \text{ при } \Delta t \to 0, \qquad (1.2.8)$$

а мгновенное значение параметра будет равно

$$\lim \frac{\pi_1(t_0, t)}{\Delta t} \to \lambda(t_0) \text{ при } \Delta t \to 0. \qquad (1.2.9)$$

Простейший нестационарный поток является частным случаем так называемых «финитных» потоков, для которых должно выполняться условие

$$\lambda(t) < +\infty.$$

Подробные материалы о финитных потоках можно найти в соответствующей литературе по теории массового обслуживания [27]. Практические задачи при нестационарном потоке требований можно решать двумя способами:

— для приближенных расчетов весь интервал времени функционирования системы массового обслуживания целесообразно разделить на отрезки, в пределах которых можно принять с заданной погрешностью параметр потока постоянным. Для каждого такого отрезка времени проводится анализ работы системы;

— использовать аналоговые или цифровые электронно-вычислительные машины для моделирования процесса функционирования системы массового обслуживания.

Несколько слов о последействии. Чтобы уяснить особенности и свойства потоков с ограниченным последействием, рассмотрим пример.

Пусть в систему массового обслуживания поступает поток требований. Графически его можно представить в виде точек (A_1, A_2, A_3, ...) на временно́й оси. Появление требований на временно́й оси (рис. 1.2.5) можно задать в виде последовательности промежутков между последовательными требованиями t_1, t_2, t_3, ... Тогда потоком с ограниченным последействием называется такой поток, когда для него последовательность случайных временных промежутков t_1, t_2, t_3, ... является последовательностью взаимно независимых величин.

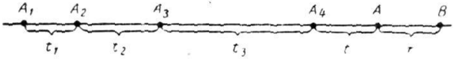

Рис. 1.2.5. Последовательность точек A_1, A_2, ..., B на числовой оси, соответствующих моментам поступления требований.

Требования ограниченности последействия являются более широкими, чем требования отсутствия последействия. Если в потоке нет последействия, то t_1, t_2, t_3, ...— последовательность взаимно независимых величин. Обратное утверждение невозможно.

Рассмотрим промежуток времени между моментами поступления требований A и B (см. рис. 1.2.5). Величину этого временно́го интервала обозначим через τ. Пусть последнее требование до этого интервала поступило в момент A_4 (следовательно, внутри интервала A_4A требований не поступало). Пусть предыдущие требования поступали в моменты A_1, A_2, A_3. Найдем вероятность поступления требований в интервале τ. По теореме умножения вероятностей она будет равна

$$P(t+\tau)=P(t)[1-P(\tau)],$$

где $P(t)$ — вероятность того, что в промежутке t требований не поступило. Отсюда

$$P(\tau)=1-\frac{P(t+\tau)}{P(t)}.$$

Из формулы видно, что появление требования после момента A зависит от того, когда поступило предыдущее требование (от величины интервала t), и не зависит от того, когда поступили все предыдущие требования.

Для иллюстрации этого свойства воспользуемся примером из [28], в котором рассматривается поступление отказов в работе какого-то прибора. Примем закон распределения длительности службы элементов в потоке отказов нормальным с математическим ожиданием $T=1000$ *час* и средним квадратическим отклонением $\sigma=300$ *час*, $\tau=100$ *час*. Требуется определить $P(t)$ в зависимости от величины t. В табл. 1.2.1 приведены результаты расчетов.

Таблица 1.2.1

t, *час*	100	200	500	1 000	2 000
$P(\tau)$	0,002	0,006	0,05	0,26	0,75

Из таблицы видно, что последействие здесь весьма существенное. Пусть закон распределения случайных временных промежутков показательный. В этом случае

$$p(t+\tau)=e^{-\lambda(t+\tau)},$$
$$p(t)=e^{-\lambda t},$$

а

$$p(\tau)=1-\frac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}}=1-e^{-\lambda\tau}. \qquad (1.2.10)$$

Таким образом, когда закон распределения случайных временных промежутков между появлениями требований является показательным, этот поток является простейшим, а $P(\tau)$ не зависит от величины t.

При оценке реальных стационарных потоков на взаимонезависимость временных интервалов между требованиями можно воспользоваться определением выборочного коэффициента корреляции

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(t_i-\bar{t})(t_j-\bar{t})}{\sum_{i=1}^{N}(t_i-\bar{t})^2}, \qquad (1.2.11)$$

где t_i, t_j — временные промежутки между последовательными поступлениями требований в систему массового обслуживания;

$\bar{t}$ — *математическое ожидание величины временного промежутка.*

При большой выборке $\bar{t}$ стремится по величине к $1/\lambda$. Если величина r близка к 0, то случайные величины t_i можно считать взаимно независимыми. На практике при использовании аппарата теории массового обслуживания важно проанализировать реальные потоки требований. В анализ входит определение распределения входящего потока и оценка параметров предполагаемого распределения. Для этого выбирается отрезок времени, в течение которого поток является практически стационарным. Время наблюдения делится на ряд временных интервалов, в пределах которых подсчитываются поступившие требования. Затем по статистическим данным строится гистограмма частот. Полученное статистическое распределение сравнивается с теоретическим с помощью критерия χ-квадрат.

Для примера рассмотрим проверку *гипотезы о том,* что входящий поток имеет пуассоновское распределение. В магазин приходят покупатели. Весь период времени наблюдения в 200 *мин* разделен на 100 двухминутных интервалов. В каждом интервале определяется чи-

Таблица 1.2.2

Число покупателей в интервале времени $t=2$ *мин* (a_i)	Число интервалов с одинаковым числом покупателей (n_i)	Значение вероятностей числа покупателей в интервале (пуассоновское распределение)	Математическое ожидание числа интервалов с заданным числом покупателей (n_T)
0	0	0,010	1
1	5	0,046	4,6
2	11	0,106	10,6
3	13	0,163	16,3
4	22	0,187	18,7
5	18	0,172	17,2
6	14	0,132	13,2
7	9	0,087	8,7
8	4	0,050	5,0
9	2	0,026	2,6
10	1	0,012	1,2
11	1	0,005	0,5
12	0	0,002	0,2
13	0	0,002	0,2
Сумма	*100*	*1,000*	*100,0*

сло покупателей, приходящих в магазин. Потом группируются интервалы, в которых было одинаковое число пришедших покупателей.

Во втором столбце табл. 1.2.2 показано число интервалов, в течение которых в магазин пришло одинаковое число покупателей.

Определяем математическое ожидание числа покупателей в течение принятого интервала $t=2$ *мин*

$$\bar{a}=\frac{\Sigma a_i n_i}{\Sigma n_i}=4{,}6 \text{ покупателя.}$$

По значению $a=4{,}6$ в третий столбец вносятся величины вероятностей числа покупателей при пуассоновском распределении, а в четвертый столбец — математическое ожидание числа интервалов, в течение которых пришло определенное число покупателей. Для получения вывода о том, что принятый процесс с достаточной вероятностью описывается полученным пуассоновским распределением, определяем величину χ^2:

$$\chi^2=\sum\frac{(n_i-n_{\text{т}})^2}{n_{\text{т}}}\approx 3{,}84.$$

Для оценки соответствия экспериментального распределения теоретическому можно воспользоваться имеющимися таблицами, в которых входными данными являются значения χ^2 и число степеней свободы w. Для определения соответствия теоретической функции распределения $F_{\text{т}}(\chi)$, зависящей от одного параметра, опытным данным, число степеней свободы рассчитывается по формуле

$$w=m-2,$$

где m — число интервалов.

В нашем случае

$$w=14-2=12.$$

Из табл. I приложения 6 определяем вероятность P того, что экспериментальное распределение является пуассоновским

$$P\approx 0{,}99.$$

Значение этой вероятности очень велико, что говорит о весьма хорошем соответствии экспериментального распределения распределению Пуассона.

1.3. Обслуживающие системы

Каждой из систем массового обслуживания свойственна определенная организация. По своему составу системы массового обслуживания можно разделить на системы с одним обслуживающим прибором (каналом) и многими приборами (каналами) обслуживания, соответственно называющимися одноканальными и многоканальными. В свою очередь, многоканальные системы могут состоять из однотипных и разнотипных (по производительности) приборов. Однако наиболее широкое распространение получила классификация по времени пребывания требований в системе до начала обслуживания. По этому критерию все системы можно разбить на три большие группы: системы с отказами; системы с неограниченным временем ожидания; системы смешанного типа.

В системах с отказами (их еще называют системы с потерями) всякое вновь поступившее требование на обслуживание, застав все приборы уже занятыми, покидает систему. Классическим примером систем с отказами может служить работа автоматической телефонной станции (АТС). Абонент, обратившийся на АТС, получает отказ, если необходимая линия связи уже занята. Другим примером может служить такая система противовоздушной обороны объекта, в которой время пребывания цели в зоне обстрела мало или соизмеримо со временем, необходимым для ее обстрела. В этом случае самолет противника, застав зенитные комплексы занятыми обстрелом других самолетов, проходит безнаказанно зону ПВО.

Их противоположностью являются **системы массового обслуживания с неограниченным временем ожидания требований в очереди** (системы с ожиданием). Особенность их работы заключается в том, что поступившее в систему требование, застав все обслуживающие приборы занятыми, вынуждено ожидать своей очереди до тех пор, пока какая-либо из обслуживающих единиц не освободится. Это наиболее многочисленная группа систем массового обслуживания. Разработанный для них аппарат достаточно хорошо описывает работу различных ремонтных органов, предприятий бытового обслуживания, буферной памяти электронных машин и многих других.

Системы смешанного типа занимают промежуточное положение. Поступившее в такую систему требование, застав все приборы занятыми, становится в очередь. Но в ней оно находится ограниченное время, после чего, не дождавшись обслуживания, покидает ее. Полученные для этих систем зависимости, описывающие их функционирование, могут быть использованы для получения подобных зависимостей для ранее рассмотренных систем массового обслуживания. Примером подобных систем являются торговые точки по продаже фруктов, овощей, которые могут храниться ограниченное время, их пункты переработки, ПВО объектов, обеспечиваемая зенитными средствами с большой зоной поражения, в пределах которой воздушные цели находятся ограниченное время, и многие другие.

Смешанными системами массового обслуживания называются и такие, в которых наложены ограничения на время пребывания требований в системе. Примером может служить обработка определенной информации на ЭЦВМ, которая периодически обновляется. Если в течение определенного промежутка времени информация не будет обработана, она утрачивает свою ценность и теряется.

К смешанным системам относят и такие, в которых ограничена длина очереди (например, мастерская по ремонту крупногабаритной техники, которая имеет ограниченную площадку для неисправных машин).

По порядку занятия свободных приборов (каналов) вновь поступившими требованиями описанные системы различаются по следующим признакам:

— приборы подключаются к обслуживанию в строгом порядке. Это может происходить тогда, когда система состоит из разнотипных приборов с различными преимуществами их использования;

— приборы начинают обслуживать вновь поступившие требования в порядке освобождения (например, технологические потоки по ремонту техники и др.);

— приборы занимаются в случайном порядке (например, зенитные комплексы при обстреле целей во время мощного воздушного налета).

В системах с ожиданием и ограниченным временем ожидания могут быть особенности в дисциплине обслуживания очереди требований. Они сводятся к следующим разновидностям:

— требования к обслуживанию принимаются в порядке очередности их поступления в систему (предприятия бытового обслуживания, магазины и др.);

— в первую очередь к обслуживанию принимаются те требования, которые имеют большую степень приоритета. Например, из всех самолетов, находящихся в воздухе и ожидающих посадки на аэродром, приоритет отдается аварийным. Также без очереди идут к врачу больные с острой болью и т. д.;

— требования к обслуживанию принимаются в случайном порядке (примером может служить система ПВО объекта при отражении воздушного налета противника).

Кроме перечисленных разновидностей систем массового обслуживания на практике могут встретиться и более сложные, представляющие определенные комбинации перечисленных особенностей.

Основные разновидности систем массового обслуживания, которые получили наиболее широкое распространение на практике, рассмотрены в книге и проиллюстрированы соответствующими примерами.

1.4. Время обслуживания

Время обслуживания является важнейшей характеристикой каждого аппарата (линии) обслуживания системы и определяет ее пропускную способность. Время обслуживания — как правило, случайная величина. Причиной этого служит нестабильность работы приборов обслуживания (особенно с участием человека или целых коллективов) и неидентичность поступающих в систему требований. Например, касса продовольственного магазина затрачивает на обслуживание каждого покупателя разное время, которое зависит от количества сделанных покупок, особенностей покупателей и т. д. Время, затрачиваемое машиной скорой помощи на выезд по вызову, является также величиной случайной. Оно зависит от расположения места несчастного случая от пункта скорой помощи и многих других причин. При отражении воздушного налета противника системой ПВО объекта временем «обслуживания» является время обстрела каждым зенитным комплексом воздушной цели. Естественно, что от стрельбы к стрельбе по каждой цели время обстрела каждым комплексом по различным причинам будет колебаться. Применительно к зенитному артиллерийскому комплексу разброс времени обстрела воздушных целей будет определяться изменениями дальности и параметра стрельбы, вида, скорости и маневра цели, разброса времени подготовки к стрельбе, времени перезаряжения, переноса огня и т. д. Поэтому величину времени обслуживания $t_{обс}$ следует считать случайной величиной, полной характеристикой которой является закон распределения

$$F(t) = P[t_{обс} < t], \tag{1.4.1}$$

где $P[t_{обс} < t]$ — вероятность того, что время обслуживания $t_{обс}$ не превосходит некоторой величины t.

Из физических соображений время обслуживания не может быть отрицательной величиной, т. е. при $t_{обс} \leqslant 0$ $F(t) = 0$. Закон распределения времени обслуживания определяется из опыта путем статистических методов анализа численных значений времени обслуживания реальных систем. Методы оценки распределения времени обслуживания реальных систем ничем не отличаются от оценок входящего потока. Законы распределения могут быть самого различного вида. Однако как в теоретических, так особенно в практических приложениях получил большое распространение показательный закон. При показательном законе распределения значительно упрощаются все результаты, тогда как разработка методов решения задач массового обслуживания с произвольным законом распределения времени обслуживания встречают большие трудности.

При показательном законе функция распределения имеет вид

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t}, \tag{1.4.2}$$

где $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{обс}}$ — положительная постоянная величина.

Величина $\bar{t}_{обс}$ равна математическому ожиданию времени обслуживания. Показательный закон распределения времени обслуживания предполагает, что значительная доля требований будет обслуживаться быстро, что не всегда соответствует практике. Поэтому А. К. Эрланг предложил плотность распределения времени обслуживания задавать формулой

$$\varphi_k(t) = \frac{(\mu k)^k}{\Gamma(k)} e^{-\mu k t} t^{k-1} \text{ при } t > 0,$$

$$\varphi_k(t) = 0 \text{ при } t < 0, \tag{1.4.3}$$

где $\Gamma(k)$ — гамма-функция.

Можно показать, что $\varphi_k(t)$ (рис. 1.4.1) представляет собой плотность распределения суммы k независимых случайных величин с показательным законом распределения. Системы массового обслуживания при показательном законе распределения обладают одним важным свойством, которое нужно иметь в виду при оценке эффективности. Пусть в систему массового обслуживания, состоящую из n разнотипных приборов, поступило требование, которое начинают обслуживать все приборы одновременно. Время обслуживания требова-

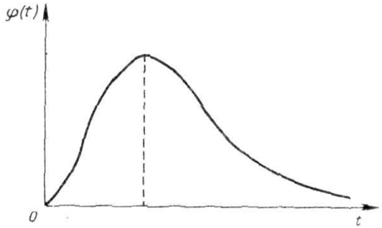

Рис. 1.4.1. Плотность распределения суммы k независимых случайных величин с показательным законом распределения.

ния каждым прибором подчинено показательному закону распределения с параметром μ. Обслуживание заканчивается, как только один из приборов выполнил свою задачу по обслуживанию. Для этого случая [8] закон обслуживания всеми приборами будет также показательным

$$F(t_{\text{обс}} < t) = 1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n)t} \tag{1.4.4}$$

с параметром

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i.$$

Если все приборы имеют одинаковую производительность, то $\mu = n\mu_i$. Значит, при одновременном обслуживании требования несколькими приборами среднее время обслуживания уменьшается в n раз по сравнению со временем обслуживания одного прибора. Следует отметить, что дисперсия при этом уменьшается в n^2 раз. Подобные ситуации возникают при обстреле несколькими зенитными комплексами одного самолета, при одновременном бомбометании корабля или одного объекта несколькими бомбардировщиками, обстреле танка несколькими противотанковыми средствами и т. д.

Во всех этих случаях обслуживание требования (обстрел, бомбометание) проводится до момента поражения объекта нападения. В этом проявляется широкое применение в военном деле массированных, комбинированных ударов по противнику.

Как отмечалось выше, во многих случаях допущение о показательном законе распределения времени обслуживания становится сомнительным. Однако для стационарных условий функционирования систем массового обслуживания с отказами Б. А. Севастьяновым доказана справедливость формулы Эрланга для любых законов времени обслуживания. Проверку этого предположения для некоторых других видов систем массового обслуживания, получивших наиболее широкое применение, авторы сделали с помощью метода статистических испытаний. К ним относятся системы:

— с отказами и ограниченным временем ожидания в очереди с потоками ординарных и групповых заявок;

— многофазовые, одноканальные с отказами;

— с последовательно расположенными приборами.

Для проверки предположения проводились расчеты по определению вероятностей состояния систем в стационарном режиме работы методом статистических испытаний в широком диапазоне изменения основных параметров систем:

$$1 \leqslant n \leqslant 20, \quad 0{,}1 \leqslant \alpha \leqslant 30,$$

$$0{,}3 \leqslant \beta \leqslant 10,$$

где

$$\alpha = \lambda \bar{t}_{\text{обс}};$$

$$\beta = \frac{\bar{t}_{\text{обс}}}{\bar{t}_{\text{ож}}};$$

$\bar{t}_{\text{ож}}$ — среднее время ожидания требования в системе;

λ — плотность поступающих в систему требований;

n — число каналов обслуживания.

Сравнение результатов расчетов для различных законов распределения времени обслуживания (показательного, равномерного, усеченного нормального, Релея) показало их хорошее совпадение. Примеры подобных расчетов приведены в соответствующих параграфах книги, описывающих функционирование указанных систем.

1.5. Выходящий поток

Выходящий поток может играть весьма важную роль, особенно когда он сам образует входящий поток для других приборов, расположенных последовательно с первыми. Это очень важно при рассмотрении многофазовых систем массового обслуживания. Они состоят из последовательно расположенных групп приборов (или одиночных приборов). Входящий поток требований должен обязательно пройти через все последовательно расположенные приборы. Естественно, что этот поток, проходя через каждую группу приборов, искажается. Искажение происходит при прохождении потока требований через последовательно расположенные приборы, для которых входящим потоком является выходящий поток необслуженных требований на предыдущем приборе (группе приборов). Например, если система состоит из n последовательно расположенных приборов, проверяющих качество продукции, движущейся по конвейеру, на котором она расположена в произвольном порядке, то для i-го автомата $(2 \leqslant i \leqslant n)$ входящим потоком будет поток непроверенной продукции $(i-1)$-м автоматом.

Во всех задачах с последовательно связанными системами обслуживания входящий в i-ю систему поток по своей структуре будет отличаться от потока, входящего в $(i+1)$-ю систему обслуживания. Поэтому, если входящий поток простейший, то выходящий поток из этой системы обслуживания не всегда будет простейшим, ему будет присуще последействие.

Возникает вопрос, как влияет наличие последействия в потоке требований на вероятность отказа. А. Я. Хинчин доказал следующую теорему: вероятность потери на s-м приборе при $s>1$ всегда больше, чем вероятность потерь на первом приборе, если только поступающие на эти приборы потоки имеют одинаковую интенсивность. Доказательство этой теоремы можно найти в [27].

Еще более общая теорема была доказана Т. А. Алзаровым и А. М. Чавкиным, согласно которой вероятность потери требования на $(s+1)$-м приборе всегда больше, чем вероятность потери на s-м приборе, если на эти приборы поступают потоки требований равной интенсивности.

Физический смысл приведенных теорем достаточно ясен: на каждый следующий прибор поступает поток требований все более и более невыгодного строения для обслуживания. Увеличение вероятности потери требований происходит за счет того, что на последующие приборы поступают все те требования, которые поступали слишком быстро — одно за другим. Таким образом, потоки, которым свойственно поступление за короткий срок сразу нескольких требований, становятся все более неравномерными.

1.6. Показатели эффективности обслуживающих систем

Под эффективностью обслуживающей системы понимают характеристику уровня выполнения этой системой тех функций, для которых она предназначена.

Выбор показателя эффективности зависит от той задачи, которая поставлена перед исследованием. Показатели эффективности зависят от трех групп факторов: характеристик качества и надежности системы обслуживания; экономических показателей, характеризующих работу этой системы (ее стоимости, трудовых затрат обслуживающего персонала, убытков, связанных с несвоевременным обслуживанием, и т. д.); особенностей ситуации, в которой эксплуатируется система (параметров потока требований, ограничений на длину очереди и др.). В зависимости от условий эксплуатации системы и принятого показателя эффективности выбирается и математическая модель процесса. При этом выбранные критерии должны быть чувствительными к изменению варьируемых параметров системы массового обслуживания.

Эффективность систем массового обслуживания можно характеризовать большим числом различных количественных показателей. Ниже приводятся наиболее часто применяемые показатели эффективности систем массового обслуживания и их обозначения. Однако предлагаемый комплекс показателей далеко не полный.

При решении практических задач может появиться необходимость в использовании других показателей или их комбинаций.

Все предлагаемые показатели будут характеризовать способность системы по обслуживанию заявок, отнюдь не характеризуя качество самого обслуживания.

К числу наиболее часто применяемых показателей эффективности функционирования систем массового обслуживания относятся следующие:

— вероятность потери требования в системе массового обслуживания. Это очень важная характеристика. Особенно часто ею пользуются при исследовании военных вопросов. Например, при оценке эффективности противовоздушной обороны объекта она характеризует вероятность прорыва воздушных целей к объекту. Применительно к системам массового обслуживания с потерями она равна вероятности занятости обслуживанием требований всех n приборов системы. Чаще всего эту вероятность обозначают p_n или $p_{\text{отк}}$;

— вероятность того, что обслуживанием требований в системе занято k приборов, равна — p_k. Это наиболее полная характеристика, частным случаем которой является p_n, p_0 — вероятность того, что все приборы свободны;

— среднее число занятых приборов (каналов, линий)

$$N_з = \sum_{k=1}^{n} k p_k \qquad (1.6.1)$$

характеризует степень загрузки обслуживающей системы;

— прямо противоположным последнему является показатель — среднее число свободных от обслуживания приборов

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\, p_k; \qquad (1.6.2)$$

— производным от этого показателя является коэффициент простоя приборов (каналов, линий) системы обслуживания

$$K_п = \frac{N_0}{n}; \qquad (1.6.3)$$

— аналогично можно определить коэффициент занятости оборудования, приборов системы

$$K_з = \frac{N_з}{n}; \qquad (1.6.4)$$

— для систем с ожиданием достаточно полной характеристикой времени ожидания является его закон распределения. Однако на практике чаще всего ограничиваются определением среднего времени ожидания требований в очереди до начала обслуживания при наличии в системе n приборов

$$T = M(t_{ож}) = -\int_0^\infty t dP_1(t_{ож} > t), \qquad (1.6.5)$$

где

$$P_1(t_{ож} > t) = \sum_{k=0}^{n} p_k P_k[t_{ож} > t];$$

$P_k[t_{ож} > t]$ — условная вероятность того, что время ожидания $t_{ож} > t$ при условии, что в момент поступления требования в систему в ней уже обслуживалось k требований;

— вероятность того, что время пребывания требования в очереди не продлится больше определенной величины

$$P_2[t_{ож} < t] = \sum_{k=n}^{\infty} p_k P_k[t_{ож} < t]; \qquad (1.6.6)$$

— другой важной характеристикой этих систем является средняя длина очереди

$$M_{ож} = \sum_{k=n}^{\infty} (k-n) p_k \text{ при } k \geqslant n, \qquad (1.6.7)$$

где p_k — вероятность того, что в системе находится k требований;

— с последней характеристикой тесно связано среднее число требований (заявок), находящихся в сфере обслуживания

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = M_{ож} + N_з; \qquad (1.6.8)$$

— вероятность того, что число требований (заявок) в очереди, ожидающих начала обслуживания, больше некоторого числа

$$P_{>m} = \sum_{k=m+1}^{\infty} p_k. \qquad (1.6.9)$$

Этот показатель особенно необходим при оценке возможностей размещения требований при ограниченности времени для ожидания. Кроме перечисленных критериев при оценке эффективности систем массового обслуживания могут быть использованы стоимостные показатели:

$q_{об}$ — стоимость обслуживания каждого требования в системе;

$q_{ож}$ — стоимость потерь, связанных с простаиванием требований в очереди в единицу времени;

$q_у$ — стоимость убытков, связанных с уходом из системы требований;

q_k — стоимость эксплуатации каждого прибора системы в единицу времени;

$q_{пk}$ — стоимость единицы времени простоя прибора системы.

При выборе оптимальных параметров систем массового обслуживания по экономическим показателям можно использовать функцию стоимости потерь в системе (для системы с ожиданием) [13]

$$G_n = (q_{ож} M_{ож} + q_{пk} N_0 + q_k N_з) T, \qquad (1.6.10)$$

где T — интервал времени.

То же для системы с отказами

$$G_n = (q_k N_з + q_у p_n \lambda) T. \qquad (1.6.11)$$

То же для смешанных систем массового обслуживания

$$G_n = (q_{пк} N_0 + q_{ож} M_{ож} + q_у p_n \lambda + q_k N_з) T. \qquad (1.6.12)$$

При решении некоторых задач целесообразно пользоваться критерием экономической эффективности системы массового обслуживания

$$E = p_{обс}\lambda c T - G_n, \qquad (1.6.13)$$

где c — экономический эффект, полученный при обслуживании каждого требования;

$p_{обс}$ — вероятность обслуживания требования (заявки).

При исследовании и определении оптимального варианта в качестве переменных чаще всего выбирают параметры λ, N, μ и др. При решении многих практических задач массового обслуживания в стационарных условиях полезно для контроля полученных результатов пользоваться простейшими функциональными связями критериев и параметров системы:

$$а)\ N_з + N_0 = n, \qquad (1.6.14)$$

где n — число приборов в системе;

$$б)\ M_{ож} + M_{со} = M, \qquad (1.6.15)$$

где $M_{со}$ — число требований, находящихся на обслуживании:

$$M_{со} = N_з;$$

M — число требований в системе:

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k; \qquad (1.6.16)$$

$$в)\ \bar{t}_{ож} + \bar{t}_{обс} = \bar{t}_{треб}, \qquad (1.6.17)$$

где $\bar{t}_{ож}$ — среднее время ожидания требования в очереди:

$$\bar{t}_{ож} = \int_0^{\infty} t_{ож} dF(t_{ож}); \qquad (1.6.18)$$

$\bar{t}_{обс}$ — среднее время обслуживания требования в системе;

$\bar{t}_{\text{преб}}$ — среднее время пребывания в системе:

$$\bar{t}_{\text{преб}} = \int_0^\infty t_{\text{преб}} dF(t_{\text{преб}});$$

$$\text{г)}\ \lambda \bar{t}_{\text{ож}} = M_{\text{ож}}; \tag{1.6.19}$$

$$\text{д)}\ \lambda \bar{t}_{\text{преб}} = M; \tag{1.6.20}$$

$$\text{е)}\ \lambda = \lambda_{\text{вых}}, \tag{1.6.21}$$

где $\lambda_{\text{вых}}$ — суммарная плотность выходящих потоков для систем с отказами:

$$\lambda_{\text{вых}} = \lambda_{\text{вых}_{\text{о}}} + \lambda_{\text{вых}_{\text{п}}}, \tag{1.6.22}$$

$\lambda_{\text{вых}_{\text{о}}}$ — плотность выходящего потока обслуженных требований;

$\lambda_{\text{вых}_{\text{п}}}$ — плотность выходящего потока потерянных требований.

2

СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОТЕРЯМИ

Эти системы распространены достаточно широко. Особенностью их функционирования является то, что всякое требование, поступившее в систему в некоторый момент времени, либо начинает сразу обслуживаться, либо теряется, если в момент его поступления все обслуживающие приборы заняты.

Наиболее характерным примером систем этого типа может служить автоматическая телефонная станция. Здесь заявкой, требованием, поступившим в систему, является обращение клиента на телефонную станцию. Если нужная линия связи уже занята разговором, абонент получает отказ. Автоматическая телефонная станция дает частые гудки, и требование на разговор теряется. Системы с отказами могут быть одноканальными и многоканальными. Например, телефонная станция с одной выходной линией связи является одноканальной системой массового обслуживания. Если таких линий несколько, то линия связи — многоканальная.

2.1. Формулы Эрланга

Простейшие задачи для систем массового обслуживания с потерями были впервые решены А. К. Эрлангом. Им же были выведены формулы оценки функционирования этих систем при условии поступления простейшего потока заявок и для показательного закона распределения времени обслуживания.

Для установившегося процесса обслуживания при этих условиях Эрланг получил следующие зависимости:

— вероятность того, что обслуживанием заняты k аппаратов (линий, приборов и т. д.)

$$p_k = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}, \qquad (2.1.1)$$

где λ — плотность потока заявок;

n — число аппаратов (линий, приборов и т. д.);

$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}}$ — параметр обслуживания;

$\bar{t}_{обс}$ — среднее время обслуживания требования (заявки) в системе.

Чаще всего в формулах используется параметр $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$, тогда предыдущую формулу запишем так:

$$p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}}. \qquad (2.1.2)$$

Частными случаями этой формулы будут:

— вероятность того, что все обслуживающие аппараты свободны

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}}; \qquad (2.1.3$$

— вероятность того, что все обслуживающие аппараты заняты. Это одновременно и вероятность отказа в обслуживании вновь поступившего требования в систему:

$$p_n = \frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}} = p_0 \frac{\alpha^n}{n!}. \qquad (2.1.4)$$

На практике необходимо часто определять:

— среднее число занятых обслуживанием приборов

$$N_з = \sum_{k=1}^{n} kp_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^k}{(k-1)!} p_0 \qquad (2.1.5)$$

и связанный с ним коэффициент занятости аппаратов. Одновременно это будет доля загруженных аппаратов за время обслуживания

$$K_з = \frac{N_з}{n}; \qquad (2.1.6)$$

— среднее число аппаратов, свободных от обслуживания:

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k (n-k)}{k!} p_0; \qquad (2.1.7)$$

— коэффициент простоя аппаратов

$$K_п = \frac{N_0}{n}. \qquad (2.1.8)$$

При решении практических задач целесообразно для проверки правильности полученных результатов пользоваться вполне очевидным равенством

$$N_0 + N_з = n. \qquad (2.1.9)$$

Зависимости (2.1.1)—(2.1.8), характеризующие эффективность функционирования систем массового обслуживания с отказами, были получены при условии, что время обслуживания распределено по показательному закону. Справедливость формул А. К. Эрланга для абсолютно непрерывного закона распределения показана Форте [22]. Но в [22] не приводится доказательства единственности и эргодичности стационарного распределения, а лишь даны краткие указания на возможность такого доказательства. Б. А. Севастьянов доказал эргодическую теорему для марковских процессов [23].

В результате этого получено стационарное распределение, из которого, в частности, выводятся хорошо известные формулы А. К. Эрланга и показана их неизменность при любом распределении времени обслуживания, но конечном и постоянном значении его математического ожидания. *Этот результат позволяет значи-*

тельно расширить область применения формул А. К. Эрланга для решения многих практических задач.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.

Необходимо оценить работу автоматизированной телефонной станции (АТС), которая имеет $n=5$ линий связи. К услугам станции обращаются абоненты с требованиями на ведение разговоров. Естественно, что моменты поступления требований на станцию являются случайными и независимыми друг от друга.

Задачу решим на примере простейшего потока требований.

Пусть средняя плотность потока $\lambda=2$ вызовам в единицу времени. Продолжительность каждого разговора является также величиной случайной. Можно принять, что продолжительность разговоров различных абонентов подчинена показательному закону распределения. Пусть среднее время, необходимое для ведения каждого разговора, равно $\bar{t}_{обс}=1$ ед. вр. Может возникнуть сомнение в правомочности принятия показательного закона распределения времени ведения разговора абонентов. Но, как уже говорилось выше, формулами Эрланга можно пользоваться при любых законах распределения времени разговоров абонентов.

В итоге в предлагаемом примере необходимо оценить функционирование автоматической телефонной станции (АТС).

Решение

Определяется параметр $\alpha=\lambda\bar{t}_{обс}=2\cdot 1=2$. Вероятность того, что все линии будут свободны при работе АТС может быть определена по формуле (2.1.3)

$$p_0=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{5}\frac{2^k}{k!}}=0,138.$$

Вероятность того, что абоненту будет отказано в обслуживании, рассчитывается по формуле (2.1.4)

$$p_n=0,138\frac{2^5}{5!}=0,037.$$

Среднее число занятых линий связи во время работы АТС. Для проведения необходимых расчетов составим табл. 2.1.1.

Таблица 2.1.1

Число линий связи	$\frac{\alpha^k}{k!}$	p_k	kp_k	$(n-k)\,p_k$
0	1	0,138	0	0,688
1	2	0,275	0,275	1,101
2	2	0,275	0,550	0,826
3	1,333	0,183	0,549	0,367
4	0,667	0,092	0,368	0,092
5	0,267	0,037	0,185	0
Сумма		1,000	1,927	3,074

217—1э

По результатам расчетов получено

$$N_з = \sum_{k=1}^{5} kp_k \approx 1,93 \text{ линий.}$$

Значит, коэффициент загрузки линий связи равен

$$K_з = \frac{N_з}{n} = \frac{1,93}{5} = 0,39.$$

Среднее число свободных линий связи равно

$$N_0 = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\, p_k = \sum_{k=1}^{4} (5-k)\, p_k = 3,05 \text{ линий.}$$

Коэффициент простоя линий равен

$$k_п = \frac{N_0}{n} = \frac{3,07}{5} = 0,61.$$

При решении этого примера целесообразно воспользоваться табл. 4 приложения 5. Входом в нее является k и α, а из таблицы можно получить значения вероятностей состояний p_k и их частных значений p_0 и p_n.

Пример 2

Необходимо спроектировать такую автоматическую телефонную станцию, чтобы она обладала пропускной способностью, при которой вероятность получения абонентом отказа в обслуживании не превосходила $p_n \leqslant 0,01$. АТС проектируется из условия, что поток вызовов характеризуется плотностью $\lambda = 0,5$ вызовов в минуту. Считается, что средняя продолжительность разговора равна $\bar{t}_{обс} = 2$ *мин*. Определить необходимое число линий связи.

Решение

Определение параметра

$$\alpha = \lambda \bar{t}_{обс} = 0,5 \cdot 2 = 1.$$

Для составления расчетной табл. 2.1.2 воспользуемся табл. 4 приложения 5.

Таблица 2.1.2

Число линий связи	p_n
1	0,5
2	0,2
3	0,062
4	0,015
5	0,003

Из данных таблицы следует, что АТС нужно проектировать на 5 линий связи. При этом будет обеспечена связь одного абонента с другим с вероятностью $p=0{,}997$.

2.2. Неустановившийся процесс в системах массового обслуживания с отказами

В § 2.1 рассмотрен математический аппарат, с помощью которого можно оценить функционирование в стационарном режиме простейших систем массового обслуживания с отказами при условии поступления в них пуассоновского потока требований. Однако на практике в реальных системах массового обслуживания поток требований может длиться ограниченное время, в течение которого система не успевает войти в стационарный режим. Примером этому может служить функционирование системы ПВО, которая отражает кратковременный налет воздушного противника. Можно привести много других примеров, иллюстрирующих это обстоятельство. Поэтому при решении практических задач важно определить, при каких условиях процесс обслуживания в системе можно считать установившимся. Если же по условиям его нельзя считать установившимся, то на какую ошибку вычислений можно рассчитывать при использовании формул, полученных для стационарного режима работы этой системы.

Очевидно, что вначале, сразу после включения системы в работу, протекающий в ней процесс еще не будет стационарным. В системе массового обслуживания (как и в любой динамической системе) возникает так называемый «переходный», нестационарный процесс. Однако, спустя некоторое время, этот переходный процесс постепенно затухает и система переходит на стационарный, установившийся режим, вероятностные характеристики которого уже не будут практически зависеть от времени.

Поэтому при оценке функционирования систем массового обслуживания на практике необходимо оценить влияние начального момента обслуживания на процесс затухания и определить те условия, при которых возможно с достаточной точностью сделать предположение о стационарности процесса работы исследуемых систем.

Приведем вывод зависимостей, которые учитывают начальный период работы системы массового обслуживания. Для простоты решения предлагается рассмотреть однолинейную систему с отказами.

Обозначим

$p_0(t)$ — вероятность того, что прибор в момент времени t свободен от обслуживания;

$p_1(t)$ — вероятность того, что прибор в момент времени t занят обслуживанием.

Пусть на прибор поступает в ограниченный отрезок времени простейший поток заявок плотностью λ. Время обслуживания одной заявки случайное и распределено по показательному закону с параметром μ.

За начало ($t=0$) функционирования системы принимается момент поступления первой заявки. Тогда, очевидно, в начальный момент времени t_0 должно выполняться условие $p_1(0)=1$.

Определяется вероятность того, что прибор занят обслуживанием в момент времени $t+\Delta t$. Она будет слагаться из вероятностей следующих двух несовместных событий с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем Δt:

— в момент времени t прибор был занят обслуживанием и за время Δt не освободился от обслуживания $p_1(t)(1-\mu\Delta t)$;

— в момент времени t прибор был свободен, а за время Δt поступила заявка на обслуживание $\lambda\Delta t p_0(t)$.

Тогда вероятность того, что прибор занят обслуживанием в момент времени $t+\Delta t$, может быть определена из выражения

$$p_1(t+\Delta t)=p_1(t)(1-\mu\Delta t)+$$
$$+\lambda\Delta t p_0(t).$$

Если перенести $p_1(t)$ в левую часть и разделить на Δt, то получим

$$\frac{p_1(t+\Delta t)-p_1(t)}{\Delta t}=-\mu p_1(t)+\lambda p_0(t)+0(\Delta t).$$

При $\Delta t\longrightarrow 0$ это равенство превращается в дифференциальное уравнение

$$p'_1(t)=-\mu p_1(t)+\lambda p_0(t). \tag{2.2.1}$$

Если учесть нормирующее условие

$$p_0(t)+p_1(t)=1,$$

то уравнение (2.2.1) сводится к линейному уравнению первого порядка

$$p'_1(t)=\lambda-(\lambda+\mu)p_1(t). \tag{2.2.2}$$

Для интегрирования уравнения (2.2.2) можно воспользоваться методом вариации произвольной постоянной. *Решение этого уравнения целесообразно искать* в виде

$$p_1(t)=u(t)\,\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}, \tag{2.2.3}$$

где $u(t)$ — искомая функция t.

Совместное решение уравнений (2.2.2) и (2.2.3) дает результат

$$u(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}+k. \tag{2.2.4}$$

Учитывая начальное условие $p_1(0)=1$ из (2.2.3) и (2.2.4) получим

$$k=\frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

Отсюда решение уравнения (2.2.2) определяется в таком виде:

$$p_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}. \tag{2.2.5}$$

В частном случае, при $t\longrightarrow\infty$, выражение (2.2.5) превращается в формулу Эрланга для одноканальной системы:

$$p_1^{э}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu},$$

где $p_1^{э}$ — вероятность того, что канал занят обслуживанием.

Математическое ожидание числа заявок, обслуженных за время t_n при конечном времени функционирования системы, может быть определено как произведение *среднего времени $T_{ср}$, в течение которого прибор был* занят обслуживанием, на среднюю плотность обслуживания одной заявки μ

$$m_t=T_{ср}\mu.$$

Значение среднего времени $T_{ср}$ можно определить по формуле

$$T_{ср} = \int_0^{t_n} p_1(t)\,dt.$$

Тогда

$$m_t = \mu \int_0^{t_n} p_1(t)\,dt.$$

Откуда, учитывая (2.2.5), получаем

$$m_t = \frac{\alpha}{\alpha + 1} T + \frac{1}{(1+\alpha)^2} [1 - e^{-(1+\alpha)T}], \qquad (2.2.6)$$

где $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$;

$T = \frac{t_n}{\bar{t}_{обс}}$ — время поступления потока заявок в систему, выраженное в единицах $\bar{t}_{обс}$;

t_n — длительность процесса.

В стационарном режиме математическое ожидание числа заявок, обслуженных за время t_n, равно

$$m_{t_{стац}} = \frac{\alpha}{\alpha + 1} T. \qquad (2.2.7)$$

Тогда абсолютная ошибка в определении среднего числа обслуженных заявок при предположении стационарности процесса будет равна

$$\Delta m_t = \frac{1}{(\alpha + 1)^2} [1 - e^{-(\alpha+1)T}]. \qquad (2.2.8)$$

Относительная ошибка определяется из зависимости

$$\Delta m_{t_{отн}} = \frac{\Delta m_t}{m_{t_{стац}}} = \frac{1}{T\alpha(\alpha + 1)} [1 - e^{-(\alpha+1)T}]. \qquad (2.2.9)$$

На рис. 2.2.1 представлена зависимость относительной ошибки $\Delta m_{t_{отн}}$ от продолжительности поступления потока заявок при различных значениях параметра α. Анализ уравнения (2.2.9) показывает (это наглядно видно на рис. 2.2.1), что с увеличением α процесс устанавливается значительно быстрее. Так, при $\alpha \leqslant 2$ уже при длительности процесса обслуживания более $2\bar{t}_{обс}$ ошибка не превосходит 10%. На рис. 2.2.2 показано, как уменьшается эта ошибка в зависимости от величины α для некоторых значений длительности процесса T.

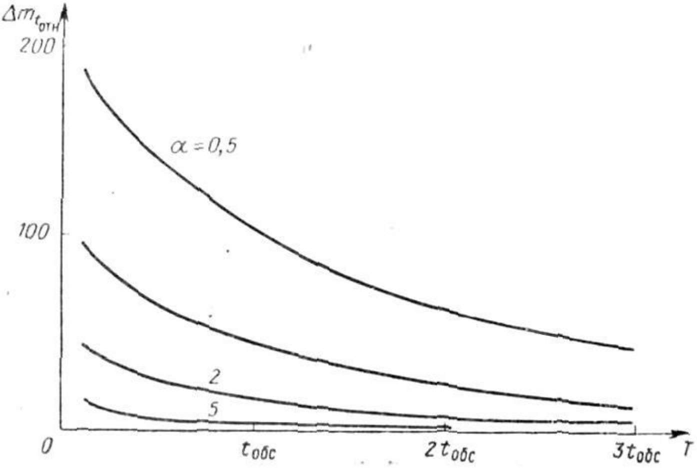

Рис. 2.2.1. Зависимость относительной ошибки $\Delta m_{t отн}$ от продолжительности процесса.

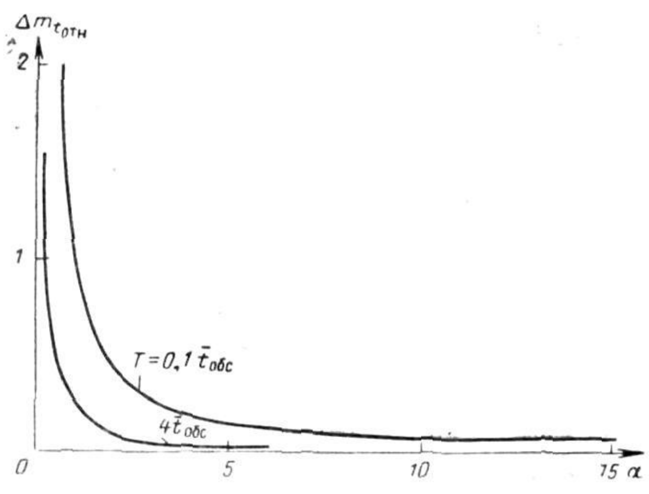

Рис. 2.2.2. Зависимость относительной ошибки $\Delta m_{t отн}$ от величины α.

Получение аналитических зависимостей для $n>1$ при неустановившемся процессе сопровождается громоздкими вычислениями, поэтому для значений $n>1$ ошибки $\Delta m_{t_{\text{отн}}}$ целесообразнее получать методом статистических испытаний.

Для облегчения расчетов по формуле (2.2.6) в приложении 5 дана табл. 15.

Как уже отмечалось, для систем с отказами для установившегося состояния результаты расчетов по формулам Эрланга не зависят от закона распределения времени обслуживания (при постоянном значении его математического ожидания). Это несправедливо для неустановившегося процесса, и разница в получаемых результатах может быть тем больше, чем меньше время продолжительности рассматриваемого процесса. Рассмотрим эти явления на примере, когда время обслуживания постоянно.

Отношение величин математических ожиданий числа заявок, принятых на обслуживание при неустановившемся процессе, к числу заявок при установившемся процессе, запишется в виде

$$Q = \frac{m_{t_{\text{обс}}}^{\text{н уст}}}{m_{t_{\text{обс}}}^{\text{уст}}}. \qquad (2.2.10)$$

Величина m_t при $t_{\text{обс}} = \text{const}$ может быть определена из зависимостей, вывод которых приводится в приложении 1:

$$m_t = 1 \text{ при } T \leqslant 1 \qquad (2.2.11)$$

и

$$m_t = 1 + p - \sum_{k=0}^{p-1} e^{-\alpha(T-1-k)} \sum_{j=0}^{k} \frac{\alpha^j}{j!}(T-1-k)^j \qquad (2.2.12)$$

при $T>1$, где $p = 1 + [T]$; в квадратных скобках обозначена целая часть числа

$$T = \frac{T_n}{t_{\text{обс}}}.$$

На рис 2.2.3 даны некоторые результаты расчетов. Как видно, процесс затухания при постоянном времени обслуживания носит колебательный характер. Обобщая *результаты, полученные для случаев, когда время* обслуживания случайно и постоянно, можно сделать следующее заключение: при определении пропускных способностей систем массового обслуживания с отказами для процессов продолжительностью более $(2\div3)\ \bar{t}_{обс}$ можно при расчетах с достаточной степенью точности

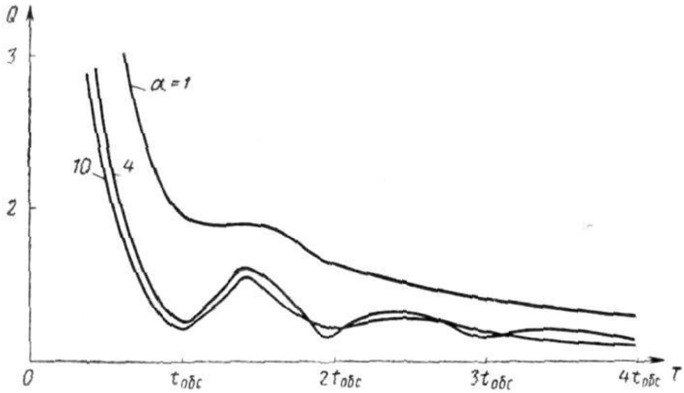

Рис. 2.2.3. Сходимость процесса при постоянном времени обслуживания.

использовать зависимости, полученные для стационарного процесса.

Если точность получаемых результатов необходимо повысить или продолжительность процесса мала, то следует при расчетах использовать формулы (2.2.6), (2.2.11) и (2.2.12), выведенные для процессов конечной продолжительности.

Для удобства использования этих формул рассчитаны и составлены таблицы, которые помещены в приложении 5 (табл. 16).

Пример 1

Диспетчерский пункт скорой помощи района имеет связь со всеми поликлиниками, больницами и другими пунктами, где имеются дежурные бригады врачей скорой помощи. При поступлении вызова скорой помощи диспетчерский пункт связывается с ближайшим к месту вызова пунктом. Если в момент вызова имеется дежурная машина, то врач выезжает по вызову. Когда в момент вызова нет дежурной машины (не вернулась еще с обслуживания одного из предшествующих вызовов), диспетчерский пункт обращается в следующее место дежурства скорой помощи, а для данного пункта вызов считается потерянным.

При некоторой поликлинике дежурит одна машина. Опыт показал, что в среднем плотность поступления вызовов скорой помощи в данную поликлинику равна $\lambda=0{,}5$ *выз/час*. Время обслуживания одного вызова является случайным. Оно зависит от расстояния до места вызова, от характера несчастного случая и т. д. Среднее время обслуживания вызова равно одному часу. Определить среднее число обслуженных вызовов в смену через равные промежутки времени в один час, если начало смены в 12 *час.* ночи и за время приема и сдачи дежурства уже поступил первый вызов.

Решение

Определим параметр α:

$$\alpha=\lambda\bar{t}_{\text{обс}}=0{,}5\cdot 1=0{,}5.$$

По величине $\alpha=0{,}5$ в табл. 15 приложения 5 определим математическое ожидание числа вызовов, обслуженных в течение различных промежутков времени. Результаты сведены в табл. 2.2.1.

Таблица 2.2.1

Продолжительность дежурства, *час*	1	2	3	4	5
Математическое ожидание	0,68	1,09	1,44	1,78	2,11

Таким образом, среднее число обслуженных вызовов за каждый интервал времени продолжительностью в один час равно (табл. 2.2.2)

Таблица 2.2.2

Интервал	с 0 до 1 *час*	с 1 до 2 *час*	с 2 до 3 *час*	с 3 до 4 *час*	с 4 до 5 *час*
Математическое ожидание	0,68	0,41	0,35	0,34	0,33

Сравним эти результаты с результатами, которые получаются, если расчеты производить по зависимостям, полученным в предположении стационарности процесса. В этом случае число обслуженных вызовов за любой равный промежуток времени будет одинаковое и определится по формуле

$$m_{\text{стац}}=\frac{\alpha}{1+\alpha}T,$$

где $\alpha=0{,}5$; $T=1$.

Результаты расчетов приведены в табл. 2.2.3.

Из таблицы видно, что при определении работы скорой помощи поликлиники в начале смены необходимо пользоваться зависимостями, полученными для нестационарного процесса. Если использовать формулы, полученные для стационарного процесса, то ошибка мо-

Таблица 2.2.3

Математическое ожидание	Интервалы времени				
	0—1	1—2	2—3	3—4	4—5
При нестационарном процессе	0,68	0,41	0,35	0,34	0,33
При стационарном процессе	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33
Абсолютная ошибка	0,35	0,08	0,02	0,01	0
Относительная ошибка, %	106	24	6	3	0

жет быть более чем в два раза. В дальнейшем видно, что процесс устанавливается довольно быстро.

Определим среднюю вероятность того, что каждая заявка будет обслужена. Всего за пять часов можно обслужить в среднем 2,11 вызова. Поступит за это время, с учетом того что первый вызов уже поступил во время смены дежурства, в среднем 3,5 вызова. Отсюда обслужено будет около 60% всех поступивших вызовов.

Пример 2

Готовые изделия поступают на конвейер, по которому двигаются в цех упаковки. На пути их движения находится пункт ОТК, который может проверять одновременно до пяти изделий. Время на проверку одного изделия постоянное и равно одному часу. Изделия поступают на конвейер со скоростью в среднем около 5 *изд/час*. В начале смены контрольный пункт свободен.

Определить математическое ожидание числа проверенных изделий за интервал времени, равный двум часам с момента поступления первого изделия на конвейер.

Решение

Первое изделие, которое сразу поступило на проверку, будет проверено через час. Вероятность того, что в момент окончания *проверки первого изделия поступит другое, очень мала*. В то же время, если тот прибор, с помощью которого контролировалось первое изделие, начнет через некоторое время после освобождения проверку следующего, то он ее не закончит к концу второго часа. Следовательно, тот прибор, который принял на контроль первое изделие, сможет обслужить к исходу второго часа только одно изделие. Остальные приборы начнут контроль поступающих изделий позже, поэтому они смогут проверить полностью за первые два часа не более чем по одному изделию. Рассмотрим ход решения задачи. Вначале определим математическое ожидание числа изделий, принятых на контроль за первый час после поступления первого изделия. Для этого найдем, сколько в среднем примут изделий на контроль за первый час остальные 4 прибора (т. е. кроме того, который принял на контроль первое изделие). Вероятность того, что k приборов приступят за первый час к контролю, равна вероятности того, что за это время (т. е. за один час) поступит не менее k

изделий. Вероятность поступления, равная k изделиям, может быть определена по формуле

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

В нашем примере $\lambda=5$ *изд/час* и $t=1$ *час*.

Вероятность того, что будут заняты все остальные 4 прибора, равна вероятности того, что за первый час поступит не менее 4 изделий. Отсюда среднее число изделий, принятых на контроль за один час всеми 5 приборами, равно

$$M = 1 + \sum_{k=1}^{3} k p_k + 4\left(1 - \sum_{k=0}^{3} p_k\right).$$

Для определения величины М составим табл. 2.2.4.

Таблица 2.2.4

Число поступивших изделий (k)	Вероятность поступления (k) изделий (p_k)	$k\,p_k$
0	0,0067	0
1	0,0337	0,0337
2	0,0842	0,1684
3	0,1404	0,4212
Сумма	0,2650	0,6233

Тогда математическое ожидание числа изделий, принятых на проверку за первый час или, что то же, проверенных за два часа с момента поступления первого изделия, равно

$$M = 1 + 0{,}62 + 2{,}94 = 4{,}56 \text{ изд.}$$

Всего за первый час в среднем должно поступить на контроль 5 изделий. Следовательно, 90,1% всех изготовленных изделий за первый час будет проверена. Максимальные возможности контрольного пункта 5 *изд/час*. Если бы организация работы была такая, что изделия поступали партиями 5 изделий через 1 *час*, то они все были бы проверены. Но из-за случайного характера поступления изделий часть времени приборы контрольного пункта будут простаивать и не все изделия подвергнутся контролю. Решим этот же пример в предположении, что процесс контроля установившийся. В этом случае математическое ожидание числа заявок, принятых на обслуживание за первый час, равно

$$M_{\text{стац}} = (1 - P_{\text{отк}})\bar{\lambda} T,$$

где $P_{\text{отк}}$ — вероятность того, что изделие не будет принято на контроль;

$$T = 1 \text{ час}; \ \lambda = 5 \text{ изд/час}.$$

Определяем параметр α:

$$\alpha = \lambda t_{\text{обс}} = 5.$$

По значению $\alpha=5$ и $n=5$ определим по табл. 4 приложения 5 величину $P_{\text{отк}}=0{,}285$.

Отсюда

$$M_{\text{стац}}=0{,}715\cdot 5\cdot 1=3{,}59 \text{ изд.}$$

Таким образом, если решать эту задачу в предположении стационарности процесса контроля, то мы получим результаты ниже на 27%.

Рассмотренные примеры показывают, что при решении различных прикладных задач во многих случаях требуется учитывать нестационарность процесса. Чтобы оценить погрешность от допущения стационарности процесса, при проведении расчетов можно использовать вывод о том, что при заданных параметрах длительности процесса T и производительности системы α максимальная ошибка будет для одноканальной системы. Поэтому ошибка одноканальной системы может являться как бы верхним пределом. Прежде чем проводить расчеты, необходимо оценить ошибку от допущения стационарности процесса, а затем решать, какими зависимостями пользоваться.

2.3. Системы с поступлением групповых заявок

В предыдущих параграфах рассматривалось использование математического аппарата теории массового обслуживания, разработанного применительно к ординарным потокам требований. Однако в практике возможны случаи, когда требования на обслуживание поступают в систему группами — парами, тройками либо группами со случайным числом заявок в каждой. Придя в систему массового обслуживания, каждое из требований группы либо обслуживается, либо получает отказ, в зависимости от занятости приборов обслуживания. Примером этому может служить прилет в систему ПВО самолетов противника парами, звеньями и т. д. [19, 26]. В работе ПВО прикрываемого объекта каждый из самолетов противника будет обстреливаться зенитными комплексами.

Для решения подобных задач разработан математический аппарат, который получен при следующих допущениях:

— поток групп заявок пуассоновский,

— время обслуживания каждой заявки в группе подчинено показательному закону,

— выбор заявки в группе производится случайно, по закону равной вероятности.

Как и для случая ординарного пуассоновского потока, справедлив вывод Б. А. Севастьянова, что зависимости, получаемые для стационарного решения, не зависят от распределения времени обслуживания, если входящий поток групп заявок является пуассоновским.

Число заявок в группе постоянное. Для этого случая получены следующие рекуррентные зависимости, вывод которых можно найти в [26]:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha p_0 = p_1, \\ (1+\alpha) p_1 = 2p_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ (k+\alpha) p_k = (k+1) p_{k+1} \text{ при } k < m, \\ (k+\alpha) p_k = (k+1) p_{k+1} + \alpha p_{k-m} \text{ при } k \geqslant m, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (n+\alpha) p_n = \alpha p_{n-m}, \end{array}\right\} \qquad (2.3.1)$$

где m — число заявок в группе;

$\alpha = \lambda \bar{t}_{\text{обс}}$;

λ — плотность групп заявок;

$\bar{t}_{\text{обс}}$ — среднее время обслуживания каждой заявки;

n — число приборов обслуживания системы.

При решении системы (2.3.1) получены следующие зависимости при $m<n$:

$$p_k = \gamma_k p_0, \qquad (2.3.2)$$

где

$$\gamma_k = \frac{\prod_{r=1}^{k} [\alpha + (r-1)]}{k!} \quad \text{при } k \leqslant m$$

и

$$\gamma_k = \frac{\prod_{r=1}^{k} [\alpha + (r-1)]}{k!} - \alpha \sum_{j=0}^{k-m-1} \times$$

$$\times \frac{\prod_{i=1}^{k-m-j-1} [(\alpha + m + j) + i]}{\prod_{s=1}^{k-m-j} (m + j + s)} \gamma_j \text{ при } k > m,$$

где $\prod_{1}^{0} (x) = 1$.

Значение величины p_0 определяется из нормирующего условия

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1. \tag{2.3.3}$$

Если же группы состоят из числа заявок, которые больше, чем число приборов, т. е. $m \geqslant n$, то в этом случае, очевидно, при поступлении групповой заявки система будет переходить сразу из любого состояния в состояние, когда все приборы заняты. Решение такой системы приведено в приложении 4. Вероятности состояний системы для этого случая определятся из уравнений

$$p_k = \frac{\prod_{m=0}^{k-1} (\alpha + m)}{k!} p_0, \; k = 1,\ 2, \ldots n, \tag{2.3.4}$$

и

$$p_0 = \left[\frac{\prod_{m=1}^{n} (\alpha + m)}{n!} \right]^{-1}. \tag{2.3.5}$$

Для удобства использования полученных зависимостей составлены таблицы (см. приложение 5, табл. 7).

— Вероятность отказа в обслуживании

$$p_{\text{отк}} = 1 - \frac{\sum_{k=0}^{n} kp_k}{\alpha m}.$$

— Среднее число занятых приборов

$$N_з = \sum_{k=1}^{n} kp_k.$$

— Коэффициент занятости аппаратов

$$K_з = \frac{N_з}{n}.$$

— Среднее число свободных от обслуживания аппаратов

$$N_0 = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\, p_k.$$

— Коэффициент простоя аппаратов

$$K_{\text{п}} = \frac{N_0}{n}.$$

Число заявок в группе случайное. Дальнейшим обобщением практических задач, связанных с поступлением в систему массового обслуживания потока групповых требований, является случай, когда число требований в группе случайное. Мы даем математический аппарат, который описывает функционирование систем массового обслуживания с потерями при условии поступления в него пуассоновского потока групп требований случайного состава. Это позволит расширить круг задач, решаемых методом теории массового обслуживания. Например, при налете авиации на объект число самолетов в группе может меняться в зависимости от различных условий. Как правило, к зоне обороны подходят неполные звенья, так как часть самолетов может быть поражена зенитным огнем, часть звеньев под воздействием огня расстроит свои боевые порядки. Или другой пример. Каждый покупатель может потребовать в билетной кассе различное случайное количество билетов (например, один покупатель требует два билета, другой четыре, третий один и т. д.).

Далее, при бомбардировке вещества быстрыми частицами может выбиваться сразу несколько осколков, причем при каждом ударе частиц образуется различное количество осколков. Вот почему предлагаемая задача представляет практический интерес.

Рассмотрим постановку задачи. В n-канальную систему массового обслуживания с отказами поступает пуассоновский поток групповых требований случайного состава. Это означает, что если в момент t поступило групповое требование, то с вероятностью a_1 может поступить лишь одно требование в группе, с вероятностью a_2 — два требования и вообще с вероятностью a_r — r требований. При этом должны выполняться условия

$$a_r \geqslant 0, \ r = 1, 2, 3 \ldots,$$

и

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r = 1.$$

Как показано в [9], система дифференциальных уравнений, описывающая все состояния, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} & p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ & p'_k(t) = -(\lambda + k\mu) p_k(t) + \\ & + \lambda \sum_{i=1}^{k} a_i p_{k-i}(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t) \quad \text{при } k < n, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & p'_n(t) = -n\mu p_n(t) + \lambda \sum_{s=1}^{n} p_{n-s} \sum_{i=s}^{\infty} a_i, \end{aligned}\right\} \quad (2.3.6)$$

где $p_0(t)$, $p_k(t)$ и $p_n(t)$ — вероятности состояний системы, когда в ней занято обслуживанием соответственно k и n приборов;

λ — плотность потока групп требований;

μ — параметр, характеризующий систему обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{обс}};$$

$\bar{t}_{обс}$ — среднее время обслуживания прибором одиночного требования;

n — число приборов в системе.

Полагая, что существует стационарное решение при $t \longrightarrow \infty$, получим систему алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} & p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0; \\ & \ldots\ldots \\ & p_{k+1} = \frac{\lambda + k\mu}{(k+1)\mu} p_k - \frac{\lambda}{(k+1)\mu} \sum_{i=1}^{k} a_i p_{k-i}, \quad k < n; \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & p_n = \frac{\lambda}{n\mu} \sum_{s=1}^{n} p_{n-s} \sum_{i=s}^{\infty} a_i. \end{aligned}\right\} \quad (2.3.7)$$

Значение p_0 определится из нормирующего условия

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1.$$

В установившемся процессе в каждый момент времени система содержит в среднем $\sum_{k=1}^{n} kp_k$ требований. Следовательно, за каждую единицу времени обслуживается в среднем $\mu \sum_{k=1}^{n} kp_k$ требований. Поступает же в систему за единицу времени в среднем $\lambda \sum_{k=1}^{\infty} ka_k$ требований.

Отсюда вероятность того, что требование получит отказ в обслуживании, будет равна

$$P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{n} kp_k}{\alpha \sum_{k=1}^{\infty} ka_k}, \qquad (2.3.8)$$

где $\alpha = \lambda \bar{t}_{\text{обс}}$;

λ — плотность поступления групп требований случайного состава.

Остальные показатели обслуживания могут быть определены так же, как и в случае, когда число требований в группе постоянное. Рассмотрим следующие примеры.

Пример 1

Оценить эффективность некоторой противокатерной обороны соединения кораблей, состоящей из трех единиц ($n=3$), когда катера противника производят атаку с плотностью $\lambda=1$ *группа/мин*. Группа может состоять с равной вероятностью из одного, двух или трех катеров противника. Время, необходимое противокатерному средству на обстрел одного катера, равно 1 *мин*.

Решение

Определим параметр α:

$$\alpha = \lambda\, \bar{t}_{\text{обс}} = 1.$$

Используя систему алгебраических уравнений (2.3.7), найдем $p_k\,(0 \leqslant k \leqslant 3)$:

$$p_1 = p_0.$$

$$p_2 = \frac{1+1}{2} p_1 - \frac{1}{2} \frac{1}{3} p_0,$$

$$p_3 = \frac{1}{3} p_2 + \frac{1}{3} \frac{2}{3} p_1 + \frac{1}{3} \frac{1}{3} p_0.$$

Получим следующие значения вероятностей состояний системы противокатерной обороны:

$$p_0 = 0{,}29; \ p_1 = 0{,}29; \ p_2 = 0{,}24; \ p_3 = 0{,}18.$$

По формуле (2.3.8) определим вероятность того, что катер противника будет обстрелян:

$$P_{\text{обс}} = \frac{0{,}29 + 2 \cdot 0{,}24 + 3 \cdot 0{,}18}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1} \approx 0{,}66.$$

Таким образом, две трети катеров противника будет обстреляно средствами противокатерной обороны.

Определим среднее число средств противокатерной обороны, занятых обстрелом:

$$N_з = \sum_{k=1}^{3} k p_k = 0{,}29 + 2 \cdot 0{,}24 + 3 \cdot 0{,}18 = 1{,}31 \text{ средств.}$$

Коэффициент загрузки каждого средства равен

$$Q = \frac{1{,}31}{3} = 0{,}44.$$

Следовательно, около 44% всего времени боя средства противокатерной обороны будут заняты обстрелом катеров противника. Остальное время они будут ожидать появления очередных целей.

Пример 2

Назначение информационной логической машины — обработка сообщений, которые поступают группами. Поток групп сообщений можно приближенно считать простейшим. Поступающие сообщения, застав все каналы обработки информации машины занятыми, теряются. Время на обработку одного сообщения является случайным. Пусть оно подчинено показательному закону с математическим ожиданием, равным $\bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}2$ *сек*. Число сообщений в группе постоянное и равно $m = 3$ сообщениям. Необходимо определить, сколько каналов обработки должна иметь машина, чтобы при плотности потока $\lambda = 5$ *сообщ/сек* вероятность потери информации была не более 5%. Какой коффициент полезного действия имеет эта машина?

Решение

Определим параметр α:

$$\alpha = \lambda \bar{t}_{\text{обс}} = 1.$$

По значениям $\alpha=1$ и числу сообщений в группе $m=3$ в табл. 8 приложения 5 находим вероятности потери информации в машине при различном числе каналов обработки.

Таблица 2.3.1

n	8	9	10
$P_{\text{отк}}$, %	7,2	4,6	2,7

Судя по данным, приведенным в табл. 2.3.1, машина должна иметь не менее 9 каналов. В этом случае вероятность потери информации не превысит 5%.

Для определения математического ожидания числа каналов, занятых обработкой информации, составим вспомогательную таблицу. При ее составлении воспользуемся табл. 8 приложения 5, где входными данными являются величины α, n и m. При $\alpha=1$, $n=9$ каналам, $m=3$ сообщениям в группе получаем данные, приведенные в табл. 2.3.2.

Таблица 2.3.2

Число каналов обработки, n	Вероятности состояний, p_k	kp_k
1	0,162	0,162
2	0,162	0,324
3	0,162	0,486
4	0,122	0,488
5	0,089	0,445
6	0,062	0,372
7	0,040	0,280
8	0,023	0,184
9	0,016	0,144
Сумма		2,885

Таким образом, при заданной плотности поступления информации и числе каналов обслуживания $n=9$ в среднем около трех каналов будут загружены все время обработкой информации, откуда коэффициент загрузки равен

$$K_з=\frac{N_з}{n}=\frac{2,88}{9}=0,32.$$

Среднее число свободных каналов обработки информации

$$N_0=9-2,88=6,12.$$

Коэффициент простоя каналов обработки равен

$$K_п=\frac{N_0}{n}=\frac{6,12}{9}=0,68.$$

Как видно из примера, коэффициент простоя каналов большой, однако уменьшить число каналов не представляется возможным, так как тогда не будет выполняться условие: вероятность потери требования не должна превышать 5%.

2.4. Системы с последовательно расположенными приборами

Последовательно расположенные группы однотипных приборов. На практике довольно часто возникают ситуации, в которых необходимо определить вероят-

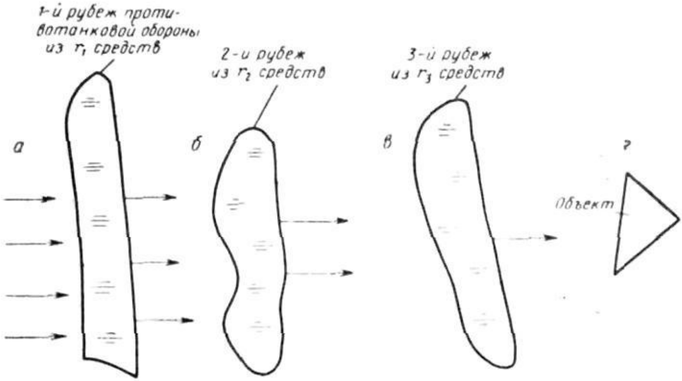

Рис. 2.4.1. Схема эшелонированной противотанковой обороны объекта:

а — поток танков; *б* — поток танков, прорвавшихся через 1-й рубеж; *в* — поток танков, прорвавшихся через 1-й и 2-й рубежи; *г* — поток танков, прорвавшихся через оборону.

ность обслуживания заявки (требования) при прохождении ею ряда последовательно расположенных групп приборов. В таких системах заявки, которые не были сразу обслужены приборами первой группы, поступают на приборы второй группы. Заявки, которые не были обслужены и приборами второй группы, поступают на приборы третьей группы и т. д. Пусть имеется i таких групп, а приборов в каждой группе r_j, где $1 \leqslant j \leqslant i$. Для ряда прикладных задач интересно определить потери заявок на приборах каждой группы или после прохождения всей системы. Эта задача для упорядоченной последовательности одиночных приборов была рассмотрена Пальмом. Примером сформулированной задачи может служить эшелонированная противотанковая оборона какого-нибудь объекта (рис. 2.4.1). Танки противника, цель которых — прорваться к объекту, должны прежде всего преодолеть последовательно все эшелоны противотанковой обороны. В каждом эшелоне может находиться различное количество средств. Необходимо провести оценку эффективности такой системы противотанковой обороны, состоящей из однотипных средств. Подобные задачи решены при следующих предположениях:

— входящий в систему поток требований является пуассоновским с параметром λ,

— время обслуживания заявок, поступающих в систему, является случайной величиной с показательным законом распределения, имеющим параметр $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{обс}}$,

— все приборы системы однотипны, т. е. имеют одинаковый закон распределения времени обслуживания.

Система функционирует следующим образом. Поступившие в нее заявки обслуживаются приборами первого эшелона (группы). Если они будут заняты обслуживанием, то требования получат отказ на приборах первой группы и поступят на обслуживание приборов второй группы. Вероятность того, что заявки получат отказ на приборах первой группы и поступят на приборы второй, определяется по формуле Эрланга

$$p_1 = \frac{\dfrac{\alpha^{r_1}}{r_1!}}{\sum\limits_{k=0}^{r_1} \dfrac{\alpha^k}{k!}}. \qquad (2.4.1)$$

Если и приборы второй группы будут также заняты обслуживанием, то заявки получат отказ. Вероятность этого события, как показано в [8], равна

$$p_2 = \frac{\dfrac{\alpha^{r_1 + r_2}}{(r_1 + r_2)!}}{\sum\limits_{k=0}^{r_1+r_2} \dfrac{\alpha^k}{k!}}, \qquad (2.4.2)$$

где r_1 — число приборов в первой группе;

r_2 — число приборов во второй группе.

Если таких групп i, то в общем виде вероятность прохода заявок необслуженными сквозь всю систему равна

$$p_i = \frac{\dfrac{\alpha^{r_1+r_2+\ldots+r_i}}{(r_1+r_2+\ldots+r_i)!}}{\sum\limits_{k=0}^{r_1+r_2+\ldots+r_i} \dfrac{\alpha^k}{k!}}. \qquad (2.4.3)$$

Используя формулу (2.4.1), можно определить:

— вероятность отказа в обслуживании на приборах j-й последовательной группы

$$\Pi_j = \frac{p_j}{p_{j-1}}; \qquad (2.4.4)$$

— вероятность того, что приборы j-й последовательной группы обслужат заявку, которая не была обслужена предыдущими группами:

$$P_{\text{обс}_j} = \frac{p_{j-1} - p_j}{p_{j-1}}; \qquad (2.4.5)$$

— коэффициент производительности приборов j-й последовательной группы $(1 \leqslant j \leqslant i)$

$$\eta_j = \frac{p_{j-1} - p_j}{1 - p_j}. \qquad (2.4.6)$$

Применение полученных зависимостей рассмотрим на примере.

Пример 1

Завод выпускает продукцию в виде некоторых изделий. Производительность завода по выпуску $\lambda = 0{,}5$ *изд/мин*. Прежде чем поступить на упаковку, они пройдут функциональный контроль в сборке на специально разработанных стендах. Готовые изделия к стендам подаются транспортером. Каждый из стендов может одновременно контролировать только одно изделие. Необходимо определить, сколько и какой производительности нужно поставить стендов на контрольном пункте при минимальных затратах на стенды, монтаж контрольного пункта и обслуживание, чтобы в среднем не менее 95% готовых изделий было проверено. Стенды могут иметь различную производительность, т. е. время, необходимое для проверки одного изделия. Чем выше производительность стенда, тем он дороже. Зависимость стоимости стенда от его производительности обозначим

$$C = \frac{5}{\bar{t}_{\text{обс}}} \text{ ед. стоимости,}$$

где $\bar{t}_{\text{обс}}$ — время обслуживания, выраженное в минутах.

Время, необходимое для функционального контроля и отладки изделий, *является величиной случайной, которая зависит от* качества монтажа основных агрегатов и частей изделий, и колеблется в широких пределах. Время контроля каждого изделия не зависит от времени контроля предыдущих изделий; статистический анализ времени контроля показал, что оно подчинено показательному закону распределения с параметром

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{обс}}}.$$

Чем больше стендов необходимо объединить на контрольном пункте, тем выше стоимость его монтажа и обслуживания. Пусть стоимость монтажа и обслуживания контрольного пункта за время изготовления серии изделий задана функцией

$$C = \frac{5 + n^2}{3} \text{ ед. стоимости,}$$

где n — число стендов.

Тогда общая стоимость контрольного пункта, включая стоимость стендов, монтажа и их серийного обслуживания, равна

$$C_{\text{общ}} = \frac{5 + n^2}{3} + \frac{5}{\bar{t}_{\text{обс}}} n.$$

В распоряжении завода имеется пять типов стендов по контролю готовых изделий, которые имеют разную производительность и характеризуются $\bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}5$; 1; 2; 5; 10 *изд/мин.* Для этих значений $\bar{t}_{\text{обс}}$ находим величины параметра (табл. 2.4.1).

Таблица 2.4.1

$\bar{t}_{\text{обс}}$	0,5	1	2	5	10
α	0,25	0,5	1	2,5	5

По табл. 4 приложения 5 определяем число стендов, которое необходимо иметь, чтобы осуществить контроль изделия с вероятностью 0,95. Количество стендов будет зависеть от их производительности (табл. 2.4.2).

Стоимость контрольного пункта в зависимости от типа применяемых стендов приведена в табл. 2.4.3.

Поэтому контрольный пункт следует создавать из стендов, имеющих среднее время контроля одного изделия 2 *мин.* При этом

Таблица 2.4.2

$\overline{t}_{обс}$	0,5	1	2	5	10
n	2	3	4	6	9

для контрольного пункта потребуются 4 таких стенда. При организации обслуживания стендов мастерами следует учесть, что стенды, которые работают бо́льшее время, требуют и большего обслуживания. Поэтому необходимо учитывать коэффициент производительности каждого последовательно расположенного стенда.

Таблица 2.4.3

$\overline{t}_{обс}$	0,5	1	2	5	10
$C_{общ}$	23	19,7	17	19,8	33,4

Этот коэффициент может быть определен по формуле (2.4.6). Для нашего примера он равен:

— для первого стенда

$$\eta_1 = \frac{p_1}{1-p_4} = \frac{0,5}{0,98} = 0,51;$$

— для второго стенда

$$\eta_2 = \frac{p_1 - p_2}{1-p_4} = \frac{0,3}{0,98} \approx 0,30;$$

— для третьего стенда

$$\eta_3 = \frac{p_2 - p_3}{1-p_4} = \frac{0,137}{0,98} \approx 0,14;$$

— для четвертого стенда

$$\eta_4 = \frac{p_3 - p_4}{1-p_4} \approx 0,05.$$

Таким образом, первый стенд проверит 51% всех изделий, которые будут подвергнуты проверке, второй — 30%, третий — 14% и четвертый — 5%.

Отсюда при организации профилактических работ, замене изношенных деталей и других видах обслуживания стендов следует чаще обращаться к первому стенду, так как у него будет загрузка наибольшая, несколько реже — ко второму стенду и т. д.

Этот пример, конечно, носит условный характер, так как функции стоимостей взяты произвольные, однако его можно рассматривать как первое приближение к реальному процессу при проектировании определенных автоматических линий, и при более тщательном качественном и количественном анализе рассматриваемого процесса он может оказаться полезным.

Два последовательно расположенных прибора разной производительности. На практике часто возникают ситуации, в которых необходимо определить вероятность обслуживания заявки при прохождении ею ряда последовательно расположенных приборов или групп приборов разной производительности. Например, в рассмотренном выше примере с транспортером в контрольном пункте могут стоять стенды разной производительности.

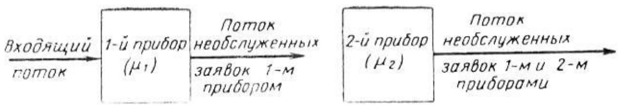

Рис. 2.4.2. Система двух приборов разной производительности.

При решении военных задач могут встретиться случаи, когда необходимо определить эффективность многоэшелонированной обороны, у которой в каждом эшелоне имеются огневые средства, отличные по своим боевым возможностям от средств в других эшелонах.

Наиболее простой системой массового обслуживания с последовательно расположенными приборами разной производительности являются два последовательно расположенных прибора разной производительности. Пусть эти приборы расположены друг за другом (рис. 2.4.2). Времена обслуживания каждого из них являются величинами случайными, которые подчиняются показательному закону с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно для первого и второго приборов. На первый прибор поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ заявок на единицу времени. Заявки, которые не были обслужены первым прибором из-за его занятости, поступают для обслуживания на второй прибор. Если он свободен, то заявки обслуживаются им, в противном случае заявки считаются необслуженными.

Обозначим вероятности состояний системы:

p_{00} — первый и второй приборы свободны от обслуживания;

p_{10} — первый прибор занят обслуживанием, второй свободен;

p_{01} — первый прибор свободен, второй занят обслуживанием;

p_{11} — оба прибора заняты обслуживанием.

Решение данной задачи приводит к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} p'_{00}(t) &= -\lambda p_{00}(t) + \mu_1 p_{10}(t) + \mu_2 p_{01}(t), \\ p'_{01}(t) &= -(\lambda + \mu_2)\, p_{01}(t) + \mu_1 p_{11}(t), \\ p'_{10}(t) &= -(\lambda + \mu_1)\, p_{10}(t) + \lambda p_{00}(t) + \mu_2 p_{11}(t), \\ p'_{11}(t) &= -(\mu_1 + \mu_2)\, p_{11}(t) + \lambda p_{01}(t) + \lambda p_{10}(t). \end{aligned}\right\} \qquad (2.4.7)$$

Можно показать, что для стационарного решения при $t \longrightarrow \infty$ выполняются условия

$$p_{ij}(t) \to p_{ij} = \text{const} \text{ и } p'_{ij}(t) \to 0,$$
$$i = 1,\ 0;\ j = 0,\ 1.$$

Тогда система дифференциальных уравнений превратится в систему алгебраических:

$$\left.\begin{aligned} \lambda p_{00} &= \mu_1 p_{10} + \mu_2 p_{01}, \\ (\lambda + \mu_2)\, p_{01} &= \mu_1 p_{11}, \\ (\lambda + \mu_1)\, p_{10} &= \lambda p_{00} + \mu_2 p_{11}, \\ (\mu_1 + \mu_2)\, p_{11} &= \lambda p_{01} + \lambda p_{10}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.4.8)$$

Решение системы (2.4.8) дает:

1. Вероятность отказа в обслуживании заявки, которая равна вероятности того, что заняты оба прибора:

$$P_{\text{отк}} = p_{11} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \lambda(\mu_1 + \mu_2) + \dfrac{\mu_1 \mu_2}{\lambda + \mu_2}(2\lambda + \mu_1 + \mu_2)}. \qquad (2.4.9)$$

2. Вероятность того, что все приборы свободны от обслуживания:

$$P_{00} = \frac{\mu_1 \mu_2 (2\lambda + \mu_1 + \mu_2)}{\lambda^2 (\lambda + \mu_2)}\, p_{11}. \qquad (2.4.10)$$

3. Вероятность того, что занят обслуживанием только первый прибор:

$$P_{10} = \frac{\mu_2 (\lambda + \mu_1 + \mu_2)}{\lambda (\lambda + \mu_2)}\, p_{11}. \qquad (2.4.11)$$

4. Вероятность того, что занят обслуживанием только второй прибор:

$$P_{01} = \frac{\mu_1}{\lambda + \mu_2} P_{11}. \qquad (2.4.12)$$

Зная вероятности состояний системы, можно определить загрузку каждого прибора. Коэффициент загрузки прибора будет равен отношению математического ожидания числа заявок, обслуженных этим прибором в единицу времени, к математическому ожиданию числа заявок, обслуженных обоими приборами в единицу времени. Математическое ожидание числа заявок, обслуженных первым прибором в единицу времени, равно $\mu_1(P_{11}+P_{10})$. Тогда коэффициент загрузки первого прибора равен

$$\eta_1 = \frac{\mu_1 (P_{11} + P_{10})}{\lambda (1 - P_{11})}.$$

После подстановки значений P_{11} и P_{10} получим

$$\eta_1 = \frac{\mu_1 \left[\lambda(\lambda + \mu_2) + \mu_2 (\lambda + \mu_2 + \mu_1)\right]}{(\lambda + \mu_2)\left[\lambda(\mu_1 + \mu_2) + \frac{\mu_1\mu_2}{\lambda + \mu_2}(2\lambda + \mu_1 + \mu_2)\right]}. \qquad (2.4.13)$$

Аналогично получим коэффициент загрузки второго прибора

$$\eta_2 = \frac{\mu_2\lambda (\lambda + \mu_2 + \mu_1)}{(\lambda + \mu_2)\left[\lambda(\mu_1 + \mu_2) + \frac{\mu_1\mu_2}{\lambda + \mu_2}(2\lambda + \mu_1 + \mu_2)\right]}. \qquad (2.4.14)$$

Отношение коэффициентов загрузки покажет, во сколько раз один прибор работает больше, чем другой. Обозначим через Q_{12} отношение коэффициентов загрузки первого прибора ко второму. Тогда

$$Q_{12} = \frac{\mu_1(\lambda + \mu_2)}{\mu_2(\lambda + \mu_1 + \mu_2)} + \frac{\mu_1}{\lambda}. \qquad (2.4.15)$$

Из анализа уравнения (2.4.9) вытекает важный для практики вывод: чтобы эффективность обслуживания системы была наибольшей, первый прибор должен иметь высшую производительность. Например, при создании контрольного пункта из двух стендов разной производительности первым следует ставить стенд, который имеет бо́льшую производительность. В этом случае на второй прибор пойдет более редкий поток необслуженных заявок. Для обслуживания этого потока выгоднее использовать прибор меньшей производительности.

Пример 2

Оценить эффективность двух последовательно стоящих на конвейере контрольных приборов, которые осуществляют проверку соответствия нормам основных параметров изделий. Скорость конвейера подобрана так, что на контрольный пункт поступает поток изделий с плотностью $\lambda=0,5$ *изд/мин*. Так как каждое изделие имеет различные отклонения параметров от нормы, то приборам на проверку приходится тратить в каждом случае разное время. Среднее время, необходимое прибору на проверку одного изделия, равно для первого прибора 5 *мин*, а для второго — 2,5 *мин*.

Решение

По параметрам $\lambda=0,5$; $\mu_1=0,2$; $\mu_2=0,4$ из табл. 21 приложения 5 *определяем вероятность проверки любого изделия контрольными приборами*

$$P_{\text{обс}}=1-P_{\text{отк}}=0,64.$$

Таким образом, контрольными приборами будет проверено более 64% всех изделий.

Если приборы поменять местами, т. е. *первым поставить прибор большей производительности* ($\bar{t}_{\text{обс}}=2,5$ *мин*), *а вторым* — прибор, у которого время обслуживания равно 5 *мин*, то *вероятность проверки любого изделия будет равна*

$$P_{\text{обс}}=1-P_{\text{отк}}=0,66.$$

Контрольными приборами будет проверено около 66% всех изделий.

Пример 3

На выборочном контроле изделий стоят два прибора с различной производительностью. Первый прибор способен проверить изделие за 2,5 *мин*, т. е. $\mu_1=0,4$ *изд/мин*, а второй — только за 5 *мин*, т. е. $\mu_2=0,2$ *изд/мин*. Поток изделий имеет плотность $\lambda=0,5$ *изд/мин*. Расчеты по табл. 21 приложения 5 показывают, что эти два прибора при заданном потоке изделий способны проверить в среднем 66% изделий. *Пусть первый прибор вышел из строя.* Одновременно с его заменой решено повысить процент проверенных изделий не менее, чем до 80%. Требуется определить, *какую производительность должен иметь прибор*, поставленный вместо вышедшего из строя, чтобы не менее 80% изделий подверглось контролю.

Решение

Зададим ряд значений величины μ_1: 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1.

Из табл. 21 приложения 5 определим эффективность контрольных приборов при разных значениях μ_1. Результаты расчетов сведены в табл. 2.4.4.

Таблица 2.4.4

μ_1	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$P_{обс}$, %	66	70	74	77	79	81	84

Построим график зависимости $P_{обс}$ от значения параметра μ_1 (*рис. 2.4.3*). *По величине* $P_{обс}=0,8$ *на графике находим* $\mu_1=0,85$. Таким образом, для того чтобы вероятность проверки каждого изде-

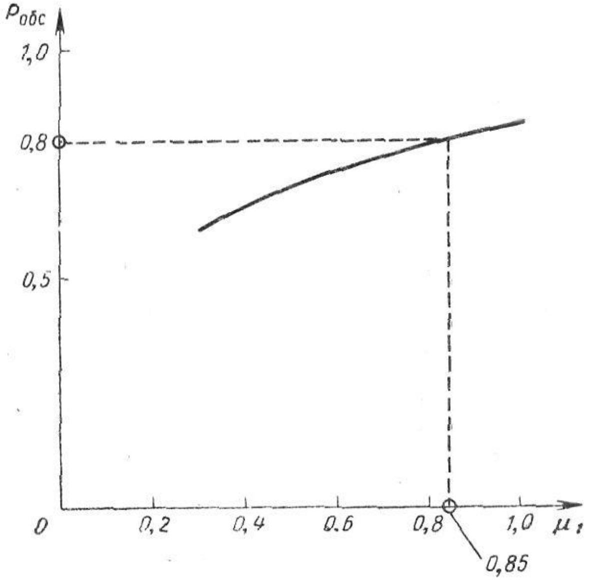

Рис. 2.4.3. Зависимость $P_{обс}$ от величины параметра производительности первого прибора μ_1.

лия была не ниже 0,8, *следует заменить вышедший из строя прибор прибором с производительностью не менее* 0,85 *изд/мин.*

Коэффициенты загрузки приборов в этом случае будут следующие:

— для первого прибора

$$\eta_1=\frac{0,85\,[0,5\,(0,5+0,2)+0,2\,(0,5+0,85+0,2)]}{(0,5+0,2)\left[0,5\,(0,85+0,2)+\dfrac{0,85+0,2}{0,5+0,2}(2\cdot 0,5+0,85+0,2)\right]}\approx$$

$$\approx\frac{0,56}{0,71}\approx 0,79.$$

— для второго прибора

$$\eta_2 = 1 - \eta_1 = 0{,}21.$$

Значит, на долю первого прибора придется 79% проверенных изделий, а на долю второго — 21%. Таким образом, загрузка первого прибора по отношению ко второму будет в 3,8 раза выше.

Две группы последовательно расположенных приборов разной производительности. На практике могут встретиться случаи, когда необходимо оценить пропускную способность системы массового обслуживания с последовательным расположением приборов разной производительности. Вначале поток требований поступает на группу приборов одинаковой производительности. Те требования, которые получат отказ в обслуживании приборами первой группы, поступают на прибор, стоящий сзади этой группы. По своим характеристикам этот прибор может отличаться от приборов первой группы. Вывод аналитических зависимостей для этого случая очень громоздкий. Поэтому необходимо найти такие пути оценки пропускных способностей системы, которые были бы простыми и в то же время достаточно точными.

Одним из таких путей может быть замена группы приборов одним прибором, обладающим эквивалентными пропускными способностями. Действительно, зная пропускные способности некоторой группы приборов, всегда можно подобрать для заданного потока заявок один прибор с таким временем обслуживания, что вероятность отказа в обслуживании поступающих заявок будет равна вероятности отказа рассматриваемой группы приборов.

Таким образом, метод замены по пропускным способностям группы приборов одним прибором позволит пользоваться более простым математическим аппаратом, полученным для двух последовательно расположенных приборов разной производительности.

Способ сведения многоканальной системы к одноканальной состоит в определении обслуживания некоторого прибора, пропускная способность которого будет эквивалентна многоканальной системе. Для этого используем равенство

$$P_{\text{отк}_1} = P_{\text{отк}_n}, \qquad (2.4.16)$$

где $P_{\text{отк}_1}$ — вероятность отказа одноканальной системы;

$P_{\text{отк}_n}$ — вероятность отказа многоканальной системы с n приборами.

Вероятность отказа для одноканальной системы запишется в виде

$$P_{\text{отк}_1} = \frac{\lambda \bar{t}_{\text{обс}_1}}{1 + \lambda \bar{t}_{\text{обс}_1}}. \qquad (2.4.17)$$

Тогда, подставив (2.4.16) в (2.4.17), определим время обслуживания искомого прибора, который будет иметь эквивалентную пропускную способность

$$t_{\text{обс}_1} = \frac{P_{\text{отк}_n}}{\lambda(1 - P_{\text{отк}_n})}. \qquad (2.4.18)$$

Если группа имеет однотипные приборы, то величина $P_{\text{отк}_n}$ определяется по формуле Эрланга. Когда группа состоит из приборов разной производительности, то величину $P_{\text{отк}_n}$ можно определить по формуле, вывод которой получен А. А. Шахбазовым [29]

$$P_{\text{отк}_n} = \frac{1}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n} j! \sum\limits_{C_j} \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_j}}, \qquad (2.4.19)$$

где

$$\alpha_i = \frac{\lambda}{\mu_i};$$

μ_i — производительность i-го прибора;

n — число приборов;

C_j — любое сочетание $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_j)$ по j чисел ряда $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$;

$\sum\limits_{C_j}$ обозначает, что суммирование распространяется по всем сочетаниям.

Таким образом, если имеется система последовательно расположенных групп приборов (как однотипных, так и разнотипных) и одного прибора, то для определения пропускных способностей можно использовать зависимости, полученные для системы последовательно расположенных двух приборов разной производительности, сведя предварительно группу приборов к эквивалентному по пропускным способностям одному прибору.

Пример 4

Готовые электроизмерительные приборы подвергаются проверке на надежность работы перед отправкой с завода на базу. Бригада рабочих проверяет одновременно один прибор. На заводе имеются три бригады рабочих, причем одна из них состоит из рабочих, которые работают давно и поэтому обладают высоким опытом проверки приборов. Среднее время, необходимое этой бригаде на проверку одного прибора, равно 0,5 *час.* Вторая бригада состоит из менее опытных рабочих, и среднее время на контроль прибора у них равно одному часу. Третья бригада укомплектована неполностью, и поэтому время на контроль прибора ей требуется больше и равно в среднем 0,75 *час.* Завод производит в среднем 2 прибора в час. Те приборы, которые были подвергнуты выборочному контролю на заводе и обеспечивают выполнение технических требований, отправляются непосредственно на базу и дальнейшему контролю не подлежат. Приборы, которые не проверялись на заводе и отправлены на базу, подвергаются выборочному контролю, который осуществляет одна бригада. Время, необходимое этой бригаде на контроль одного прибора, равно одному часу. Определить, какой процент приборов будет подвергнут контролю на надежность работы на заводе и на базе?

Решение

Так как на заводе бригады контроля имеют разное время проверки, то для определения вероятности отказа в проверке используем формулу (2.4.17). Для удобства пользования ею рассчитаны и составлены графики, которые помещены в приложении 5. Определяем параметры производительности бригад и плотность потока изделий:

$$\mu_2 = \frac{1}{1} = 1 \textit{ приб/час}, \quad \mu_3 = \frac{1}{0{,}75} = 1{,}33 \textit{ приб/час};$$

$$\mu_1 = \frac{1}{0{,}5} = 2 \textit{ приб/час} \text{ и } \lambda = 2.$$

Отсюда

$$\alpha_2 = 2; \ \alpha_3 = 1{,}5 \text{ и } \alpha_1 = 1.$$

По входным величинам $\alpha_2 = 2$; $\alpha_3 = 1{,}5$; $\alpha_1 = 1$ на рис. 2 приложения 5 находим $P_{\text{отк}} = 0{,}12$.

Определяем время обслуживания, которое должен иметь прибор, чтобы вероятность отказа в обслуживании была равна 0,12 при плотности потока $\lambda = 2$ прибора в час

$$\bar{t}_{\text{обс}_1} = \frac{0{,}12}{2(1-0{,}12)} = 0{,}07 \textit{ час}.$$

Определяем параметры приведенной системы

$$\mu_{\text{пр}_1} = \frac{1}{\bar{t}_{\text{обс}}} = 14{,}3 \textit{ приб/час}$$

217—1з

и

$$\mu_{пр_2} = \frac{1}{1} = 1 \textit{ приб/час}.$$

По величинам $\mu_{пр_1} = 14{,}3$ *приб/час*; $\mu_{пр_2} = 1$ *приб/час*; $\lambda = 2$ *приб/час* по табл. 21 приложения 5 определяем

$$P_{отк} = 0{,}069.$$

Таким образом, будет проверена надежность работы у 93,1% приборов, в том числе 88% на заводе и 5,1% на базе.

2.5. Одноканальная многофазная система с отказами. Метод приближенной оценки пропускных способностей многоканальной многофазной системы

Под многофазовыми системами понимаются такие, в которых процесс обслуживания проходит пофазно. Поступающая в систему заявка вначале обслуживается в первой фазе, а по окончании обслуживания переходит во вторую и т. д. Примеров многофазных систем можно привести много. Например, технологические потоки сборки различных технических изделий: когда в одном цехе производится сборка одних узлов, после того, как собраны эти узлы, изделие поступает в следующий цех, где продолжается сборка следующих узлов и т. д., — представляет собой пример многофазовой системы обслуживания. Другим примером может служить группировка различных огневых средств со своими системами управления. Здесь сначала некоторые органы производят сбор и обработку поступающей информации о противнике и о своих войсках, затем обработанная информация поступает на пункт управления, где производится целераспределение, после чего огневые средства выполняют поставленную перед ними боевую задачу. Ремонт машин также производится последовательно. Например, сначала машина может поступить в цех по ремонту электрооборудования, затем в цех по ремонту двигателя или ремонту шасси и т. д.

Техническое обслуживание автобусов в автопарке может быть рассмотрено как многофазовое. Автобус по возвращении в парк должен пройти моечный пункт, после чего пройти техосмотр. Применительно к многофазным системам с отказами процесс обслуживания имеет следующую особенность: если заявка, поступившая на обслуживание в какую-либо фазу, найдет все приборы уже занятыми, то она выходит из сферы обслуживания системы и теряется. Наглядным примером системы многофазового обслуживания с отказами может служить междугородный телефонный пункт или вызов абонента в пределах одного города через коммутатор с добавочными номерами. Например, вам необходимо позвонить из Москвы в Ленинград по служебному телефону. Вы звоните с предприятия, где служебный телефон соединен с коммутатором. Таким образом, прежде,

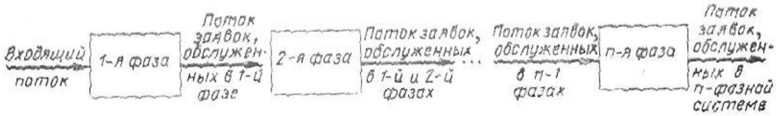

Рис. 2.5.1. Схема n-фазной системы.

чем созвониться с нужным абонентом, необходимо дозвониться до коммутатора. Если коммутатор свободен, нужно, чтобы на коммутаторе вас соединили с городским коммутатором. Через городской коммутатор вы можете набрать номер 270—91, и если он свободен, то в течение одной минуты вызвать нужного вам абонента в Ленинграде, если его телефон также свободен. Если в этой цепочке какой-либо промежуточный номер (или коммутатор) занят, то вы услышите короткие гудки и получите отказ в вызове нужного абонента.

Одноканальная многофазная система с отказами. Рассмотрим достаточно простую задачу — определение пропускной способности многофазной системы массового обслуживания с отказами при наличии в каждой фазе по одному прибору разной производительности (рис. 2.5.1).

Конечные зависимости для установившегося процесса следующие:

1. Вероятность того, что все фазы свободны

$$P_{000}=\frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)}, \qquad (2.5.1)$$

где μ_1; μ_2 и μ_3 — производительность приборов соответственно в первой, второй и третьей фазах;

2. Вероятность того, что занята обслуживанием только последняя фаза:

$$P_{001}=\frac{\lambda\mu_1\mu_2}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)}; \qquad (2.5.2)$$

3. Вероятность того, что первая фаза свободна от обслуживания, а вторая и третья заняты:

$$P_{011}=\frac{\mu_1^2\mu_2\lambda^2(\mu_1+\mu_2+\mu_3)}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)(\mu_1+\mu_2)(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_3)}; \qquad (2.5.3)$$

4. Вероятность того, что свободен прибор второй фазы, а в первой и третьей заняты обслуживанием:

$$P_{101}=\frac{\lambda^2\mu_1\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2+\mu_3)}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)(\mu_1+\mu_2)(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_3)}; \qquad (2.5.4)$$

5. Вероятность того, что вторая фаза занята обслуживанием, а первая и третья свободны:

$$P_{010}=\frac{\lambda\mu_1[(\lambda+\mu_3)(\mu_1+\mu_2)(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_3)+\lambda\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2+\mu_3)]}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)(\mu_1+\mu_2)(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_3)}; \qquad (2.5.5)$$

6. Вероятность того, что первая фаза занята обслуживанием, а вторая и третья свободны:

$$P_{100}=\frac{\lambda\mu_2\mu_3[\lambda(\lambda+\mu_1+\mu_2+\mu_3)+(\mu_1+\mu_2)(\mu_1+\mu_3)]}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)(\mu_1+\mu_2)(\mu_2+\mu_3)(\mu_1+\mu_3)}; \qquad (2.5.6)$$

7. Вероятность того, что заняты обслуживанием первая и вторая фазы, а третья свободна:

$$P_{110}=\frac{\lambda^2\mu_1[(\lambda+\mu_3)(\mu_1+\mu_2)(\mu_2+\mu_3)-\lambda\mu_1\mu_2]}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)(\mu_1+\mu_2)(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_3)}; \qquad (2.5.7)$$

8. Вероятность того, что все фазы заняты обслуживанием:

$$P_{111}=\frac{\lambda^2\mu_1^2\mu_2}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)(\mu_1+\mu_2)(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_3)}. \qquad (2.5.8)$$

Аналогичные зависимости состояний для двухфазовой системы приводятся в [26]. Анализ полученных зависимостей позволяет сделать ряд интересных выводов. Вероятность состояния не зависит от распределения приборов разной производительности по фазам. Но она пропорциональна производительности этих приборов. Вероятность состояния P_{001} линейно зависит от производительности приборов первых двух фаз, а для P_{011} эта зависимость появляется еще в большей степени.

Если рассмотреть выражения для вероятностей подобных состояний различных по числу фаз систем, то заметна определенная закономерность, которую можно *проиллюстрировать на примере двух-, трех- и четырехфазных систем.*

Например, выражения для вероятностей состояния, когда все приборы свободны, имеют вид:

$$P_{00}=\frac{\mu_1\mu_2}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)},$$

$$P_{000}=\frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)}, \tag{2.5.9}$$

$$P_{0000}=\frac{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)(\lambda+\mu_4)}.$$

Для системы, состоящей из r фаз, вероятность $P_{0(r)}$ запишется в виде

$$P_{0\,(r)}=\prod_{i=1}^{r}\frac{\mu_i}{(\lambda+\mu_i)}. \tag{2.5.10}$$

Общее выражение для состояния, когда все приборы заняты обслуживанием $P_{1(r)}$, для системы из r фаз запишется в виде

$$P_{1\,(r)}=\lambda^r\,\frac{\prod\limits_{i=1}^{r-1}\mu_i^{r-i}}{\prod\limits_{j=1}^{r}(\lambda+\mu_j)\prod\limits_{\substack{k=1\\ i=1\\ k\neq i}}^{r}(\mu_k+\mu_i)}. \tag{2.5.11}$$

Для практических целей важно знать вероятности состояний, когда заявка обслуживается в последней фазе, а остальные свободны:

$$P_{01\,(r)}=\frac{\lambda}{\mu_r}\prod_{i=1}^{r}\frac{\mu_i}{(\lambda+\mu_i)}. \tag{2.5.12}$$

Вероятность обслуживания каждой заявки всеми фазами может быть определена как произведение вероятности того, что заявка обслуживается в последней фазе, на плотность обслуживания прибором последней фазы, деленное на плотность поступления заявок:

$$P_{\text{обс}_r} =$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{r} \mu_i \left[\prod_{\substack{i=1;\ j=1 \\ i \neq j}} (\mu_i + \mu_j) + \left(\lambda + \sum_{i=1}^{r} \mu_i\right)^{r-2} \lambda^{r-2} \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i\right)^{r-2} \right]}{\prod_{i=1}^{r} (\lambda + \mu_i) \prod_{\substack{i=1;\ j=1 \\ i \neq j}}^{r} (\mu_i + \mu_j)}, \tag{2.5.13}$$

при $i \neq j$.

Как видно, вероятность обслуживания заявки системой не зависит от последовательности фаз. Это означает, что пропускная способность системы определяется ее узкими местами. Если производительность одной из фаз очень мала по сравнению с другими, то эта фаза и будет определять пропускную способность системы. Зависимости, определяющие вероятности состояний системы, были получены в предположении, что время обслуживания каждого прибора случайное и распределяется по по-

Таблица 2.5.1

Закон распределения $\bar{T}_{\text{обс}}$	Величина параметра					
	$\mu_1=1;\ \mu_2=0,5;\ \lambda=1$		$\mu_1=1;\ \mu_2=1,5;\ \lambda=3$		$\mu_1=2;\ \mu_2=2;\ \lambda=20$	
	Статистическая	Аналитическая	Статистическая	Аналитическая	Статистическая	Аналитическая
Показательный	0,451	0,444	0,188	0,183	0,059	0,050
Нормальный усеченный	0,448		0,179		0,054	
Релея	0,440		0,181		0,057	
Равномерный	0,443		0,185		0,051	

казательному закону. Однако в реальных системах массового обслуживания время, необходимое прибору для обслуживания одной заявки, может быть отличным от показательного. Исследования, проведенные методом статистических испытаний в довольно широком диапазоне изменения параметров, входящих в (2.5.13), показали справедливость результатов, которые могут быть вычислены по ней и при законах распределения времени обслуживания, отличных от показательного. Для иллюстрации в табл. 2.5.1 приведены некоторые варианты расчетов, выполненных методом статистических испытаний и по (2.5.13).

Метод приближенной оценки пропускных способностей многоканальной многофазной системы. Рассмотрим систему, в первой фазе которой имеется n_1 приборов. В общем случае эти приборы могут быть и разнотипными. Во второй и следующих фазах имеется по одному прибору. Тогда, используя метод замены группы приборов одним прибором с эквивалентной пропускной способностью, который излагается в предыдущем параграфе, вероятность обслуживания заявки во всех фазах запишем в виде

$$P_{\text{обс}} = \frac{\dfrac{\lambda(1-P_{\text{отк}})}{P_{\text{отк}}} \prod\limits_{i=2}^{n} \mu_i \left\{ \prod\limits_{j=1}^{n} \left[\dfrac{\lambda(1-P_{\text{отк}})}{P_{\text{отк}}} + \mu_j \right] \times \right.}{\dfrac{\lambda}{P_{\text{отк}}} \prod\limits_{i=2}^{n} (\lambda+\mu_i) \times} \to$$

$$\to \frac{\times \prod\limits_{\substack{i=2\\ j=1}}^{n} (\mu_i+\mu_j) + \left(\dfrac{\lambda}{P_{\text{отк}}} + \sum\limits_{i=2}^{n} \mu_i \right)^{n-2} \lambda^{n-2} \times}{} \to$$

$$\times \prod\limits_{j=1}^{n} \left[\frac{\lambda(1-P_{\text{отк}})}{P_{\text{отк}}} + \mu_j \right] \times$$

$$\to \frac{\left. \times \left[\dfrac{\lambda(1-P_{\text{отк}})}{P_{\text{отк}}} + \sum\limits_{i=2}^{n} \mu_i \right]^{n-2} \right\}}{\times \prod\limits_{\substack{i=2\\ j=1}}^{n} (\mu_i+\mu_j)}, \qquad (2.5.14)$$

где величина $P_{отк}$ определяется по формуле Эрланга для n_1 приборов, когда они все однотипные, и по формуле (2.4.19), если приборы в первой фазе разнотипные. Рассмотрим пример.

Пример

Автохозяйство имеет пункт автоматической мойки машин, однако он полностью не обеспечивает мойку всех машин автохозяйства. Поэтому, чтобы не загромождать подъездные пути на базе, решено организовать работу следующим образом. Машина, прибывшая после работы в парк, поступает на пункт автомойки, если там имеется место. В противном случае машина становится на свое место в стоянке, где и моется. Машина, которая была вымыта на пункте автомойки, отправляется на пункт заправки, если он свободен. Если же пункт заправки занят, то машина идет к месту стоянки, а заправка ее в этом случае производится перед выходом в рейс на следующий день. Поток прибывающих машин в парк равен $\lambda=4$ *маш/мин*. Определить процент машин, которые были вымыты пунктом автомойки и заправились горючим до постановки их на стоянку, если пункт автомойки имеет четыре рабочих места производительностью $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=0{,}5$ *маш/мин* и одно место производительностью $\mu_5=0{,}67$ *маш/мин*, а пункт заправки имеет одно место производительностью $\mu_I=2$. Найти наивыгоднейшее решение для увеличения числа машин, вымытых на пункте автомойки и заправленных, если на увеличение числа рабочих мест на пункте автомойки и повышение производительности заправки выделено 5 000 руб. Стоимость оборудования одного рабочего места пункта автомойки 2 000 руб., а стоимость повышения производительности пункта заправки на 1 *маш/мин* равна 1 000 руб.

Решение

Существующая система — пункт автомойки и пункт заправки — представляет собой двухфазную систему, у которой первая фаза имеет четыре места производительностью $\mu_{1,2,3,4}=0{,}5$ *маш/мин* и одно место производительностью $\mu_5=0{,}67$ *маш/мин*, а вторая фаза имеет одно место производительностью $\mu_I=2$. Вероятность того, что прибывающая в парк машина будет обслужена пунктами автомойки и заправки определится по формуле (2.4.14), где значение $P_{отк}$ определяется по формуле (2.4.17). Для нашего примера $P_{отк}=0{,}476$. Тогда вероятность обслуживания в двухфазной системе равна

$$P_{обс_2}=0{,}29.$$

Значит, пунктами автомойки и заправки будет обслужено 29% машин. Определим, как лучше израсходовать отпущенные средства, чтобы максимальное число машин обслуживалось пунктами автомойки и заправки.

Варианты переоборудования могут быть такими:

1-й вариант: увеличить число мест автомойки на два и повысить производительность заправки до $\mu_I=3$;

2-й вариант: увеличить число мест автомойки на одно и повысить производительность заправки до $\mu_I=5$;

3-й вариант: число мест автомойки не увеличивать, а увеличить производительность заправки до $\mu_I=7$.

Найдем для каждого варианта вероятность обслуживания машин автомойкой и заправкой. Результаты расчетов даны в табл. 2.5.2.

Таблица 2.5.2

Вариант	I	II	III
$P_{обс}$	0,48	0,44	0,46

Таблица 2.5.3

Вариант	I	II	III
Общий процент обслуженных машин	73	64	53

Таким образом, лучшим вариантом является первый. В этом случае выделенные средства распределяются в такой пропорции: 4 000 *руб* на увеличение на два места пункта автомойки и 1 000 *руб* на повышение производительности пункта заправки до 3 *маш/мин*. В этом случае необходимым обслуживанием автомойкой и заправкой в среднем будет обеспечено около 48% всех машин. Этот вариант выгоден еще и тем, что он обеспечивает наибольшее число машин автомойкой, что видно из табл. 2.5.3.

Таким образом, при первом варианте распределения выделенных средств можно обеспечить обслуживанием заправкой около половины всех машин и автомойкой — около трех четвертей всех машин.

Как видно из приведенного примера, полученные зависимости для многофазных систем с отказами могут найти широкое практическое применение как при определении пропускных способностей различных систем, так и при определении путей повышения эффективности этих систем с учетом экономических факторов. Кроме того, с помощью этих методов могут решаться задачи по рациональному планированию и организации работ в хозяйствах, деятельность которых можно формализовать в виде работы систем массового обслуживания.

2.6. Системы с накопителем заявок

Автоматизация технологических процессов в машиностроении, приборостроении и во многих других областях промышленности, все большее развитие информационно-логических машин, ЭЦВМ выдвинули ряд интересных задач для систем массового обслуживания, особенность работы которых заключается в том, что заявки поступают вначале не на обслуживающие приборы, а в накопитель. По мере функционирования этих систем через некоторые интервалы времени заявки могут быть взяты из накопителя для обслуживания. Примером такой системы может служить некоторая информационная логическая машина, у которой имеется блок сбора (буферная память) и блок обработки информации. Поступающая в машину информация записывается вначале в буферную память, если в ней имеется место, иначе информация теряется. Из буферной памяти она может поступать в блок обработки, если в нем закончился процесс обработки предшествующего массива информации. Другим примером систем массового обслуживания может служить телеграф. Сюда поступают в большом количестве телеграммы, которые необходимо доставить адресатам. Если нет свободных почтальонов, то поступившие телеграммы складываются и ожидают, пока не освободится один из почтальонов после доставки адресатам полученных ранее телеграмм. Таким образом, каждый раз собирается случайное число телеграмм. Имеется норма по доставке телеграмм для каждого почтальона, пусть эта норма равна n телеграммам. Если их уже скопилось в пределах нормы, то все следующие телеграммы будут откладываться другим почтальонам, а для данного почтальона они не будут предметом для обслуживания. Здесь могут возникнуть различные проблемы: определение числа почтальонов, чтобы поступающие телеграммы с определенной вероятностью были доставлены своевременно; определение степени загрузки одного почтальона и т. д. Вывод зависимостей, с помощью которых можно проанализировать системы массового обслуживания с накопителями заявок на качество их функционирования, проведен при следующих условиях и допущениях. Пусть система состоит из накопителя заявок и прибора обработки этих заявок. Заявки поступают в накопитель в случайные моменты времени, распределенные по пуассоновскому закону с параметром λ заявок на единицу времени. Объем накопителя заявок ограничен и равен n заявкам. Если поступившая заявка застанет накопитель полностью заполненным, то заявка теряется. Через некоторые случайные моменты времени к накопителю обращается прибор обработки и принимает на обслуживание накопившиеся в нем к этому времени заявки. Время обработки этого массива заявок прибором примем случайным и распределенным по показательному закону с параметром μ заявок на единицу времени. Как только обработан весь массив заявок, происходит новое обращение к накопителю и т. д. Для определения вероятностей состояний настоящей системы получена следующая система дифференциальных уравнений, вывод которых приводится в приложении 2:

$$\left.\begin{aligned}
&p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu \sum_{k=1}^{n} p_k(t),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p'_k(t) = -(\lambda + \mu)\, p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t), \quad 1 \leqslant k < n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p'_n(t) = -\mu p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t),
\end{aligned}\right\} \qquad (2.6.1)$$

где $p_k(t)$ — вероятность того, что в накопителе имеется k заявок.

Предположив, что существует стационарный режим, получим систему алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&-\alpha p_0 + \sum_{k=1}^{n} p_k = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-(\alpha + 1)\, p_k + \alpha p_{k-1} = 0, \quad 1 \leqslant k < n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-p_n + \alpha p_{n-1} = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (2.6.2)$$

где

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \bar{t}_{\text{обс}}.$$

Решение системы (2.6.2) имеет вид

$$p_k = \frac{\alpha^k}{(\alpha + 1)^{k+1}} \text{ при } k < n, \qquad (2.6.3)$$

$$p_n = \frac{\alpha^n}{(\alpha + 1)^n}. \qquad (2.6.4)$$

По приведенной постановке задачи потеря заявки может произойти только в результате того, что накопитель имеет уже n заявок. Тогда вероятность отказа будет равна

$$P_{\text{отк}} = p_n = \frac{\alpha^n}{(\alpha + 1)^n}. \qquad (2.6.5)$$

Среднее число заявок, находящихся в накопителе, определяется из зависимости

$$m = \sum_{k=1}^{n} k p_k. \qquad (2.6.6)$$

Отсюда коэффициент полезной загрузки накопителя равен

$$\eta = \frac{m}{n}. \qquad (2.6.7)$$

Учитывая, что среднее значение $\bar{t}_{\text{обс}}$ определяется временем обслуживания среднего числа заявок, принимаемых из накопителя на обслуживание, можно определить среднее время, которое тратит прибор на обслуживание одной заявки

$$\bar{t}_{\text{обс}_1} = \frac{1}{\mu m}. \qquad (2.6.8)$$

Используя формулу для определения вероятности того, что в накопителе находится n заявок, можно найти необходимый объем накопителя при заданной надежности обслуживания $(1 - P_{\text{отк}})$ и производительности прибора (μ)

$$n = \frac{\ln P_{\text{отк}}}{\ln \alpha - \ln (\alpha + 1)}. \qquad (2.6.9)$$

Рассмотрим несколько примеров применения полученных зависимостей.

Пример 1

Требуется определить минимальный объем буферной памяти информационной логической машины, в которую поступает непрерывный поток сообщений. Конструкция машины такова, что поступающие сообщения записываются в буферную память, объем которой n сообщений. Если очередное поступившее сообщение застанет буферную память полностью занятой, то оно считается полностью потерянным. Все сообщения, записанные в буферной памяти машины, ждут обращения к ней обрабатывающего устройства машины. Это устройство состоит из одного прибора, могущего обрабатывать последовательно все сообщения, которые обрабатывающее устройство забирает из буферной памяти. Среднее время, затрачиваемое прибором обработки на одно сообщение, равно $\bar{t}_{\text{обс}_1} = 1{,}6$ *сек*, а вероятность потери не должна превышать 0,25. Сообщения поступают с плотностью $\lambda = 1$ *сообщ/сек*.

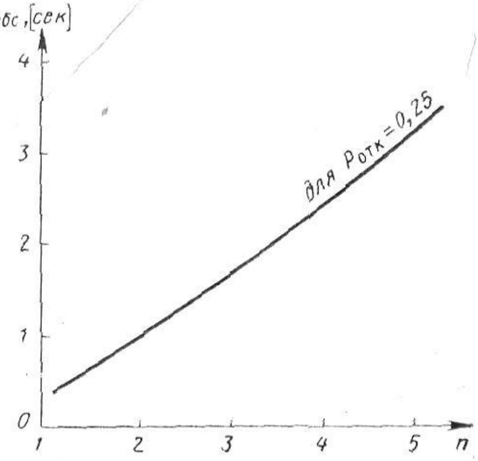

Рис. 2.6.1. Зависимость объема памяти n от величины времени обслуживания $t_{обс}$.

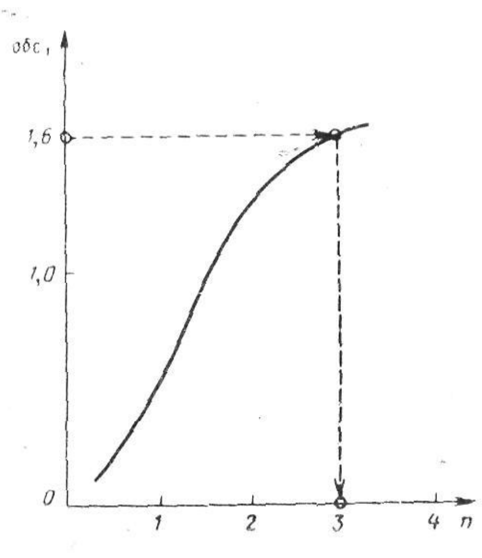

Рис. 2.6.2. Зависимость необходимого объема буферной памяти от времени обслуживания одного сообщения $t_{обс_1}$.

Решение

Задавая ряд значений $\bar{t}_{обс}=1$; 2; 3; 4, по формуле (2.6.5) находим зависимость числа n от времени обслуживания $\bar{t}_{обс}$. Зависимость, которая удовлетворяет условию $P_{отк}=0{,}25$, приведена на рис. 2.6.1.

Используя формулы (2.6.6) и (2.6.8) и рис. 2.6.1, строим зависимость $\bar{t}_{обс_1}$ от величины объема буферной памяти n (рис. 2.6.2). По заданной величине $\bar{t}_{обс_1}=1{,}6$ и рис. 2.6.2 определяем значение n, которое должно быть не менее 3.

Таким образом, машина, имеющая буферную память объемом три сообщения и прибор обработки сообщений с временем, необходимым на обработку одного сообщения, равным 1,6 *сек*, обеспечит обработку поступающего потока сообщений плотностью $\lambda=1$ *сообщ/сек* с вероятностью не ниже 0,75.

Пример 2

При техническом проектировании определить ориентировочный объем буферной памяти логической машины, имеющей конструкцию, аналогичную рассмотренной в предыдущем примере. Прибор обработки информации имеет среднее время $\bar{t}_{обс}=5$ *сек*. На машину ожидается поступление сообщений с плотностью $\lambda=10$ *сообщ/сек*. Вероятность потери сообщения не должна превышать 1%.

Решение

Определяем параметр α:

$$\alpha=\lambda\bar{t}_{обс}=10\times 5=50.$$

По формуле (2.6.9) получим

$$n=\frac{\ln 0{,}01}{\ln 50-\ln 51}\approx 232\,.$$

Таким образом, буферная память должна иметь объем 232 сообщения. В этом случае вероятность потери сообщения из-за занятости буферной памяти не будет превышать 1%.

Пример 3

Рассмотрим пример, связанный с техническим проектированием. Конструкция проектируемой системы следующая. Имеется бункер объемом n деталей, куда поступают детали, требующие дальнейшей обработки. Ее осуществляет блок обработки, который характеризуется некоторым временем $\bar{t}_{обс}$, необходимым для обработки деталей, принятых из бункера. После того как обработаны все детали, блок обработки выбирает из бункера следующую партию деталей, которые там скопились к этому времени. Если поступившая в бункер деталь застанет его полностью заполненным (т. е. там будет уже n деталей), то эта деталь пойдет на другой конвейер и для этой системы считается потерянной.

Ожидаемая плотность поступления деталей $\lambda=1$ *дет/мин*. Требуется определить n бункера $\bar{t}_{обс}$ блока обработки так, чтобы система обработала не менее 95% поступающих деталей и при этом стоимость создаваемой системы должна быть минимальной.

На основе опыта создания подобных систем известно, что ее стоимость зависит от объема бункера и производительности блока обработки. Она может быть выражена в виде:

— стоимость бункера

$$C_{бун}=3\times n \text{ ед. стоимости,}$$

— стоимость системы обработки

$$C_{обр}=\frac{8}{\bar{t}_{обс}} \text{ ед. стоимости.}$$

Решение

Общую стоимость проектируемой системы можно записать в виде

$$C=C_{бун}+C_{обр}.$$

Параметрируя величину $\bar{t}_{обс}$=0,3; 0,5; 1; 1,5; 2 по формуле (2.6.9) для $P_{отк}$=0,05, найдем соответствующие значения объема бункера n и общую стоимость для этих вариантов (табл. 2.6.1).

Таблица 2.6.1

$\bar{t}_{обс}$	0,3	0,5	1	1,5	2
n (с округлением) до целых	3	3	5	6	8
C ед. стоим.	36,7	25	23	23,3	28

По данным таблицы видно, что наименьшая стоимость будет приблизительно при $\bar{t}_{обс}=1$ *мин*. А этому значению времени обработки соответствует объем бункера, равный 5 деталям. Следовательно, проектировать систему необходимо с $n=5$ деталям, $t_{обр}=$ $=1$ *мин.*

2.7. Пропускные способности системы с накопителем в нестационарном режиме

Как отмечалось в § 2.2, на практике не всегда выполняется условие стационарности процесса. Это условие особенно важно учитывать при исследовании процессов незначительной продолжительности. Поэтому всегда возникают вопросы, когда процесс можно представить в виде стационарного и какая при этом будет допущена ошибка.

Мы уже рассматривали влияние нестационарности процесса на пропускные способности одноканальной системы массового обслуживания с отказами. Было показано, что затухание переходного процесса для одноканальной системы с отказами проходит довольно быстро, в течение $(2 \div 4)$ $\bar{t}_{обс}$. *Поэтому целесообразно оценить*, насколько это будет справедливо для других разновидностей систем массового обслуживания с отказами. Для этого рассмотрим процесс функционирования системы массового обслуживания с отказами, в которой имеется накопитель.

Как показано в приложении 2, вероятности различных состояний системы описываются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} p'_0(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu \sum_{j=1}^{n} p_j(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p'_j(t) &= -(\lambda + \mu)\, p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t),\ 0 < j < n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p'_n(t) &= -\mu p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t). \end{aligned}\right\} \qquad (2.7.1)$$

Для решения этой системы дифференциальных уравнений запишем нормирующее условие

$$\sum_{j=0}^{n} p(t) = 1, \qquad (2.7.2)$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(t) = 1 - p_0(t). \qquad (2.7.3)$$

Начальными условиями будут $p_0(0) = 1$; $p_j(0) = 0$ при $j = 1, 2, \ldots, n$.

Подставив выражение (2.7.3) в первое уравнение системы (2.7.1), получим

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu - \mu p_0(t). \qquad (2.7.4)$$

Решение дифференциального уравнения (2.7.4) имеет вид

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}. \qquad (2.7.5)$$

После подстановки значения $p_0(t)$ в дифференциальное уравнение, определяющее вероятность $p_1(t)$, получим

$$p'_1(t) = -(\lambda+\mu)\,p_1(t) + \lambda\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\,e^{-(\lambda+\mu)\,t}\right]. \tag{2.7.6}$$

Решение уравнения (2.7.6) имеет вид

$$p_1(t) = -\frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}\,e^{-(\lambda+\mu)\,t} + \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)}\,te^{-(\lambda+\mu)\,t} + \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}. \tag{2.7.7}$$

Решая последовательно систему дифференциальных уравнений (2.7.1), получим следующее решение для вероятностей состояния $p_j(t)$, где $0 \leqslant j < n$:

$$p_j(t) = \frac{\lambda^j\mu}{(\lambda+\mu)^{j+1}}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)\,t}\right) + e^{-(\lambda+\mu)\,t}\left[\frac{\lambda^{j+1}t^j}{j!\,(\lambda+\mu)} - \lambda^j\mu\sum_{r=1}^{j-1}\frac{t^r}{r!\,(\lambda+\mu)^{j-r+1}}\right]. \tag{2.7.8}$$

Для вероятности p_n решение запишется в виде

$$p_n(t) = e^{-\mu t}\int_0^t \lambda p_{n-1}(t)\,e^{-\mu t}\,dt. \tag{2.7.9}$$

Решение очень громоздкое, и мы не будем его приводить. Однако при проведении расчетов следует помнить, что вероятность $p_n(t)$ может быть определена из соотношения

$$p_n(t) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} p_j(t), \tag{2.7.10}$$

где $p_j(t)$ определяется по формуле (2.7.8).

Анализ уравнений (2.7.8)—(2.7.9) показывает, что при $t \longrightarrow \infty$ существует стационарный режим.

Абсолютная ошибка от предположения, что процесс установившийся, будет равна

$$M_j = p_j(t) - p_j, \tag{2.7.11}$$

где p_j — вероятность того, что в накопителе находится

j заявок, для стационарных условий, определяемая по формуле приложения 2.

Относительная ошибка определится из соотношения

$$\Delta M_j = \frac{p_j(t) - p_j}{p_j}. \qquad (2.7.12)$$

Ошибки в определении вероятности отказа равны:
— абсолютная

$$M_{\text{отк}} = p_n(t) - p_n; \qquad (2.7.13)$$

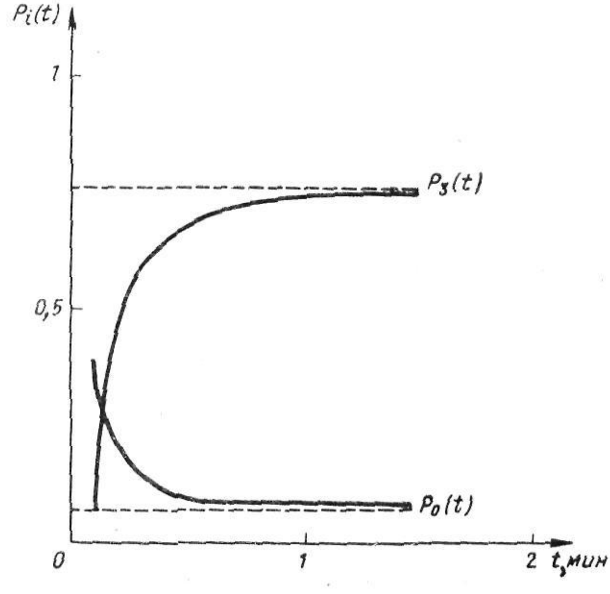

Рис. 2.7.1. Вероятности состояний системы $p_3(t)$ и $p_0(t)$ при $n=3$ и $\alpha=5$.

— относительная

$$\Delta M_{\text{отн}} = \frac{p_n(t) - p_n}{p_n}. \qquad (2.7.14)$$

На рис. 2.7.1 представлены результаты расчета вероятностей состояний системы, выполненные по формулам

(2.7.8), (2.7.9) при $n=3$ и $\alpha=5$, где $\alpha=\frac{\lambda}{\mu}$. Для сравнения пунктирными линиями показаны результаты, вычисленные при предположении стационарности процесса.

Как видно из рисунка, уже при длительности работы системы более $(1\div1{,}5)\ \bar{t}_{обс}$ процесс в основном устанавливается и практически для простоты расчета можно использовать формулы, полученные для стационарного режима.

3

СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОЖИДАНИЕМ

Системы массового обслуживания с ожиданием распространены наиболее широко. Их можно разбить на две большие группы — разомкнутые и замкнутые. Эти системы определяют так же, как системы с ограниченным и неограниченным входящим потоком. К замкнутым относятся системы, в которых поступающий поток требований ограничен. Например, мастер, задачей которого является наладка станков в цехе, должен периодически их обслуживать. Каждый налаженный станок становится в будущем потенциальным источником требований на подналадку.

В подобных системах общее число циркулирующих требований конечно и чаще всего постоянно.

Если питающий источник обладает бесконечным числом требований, то системы называются разомкнутыми. Примерами подобных систем могут служить магазины, кассы вокзалов, портов и др. Для этих систем поступающий поток требований можно считать неограниченным.

В главе рассмотрены некоторые, наиболее часто встречающиеся разновидности систем массового обслуживания с ожиданием. Особенность функционирования каждой из них накладывает свой оттенок на используемый математический аппарат.

3.1. Система с неограниченным потоком требований (разомкнутая система)

Эти системы отличаются следующими особенностями функционирования: система обслуживания состоит из ограниченного числа n аппаратов; каждый аппарат способен одновременно обслуживать только одно требование, каждое вновь поступившее требование, застав все аппараты уже занятыми, становится в очередь и находится в ней до тех пор, пока один из аппаратов не освободится. Если требование поступает в систему, когда есть свободный аппарат, оно сразу же принимается на обслуживание.

Функционирование системы рассматривается при условии поступления в нее пуассоновского потока требований. Источник потока требований неограничен по своим возможностям (например, пассажиры в метро, покупатели в магазинах и др.), хотя плотность потока λ имеет конечное значение. Время обслуживания каждого требования $t_{обс}$ является случайной величиной, которая подчиняется показательному закону распределения с параметром μ. Все приборы системы обладают одинаковой производительностью. Принципиальная схема системы представлена на рис. 3.1.1. В качестве основных показателей работы системы предлагается вероятность того, что все аппараты свободны или заняты, математическое ожидание длины очереди, коэффициенты занятости и простоя приборов обслуживания. Возможные состояния такой системы массового обслуживания в процессе ее функционирования описываются системой дифференциальных уравнений:

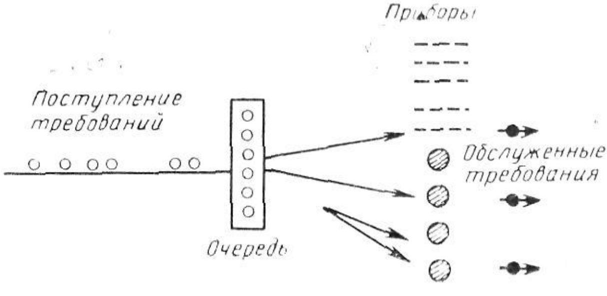

Рис. 3.1.1. Схема системы с неограниченным потоком требований (разомкнутая система).

$$\left.\begin{aligned}
&p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p'_k(t) = -(\lambda + k\mu)\,p_k(t) + (k+1)\,\mu p_{k+1}(t) + \lambda p_{k-1}(t)\\
&\qquad\qquad \text{при } 1 \leqslant k < n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p'_k(t) = -(\lambda + n\mu)\,p_k(t) + n\mu p_{k+1}(t) + \lambda p_{k-1}(t)\\
&\qquad\qquad \text{при } k \geqslant n,
\end{aligned}\right\} \tag{3.1.1}$$

где p_0, p_k — вероятности состояний, когда в системе соответственно ни одного или k требований. Рассмотрим стационарное состояние системы, при котором $t \longrightarrow \infty$, а $p'_k(t) \longrightarrow 0$ и $p_k(t) \longrightarrow p_k$.

В этом случае уравнения состояний запишем в таком виде:

$$\begin{aligned}
&-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-(\lambda + k\mu)\,p_k + (k+1)\,\mu p_{k+1} + \lambda p_{k-1} = 0 \text{ при } 1 \leqslant k < n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-(\lambda + n\mu)\,p_k + n\mu p_{k+1} + \lambda p_{k-1} = 0 \text{ при } k \geqslant n.
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Нормирующее условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Не останавливаясь на выводе зависимостей для определения всех перечисленных показателей (см. [8, 18, 22]), полученных для стационарного состояния системы, приводим лишь расчетные формулы.

1. Параметр

$$a = \frac{\lambda}{\mu},$$

где λ — плотность входящего потока требований;

μ — параметр показательного закона времени обслуживания требований в системе.

2. Вероятность того, что все обслуживающие приборы свободны:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{(n-1)!\,(n-\alpha)}} \text{ при } \frac{\alpha}{n} < 1, \quad (3.1.3)$$

где n — число обслуживающих приборов в системе.

3. Вероятность того, что занято обслуживанием k приборов (k требований в системе):

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0 \text{ при } 1 \leqslant k < n. \quad (3.1.4)$$

4. Вероятность того, что все приборы системы заняты ($k \geqslant n$):

$$\pi = \frac{\alpha^n P_0}{(n-1)!\,(n-\alpha)}, \quad \frac{\alpha}{n} < 1. \quad (3.1.5)$$

5. Вероятность того, что все аппараты заняты обслуживанием и s требований находится в очереди:

$$P_{n+s} = \frac{\alpha^{n+s}}{n!\,n^s} P_0 \text{ при } s > 0. \quad (3.1.6)$$

6. Вероятность того, что время пребывания требования в очереди больше некоторой величины t:

$$p(\tau > t) = \pi e^{-\mu(n-\alpha)t}. \quad (3.1.7)$$

7. Среднее время ожидания требованием начала обслуживания в системе

$$\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{\pi \bar{t}_{\text{обс}}}{(n-\alpha)} \text{ при } \frac{\alpha}{n} < 1, \quad (3.1.8)$$

где $\bar{t}_{\text{обс}} = \frac{1}{\mu}$ — среднее время обслуживания требований в системе.

8. Средняя длина очереди

$$M_{\text{ож}} = \frac{\alpha P_n}{n\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^2}. \quad (3.1.9)$$

9. Среднее число требований, находящихся в системе:

$$M = M_{\text{ож}} + \frac{n P_n}{1 - \frac{\alpha}{n}} + P_0 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha^k}{(k-1)!}. \quad (3.1.10)$$

10. Среднее число свободных от обслуживания приборов

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \alpha^k P_0. \tag{3.1.11}$$

11. Коэффициент простоя приборов

$$K_п = \frac{N_0}{n}. \tag{3.1.12}$$

12. Среднее число занятых обслуживанием приборов

$$N_з = n - N_0. \tag{3.1.13}$$

13. Коэффициент загрузки приборов

$$K_з = \frac{N_з}{n}. \tag{3.1.14}$$

14. Экономический показатель для выбора лучшего варианта системы обслуживания при ее проектировании

$$G_п = (\lambda q_{ож} + q_{пk} N_0 + N_з q_k) \bar{t}_{ож}, \tag{3.1.15}$$

где $G_п$ — величина потерь в системе за время $\bar{t}_{ож}$;

$q_{ож}$ — стоимость потерь, связанных с простаиванием требований в очереди в течение единицы времени;

$q_{пk}$ — стоимость единицы времени простоя обслуживающего прибора системы;

q_k — стоимость эксплуатации прибора при обслуживании в единицу времени.

Пример 1

Ателье по ремонту различной радиоаппаратуры имеет $n=5$ опытных мастеров. В среднем в течение рабочего дня от населения поступает в ремонт $\lambda=10$ радиоаппаратов. Общее число радиоаппаратов, находящихся в эксплуатации у населения, очень велико, и они независимо друг от друга в различное время выходят из строя. Поэтому есть все основания полагать, что поток заявок на ремонт аппаратуры является случайным, пуассоновским. В свою очередь, каждый аппарат в зависимости от характера неисправности также требует различного, случайного времени на ремонт. Время на проведение ремонта зависит во многом от серьезности полученного повреждения, квалификации мастера и множества других причин. Пусть статистика показала, что в среднем в течение рабочего дня каждый из мастеров в ателье успевает отремонтировать $\mu=2{,}5$ радиоаппарата. Требуется оценить работу ателье по ремонту радиоаппаратуры.

Решение

1. Определим параметр

$$\alpha = \lambda \frac{1}{\mu} = 10 \frac{1}{2,5} = 4 .$$

2. Вероятность того, что все мастера свободны от ремонта аппаратуры, равна

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{(n-1)!\,(n-\alpha)}} =$$

$$= \frac{1}{1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{(5-1)!\,(5-4)}} = 0,013.$$

3. Вероятность того, что все мастера заняты ремонтом:

$$\pi = \frac{\alpha^n P_0}{(n-1)!\,(n-\alpha)} = 0,013 \frac{4^5}{(5-1)!\,(5-4)} = 0,554.$$

Это означает, что 55,4% времени все мастера полностью загружены работой.

4. Среднее время обслуживания каждого прибора в ателье

$$\bar{t}_{\text{обс}} = \frac{7}{\mu} = \frac{7}{2,5} = 2,8 \text{ час.}$$

Это получено при условии семичасового рабочего дня.

5. Интересно получить зависимость вероятности того, что время ожидания начала ремонта принятой в ателье радиоаппаратуры не будет превосходить определенной величины.

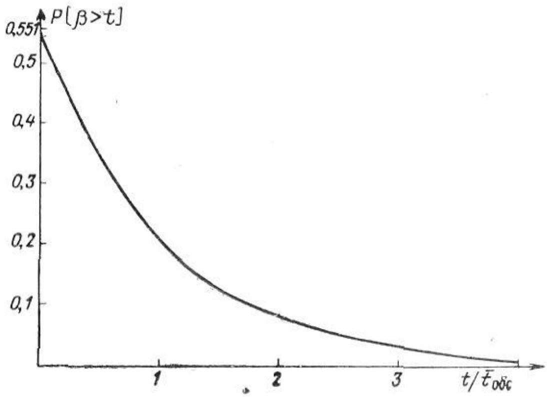

Рис. 3.1.2. Зависимость вероятности того, что время ожидания будет больше величины t.

Из рис. 3.1.2 следует, что неисправная аппаратура не будет долго ожидать ремонта. Вероятность того, что время ожидания более одного дня составит 3—4%.

6. *В среднем время ожидания каждого неисправного аппарата* в начале ремонта равно

$$\bar{t}_{\text{ож}} = \pi \frac{\bar{t}_{\text{обс}}}{n - \alpha} = 0,554 \frac{2,8}{5 - 4} = 1,55 \textit{ час}.$$

7. Очень важной характеристикой является средняя длина очереди, которая определяет необходимое место для хранения аппаратуры, требующей ремонта:

$$M_{\text{ож}} = \frac{\pi\alpha}{n\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^2} = \frac{0,554 \cdot 4}{5\left(1 - \frac{4}{5}\right)^2} \approx 11,1 \text{ аппарата.}$$

8. Среднее число аппаратов, находящихся в ателье на ремонте (ожидающих ремонта или ремонтируемых):

$$M = M_{\text{ож}} + \frac{nP_n}{1 - \frac{\alpha}{n}} + P_0 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha^k}{(k-1)!} =$$

$$= 11,1 + \frac{5 \cdot 0,11}{1 - \frac{4}{5}} + 1,3 = 15,15 \text{ прибора.}$$

9. Определим среднее число мастеров, свободных от работы:

$$N_0 = P_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \alpha^k = 0,013 \left[\frac{5-0}{1} 1 + \frac{5-1}{1!} 4 + \frac{5-2}{2!} 4^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{5-3}{3!} 4^3 + \frac{5-4}{4!} 4^4 \right] \approx 0,95 \text{ мастера.}$$

Пример 2.

Морской порт имеет $n=5$ причалов для разгрузки сухогрузных судов. В среднем в течение месяца в порт прибывает с грузами около 20 судов большого тоннажа. Поступление судов в порт носит случайный характер, так как они выходят из различных портов и покрывают различные расстояния до пункта разгрузки. Кроме того, на скорость движения судов влияет погода. Проведенная статистика частоты прихода судов в порт показала, что поступающие на разгрузку суда образуют пуассоновский поток. Время разгрузки каждого судна является также случайной величиной, которая зависит от тоннажа судов, особенности груза и многих других причин. В среднем на разгрузку судна тратится на причале 6 рабочих дней. Требуется оценить работу порта. Необходимо также рассмотреть возможность увеличения пропускной способности порта за счет увеличения числа причалов. При решении этой задачи нужно исследовать экономическую целесообразность расширения возможности порта. Необходимо также рассмотреть возможность увеличения пропускной способности порта за счет увеличения числа причалов. При решении этой задачи нужно исследовать экономическую целесообразность расширения возможности порта по разгрузке и погрузке судов.

Решение

1. Следует определить параметр

$$\alpha=\lambda\bar{t}_{\text{раз}}=20\cdot 0{,}2=4.$$

2. Вероятность того, что все причалы свободны и ожидают суда под разгрузку:

$$P_0=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{(n-1)!\,(n-\alpha)}}=$$

$$=\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{4}\frac{4^k}{k!}+\frac{4^5}{(5-1)!\,(5-4)}}=0{,}013.$$

3. Вероятность того, что все причалы заняты судами под разгрузку:

$$\pi=\frac{\alpha^n P_0}{(n-1)!\,(n-\alpha)}=0{,}013\,\frac{4^5}{(5-1)!\,(5-4)}=0{,}555.$$

Это означает, что приблизительно 56% времени все причалы полностью заняты разгрузочными работами.

4. В среднем время ожидания каждым судном начала разгрузки равно

$$t_{\text{ож}}=\pi\frac{\bar{t}_{\text{обс}}}{n-\alpha}=0{,}555\,\frac{6}{5-4}\approx 3{,}3 \text{ суток}.$$

5. Определим среднее число судов, которое будет находиться в порту, ожидая своей очереди для разгрузки:

$$M_{\text{ож}}=\frac{\pi\alpha}{n\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^2}=\frac{0{,}555\cdot 4}{5\left(1-\frac{4}{5}\right)^2}=11{,}1 \text{ судна}.$$

6. Вероятность того, что в порту на обслуживании находится шесть судов ($n=6$ судов):

$$P_n=\frac{\alpha^n}{n!}P_0=\frac{4^6}{6!}\,0{,}013=0{,}074.$$

7. Среднее число судов, находящихся в порту:

$$M=M_{\text{ож}}+\frac{nP_n}{1-\frac{\alpha}{n}}+P_0\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha^k}{(k-1)!}=$$

$$=11{,}1+\frac{5\cdot 0{,}074}{1-\frac{4}{5}}+0{,}013\sum_{k=1}^{4}\frac{4^k}{(k-1)!}=12{,}53 \text{ судна}.$$

Определим среднее количество простаивающих причалов

$$N_0 = P_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \alpha^k = 0,013 \sum_{k=0}^{4} \frac{5-k}{k!} 4^k \approx 1 \text{ причал.}$$

Коэффициент простоя причалов

$$K_п = \frac{N_0}{n} = \frac{1}{5} = 0,20.$$

Это означает, что каждый причал будет простаивать 20% времени. Для уменьшения времени простоя судов решено порт расширить. При этом необходимо предусмотреть увеличение плотности потока судов λ в порт, исходя из тенденции развития судоходства в этом районе, а также увеличение скорости движения судов и т. д. Пусть для примера плотность прихода судов в порт сохраняется прежней. Сколько нужно иметь причалов в порту, чтобы существенно уменьшить число ожидающих разгрузки судов и время их простоя? Для решения этого вопроса проделаем весь комплекс расчетов для числа причалов $n=5$, 6, 7, 8.

Результаты расчетов приведены в табл. 3.1.1.

Анализируя результаты расчетов, которые приведены в табл. 3.1.1, можно сделать вывод о том, что увеличением числа причалов с $n=5$ до $n=6$ удается существенно снизить время ожидания судов (почти в 4 раза), а число судов, ожидающих разгрузки, — в 6,4 раза. Дальнейшее увеличение числа причалов приводит к уменьшению значений $\bar{t}_{ож}$ и M, но сами эти величины уже достаточно малы. Чтобы принять окончательное решение, целесообразно проделать элементарный экономический анализ. Пусть простой каждого судна в течение суток обходится государству $q_{ож} = 100$ ед. стоимости. В то же время месячный простой причала порта из-за несвоевременного прихода судов обходится государству $q_{ож} = 1\,000$ ед. стоимости. Стоимость месячной эксплуатации

Таблица 3.1.1

Характеристики	Число причалов			
	5	6	7	8
P_0	0,013	0,017	0,018	0,0182
π	0,555	0,29	0,136	0,058
$\bar{t}_{ож}$ (суток)	3,3	0,87	0,27	0,09
$M_{ож}$ (судов)	11,1	1,74	0,42	0,12
M	12,6	4,42	3,76	3,76
N_0	1	2	3	3,96
$K_п$	0,2	0,3	0,43	0,48

причала $q_n=1\,000$ ед. стоимости. Приведенные исходные данные по стоимости отнюдь не претендуют на действительное соответствие реально существующим издержкам в работе конкретного порта, а взяты лишь для иллюстрации порядка проведения расчетов. Для проведения экономического анализа воспользуемся формулой, по которой определяется сумма издержек за $T=1$ месяц. При выборе оптимального варианта необходимо выбрать тот, для которого эти издержки минимальны

$$G = \lambda \bar{t}_{\text{ож}} q_{\text{ож}} + K_{\text{п}} n q_n + n p_k.$$

Результаты расчетов приведены в табл. 3.1.2

Таблица 3.1.2

Характеристика	Число причалов			
	5	6	7	8
$\bar{t}_{\text{ож}}$ (суток)	3,3	0,87	0,27	0,09
$\lambda t_{\text{ож}}\ q_{\text{ож}}$	6 600	1 740	540	180
$K_{\text{п}}$	0,2	0,3	0,43	0,48
$nq_{\text{п}}$	5 000	6 000	7 000	8 000
$K_{\text{п}} n q_n$	1 000	1 800	3 010	3 840
nq_k	5 000	6 000	7 000	8 000
Сумма издержек	12 600	9 540	10 550	12 020

Расчеты показывают, что наиболее экономичным вариантом является порт с шестью ($n=6$) причалами.

Приведенный пример показывает возможность выбора оптимального варианта проектирования порта или других транспортных пунктов обслуживания.

3.2. Системы с ограниченным потоком требований (замкнутые системы)

На практике существует много примеров систем, в которых требования, обслуженные в системе, вновь возвращаются в источник требований и дополняют его. Схематично работа такой системы представлена на рис. 3.2.1.

Подобные задачи встречаются при эксплуатации машин, которые могут выходить из строя и требовать ремонта или наладки. Как правило, их обслуживают несколько мастеров, наладчиков (мастерских). После обслуживания машин (ремонта, наладки) они возвращаются в строй и вновь становятся потенциальными ис-

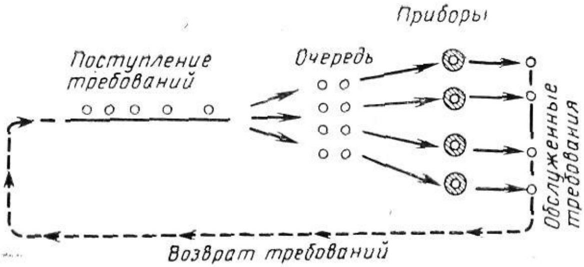

Рис. 3.2.1. Схема системы с ограниченным потоком требований (замкнутая система).

точниками появления требования на ремонт, наладку. Система состоит из n приборов обслуживания. Каждый из них может одновременно обслуживать только одно требование. В систему поступает простейший поток требований с параметром λ. Поток поступает из ограниченного источника, так что в системе может находиться не более m требований. Требования, которые поступили в систему и застали хотя бы один прибор свободным, сразу же идут на обслуживание. Если все приборы уже заняты, то требования становятся в очередь и ожидают до тех пор, пока один из приборов не освободится. Всевозможные состояния системы описываются системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&p'_0(t) = -m\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&p'_k(t) = -[(m-k)\lambda + k\mu]\,p_k(t) +\\
&+(m-k+1)\lambda p_{k-1}(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t)\\
&\qquad\qquad \text{при } 0 < k < n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&p'_k(t) = -[(m-k)\lambda + n\mu]\,p_k(t) +\\
&+(m-k+1)\lambda p_{k-1}(t) + n\mu p_{k+1}(t)\\
&\qquad\qquad \text{при } n \leqslant k < m,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&p'_m(t) = -\lambda p_{m-1}(t) + n\mu p_m(t).
\end{aligned}\right\} \qquad (3.2.1)$$

Не показывая полного аналитического исследования и вывода соответствующих зависимостей, приведем лишь конечные результаты, полученные для стационарных условий [8, 18, 22].

1. Параметр

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu},$$

где λ — плотность поступающих на обслуживание требований;

μ — параметр, равный

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{обс}}}, \tag{3.2.2}$$

$\bar{t}_{\text{обс}}$ — среднее время обслуживания одного требования.

2. Вероятность того, что все приборы свободны от обслуживания:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{m!}{k!\,(m-k)!} \alpha^k + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{m!\alpha^k}{n^{k-n} n!\,(m-k)!} \right]^{-1}, \tag{3.2.3}$$

где m — наибольшее число требований в системе;

n — число приборов в системе обслуживания.

3. Вероятность того, что в системе находится k требований, из них n обслуживается, а $k-n$ ожидают обслуживания:

$$p_k = \frac{m!\alpha^k}{n^{k-n} n!\,(m-k)!} p_0 \text{ при } n \leqslant k \leqslant m. \tag{3.2.4}$$

4. Среднее число требований, ожидающих начала обслуживания:

$$M_{\text{ож}} = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{(k-n)\, m!\alpha^k}{n^{k-n}\, n!\,(m-k)!} p_0. \tag{3.2.5}$$

5. Коэффициент простоя требований, ожидающих обслуживания:

$$K_{\text{пт}} = \frac{M_{\text{ож}}}{m}. \tag{3.2.6}$$

6. Среднее число требований, находящихся в системе обслуживания:

$$M = M_{\text{ож}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^k m!}{k!\,(m-k)!} p_0. \tag{3.2.7}$$

7. Среднее число свободных приборов при установившемся процессе обслуживания

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\, p_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k)\, m!\alpha^k}{k!\,(m-k)!}\, p_0. \qquad (3.2.8)$$

8. Коэффициент простоя приборов обслуживания

$$K_п = \frac{N_0}{n}. \qquad (3.2.9)$$

9. Вероятность того, что число требований, ожидающих обслуживания, больше некоторого числа N

$$p_{>N} = \sum_{k=N+1}^{m} p_k = 1 - \sum_{k=0}^{N} p_k,\ N \geqslant n. \qquad (3.2.10)$$

Пример

Имеется $n=3$ мастерских по ремонту 10 образцов определенного вида вооружения, которые распределены по различным частям и подразделениям. Обслуживание можно организовать силами подвижных мастерских, которые всякий раз могут быть направлены в то подразделение, где имеется потребность в ремонте, или полустационарных достаточно мощных мастерских с хорошо организованным технологическим потоком, куда будет доставляться неисправная техника. В обоих случаях время, необходимое для ремонта неисправного вооружения, будет складываться по-разному. В первом случае оно будет состоять из времени, необходимого для вызова мастерской, ее движения к месту ремонта и развертывания, и времени, нужного для проведения осмотра и собственно ремонта. Во втором случае оно будет определяться временем, необходимым для доставки неисправного вооружения в тыловую ремонтную мастерскую, просмотра ее и ремонта. В рассмотренных случаях соответствующие составляющие времени обслуживания будут разные. Полагаем, что время обслуживания — случайная величина с показательным законом распределения с параметром μ, где

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_p},$$

$$\bar{t}_р = \bar{t}_{выз} + \bar{t}_{дв.\,м} + \bar{t}_{осм} + \bar{t}_{раз} + \bar{t}_{св} + \bar{t}_{рем},$$

$\bar{t}_{выз}$ — среднее время, необходимое для вызова мастерской;
$\bar{t}_{дв\,м}$ — среднее время движения мастерской;
$\bar{t}_{осм}$ — среднее время осмотра;
$\bar{t}_{раз}$, $\bar{t}_{св}$ — среднее время развертывания и свертывания мастерской;
$\bar{t}_{рем}$ — среднее время ремонта;
$\bar{t}_р$ — среднее суммарное время, необходимое для производства ремонта вооружения,

На основании статистики получено, что для вызова мастерской и ремонта техники в среднем требуется около 6 дней, $\mu=5$ образцов в месяц. По аналогичной схеме можно определить среднее время $\bar{t}_р$ для обслуживания полустационарных мастерских. Поток поступающих заявок на ремонт ограничен числом обслуживаемых подразделений, на вооружении которых находится боевая техника, и принимается пуассоновским. Пусть плотность потока равна $\lambda=1$ образец в месяц.

Полагаем, что если поступила заявка на ремонт вооружения, то мастерская сразу направляется в соответствующее подразделение. Если все мастерские уже заняты, то вышедшее из строя вооружение ждет своей очереди для проведения ремонта.

Решение

1. Определим параметр

$$\alpha=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{1}{5}=0,2.$$

2. Для определения вероятностей состояний составим таблицу вычислений (табл. 3.2.1)

Таблица 3.2.1

k	$\frac{p_k}{p_0}$	p_k	kp_k	$(k-n)\,p_k$	$(n-k)\,p_k$
0	1	0,1548	0	—	0,4644
1	2	0,3096	0,3096	—	0,6192
2	1,8	0,2786	0,5572	—	0,2786
3	0,96	0,1486	0,4558	—	0
4	0,448	0,0693	0,2772	0,0693	—
5	0,179	0,0277	0,1385	0,0554	—
6	0,056	0,0087	0,0522	0,0261	—
7	0,012	0,0018	0,0126	0,0072	—
8	0,0025	0,0004	0,0032	0,0020	—
9	0,0004	0,0001	0,0009	0,0006	—
10	0	0	0	0	—
Сумма	6,4579	0,9996	1,7972	0,1606	1,3622

Из таблицы следует, что вероятность того, что все мастерские свободны от ремонта, равна

$$p_0=0,155.$$

Это означает, что 4—5 дней в месяц мастерские будут свободны, а их технический персонал может заняться другими делами. Однако это не значит, что не будет случаев, когда неисправная техника вынуждена ожидать своей очереди, чтобы ее привести в исправное состояние. Скопление неисправной техники будет в различные периоды разное. В среднем число образцов вооружения, ожидающих ремонта, будет равно (см. сумму 5-го столбца табл. 3.2.1) $M_{ож}=0,16$ образца.

Отсюда средний процент вооружения, ожидающего ремонта, равен

$$K_{пт} = \frac{M_{ож}}{m} \cdot 100\,\% = 1{,}6\,\%.$$

Посмотрим, насколько рационально загружены мастерские. Среднее число свободных от ремонта мастерских равно (см. 6-й столбец табл. 3.2.1) $N_0=1{,}36$ мастерской, а коэффициент простоя равен

$$K_{п} = \frac{N_0}{n} \cdot 100\,\% = \frac{1{,}36}{3} \cdot 100 = 46\,\%,$$

т. е. очень высокий.

Определим среднее число образцов вооружения, которое либо находится в ремонте, либо ожидает ремонта, или, короче, среднее число небоеспособных образцов вооружения (см. 4-й столбец табл. 3.2.1) $M=1{,}79$ образца.

Отсюда средний процент небоеспособности вооружения равен

$$k = \frac{M}{m} \cdot 100\,\% = 17{,}9\,\%.$$

Рассмотрим другой пример для тех же условий эксплуатации вооружения при иначе организованном ремонте. Вместо трех подвижных мастерских для обслуживания вооружения выделена одна полустационарная ремонтная мастерская с тремя хорошо организованными технологическими потоками. Но в этом случае среднее время доставки неисправного вооружения в мастерскую в несколько раз больше, чем время вызова и приезда в подразделение подвижной ремонтной мастерской. И несмотря на уменьшение сроков собственно ремонта, общее время, которое вооружение находится в ремонте, увеличивается в 2,5 раза. Тогда $\mu=2$ образца в месяц, $\alpha=0{,}5$ образца.

Необходимые расчеты приведены в табл. 3.2.2.

Таблица 3.2.2

k	$\frac{p_k}{p_0}$	p_k	kp_k	$(k-n)\,p_k$	$(n-k)\,p_k$
0	1	0,010	0	—	0,030
1	5	0,051	0,051	—	0,102
2	11,25	0,115	0,230	—	0,115
3	15,0	0,153	0,459	—	0
4	17,5	0,178	0,712	0,178	—
5	17,47	0,178	0,890	0,356	—
6	14,56	0,149	0,794	0,447	—
7	9,7	0,099	0,693	0,396	—
8	4,85	0,050	0,400	0,250	—
9	1,58	0,016	0,144	0,096	—
10	0,28	0,003	0,030	0,021	—
Сумма	98,19	1,002	4,403	1,744	0,247

Для сравнения результаты расчетов сведены в табл. 3.2.3.

Таблица 3.2.3

Характеристика варианта	p_0	$M_{ож}$	$K_{пт}$, %	N_0	$K_п$, %	M	K, %
Подвижная мастерская	0,155	0,16	1,6	1,36	46	1,79	17,9
Полустанционарная мастерская	0,01	1,74	17,4	0,25	25	4,4	44

Из таблицы следует, что в связи с общим снижением пропускной способности ремонтных мастерских резко увеличилась их загрузка при неизменной плотности поступления требований на ремонт вооружения: вероятность простоя без ремонта всех мастерских (технологических потоков) p_0 уменьшилась в 16 раз, число свободных от ремонта мастерских (технологических потоков) N_0 — более чем в 5 раз. Зато резко увеличился средний процент небоеспособного вооружения с $K=17,90$ до $K=44$. В условиях боевого применения резко возрастает интенсивность выхода из строя вооружения. Предположим, что в случае осуществления ремонта подвижными мастерскими поток требований на ремонт увеличился в 5 раз. В табл. 3.2.4 даны сравнительные результаты при разных плотностях потока.

Таблица 3.2.4

Значения λ	p_0	$M_{ож}$	$K_{1т}$, %	N_0	$K_{1т}$, %	M	K, %
0,2	0,155	0,16	1,6	1,36	46	1,798	17,98
1,0	0,0005	4,02	40,2	0,012	0,4	7,0	70

Как следует из таблицы, резко увеличилась загрузка мастерских (сравним N_0, $K_п$ и p_0). При $\lambda=1$ инженеры и техники практически не будут иметь свободного времени. Но несмотря на это, процент небоеспособного вооружения резко увеличится с 18 до 70%. Очевидно, в этом случае имеющегося количества мастерских явно недостаточно для обеспечения ремонта вооружения.

3.3. Двухфазные системы массового обслуживания с ожиданием

Примером двухфазной системы массового обслуживания с ожиданием могут служить магазины, в которых, прежде чем получить товар, покупатель должен оплатить его стоимость в кассе. Этот пример является типичным, но не единственным в своем роде. Работа подобных систем массового обслуживания будет рассмотрена на примерах двухфазных одноканальных систем массового обслуживания с неограниченным и ограниченным потоком заявок.

Системы с неограниченным потоком заявок. Рассматривается работа системы массового обслуживания, состоящая из двух приборов разной производительности. Время обслуживания приборами заявок подчинено показательному закону распределения с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно для первого и второго приборов. Поступившее в систему требование вначале обслуживается первым прибором. Если он уже занят, то требование ожидает своей очереди до тех пор, пока все ранее пришедшие требования не будут обслужены. После обслуживания первым прибором требования поступают на второй. Так же как и в предыдущем приборе, они поступают на обслуживание, если второй прибор свободен. Если прибор занят, то требование становится в очередь. *Для неограниченного пуассоновского входящего* потока с плотностью λ можно написать уравнения состояний системы:

$$P'_{00}(t) = -\lambda P_{00}(t) + \mu_2 P_{01}(t),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P'_{0,n_2}(t) = -(\lambda+\mu_2) P_{0,n_2}(t) + \mu_1 P_{1,n_2-1}(t) + \mu_2 P_{0,n_2+1}(t),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P'_{n_1,0}(t) = -(\lambda+\mu_1) P_{n_1,0}(t) + \mu_2 P_{n_1,1}(t) + \lambda P_{n_1-1\ 0}(t), \tag{3.3.1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P'_{n_1,n_2}(t) = -(\lambda+\mu_1+\mu_2) P_{n_1,n_2}(t) + \mu_1 P_{n_1+1,n_2-1}(t) + \mu_2 P_{n_1,n_2-1}(t) + \lambda P_{n_1-1,n_2}(t),$$

где $P_{00}(t)$ — вероятность того, что в момент времени t оба прибора свободны;

$P_{n_1}\ P_{n_2}$ — вероятность состояния системы, при котором в момент времени t в первой фазе находится n_1 требований (включая и те, которые уже обслуживаются), а во второй фазе — n_2 требований.

После решения уравнений получены характеристики, описывающие состояния системы массового обслуживания [22].

1. Вероятность того, что оба прибора (обе фазы) свободны от заявок

$$P_{00} = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2), \qquad (3.3.2)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}; \quad \alpha_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}. \qquad (3.3.3)$$

2. Вероятность того, что в первой фазе находится n_1 требований, а во второй ни одного:

$$P_{n,0} = \alpha_1^{n_1}(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2). \qquad (3.3.4)$$

3. Вероятность того, что во второй фазе имеется n_2 требований, а в первой ни одного:

$$P_{0,n_2} = \alpha_2^{n_2}(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2). \qquad (3.3.5)$$

4. Вероятность того, что в первой фазе находится n_1 требований, а во второй фазе — n_2 требований:

$$P_{n_1,n_2} = \alpha_1^{n_1}\alpha_2^{n_2}(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2). \qquad (3.3.6)$$

5. Математическое ожидание числа требований, находящихся в системе:

$$M = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1,n_2}(n_1 + n_2) = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2}, \qquad (3.3.7)$$

при этом среднее число требований, находящихся в первой фазе, равно

$$M_1 = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}, \qquad (3.3.8)$$

а во второй фазе

$$M_2 = \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2}, \qquad (3.3.9)$$

где

$$\alpha_2 < 1, \ \alpha_1 < 1.$$

Если очередь в процессе функционирования системы стабилизуется, то плотность входящего потока становится одинаковой для обеих фаз.

Пример 1.

В одном из отделов магазина покупателей обслуживают продавец и кассир. В течение рабочего дня в магазин приходят покупатели. Так как район, который обслуживается магазином, достаточно велик, то можно допустить, что входящий поток неограниченный. Поскольку моменты прихода покупателей в магазин случайны и не зависят друг от друга, то можно допустить, что входящий поток покупателей является пуассоновским с параметром λ, равным 20 человек в час. В зависимости от суммы произведенной покупки, необходимости дать сдачу и многих других причин кассир затрачивает на каждого покупателя случайное время. Статистический анализ показал, что время обслуживания покупателя можно характеризовать показательным законом распределения с параметром $\mu_1=40$ человек в час. Подобное же можно сказать и о продавце. Он также затрачивает на каждого покупателя случайное время, но средняя его производительность при полной нагрузке такова, что он может обслужить в среднем $\mu_2=25$ человек в час. Требуется оценить работу и загрузку этого магазина.

Решение

1. Определим параметры

$$\alpha_1=\frac{\lambda}{\mu_1}=0{,}5; \quad \alpha_2=\frac{\lambda}{\mu_2}=0{,}8.$$

2. Вероятность того, что отделы будут свободны от покупателей:

$$P_{00}=(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)=(1-0{,}5)(1-0{,}8)=0{,}1.$$

Это означает, что в среднем 10% рабочего времени отдел был свободен от покупателей.

3. Площадь отдела ограничена, а поэтому около кассы в очереди могут находиться не более 10 покупателей. Такое же число покупателей может находиться в очереди у продавца. Определим вероятность того случая, когда у кассы не будет покупателей, а у прилавка предельная по размеру очередь

$$P_{0,10}=\alpha_2^{10}(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)=0{,}8^{10}(1-0{,}5)(1-0{,}8)\approx 0{,}01.$$

Какова же вероятность события, когда у кассы будет предельная очередь, а у продавца никого не будет?

$$P_{10,0}=0{,}5^{10}(1-0{,}5)(1-0{,}8)=0{,}0001.$$

Однако этих двух вероятностей недостаточно для того, чтобы судить, насколько часто отдел магазина будет заполнен покупателями до отказа. Для этого необходимо рассмотреть различные сочетания чисел покупателей у кассы и у продавца, но такие, при которых сумма $n_1+n_2\geqslant 20$ *чел.* В условиях данного примера она очень мала. Об этом можно судить хотя бы по вероятности состояния

$$P_{10,10}=0{,}11\cdot 10^{-3}.$$

4. Математическое ожидание числа покупателей в отделе в течение рабочего дня

$$M=\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}=\frac{0{,}5}{1-0{,}5}+\frac{0{,}8}{1-0{,}8}=5 \text{ чел.}$$

При этом среднее число стоящих у кассы покупателей будет равно:

$$M_1 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} = \frac{0,5}{1-0,5} = 1 \text{ чел.},$$

а у прилавка продавца:

$$M_2 = \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2} = \frac{0,8}{1-0,8} = 4 \text{ чел.}$$

Определить время простоя в течение рабочего дня кассира. Для этого определим вероятность состояния

$$P_{0,n} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{0,n} = \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) =$$

$$= \frac{0,8}{1-0,8}(1-0,5)(1-0,8) = 0,4. \qquad (3.3.10)$$

Это означает, что 40% времени кассир не будет занят обслуживанием.

Время простоя продавца определится численным значением вероятности состояния $P_{n,0}$

$$P_{n,0} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,0} = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) =$$

$$= \frac{0,5}{1-0,5}(1-0,5)(1-0,8) = 0,1. \qquad (3.3.11)$$

Следовательно, продавец будет иметь в течение дня только 10% свободного времени.

Ограниченный поток требований. Имеется N источников появления требований на обслуживание двухфазной системы, которая состоит из двух приборов разной производительности. Как и в предыдущем случае, время обслуживания каждым прибором требований подчинено показательному закону обслуживания с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно для первого и второго приборов системы. Порядок обслуживания требований сохраняется такой же, как и в предыдущем случае. Основной особенностью рассматриваемого случая является ограниченность потока требований. Пусть общее число требований в системе не может превышать N.

Систему уравнений для этого случая запишем в виде:

$$P'_{00}(t) = -\lambda P_{00}(t) + \mu_2 P_{0,1}(t),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P'_{0,n_2}(t) = -(\lambda + \mu_2) P_{0,n_2}(t) + \mu_1 P_{1,n_2-1}(t) + \mu_2 P_{0,n_2+1}$$
$$\text{при } n_1 = 0,\ n_2 = 1,\ 2, \dots, N-1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P'_{0,N}(t) = -\mu_2 P_{0,N}(t) + \mu_1 P_{1,N-1} \text{ при } n_1 = 0,\ n_2 = N,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P'_{n_1,0}(t) = -(\lambda + \mu_1) P_{n_1,0}(t) + \mu_2 P_{n_1,1}(t) + \lambda P_{n_1-1,0}$$
$$\text{при } n_1 = 1, 2, \dots, N-1,\ n_2 = 0, \qquad (3.3.12)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P'_{N,0}(t) = -\mu_1 P_{N,0}(t) + P_{N-1,0}(t)\lambda,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P'_{n_1,n_2}(t) = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2) P_{n_1,n_2}(t) + \mu_1 P_{n_1+1,n_2}(t) +$$
$$+ \mu_2 P_{n_1,n_2+1}(t) + \lambda P_{n_1-1,n_2}(t) \text{ при } n_1 > 0,\ n_2 > 0,$$
$$n_1 + n_2 < N,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P_{n_1,n_2}(t) = -(\mu_1 + \mu_2) P_{n_1,n_2}(t) + \mu_2 P_{n_1+1,n_2-1}(t) +$$
$$+ \lambda P_{n_1-1,n_2}(t) \text{ при } n_1 > 0,\ n_1 + n_2 = N,\ n_2 > 0.$$

Решение системы уравнений (3.3.12) (стационарный случай).

1. Вероятность того, что оба прибора свободны от обслуживания:

$$P_{00} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2) - (\alpha_1^{N+2} - \alpha_2^{N+2}) + \alpha_1\alpha_2(\alpha_1^{N+1} - \alpha_2^{N+1})}. \qquad (3.3.13)$$

2. Вероятность того, что в первой фазе находятся n_1 требований, а во второй фазе нет требований:

$$P_{n,0} = \alpha_1^{n_1} P_0. \qquad (3.3.14)$$

3. Вероятность того, что во второй фазе находятся n_2 требований, а в первой фазе нет требований:

$$P_{0,n_2} = \alpha_2^{n_2} P_{00}. \qquad (3.3.15)$$

4. Вероятность того, что в первой фазе находятся n_1 требований, а во второй фазе n_2:

$$P_{n_1,n_2} = \alpha_1^{n_1}\alpha_2^{n_2} P_{00}. \qquad (3.3.16)$$

5. Среднее число требований, находящихся в системе, если $n_1+n_2 \leqslant N$:

$$M = \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N} (n_1+n_2) P_{n_1,n_2} = \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2} \times$$
$$\times \left\{ \frac{\alpha_1^2 [1-(N+1)\alpha_1^N + N\alpha_1^{N+1}]}{(1-\alpha_1)^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\alpha_2^2 [1-(N+1)\alpha_2^N + N\alpha_2^{N+1}]}{(1-\alpha_2)^2} \right\} P_{00}. \qquad (3.3.17)$$

6. Среднее число обслуженных требований первым и вторым приборами

$$M_{\text{обс}} = \sum_{n_1=1}^{N} P_{n_1,0} + \sum_{n_2=1}^{N} P_{0,n_2} + 2\sum_{n_1=1}^{N} \sum_{n_2=1}^{N} P_{n_1,n_2} =$$
$$= \frac{(\alpha_1+\alpha_2)[(\alpha_1-\alpha_2)-(\alpha_1^{N+1}-\alpha_2^{N+1})+\alpha_1\alpha_2(\alpha_1^N-\alpha_2^N)]}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)} P_{00}. \qquad (3.3.18)$$

7. Среднее число ожидающих требований в системе

$$M_{\text{ож}} = \sum_{n_1=2}^{N} (n_1-1) P_{n_1,0} + \sum_{n_2=2}^{N} (n_2-1) P_{0,n_2} +$$
$$+ \sum_{n_1=2}^{N} (n_1-1) P_{n_1,1} + \sum_{n_2=2}^{N} (n_2-1) P_{1,n_2} + \sum_{\substack{n_1=2 \\ n_1+n_2 \leqslant N}}^{N-2} \sum_{n_2=2}^{N-2} (n_1 +$$
$$+ n_2 - 2) P_{n_1,n_2} = \left\{ \frac{\alpha_2^2 (1-\alpha_1)[1-N\alpha_1^{N-1}+(N-1)\alpha_1^N]}{(1-\alpha_1)^2} + \right.$$
$$+ \frac{\alpha_1^2 (1-\alpha_2)[1-N\alpha_2^{N-1}+(N-1)\alpha_2^N]}{(1-\alpha_2)^2} +$$
$$+ \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2} \left[\frac{1-(N-1)\alpha_1^{N-2}+(N-2)\alpha_1^{N-1}}{(1-\alpha_1)^2} - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{1-(N-1)\alpha_2^{N-2}-(N-2)\alpha_2^{N-1}}{(1-\alpha_2)^2} \right] \right\} P_{00}. \qquad (3.3.19)$$

Пример 2

Аэропорт обслуживает $N=120$ самолетов. Проведенные статистические исследования показывают, что поток посадок самолетов в аэропортах как в дневное, так и в ночное время является простейшим, а также стационарным. То же можно сказать и о потоке поступления самолетов по рейсовым регламентам из числа совершивших посадку. Пусть плотность поступления самолетов на техническое обслуживание равно $\lambda=2$ самолета в сутки. Положим, что обслуживание ведется круглосуточно с передачей незаконченных работ из смены в смену. Обслуживание ведется двумя специализированными бригадами. Каждый самолет, чтобы пройти техническое обслуживание, вначале осматривается первой бригадой, которая и производит регламентные работы двигателей. Производительность трехсменной бригады $\mu_1=3$ самолета в сутки. Вторая бригада проводит регламентные работы по планеру, шасси и др. У этой бригады производительность выше, в среднем $\mu_2=4$ самолета в сутки. Требуется оценить работу оперативных бригад по проведению работ по техническому обслуживанию самолетов в аэропорту.

Решение

1. Определим параметры.

$$\alpha_1=\frac{\lambda}{\mu_1}=\frac{2}{3}=0,67;\quad \alpha_2=\frac{\lambda}{\mu_2}=\frac{2}{4}=0,5.$$

2. Вероятность того, что обе бригады будут свободны от обслуживания [формула (3.3.13)]:

$$P_{00}=\frac{(0,67-0,5)(1-0,67)(1-0,5)}{(0,67-0,5)-(0,67^{122}-0,5^{122})+0,5\cdot0,67(0,67^{121}-0,5^{121})}=$$
$$=0,165.$$

3. Среднее число самолетов, находящихся в системе обслуживания [формула (3.3.17)]:

$$M=\frac{1}{0,67\cdot0,5}\left\{\frac{0,67^2\,[1-(120+1)\,0,67^{120}+120\cdot0,67^{121}]}{(1-0,67)^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{0,5^2\,[1-(120+1)\,0,5^{120}+120\cdot0,5^{121}]}{(1-0,5)^2}\right\}\approx3 \text{ самолета.}$$

4. Среднее число самолетов, обслуживаемых обеими бригадами в единицу времени (сутки), [формула (3.3.18)]:

$$M_{\text{обс}}=\frac{(0,67-0,5)\,[(0,67-0,5)-(0,67^{121}-0,5^{121})+\ldots\rightarrow}{(1-0,67)(1-0,5)(0,67-0,5)}$$
$$\rightarrow\ldots\frac{+0,67\cdot0,5\,(0,67^{120}-0,5^{120})]}{}0,165=1,2 \text{ самолета.}$$

5. Среднее число ожидающих самолетов в системе [формула (3.3.19)]

$$M_{\text{ож}} = \left\{ \frac{(0,5^2 (1+0,67)\,[1+120\cdot 0,67^{119}+121\cdot 0,67^{120}]}{(1-0,67)^2} + \frac{0,67^2 (1+0,5)\,[1-120\cdot 0,5^{119}+119\cdot 0,5^{120}]}{(1-0,5)^2} + \frac{0,67\cdot 0,5}{0,67-0,5}\left[\frac{1-119\cdot 0,67^{118}+118\cdot 0,67^{119}}{(1-0,67)^2} - \frac{1-119\cdot 0,5^{118}-118\cdot 0,5^{119}}{(1-0,5)^2}\right]\right\} 0,165 = 2,8 \text{ самолета.}$$

6. Время простоя первой бригады в течение суток

$$P_{0,N} = \sum_{k=0}^{N} P_{0,k} = \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2} P_{00} = \frac{0,5}{1-0,5}\, 0,165 = 0,165 \text{ суток.}$$

7. Время простоя второй бригады

$$P_{N,0} = \sum_{k=0}^{N} P_{k,0} = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} P_{00} = \frac{0,67}{1-0,67}\, 0,165 = 0,33 \text{ суток.}$$

Анализ результатов показывает, что время простоя второй бригады больше, чем первой, в два раза и составляет одну треть рабочего времени. На основании этого могут быть сделаны выводы о том, что вторую бригаду следует привлекать для выполнения других работ либо сократить число ремонтников в ней.

3.4. Система, состоящая из нескольких неодинаковых приборов

Рассмотрим случай, когда система массового обслуживания с ожиданием состоит из приборов разной производительности. Примеров подобных систем можно привести много. Однако математический аппарат оценки функционирования подобных систем не разработан и не потому, что это вызывает теоретические трудности, а потому, что это связано с громоздкими выкладками. В этом параграфе рассмотрен случай, когда система массового обслуживания с ожиданием состоит из двух приборов разной производительности. Положим, что первый прибор имеет более высокую производительность, чем второй, т. е. $\mu_1 > \mu_2$, где μ_1 и μ_2 — параметры показательного закона распределения времени обслуживания требований соответственно для первого и второго приборов.

Пусть в систему поступает пуассоновский поток требований на обслуживание с параметром λ. Каждое требование, поступившее в сферу обслуживания, сразу же начинает обслуживаться свободным прибором. Если оба прибора свободны, то оно попадает на обслуживание в первый прибор с вероятностью φ, а на второй $1-\varphi$. Это означает, что при $\varphi=0{,}5$ требование безразлично к выбору прибора, при $\varphi=1$ первый прибор пользуется безусловным приоритетом. Если требование застанет оба прибора занятыми, то оно становится в очередь.

Уравнения, описывающие состояния системы, записываются в таком виде:

$$\begin{aligned}
P'_{00}(t) &= -\lambda P_{00}(t) + \mu_1 P_1(t) + \mu_2 P_{01}(t),\\
P'_{01}(t) &= -(\lambda+\mu_2) P_{01}(t) + \mu_1 P_2(t) + (1-\varphi)\lambda P_{00}(t),\\
P'_{10}(t) &= -(\lambda+\mu_1) P_{10}(t) + \mu_2 P_2(t) + \varphi\lambda P_{00}(t), \qquad (3.4.1)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
P'_k(t) &= -(\lambda+\mu_1+\mu_2) P_k(t) + (\mu_1+\mu_2) P_{k+1}(t) + \lambda P_{k-1}(t)\\
&\qquad \text{при } k \geqslant 2.
\end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений для установившегося режима принимает вид:

$$\begin{aligned}
P_{01} &= \frac{\alpha}{1+2\alpha}\cdot\frac{1+\beta}{\beta}(\alpha+1-\beta)P_{00},\\
P_{10} &= \frac{\alpha}{1+2\alpha}\cdot(1+\beta)(\alpha+\varphi)P_{00},\\
P_2 &= \frac{\alpha^2}{1+2\alpha}\cdot\frac{1+\beta}{\beta}[1+(1+\beta)\alpha-(1-\beta)\varphi]P_{00}, \qquad (3.4.2)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
P_k &= \frac{\alpha^k}{1+2\alpha}\cdot\frac{1+\beta}{\beta}[1+(1+\beta)\alpha-(1-\beta)\varphi]P_{00},
\end{aligned}$$

где

$$\beta=\frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \alpha=\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2};$$

P_{00} — вероятность того, что оба прибора свободны;

P_{10} — вероятность состояния системы, в котором первый прибор занят обслуживанием, а второй свободен;

P_{01} — вероятность состояния системы, в котором первый прибор свободен, а второй занят обслуживанием;

P_k — в системе находится k требований.

В результате решения системы (3.4.2) получим следующие вероятности состояний системы:

1. Вероятность состояния системы, при котором оба прибора свободны, равна

$$P_{00}=\frac{1-\alpha}{1+\frac{\alpha}{1+2\alpha}\frac{1}{\beta}\left[1+(1+\beta^2)\alpha-(1-\beta^2)\varphi\right]}. \quad (3.4.3)$$

2. Среднее число требований, находящихся в системе, равно

$$M=\alpha(1-\beta)\frac{1+(1+\beta)\alpha-(1-\beta)\varphi}{\beta(1+2\alpha)+\alpha\left[1+(1+\beta^2)\alpha-(1-\beta^2)\varphi\right]}. \quad (3.4.4)$$

3. Вероятность того, что оба прибора системы заняты обслуживанием

$$\Pi_2=1-P_{00}-P_1,$$

где $P_1=P_{10}+P_{01}$,

$$P_1=\frac{\alpha}{1+2\alpha}\frac{1+\beta}{\beta}\left[1+(1-\beta)\alpha-(1-\alpha)\varphi\right]P_{00}. \quad (3.4.5)$$

4. Вероятность того, что число требований в очереди, ожидающих начала обслуживания, больше некоторой величины m

$$P_{>m}=\sum_{k=m+1}^{\infty}P_k=1-\sum_{k=0}^{m}P_k=$$

$$=1-\left\{1+\frac{\alpha(\alpha^m-1)}{\alpha-1}\frac{1+\beta}{\beta}\times\left[1+(1+\beta)\alpha-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(1-\alpha)\varphi\right]\right\}P_{00}. \quad (3.4.6)$$

Пример

В комиссионном магазине два товароведа принимают вещи на комиссию у населения. Они проверяют их состояние, оценивают и выписывают квитанции. В зависимости от количества вещей, их качества и многих других причин на обслуживание каждого клиента товаровед затрачивает случайное время. Положим, что оно подчиняется показательному закону распределения с параметром μ. Однако опыт у товароведов разный, поэтому первый в среднем обслуживает клиентов в полтора раза быстрее, чем второй. Пусть первый товаровед обслуживает в среднем $\mu_1=9$ клиентов в час, а второй только $\mu_2=6$ клиентов. Появления клиентов с вещами на комиссию — явления случайные, независимые друг от друга, и можно полагать, что они образуют пуассоновский поток с параметром $\lambda=12$ клиентов в час. Выбор клиентами товароведов равновероятен, т. е. $\varphi=0,5$. Требуется оценить работу приемного пункта комиссионного магазина.

Решение

1. Определим параметры

$$\alpha=\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}=\frac{12}{9+6}=0,8,$$

$$\beta=\frac{\mu_2}{\mu_1}=\frac{6}{9}=0,67.$$

2. Вероятность того, что оба товароведа будут свободны

$$P_{00}=\frac{1-\alpha}{1+\frac{\alpha}{1+2\alpha}\frac{1}{\beta}[1+(1+\beta^2)\alpha-(1-\beta^2)\varphi]}=$$

$$=\frac{1-0,8}{1-\frac{0,8}{1+1,6}\frac{1}{0,67}[1+(1+0,67^2)0,8-(1-0,67^2)0,5]}=$$

$$=0,113.$$

3. Среднее число требований, находящихся в системе, равно

$$M=\alpha(1-\beta)\frac{1+(1+\beta)\alpha-(1-\beta)\varphi}{\beta(1+2\alpha)+\alpha[1+(1+\beta^2)\alpha-(1-\beta^2)\varphi]}=$$

$$=0,8(1-0,67)\times$$

$$\times\frac{1+(1+0,67)0,8-(1-0,67)0,5}{0,67(1+2\cdot0,8)+0,8[1+(1+0,67^2)0,8-(1-0,67^2)0,5]}\approx$$

$$\approx 0,18 \text{ клиентов.}$$

4. Вероятность того, что первый товаровед занят обслуживанием, а второй свободен:

$$P_{10}=\frac{\alpha}{1+2\alpha}(1+\beta)(\alpha+\varphi)P_{00}=$$

$$=\frac{0,8}{1+2\cdot0,8}(1+0,67)(0,8+0,5)\,0,113\approx0,08.$$

5. Вероятность того, что первый товаровед свободен, а второй занят обслуживанием клиентов:

$$P_{01}=\frac{\alpha}{1+2\alpha}\frac{1+\beta}{\beta}(\alpha+1-\varphi)P_{00}=$$

$$=\frac{0,8}{2,6}\cdot\frac{1+0,67}{0,67}(0,8+1-0,5)\cdot0,113=0,11.$$

Таким образом, в течение рабочего дня первый товаровед будет иметь в своем распоряжении 22% свободного времени

$(P_{01}+P_{00})$, а второй $(P_{00}+P_{10})=19\%$. Остальные 70% времени оба товароведа будут работать одновременно. В этом случае клиенты практически не будут стоять в очереди ($M=0{,}18$ клиента).

3.5. Работа системы массового обслуживания при поступлении смешанного потока требований

Очень часто в системы массового обслуживания поступают потоки требований, которые имеют разный приоритет в обслуживании. Например, в первую очередь в стоматологической поликлинике обслуживаются паци-

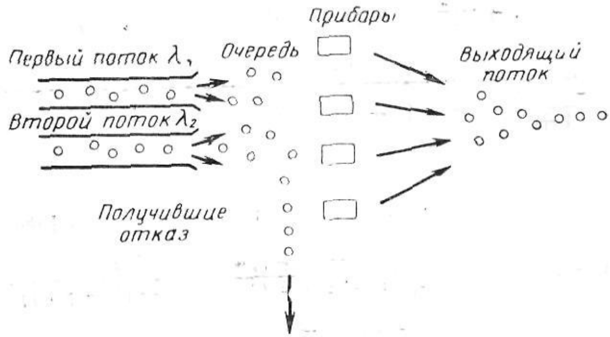

Рис. 3.5.1. Схема работы системы по обслуживанию смешанного потока требований.

енты с острой болью, на аэродроме принимаются на посадку самолеты при наличии в них неисправностей, на телефонных станциях в первую очередь соединяются международные линии связи и т. д. Во всех этих случаях поток поступающих требований является смешанным. Рассмотрим случай функционирования n-канальной системы массового обслуживания, в которую поступает поток требований, состоящий как бы из двух потоков с плотностями λ_1 и λ_2. Особенностью этих требований является то, что требования второго типа, застав все приборы уже занятыми обслуживанием, уходят из системы, теряются, а требования первого типа могут ожидать своей очереди. Пусть приборы системы обслуживают требования как первого, так и второго типа с одинаковой производительностью, которая характеризуется параметром μ. Схема такой системы показана на рис. 3.5.1, а ее работа может быть описана системой уравнений:

$$P'_0(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2) p_0(t) + \mu p_1(t),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P'_k(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + k\mu) p_k(t) + (\lambda_1 + \lambda_2) p_{k-1}(t) + p_{k+1}(t)(k + 1)\mu \quad \text{при } 0 < k \leqslant n.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P'_n(t) = -(\lambda_1 + n\mu) p_n(t) + (\lambda_1 + \lambda_2) p_{n-1}(t) + n\mu p_{n+1}(t),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P'_k(t) = (\lambda_1 + n\mu) p_k(t) + \lambda_1 p_{k-1}(t) + n\mu p_{k+1}(t) \quad \text{при } k > n. \tag{3.5.1}$$

Нормирующее условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Для стационарных условий (при $t \to \infty$) получены следующие формулы для определения вероятности состояний системы (22):

1. Вероятность состояния, при котором все приборы свободны от обслуживания:

$$P_0 = \frac{n - \alpha_1}{[n - \alpha_1 + \alpha_1 E_n(\alpha_1 + \alpha_2)]\, N_n(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\mu}, \quad \alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\mu}. \tag{3.5.2}$$

2. Вероятность состояния, при котором k приборов занято обслуживанием требований при условии $0 < k \leqslant n$):

$$P_k = \frac{n - \alpha_1}{n - \alpha_1 + \alpha_2 E_n(\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot \frac{\dfrac{(\alpha_1 + \alpha_2)^k}{k!}}{N_n(\alpha_1 + \alpha_2)} \tag{3.5.3}$$

3. Вероятность состояния, при котором k приборов занято обслуживанием требований при условии $k > n$:

$$P_k = \frac{(n - \alpha_1) E_n(\alpha_1 + \alpha_2)}{n - \alpha_1 + \alpha_1 E_n(\alpha_1 + \alpha_2)} \left(\frac{\alpha_1}{n}\right)^{k-n}, \tag{3.5.4}$$

$$N_n(\alpha_1 + \alpha_2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^k}{k!}; \tag{3.5.5}$$

$$E_n(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\dfrac{(\alpha_1 + \alpha_2)^n}{n!}}{N_n}; \tag{3.5.6}$$

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\mu}; \quad \alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\mu}. \tag{3.5.7}$$

4. Вероятность потери требования равна

$$P_{\text{отк}} = \sum_{k=n}^{\infty} P_k = \frac{nE_n(\alpha_1 + \alpha_2)}{n - \alpha_1 + \alpha_1 E_n(\alpha_1 + \alpha_2)}. \tag{3.5.8}$$

5. Вероятность того, что время ожидания требования первого типа больше времени t:

$$P_{(>t)} = P_{\text{отк}} e^{-(n-\alpha_1)\mu t}. \tag{3.5.9}$$

6. Среднее время ожидания требований первого типа

$$T_{\text{ож}} = \frac{P_{\text{отк}}}{\mu(n-\alpha_1)}. \tag{3.5.10}$$

7. Среднее число занятых приборов

$$N_з = \sum_{k=1}^{n} kP_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} nP_k. \tag{3.5.11}$$

8. Среднее число свободных приборов

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n} (n-k) P_k. \tag{3.5.12}$$

9. Коэффициент простоя приборов

$$K_{п} = \frac{N_0}{n}. \tag{3.5.13}$$

10. Коэффициент загрузки приборов

$$K_з = \frac{N_з}{n}. \tag{3.5.14}$$

Пример 1

В одном из районов большого города работает парикмахерская, которая обслуживает жителей этого района. Естественно, что появление клиентов в парикмахерской случайно и взаимонезависимо. Поэтому можно считать, что они образуют пуассоновский поток. Однако клиенты могут быть разбиты на два вида. Один из них, застав всех мастеров занятыми обслуживанием, становятся в очередь и ожидают. Другие, наоборот, не могут ждать, они спешат и, если все мастера заняты уже обслуживанием, уходят. Пусть клиенты первого вида составляют поток плотностью $\lambda_1 = 10$ клиентов в час, а второго вида $\lambda_2 = 2$ клиента в час. Время, которое необходимо для обслуживания клиента, случайно. Оно зависит от объема обслуживания клиента и многих других причин. В среднем на каждого человека мастеру необходимо 15 *мин*, т. е. средняя плотность обслуживания клиентов каждым мастером равна $\mu = 4$ клиента в час. В парикмахерской работают $n = 4$ мастера.

Требуется оценить работу парикмахерской.

Решение

1. Определение параметров

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\mu} = \frac{10}{4} = 2{,}5,$$

$$\alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\mu} = \frac{2}{4} = 0{,}5.$$

2. Вероятность состояния, при котором все мастера свободны от обслуживания (3.5.2), (3.5.5.) и (3.5.6):

$$P_0 = \frac{4 - 2{,}5}{[4 - 2{,}5 + 2{,}5 \cdot 0{,}205 \cdot 3]\, 16{,}37 \cdot 3} = 0{,}01,$$

$$N_n(\alpha_1 + \alpha_2) = \sum_{k=0}^{4} \frac{(2{,}5 + 0{,}5)^k}{k!} = 16{,}57,$$

$$E_n(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\dfrac{(2{,}5 + 0{,}5)^4}{4!}}{16{,}37} = 0{,}205.$$

3. Вероятность состояния, при котором k мастеров заняты обслуживанием клиентов. Вероятности P_k, вычисленные по формулам (3.5.3) и (3.5.4) представлены в табл. 3.5.1.

Таблица 3.5.1

k	P_k	kP_k	$(n-k)\,P_k$
0	0,010	0	0,040
1	0,030	0,030	0,090
2	0,046	0,092	0,092
3	0,046	0,138	0,046
4	0,034	0,136	0
Сумма	0,166	0,396	0,268

4. Вероятность потерь для клиентов второго вида равна

$$P_{\text{отк}} = \frac{4 \cdot 0{,}205\,(2{,}5 + 0{,}5)}{4 - 2{,}5 + 2{,}5 \cdot 0{,}205 \cdot 3} = 0{,}83$$

Вероятность ухода клиентов второго вида очень велика.

5. Среднее число занятых мастеров

$$N_з = P_0 \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^k}{(k-1)!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} nP_k = 0{,}396 + 4 \cdot 0{,}834 = 3{,}73 \text{ мастера}.$$

6. Среднее число свободных мастеров

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n} (n-k)\,P_k = 0{,}268 \text{ мастера}.$$

7. Коэффициент простоя мастеров

$$K_{п} = \frac{N_0}{n} = \frac{0,268}{4} = 0,064.$$

Это означает, что в среднем только немного более 6% времени каждый мастер будет свободен во время работы (исключая обеденные перерывы).

8. Коэффициент загрузки мастеров в течение рабочего времени очень высок и равен

$$K_{з} = \frac{N_з}{n} = \frac{3,73}{4} = 0,94.$$

9. Среднее время ожидания для клиентов первого вида

$$T_{ож} = \frac{P_{отк}}{\mu (n - \alpha_1)} = \frac{0,834}{4\,(4 - 2,5)} = 0,122 \text{ час}.$$

Время ожидания клиентами первого вида обслуживания невелико.

3.6. Неустановившийся режим работы в разомкнутой системе массового обслуживания с ожиданием

В предыдущих параграфах рассматривалось функционирование системы массового обслуживания с ожиданием при установившемся режиме работы, т. е. когда основные вероятностные характеристики работы системы постоянны во времени. Для большинства практических задач удалось получить конечные зависимости, характеризующие функционирование систем массового обслуживания, только для условий установившегося режима работы. Переход к неустановившемуся режиму связан с большими математическими трудностями. Однако необходимость рассмотрения функционирования систем массового обслуживания в неустановившемся режиме вызвана потребностями практики. Как правило, необходимость рассмотрения работы системы массового обслуживания в неустановившемся режиме появляется тогда, когда время ее функционирования меньше в 2—4 средних значения времени обслуживания требования системы. Опыт расчетов количественных характеристик функционирования систем массового обслуживания с ожиданием в различных режимах работы показал, что в системе с увеличенным числом приборов обслуживания процесс установления режима проходит при прочих одинаковых условиях быстрее, чем в одноканальной.

Формулы для определения параметров функционирования системы в неустановившемся режиме удалось получить только для одноканальной системы. Сравнивая полученные по этим зависимостям значения параметров функционирования с соответствующими параметрами, рассчитанными для стационарных условий, можно оценить ошибку использования последних. Эту ошибку можно рассматривать как верхнюю границу возможного отклонения результатов расчетов параметров функционирования систем для неустановившегося режима при использовании зависимостей, полученных для стационарных условий функционирования многоканальных систем массового обслуживания с ожиданием.

Получение зависимости для неустановившегося режима рассмотрим на примере одноканальной системы массового обслуживания с неограниченным потоком требований. В систему поступает пуассоновский поток требований с плотностью λ. Время обслуживания каждого требования случайное с показательным законом распределения с параметром μ. В зависимости от соотношения величин λ и μ возможен случай, когда $\lambda > \mu$. Это означает, что очередь требований будет неограниченно расти для неограниченного входящего потока.

Если в момент начала функционирования в системе не было ожидающих требований, то вероятности состояний рассмотренной выше системы могут быть описаны системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)\, p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + \mu p_{k+1}(t), \quad (3.6.1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1,$$

где $p_k(t)$ — вероятность того, что в системе в момент времени t на обслуживании находятся k требований;

$p_0(t)$ — вероятность того, что в системе в момент времени t нет ни одного требования (система свободна).

Мы не будем приводить подробного решения уравнения, читатель найдет его в [13, 22]. Здесь приводятся лишь конечные формулы решения системы дифференциальных уравнений (3.6.1).

Вероятность того, что в момент времени t в системе на обслуживании находятся k требований, равна

$$p_k(t) = e^{-(\lambda+\mu)t}\left[\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right)^{-k} I_{-k}(2\sqrt{\lambda\mu}t) + \right.$$
$$+\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right)^{1-k} I_{1+k}(2\sqrt{\lambda\mu}t) + (1-\alpha)\alpha^k \sum_{n=k+2}^{\infty} \times$$
$$\left.\times \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right)^{k} I_k(2\sqrt{\lambda\mu}t)\right], \qquad (3.6.2)$$

где $I_k(x) = i^{-k} I_k(ix)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода, где $i=\sqrt{-1}$, $k=0,1,2,\ldots$

Если $t \to \infty$, то

$$p_k(t) \to p_k = (1-\alpha)\alpha^k,$$

где $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$.

Среднее число требований, находящихся в системе, равно

$$\bar{k}(t) = (\lambda-\mu)t + \mu\int_0^t P_0(\tau)\,d\tau = (\lambda-\mu)t + \mu\int_0^t e^{-(\lambda+\mu)t} \times$$
$$\times [I_0(2\sqrt{\lambda\mu}t) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} I_1(2\sqrt{\lambda\mu}t) + (1-\alpha)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{\frac{k}{2}}} I_k \times$$
$$\times (2\sqrt{\lambda\mu}t)]\,d\tau. \qquad (3.6.3)$$

Если при $t=0$ в системе находится i требований, то вероятность состояния p_k может быть определена по формуле

$$p_k(t) = e^{-(\lambda+\mu)t}\left[\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{i-k} I_{k-i}(2\sqrt{\lambda\mu}\,t) + \right.$$
$$+\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right)^{i-n+1} I_{k+i+1}(2\sqrt{\lambda\mu}t) + (1-\alpha)\alpha^k \sum_{n=k+i+2}^{\infty} \times$$
$$\left.\times\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right)^{n} I_n(2\sqrt{\lambda\mu}t)\right]. \qquad (3.6.4)$$

Вероятность того, что число требований в системе не менее m, равна

$$\sum_{k=m}^{\infty} p_k(t) = e^{-(\lambda+\mu)t} \left[\sum_{k=m-i}^{\infty} \alpha^k I_k(2\sqrt{\lambda\mu}t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=m+i+1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{k-2m} I_k(2\sqrt{\lambda\mu}t) \right]. \qquad (3.6.5)$$

При вычислении числовых значений функции Бесселя следует пользоваться рекуррентными зависимостями

$$I_{-n}(x) = I_n(x),$$

$$xI_{n+1}(x) = xI_{n-1}(x) - 2nI_n(x)$$

при целых значениях n.

Значения функции $I_1(x)$ и $I_0(x)$ можно определить по таблицам А. Н. Кармазина и Э. А. Чистова (Изд-во Академии Наук СССР, 1958).

Примеров вычисления вероятностей состояния $p_k(t)$ для неустановившегося процесса из-за громоздкости вычислений приводить не будем.

3.7. Групповое поступление заявок

В гл. 2, посвященной функционированию систем массового обслуживания с отказами, уже рассматривался случай поступления заявок группами. Подобные случаи характерны и для систем массового обслуживания с ожиданием. Примеров подобных систем можно привести очень много. Например, прибытие товарных составов на сортировочные железнодорожные станции, караванов барж в порты для погрузочно-разгрузочных работ и др. В общем случае для подобных систем массового обслуживания постановку задачи по оценке их функционирования можно сформулировать так.

Имеется система массового обслуживания с ожиданием, состоящая из n однотипных приборов. Все приборы обладают одинаковой производительностью, которая характеризуется параметром μ. Время обслуживания требования приборами подчиняется показательному закону распределения, а его среднее значение равно

$$\bar{t}_{\text{обс}} = \frac{1}{\mu}.$$

В систему поступает пуассоновский поток с плотностью λ групп требований в единицу времени. В каждой группе содержится m требований. Если поступившие в систему требования застанут все приборы занятыми

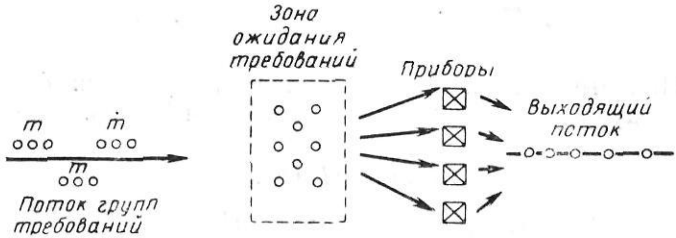

Рис. 3.7.1. Схема работы при групповом поступлении требований.

обслуживанием предыдущих требований, то они становятся в очередь. Схема работы системы показана на рис. 3.7.1. Требуется оценить эффективность функционирования системы.

Решение

Обозначим вероятности соответствующих состояний системы:

P_0 — вероятность того, что все приборы свободны от обслуживания;

P_k — вероятность того, что k приборов заняты обслуживанием при $0 \leqslant k \leqslant n$;

P_n — вероятность того, что все приборы заняты обслуживанием;

P_{n+s} — вероятность того, что все приборы заняты обслуживанием, а s требований ожидают очереди.

Вероятности возможных состояний системы описываются системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\
p'_1(t) = -(\lambda + \mu) p_1(t) + 2\mu p_2(t), \\
p'_m(t) = -(\lambda + m\mu) p_m(t) + (m+1) p_{m+1}(t)\mu + \lambda p_0(t), \\
p'_{m+1}(t) = -[\lambda + (m+1)\mu] p_{m+1}(t) + \\
+ \mu(m+2) p_{m+2}(t) + \lambda p_1(t), \qquad (3.7.1) \\
p'_n(t) = -[\lambda + n\mu] p_n(t) + n\mu p_{n+1}(t) + \lambda p_{n-m}(t), \\
p'_{n+s}(t) = -[\lambda + n\mu] p_{n+s}(t) + n\mu p_{n+s+1}(t) + \\
+ \lambda p_{n+s-m}(t).
\end{gathered}$$

Для установившегося процесса при $t \to \infty$ эта система дифференциальных уравнений превращается в систему алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}
-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0, \\
-(\lambda + \mu) P_1 + 2\mu P_2 = 0, \\
-[\lambda + m\mu] P_m + (m+1)\mu P_{m+1} + \lambda P_0 = 0, \\
-[\lambda + (m+1)\mu] P_{m+1} + (m+2)\mu P_{m+2} + \lambda P_1 = 0, \quad (3.7.2) \\
-[\lambda + n\mu] P_n + n\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-m} = 0 \text{ при } n \geqslant m, \\
-[\lambda + n\mu] P_{n+m} + n\mu P_{n+m+1} + \lambda P_n = 0, \\
-[\lambda + n\mu] P_{n+s} + n\mu P_{n+s+1} + \lambda P_{n+s-m} = 0,
\end{gathered}$$

при $s \to \infty$.

К этой системе добавляется еще одно очевидное условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = P_0 \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\mu, \lambda) = 1. \qquad (3.7.3)$$

Отсюда

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(\mu, \lambda)}. \qquad (3.7.4)$$

Величину $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(\mu, \lambda)$ можно получить из рекуррентных формул системы алгебраических уравнений (3.7.2).

Пример

В порту имеется $n=6$ причалов, которые оснащены оборудованием для слива нефти с нефтеналивных барж. Производительность оборудования каждого причала такова, что в среднем в течение рабочего дня разгружается две баржи ($\mu=2$ баржи).

Баржи в порт на разгрузку поступают караванами, каждый из которых состоит из $m=3$ однотипных (одинаковых по тоннажу) барж. Так как пункты отправления находятся далеко от порта, то вследствие многих причин, независимых друг от друга, караваны барж поступают неравномерно. Опыт работы многочисленных портов стран мира показывает, что поток поступления судов близок к пуассоновскому [22]. Пусть плотность поступления барж в порт в среднем равна $\lambda_1=3$ караванам в день. Требуется оценить работу порта, если каждая из барж каравана может разгружаться на любом из свободных причалов.

Решение

Так как не получено формульных зависимостей для определения параметров функционирования системы массового обслуживания с ожиданием при поступлении в нее групп требований, вероятность состояний системы определяется рекуррентными зависимостями. В нашем примере они получаются в таком виде:

$$-3P_0+2P_1=0,\ -(3+2)P_1+2\cdot 2\cdot P_2=0,$$
$$-(3+2\cdot 2)P_2+3\cdot 2\cdot P_3=0,$$

$$-(3+3\cdot 2)P_3+4\cdot 2\cdot P_4+3P_0=0,$$
$$-(3+4\cdot 2)P_4+5\cdot 2\cdot P_5+3P_1=0,$$
$$-(3+5\cdot 2)P_5+6\cdot 2\cdot P_6+3P_2=0,$$
$$-(3+6\cdot 2)P_6+6\cdot 2P_7+3P_3=0,$$
$$-(3+6\cdot 2)P_7+6\cdot 2P_8+3P_4=0 \text{ и т. д.}$$

При проведении расчетов необходимо определять значения P_k с заданной точностью. Если наметилась тенденция быстрого убывания P_k с некоторого значения P_i и величины P_k очень малы, то можно по закономерности их убывания оценить сумму отброшенных значений $P_k=f(P_0)$, после чего необходимо воспользоваться нормирующим условием

$$\sum_{k=0}^{k\to\infty} P_k=1.$$

В нашем примере получены такие значения величины P_k (табл. 3.7.1).

Таблица 3.7.1

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{\lambda P_k}{P_0}$	1	1,5	1,88	1,72	1,37	0,93	0,58	0,27	0,07

$$\sum_{k=0}^{k\to\infty}\frac{P_k}{P_0}\approx\sum_{k=0}^{k=8}\frac{P_k}{P_0}=9,32,$$

откуда

$$P_0=\frac{1}{9,32}\approx 0,107.$$

Соответственно остальные значения p_i приведены в табл. 3.7.2.

Таблица 3.7.2

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P_k	0,107	0,16	0,20	0,18	0,15	0,10	0,06	0,03	0,01

1. Среднее число барж, находящихся в порту (под разгрузкой или ожидающих разгрузки):

$$M=\sum_{k=0}^{k=\infty} kP_k \approx 2{,}8 \text{ баржи.}$$

2. Среднее число барж, ожидающих разгрузки из-за занятости причалов:

$$M_{\text{ож}}=\sum_{k=7}^{\infty} (k-n)P_k \approx 0{,}05 \text{ баржи,}$$

т. е. практически ожидающих барж не будет.

3. Среднее число барж, находящихся на разгрузке

$$M_{\text{обс}}=\sum_{k=0}^{k=6} kP_k \approx 2{,}5 \text{ баржи.}$$

4. Среднее число занятых причалов

$$N_{\text{з}}=\sum_{k=0}^{6} kP_k+\sum_{k=7}^{\infty} 6P_k \approx 2{,}74 \text{ причала.}$$

5. Коэффициент загрузки причалов

$$K_{\text{з}}=\frac{N_{\text{з}}}{n}=\frac{2{,}74}{6}\approx 0{,}46.$$

6. Коэффициент простоя причалов

$$K_{\text{п}}=\frac{N_0}{n}=\frac{n-N_{\text{з}}}{n}=0{,}54.$$

7. Коэффициент простоя барж, который равен вероятности отказа в обслуживании барж из-за занятости всех причалов

$$K_{\text{п}}=\sum_{k=6}^{\infty} P_k=0{,}04, \text{ очень мал.}$$

3.8. Системы, в которых перед второй фазой невозможно установление очереди

В этом параграфе рассматривается функционирование двухфазной системы, но в отличие от ранее рассмотренной (§ 3.3) в ней невозможно образование очереди перед второй фазой. Примером подобной системы может служить конвейер или другой вид поточного производства, в котором перед второй фазой невозможно ожидание требований, прошедших обслуживание в первой фазе. Если первая фаза обладает большей производительностью, чем вторая, то последняя становится узким местом в производстве и приводит к блокировке первой фазы. Это объясняется тем обстоятельством, что первая фаза может обслуживать требования только в том случае,

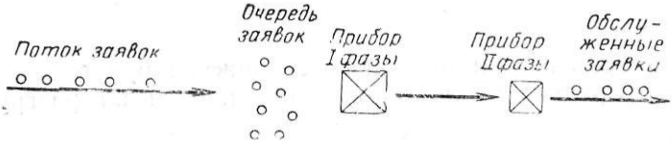

Рис. 3.8.1. Схема двухфазной системы с блокировкой первой фазы.

если свободна вторая фаза. Обслуженное требование первой фазы поступит во вторую. Работа всей системы обслуживания рассматривается при условии поступления в нее пуассоновского потока требований с плотностью λ и показательного закона времени обслуживания требований приборами обеих фаз.

Производительность приборов первой и второй фаз разная и характеризуется параметрами обслуживания μ_1 и μ_2 соответственно для первой и второй фаз. В каждой фазе функционирует по одному прибору обслуживания. Принципиальная схема работы системы массового обслуживания представлена на рис. 3.8.1.

Решение

Обозначим число требований в системе:

в первой фазе $n_1=0, 1, 2, \ldots, \infty$,

во второй фазе $n_2=0, 1$.

Вероятности возможных состояний системы обозначим так:

$P_{n_1, 0}$ — вероятность того, что в первой фазе имеется $n_1=n$ требований, а во второй фазе $n_2=0$;

$P_{n_1, 1}$ — вероятность состояния, при котором в первой фазе находится $n_1=n$, а во второй фазе $n_2=1$ требованию.

$P_{n_1, б}$ — вероятность того, что в первой фазе имеется

$n_1=n$ требований, а во второй фазе имеется одно требование и система заблокирована.

Уравнения состояния системы записываются в таком виде:

$$
\begin{aligned}
P'_{n_1,0}(t) &= -(\lambda+\mu)P_{n_1,0}(t)+ \\
&+\mu_2 P_{n_1,1}(t)+\lambda P_{n_1-1,0}(t), \\
P'_{n_1,1}(t) &= -(\lambda+\mu_1+\mu_2)P_{n_1,1}(t)+\mu_2 P_{n_1,б}(t)+ \\
&+\lambda P_{n_1-1,1}(t)+\mu_1 P_{n_1+1,0}(t), \qquad (3.8.1) \\
P'_{n_1,б}(t) &= -(\lambda+\mu_2)P_{n_1,б}(t)+ \\
&+\mu_1 P_{n_1+1,1}(t)+\lambda P_{n_1-1,б}.
\end{aligned}
$$

Нормирующее условие

$$\sum \sum_{j=0}^{1} P_{i,j}(t)=1.$$

Для установившегося режима функционирования системы массового обслуживания при $t \longrightarrow \infty$, $P_{ij}(t) \longrightarrow P_{ij}$, $P'_{ij}(t) \longrightarrow 0$ система дифференциальных уравнений преобразуется в систему алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
(\lambda+\mu_1)P_{n_1,0} &= \mu_2 P_{n_1,1}+\lambda P_{n_1-1,0}, \\
(\lambda+\mu_1+\mu_2)P_{n_1,1} &= \mu_2 P_{n_1,б}+\lambda P_{n_1-1,1}+\mu_1 P_{n_1+1,0}, \qquad (3.8.2) \\
(\lambda+\mu_2)P_{n_1,б} &= \lambda P_{n_1-1,б}+\mu_1 P_{n_1+1,1}
\end{aligned}
$$

и нормирующее условие

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{1} P_{ij}=1.$$

Та же система уравнений при $n_1=0$ будет выглядеть так:

$$
\begin{aligned}
\lambda P_{0,0} &= \mu_2 P_{0,1}, \\
(\lambda+\mu_2)P_{0,1} &= \mu_2 P_{0,б}+\mu_1 P_{1,0}, \\
(\lambda+\mu_2)P_{0,б} &= \mu_1 P_{1,1}. \qquad (3.8.3)
\end{aligned}
$$

Решения этих уравнений принадлежат Хайту [13, 22] и получены в таком виде:

— Вероятность состояния, при котором в обеих фазах нет требований:

$$P_{00}=\frac{\beta(1+\beta)(1-\alpha_2)-\alpha_2}{\beta(1+\beta+\alpha_2)}, \tag{3.8.4}$$

где

$$\beta=\frac{\mu_1}{\mu_2};\ \alpha_2=\frac{\lambda}{\mu_2}$$

при $\mu_1\geqslant\mu_2,\ \mu_2>\lambda$.

— Вероятность того, что во второй фазе одно требование:

$$P_{n_1,1}=\sum_{n=0}^{n} P_{n_1,1}=\alpha_2\frac{1+\beta(1-\alpha_2)}{1+\beta+\alpha_2}. \tag{3.8.5}$$

— Вероятность того, что первая фаза заблокирована:

$$P_{n_1,б}=\sum_{n_1=0}^{\infty} P_{n_1,б}=\alpha_2^2\frac{1+\beta}{1+\beta+\alpha^2}. \tag{3.8.6}$$

Математическое ожидание числа требований, находящихся в системе:

$$M=\sum_{i=0}^{\infty} iP_{i,0}+\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)P_{i,1}. \tag{3.8.7}$$

Особенность работы такой системы в том, что она иногда находится на грани выхода из стационарного состояния. Если увеличивать постепенно плотность входящего потока до тех пор, пока перед первой фазой не будет всегда существовать какая-то определенная очередь, но еще не растущая до бесконечности, то вероятность состояния $P_{00}\longrightarrow 0$ при некотором $\lambda=\lambda_{\text{макс}}$. При дальнейшем усилении плотности входящего потока система выйдет из установившегося состояния. Величину $\lambda_{\text{макс}}$ можно найти из выражения (3.8.4), приравняв его нулю:

$$P_{00}=\frac{\beta(1+\beta)(1-\alpha_2)-\alpha_2}{\beta(1+\beta+\alpha_2)}=0,$$

откуда определяется

$$\lambda_{\text{макс}}=\mu_2\alpha_{2_{\text{макс}}}=\mu_1\frac{1+\beta}{1+\beta+\beta^2}. \tag{3.8.8}$$

Максимальное значение коэффициента использования первой фазы равно

$$\alpha_{1\text{макс}} = \frac{1+\beta}{1+\beta+\beta^2} < 1. \tag{3.8.9}$$

Можно показать, что наибольшее значение $\lambda_{\text{макс}}$ получается при условии $\beta=1$ (при $\mu_1=\mu_2$). В этом случае $\lambda_{\text{макс}}={}^2/_3$.

Если задано

$$T_{\text{обс}} = \bar{t}_{\text{обс}1} + \bar{t}_{\text{обс}2}, \tag{3.8.10}$$

где $\bar{t}_{\text{обс}1}$, $\bar{t}_{\text{обс}2}$ — среднее значение времени обслуживания требований в первой и второй фазах соответственно, то входящий поток требований не должен превосходить величины

$$\lambda_{\text{макс}} = \frac{4}{3T_{\text{обс}}}, \tag{3.8.11}$$

и в этом случае наибольшее значение $\lambda_{\text{макс}}$ получается при $\beta=1$, т. е. при $\mu_1=\mu_2$.

Пример

Рассмотрим этап технологического процесса производства крупногабаритного изделия. Этап состоит из двух фаз. Производственная площадь, где осуществляется первая фаза производства изделия, большая и предполагает возможность скопления большого количества изделий. Во второй фазе изделия обрабатываются в особых условиях, в камере, которая по своему объему может разместить только одно изделие. На первую фазу изделия поступают неравномерно, что связано с зависимостью предшествующей части технологического процесса, однако на первую фазу исследуемого этапа производственного процесса поступает в среднем $\lambda=10$ изделий в месяц. Время обработки в первой фазе также случайно, что определяется состоянием изделия, низким уровнем механизации труда и большим процентом подготовительных слесарных операций. В среднем в течение месяца здесь успевают обработать около 20 изделий ($\mu_1=20$ изделий в месяц). Во второй фазе для производства характерны те же особенности. Однако производительность здесь меньше и составляет $\mu_2=15$ изделий в месяц. Оценить организацию технологического процесса на этом этапе производства.

Решение

1. Определяем параметры

$$\alpha_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} = \frac{10}{15} = 0{,}67,$$

$$\beta = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{20}{15} = 1{,}33.$$

2. Вероятность состояния, при котором в обеих фазах производства нет изделий, определяется по формуле (3.8.4)

$$P_{00}=\frac{1,33\,(1+1,33)\,(1-0,67)-0,67}{1,33\,(1+1,33+0,67)}\approx 0,09$$

3. Максимально допустимое значение входящего потока (3.8.8)

$$\lambda_{\text{макс}}=20\,\frac{1+1,33}{1+1,33+1,33^2}\approx 11\ \textit{изд}.$$

4. Вероятность того, что во второй фазе будет одно требование (3.8.5)

$$P_{n_1,1}=0,67\,\frac{1+1,33\,(1-0,67)}{1+1,33+0,67}=0,32.$$

5. Вероятность того, что первая фаза заблокирована (3.8.6):

$$P_{n_1,\,б}=0,67^2\,\frac{1+1,33}{1+1,33+0,67}=0,35.$$

6. Вероятность того, что система будет работать без перебоев

$$P=1-P_{n_1,\,б}=1-0,35=0,65.$$

7. Число изготовленных изделий в течение месяца

$$N_{\text{изд}}=\lambda P=10\cdot 0,65=6,5\ \text{изделия}.$$

Как изменится производительность производства, если довести производительность второй фазы до уровня первой?

$\mu_1=\mu_2=20$ изделий в месяц.

Тогда $\beta=1$,

$$\lambda_{\text{макс}}=20\,\frac{1+1}{1+1+1}=13,3\ \text{изделия в месяц}.$$

8. Вероятность блокирования первой фазы уменьшится (при $\lambda=10$ изделий в месяц)

$$P_{n_1,\,б}=0,5^2\,\frac{12}{1+1+0,5}=0,2.$$

9. Вероятность того, что система будет работать без перебоев, равна

$$P=1-P_{n_1,б}=1-0,2=0,8.$$

Производительность также увеличится. Число изделий в течение месяца составит

$$N_{\text{изд}}=\lambda P=10\times 0,8=8\ \text{изделий}.$$

Максимальная производительность системы при обеспечении плотности поступления изделий

$\lambda = \lambda_{макс} = 13{,}3$ изделия в месяц.

В этом случае

$$\beta = 1, \ \alpha_2 = \frac{13{,}3}{20} = 0{,}67$$

и вероятность блокирования системы несколько увеличится, т. е.

$$P_{п,б} = 0{,}67^2 \frac{1+1}{1+1+0{,}67} = 0{,}33,$$

но производительность системы в месяц все же возрастет и будет доведена до

$$N_{изд} = 13{,}3\,(1 - 0{,}33) = 9 \text{ изделий}.$$

3.9. Системы с бесконечным числом одинаковых приборов

Системы с бесконечным числом одинаковых приборов могут быть использованы при моделировании различных систем в народном хозяйстве.

В самом деле, в масштабе области при уборке урожая на полях используется много сельскохозяйственной техники: автомашин, комбайнов, тракторов. Вся эта техника подвержена износу и в период напряженной работы может выходить из строя. Количество этой техники N очень велико, и поэтому при проведении практических расчетов можно приближенно положить, что $N \to \infty$. Рассмотрим, например, эксплуатацию тракторов. Каждый из них в процессе уборки может выйти из строя и потребовать ремонта. Выход из строя каждой машины обусловливается многими причинами: квалификацией тракториста, техническим состоянием машины, видами уборочных работ, качеством профилактических мероприятий по сохранению техники и уходу за ней и другими. Естественно, что совокупное действие этих причин в конечном счете сказывается на числе неисправных машин. Трактористы и механики ремонтных мастерских на селе производят ремонт каждого трактора, на что требуется случайное время, обусловленное также многими причинами: характером поломок и аварий, квалификацией трактористов и механиков, наличием запасных частей и др. Таким образом, время обслуживания при ремонте тракторов также случайно.

Характерным для приведенного примера является то, что каждый вышедший из строя трактор является требованием на ремонт (требованием на обслуживание) и в то же время обслуживающим прибором (в лице одного тракториста или вместе с механиком по ремонту). Число вышедших из строя тракторов в масштабе области, республики велико. Важно определить, какое число тракторов в среднем будет выходить из строя, сколько их будет ремонтироваться и как быстро они будут восстанавливаться. Все это нужно для планирования поставок запасных частей, организации ремонта техники на полях и решения ряда других вопросов.

Примеров подобных систем можно привести много. Ниже на примере будет показано использование математического аппарата для решения ряда практических задач народного хозяйства, особенно в области прогнозирования и проектирования.

При постановке задачи положим, что имеется некоторая система массового обслуживания, состоящая из неограниченного числа одинаковых приборов обслуживания. Естественно, что в такой системе время ожидания обслуживания, как и отказ в обслуживании, теряет смысл. В систему поступает пуассоновский поток требований на обслуживание с плотностью λ. Время обслуживания каждого требования случайно и подчиняется показательному закону распределения с параметром μ. Каждое поступившее требование начинает обслуживаться немедленно.

Необходимо определить основные параметры функционирования системы: вероятности состояний, среднее число требований, находящихся в обслуживании, и др.

Для определения вероятностей состояний может быть использована следующая бесконечная система дифференциальных уравнений [18, 22]:

$$
\begin{aligned}
p'_0(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p'_k(t) &= \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + \mu k)\, p_k(t) + \\
&\quad + \mu (k+1)\, p_{k+1}(t)
\end{aligned}
\tag{3.9.1}
$$

при $k > 0$.

Не будем приводить метод решения этой бесконечной системы дифференциальных уравнений; при желании читатель найдет его в [18, 22]. Приведем расчетные формулы для определения численных значений характеристик системы.

1. Вероятность того, что в момент времени t будет занято k обслуживающих аппаратов (или обслуживаться k требований) при условии, что при $t=0$ они были все свободны (в системе не было требований):

$$p_k(t)=\frac{\alpha^k}{k!}(1-e^{-\mu t})\,e^{-\alpha(1-e^{-\mu t})}, \tag{3.9.2}$$

где

$$\alpha=\frac{\lambda}{\mu};\quad \mu=\frac{1}{\bar{t}_{обс}};$$

$\bar{t}_{обс}$ — среднее время обслуживания каждого требования;

λ — плотность поступления требований в систему.

2. Среднее число приборов, занятых обслуживанием (или среднее число требований, находящихся на обслуживании) в момент времени t, если при $t=0$ они были свободны (в системе не было требований):

$$N_з=\alpha(1-e^{-\mu t}). \tag{3.9.3}$$

3. Вероятность того, что все приборы свободны (нет требований в системе):

$$p_0(t)=e^{-\alpha(1-e^{-\mu t})}. \tag{3.9.4}$$

Для установившегося режима при $t\longrightarrow\infty$ те же характеристики примут такой вид:

— Вероятность того, что все приборы свободны:

$$P_{0у}=e^{-\alpha}. \tag{3.9.5}$$

— Вероятность того, что в системе занято обслуживанием k приборов:

$$P_{kу}=\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}. \tag{3.9.6}$$

— Среднее число аппаратов, занятых обслуживанием:

$$N_{зу}=\alpha.$$

Естественно, что на практике чаще всего пользуются средними величинами. Поэтому представляет интерес оценить погрешность определением значения математического ожидания числа занятых аппаратов в некоторый момент времени t по формуле для стационарного режима

$$N_{зу} - N_з = \alpha e^{-\mu t}.$$

Применение полученного аппарата проиллюстрируем примером.

Пример

На уборке урожая на полях области работают комбайны. Статистика показывает, что в среднем по области в сутки выходит из строя 20 комбайнов ($\lambda = 20$ комбайнов в сутки). Время на ремонт каждого комбайна зависит от важности полученного повреждения и колеблется в широких пределах, в среднем около суток ($\bar{t}_{обс} = 1$ сутки, $\mu = 1$ комбайн в сутки). Требуется оценить состояние парка комбайнов в области во время уборки урожая.

Решение

Посмотрим, как будут работать комбайны на полях в течение первой недели уборки.

В табл. 3.9.1 приведено математическое ожидание числа неисправных машин по дням первой недели [по формуле (3.9.3)].

Таблица 3.9.1

День недели	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й
$N_з$	12,6	17,6	19	19,6	19,9	20	20

Из таблицы следует, что уже в первый день недели в среднем выйдет из строя 12,6 комбайна. К концу недели число вышедших из строя машин стабилизируется и приближается к математическому ожиданию для стационарного решения

$$N_{зу} = \frac{\lambda}{\mu} = \alpha = 20 \text{ комбайнов}.$$

Вероятность того, что все машины будут исправны, очень мала, *особенно к концу недели* (*табл. 3.9.2*).

Таблица 3.9.2

День недели	1-й	2-й	3-й 4-й 5-й 6-й	7-й
P_0	$3{,}5 \cdot 10^{-6}$	$3{,}4 \cdot 10^{-8}$	$2{,}2 \cdot 10^{-9}$	

Таким образом, при расчетах выхода из строя комбайнов во время уборки формулой $N_{зу} = \alpha$ можно пользоваться для последних дней недели. В начале недели выход техники из строя идет менее интенсивно и составляет около 60—80% того, что характерно для конца недели.

4

ЗАДАЧИ ОБСЛУЖИВАНИЯ В СМЕШАННЫХ СИСТЕМАХ

В гл. 3 были рассмотрены некоторые задачи так называемых «чистых систем с ожиданием». В этих системах каждая поступающая заявка, заставшая все каналы (приборы) занятыми обслуживанием, становится в очередь и ждет, пока не освободится какой-нибудь прибор. Время ожидания заявки в очереди или системе, а также длину очереди не ограничивают.

Однако для практики представляют большой интерес и системы с различными ограничениями на время ожидания в очереди, на время пребывания в системе и длину очереди. Такие системы массового обслуживания называются системами смешанного типа. К ним относятся:

1. Системы, в которых накладываются ограничения на время ожидания заявки в очереди, которое может быть как случайной, так и постоянной величиной. При этом ограничивается только срок ожидания заявки в очереди, а начатое обслуживание доводится до конца (например, клиент в парикмахерской, сев в кресло, уже не уходит до конца обслуживания).

2. Системы, в которых накладываются ограничения на общее время пребывания заявки в системе (например, торпедные катера находятся в зоне обстрела противокатерными средствами кораблей ограниченное время и покидают ее независимо от того, кончился обстрел или нет).

3. Системы, в которых накладываются ограничения на число заявок в очереди, т. е. на длину очереди (примером может служить мастерская по ремонту неисправной техники с ограниченной площадью для ее хранения).

Ниже более подробно рассматриваются особенности функционирования смешанных систем массового обслуживания, дается математический аппарат, с помощью которого можно оценить эффективность их работы, выбрать наиболее экономичные варианты. Все это иллюстрируется соответствующими примерами.

4.1. Системы с ограниченным средним временем ожидания заявок в очереди

Системы являются дальнейшим обобщением систем массового обслуживания с отказами (см. гл. 2). Математический аппарат, необходимый для оценки эффективности функционирования этих систем и выбора наиболее оптимального варианта по экономическим показателям, разработан для следующих условий. На вход системы, состоящей из n приборов одинаковой производительности, поступает простейший поток заявок с плотностью λ. Время обслуживания каждой заявки прибором является случайной величиной $t_{обс}$, которая подчинена показательному закону распределения с параметром

$$\mu=\frac{1}{\bar{t}_{обс}},$$

где $\bar{t}_{обс}$ — среднее время, необходимое для обслуживания заявки.

Если вновь прибывшая в систему заявка застанет все приборы занятыми, то она становится в очередь и ожидает обслуживания. Время пребывания в очереди случайное и подчинено показательному закону распределения с параметром

$$\nu=\frac{1}{\bar{t}_{ож}},$$

где $\bar{t}_{ож}$ — среднее время ожидания.

Если заявка, пробыв в системе некоторое время $\bar{t}_{ож}$, не была принята на обслуживание, то она покидает систему. Поэтому параметр ν можно рассматривать как среднюю плотность уходов заявок из системы.

Основные зависимости для n-канальной системы при определении основных характеристик функционирования приведены ниже [7].

1. Вероятность того, что все каналы системы свободны от обслуживания:

$$P_0=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}, \qquad (4.1.1)$$

где $\alpha=\lambda\bar{t}_{\text{обс}}$; $\beta=\frac{\bar{t}_{\text{обс}}}{\bar{t}_{\text{ож}}}$.

2. Вероятность того, что заняты обслуживанием k каналов системы:

$$P_k=\frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}},\quad 0\leqslant k\leqslant n. \qquad (4.1.2)$$

3. Вероятность того, что обслуживанием заявок заняты все n каналов системы и s заявок ожидают обслуживания:

$$P_{n+s}=\frac{\frac{\alpha^{n+s}}{n!\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}},\quad s\geqslant 1. \qquad (4.1.3)$$

4. Вероятность отказа в обслуживании заявки

$$P_{\text{отк}}=\frac{\beta}{\alpha}M_{\text{ож}}. \qquad (4.1.4)$$

5. Среднее число заявок, ожидающих обслуживания:

$$M_{\text{ож}}=\sum_{s=1}^{\infty}sP_{n+s}=\frac{\frac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\frac{s\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}. \qquad (4.1.5)$$

6. Среднее число каналов, занятых обслуживанием заявок:

$$N_з = \sum_{k=1}^{n} kP_k + n\sum_{s=1}^{\infty} p_{n+s}. \qquad (4.1.6)$$

7. Коэффициент загрузки каналов обслуживания, который определяет среднюю долю времени их загрузки:

$$K_з = \frac{N_з}{n}. \qquad (4.1.7)$$

8. Среднее число свободных каналов обслуживания

$$N_о = n - N_з = \sum_{k=0}^{n} (n-k) P_k. \qquad (4.1.8)$$

9. Коэффициент простоя каналов обслуживания

$$K_п = \frac{N_о}{n}. \qquad (4.1.9)$$

10. Вероятность того, что любая заявка, прибывшая в систему, будет обслужена:

$$P_{обс} = 1 - P_{отк}. \qquad (4.1.10)$$

С выводом приведенных зависимостей читатель может подробно ознакомиться в [7].

Проведение расчетов по этим формулам затруднительно вследствие их громоздкости и наличия бесконечных сумм. Поэтому для облегчения вычислений в конце книги приведены таблицы для определения P_k и $P_{отк}$ при $k \leqslant n$ с тремя входами α, β и n (см. табл. 5 и 6 приложения). Кроме того, для приближенных расчетов можно заменить бесконечные суммы выражениями

$$\sum_{s=r}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{\infty} (n+m\beta)} < \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r}{r!} e^{\frac{\alpha}{\beta}}, \qquad (4.1.11)$$

$$\sum_{s=r}^{\infty} \frac{s\alpha^s}{\prod_{m=1}^{s}(n+m\beta)} < \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r}{(r-1)!} e^{\frac{\alpha}{\beta}}. \tag{4.1.12}$$

Формулы (4.1.1) — (4.1.6) были получены в предположении, что время обслуживания заявок и время их ожидания в очереди распределены по показательному закону. Однако в реальных системах массового обслуживания возможно появление и таких, в которых это время подчинено иным законам распределения. Но, как показали исследования, эти зависимости, полученные для стационарных условий функционирования систем, справедливы и для других законов распределения времени обслуживания и ожидания заявок. Об этом можно судить по результатам расчетов, проведенных методом статистических испытаний для широкого диапазона основных параметров систем:

$$1 \leqslant n \leqslant 30,$$
$$0{,}01 \leqslant \alpha \leqslant 30,$$
$$0{,}1 \leqslant \beta \leqslant 10.$$

Некоторые результаты расчетов даны в табл. 4.1.1.

Таблица 4.1.1

Закон распределения времени $t_{обс}$ и $t_{ож}$	Варианты при $n=1$				Варианты при $n=3$			
	$\alpha=7;$ $\beta=1{,}5$	$\alpha=1{,}5;$ $\beta=0{,}33$	$\alpha=6;$ $\beta=0{,}5$	$\alpha=20;$ $\beta=2$	$\alpha=3;$ $\beta=2$	$\alpha=20;$ $\beta=0{,}5$	$\alpha=10;$ $\beta=1$	$\alpha=15;$ $\beta=5$
Показательный	0,861	0,386	0,788	0,949	0,226	0,783	0,675	0,784
Релея	0,863	0,392	0,791	0,948	0,228	0,786	0,672	0,781
Нормальный усеченный	0,859	0,391	0,787	0,953	0,224	0,785	0,674	0,780
Равномерный	0,857	0,393	0,793	0,951	0,226	0,787	0,673	0,783
По формуле (4.1.4)	0,860	0,390	0,790	0,950	0,225	0,785	0,673	0,785

Для иллюстрации полученных зависимостей предлагается решение примеров.

Пример 1

На городскую овощную базу поступают овощи нового урожая. Для обеспечения длительного хранения они проходят стадию обработки. До обработки они хранятся под открытым небом. В зависимости от погоды и состояния овощи после транспортировки могут храниться без существенной потери качества не больше суток. На базу овощи поступают с близлежащих колхозов неравномерно, и поэтому в первом приближении можно считать поступающий поток овощей пуассоновским. В среднем на базу в течение декады прибывает до 25 автомашин овощей двухтонной грузоподъемности. На базе работает несколько бригад по предварительной обработке овощей перед закладкой их на длительное хранение. Каждая бригада способна переработать за сутки до трех тонн овощей. Необходимо оценить работу базы по принятию овощей на длительное хранение. Определить необходимое количество бригад, чтобы потери овощей были минимальны, а обработка их была наиболее экономичной. Пусть содержание одной бригады в месяц обходится в 500 *руб.*, а стоимость каждой тонны овощей 100 *руб.*

Решение

1. Определим параметры α и β:

$$\alpha = \lambda \bar{t}_{\text{обс}} = 2{,}5 \frac{1}{1{,}5} \approx 1{,}67,$$

$$\beta = \frac{0{,}67}{1} = 0{,}67.$$

Рассмотрим функционирование на базе двух, трех и четырех бригад.

2. Вероятность того, что все бригады будут сидеть без дела из-за отсутствия овощей, определится из табл. 5 приложения 5

— при работе двух бригад $(n=2)\,P_0=0{,}177$;

— трех бригад $(n=3)\,P_0=0{,}185$;

— четырех бригад $(n=4)\,P_0=0{,}188$.

3. Вероятность того, что привезенные овощи не будут своевременно обработаны $(P_{\text{отк}})$, определяется из табл. 6 приложения 5 по значениям $\alpha=1{,}67$ и $\beta=0{,}67$

— при работе двух бригад $P_{\text{отк}}=0{,}17$;

— трех бригад $P_{\text{отк}}=0{,}05$;

— четырех бригад $P_{\text{отк}}=0{,}015$.

Среднее число бригад, занятых обработкой овощей, равно [по формуле (4.1.6)] при наличии двух бригад $N_з=1{,}35$; трех бригад $N_з=1{,}57$; четырех бригад $N_з=1{,}64$.

Коэффициент загрузки бригад определится по формуле (4.1.7) при наличии двух бригад $K_з=0{,}67$; трех бригад $K_з=0{,}52$; четырех бригад $K_з=0{,}41$.

Среднее число простаивающих бригад определится по формуле (4.1.8) при наличии двух бригад $N_0=0{,}65$; трех бригад $N_0=1{,}48$; четырех бригад $N_0=2{,}36$.

Коэффициент простоя бригад определим по формуле

$$K_{\text{п}} = \frac{N_0}{n}.$$

При наличии двух бригад $K_{\text{п}}=0{,}33$; это означает, что около 33% времени каждая бригада будет без работы;

для трех бригад $K_{\text{п}}=0{,}49$;

для четырех бригад $K_{\text{п}}=0{,}69$.

Проведем экономическую оценку работы базы. В качестве критерия целесообразно принять стоимость обработки одной тонны овощей

$$C = \frac{1}{\Lambda}(q_k n + 2q_{\text{ов}}\lambda P_{\text{отк}}),$$

где q_k — стоимость содержания каждой бригады по переработке овощей в сутки;

n — число бригад;

$q_{\text{ов}}$ — стоимость одной тонны овощей;

Λ — количество обработанных овощей за сутки.

Величину Λ определим из зависимости

$$\Lambda = (1 - P_{\text{отк}})2\lambda.$$

Произведение $2q_{\text{ов}}\lambda P_{\text{отк}}$ определяет стоимость потерянных овощей за сутки из-за их несвоевременной обработки. Результаты расчетов по определению стоимости потерь приведены в табл. 4.1.2.

Таблица 4.1.2

Число работающих бригад	2	3	4	5
Стоимость тонны обработанных овощей, руб.	28	15,1	15	16,7

Из таблицы видно, что экономически целесообразно иметь на базе четыре бригады по переработке овощей. В этом случае потери овощей будут весьма малы.

Пример 2

В магазин поступают фрукты нового урожая из отдаленных хозяйств с $\lambda = 10$ *т* в декаду. Время доставки фруктов из колхозов в город является величиной случайной. Вероятность поступления фруктов в магазин из нескольких колхозов одновременно очень мала. Среднее количество поставок фруктов в магазин в период сбора урожая более или менее стабильно. Перечисленные причины позволяют принять предположение о пуассоновском потоке поставок фруктов в магазин. Сроки хранения фруктов в магазине зависят от их состояния, условий доставки, степени зрелости и других причин. Естественно предположить, что время хранения их является величиной случайной. Пусть среднее время хранения равно $\bar{t}_{\text{ож}} = 1{,}7$ суток. Тогда значение параметра $\nu = 6$. В течение декады магазин может продать в среднем $\mu = 10$ *т*. Среднесуточная продажа является величиной случайной. Например, в предпраздничные, праздничные, предвыходные и воскресные дни продажа фруктов будет более интенсивной.

Требуется оценить работу магазина и целесообразность открытия ряда дополнительных палаток по продаже фруктов в течение сезона. Для простоты расчетов примем, что пропускная способность палаток по продаже фруктов равноценна магазину.

Решение

Определим параметры α и β:

$$\alpha=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{10}{10}=1;\quad \beta=\frac{\nu}{\mu}=\frac{6}{10}=0,6.$$

Рассмотрим функционирование магазина, а также магазина и палаток (для примера возьмем 1 и 2 палатки).

Вероятность того, что эти торговые предприятия будут свободны от продажи, определится по формуле (4.1.1). Значение этих вероятностей найдем по величинам $\alpha=1$ и $\beta=0,6$ из табл. 5 приложения 5:

— при работе одного магазина $P_0=0,328$;

— при работе одного магазина и одной палатки $P_0=0,361$;

— при работе одного магазина и двух палаток $P_0=0,367$.

Вероятность того, что привезенные фрукты не будут своевременно проданы, определяется по формуле (4.1.4). Отсюда по величинам $\alpha=1$ и $\beta=0,6$ из табл. 6 приложения 5 получим долю потерь фруктов из-за несвоевременной продажи:

— при работе одного магазина $P_{\text{отк}}=0,33$;

— при работе одного магазина и одной палатки $P_{\text{отк}}=0,08$;

— при работе одного магазина и двух палаток $P_{\text{отк}}=0,02$.

Это означает, что при работе только одного магазина 32,7% фруктов будет испорчено. При подключении к продаже одной палатки потери уменьшатся до 8%, а при подключении двух палаток потери составят всего около 2%.

Таким образом, видно, что увеличение числа точек уменьшает процент потерь фруктов. Однако слишком большое увеличение числа торговых точек может привести к излишнему увеличению стоимости содержания обслуживающего персонала и повышению накладных расходов. Поэтому следует провести экономическую оценку. В качестве критерия, например, можно принять минимум суммарных затрат на содержание торговых точек и потери в течение месяца. Тогда средние суммарные затраты предприятия ориентировочно можно определить из зависимости

$$C_{\text{п}}=\Lambda P_{\text{отк}} q_{\text{ф}}+q_{\text{п}} n,$$

где Λ — количество фруктов, доставленных в город для продажи в течение месяца;

$q_{\text{ф}}$ — стоимость одной тонны фруктов;

$q_{\text{п}}$ — стоимость функционирования одного торгового предприятия в течение месяца;

n — число торговых предприятий.

Предположим, что $q_{\text{ф}}=1\,000$ руб. тонна; $q_{\text{п}}=400$ руб.

Количество фруктов, доставленных в магазин в течение месяца, равно

$$\Lambda=\lambda 3=10\cdot 3=30\ \text{т}.$$

Тогда стоимость затрат и потерь равна:

— при работе одного магазина $C_{\text{п}}=10068$ руб.;

— при работе одного магазина и одной палатки $C_{\text{п}}=2910$ руб.;

— при работе одного магазина и двух палаток $C_{\text{п}}=1430$ руб.;

— при работе одного магазина и трех палаток $C_{\text{п}}=1470$ руб.

Таким образом, наиболее экономичным является развертывание на сезон по продаже фруктов кроме магазина еще двух палаток, при этом потери из-за порчи фруктов составят около 2%. Увеличение числа палаток более двух нецелесообразно, так как снижение процента потерь незначительное, а стоимость содержания торговой сети возрастает.

Эти два примера носят чисто условный характер. Однако из них видно, что целый ряд проблем, возникающих в торговых и хозяйственных организациях, может быть решен методами теории массового обслуживания.

Системы с ограничением на время пребывания заявки в системе. Для этих систем массового обслуживания характерно, что независимо от того, обслуживается заявка или находится в очереди, она покидает систему, если время нахождения ее в системе превысило некоторую величину $t_{\text{ож}}$.

Для таких систем получены конечные зависимости, по которым можно оценить их функционирование, для случая, когда время пребывания заявки в системе $t_{\text{ож}}$ случайное с показательным законом распределения и параметром

$$\nu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{ож}}},$$

где $\bar{t}_{\text{ож}}$ — среднее время пребывания заявки в системе.

Вероятности состояний системы описывает следующая система дифференциальных уравнений:

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + (\mu + \nu)\, p_1(t),$$

$$p'_1(t) = -(\lambda + \mu + \nu)\, p_1(t) + \lambda p_0(t) + 2(\mu + \nu)\, p_2(t),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$p'_k(t) = -[\lambda + k(\mu + \nu)]\, p_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) +$$
$$+ (k+1)(\mu + \nu)\, p_{k+1}(t),$$
$$1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

$$p'_n(t) = -[\lambda + n(\mu + \nu)]\, p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) +$$
$$+ [n\mu + (n+1)\nu]\, p_{n+1}(t), \qquad (4.1.13)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$p'_{n+s}(t) = -[\lambda + n\mu + (n+s)\nu]\, p_{n+s}(t) +$$
$$+ \lambda p_{n+s-1}(t) + [n\mu + (n+s+1)\nu]\, p_{n+s+1}(t), \quad s \geqslant 1.$$

Для стационарных условий, т. е. при $t \longrightarrow \infty$, система дифференциальных уравнений (4.1.13) превращается в следующую систему алгебраических уравнений:

$$
\begin{gathered}
-\lambda P_0+(\mu+\nu) P_1=0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-[\lambda+k(\mu+\nu)] P_k+\lambda P_{k-1}+(k+1)(\mu+\nu) P_{k+1}=0, \\
1 \leqslant k \leqslant n-1, \\
-[\lambda+n(\mu+\nu)] P_n+\lambda P_{n-1}+ \\
+[n\mu+(n+1)\nu] P_{n+1}=0, \qquad (4.1.14) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-[\lambda+n\mu+(n+s)\nu] P_{n+s}+\lambda P_{n+s-1}+ \\
+[n\mu+(n+s+1)\nu] P_{n+s+1}=0, \quad s \geqslant 1.
\end{gathered}
$$

При решении уравнений (4.1.14) получены формулы для определения вероятностей состояний системы массового обслуживания:

$$
P_k=\frac{\alpha^k}{k!(1+\beta)^k} P_0, \quad k \leqslant n, \qquad (4.1.15)
$$

$$
P_{n+s}=\frac{\alpha^{n+s}}{n!(1+\beta)^n \prod\limits_{m=1}^{s}[n+(n+m)\beta]} P_0, \quad s \geqslant 1, \qquad (4.1.16)
$$

где $\alpha=\frac{\lambda}{\mu}$ и $\beta=\frac{\nu}{\mu}$.

Вероятность P_0 определяется из нормирующего условия

$$
\sum_{k=0}^{\infty} P_k=1
$$

и равна

$$
P_0=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!(1+\beta)^k}+\frac{\alpha^n}{n!(1+\beta)^n} \sum\limits_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}[n+(n+m)\beta]}}. \qquad (4.1.17)
$$

Вероятность обслуживания любой заявки может быть определена как произведение математического ожидания числа заявок, находящихся на обслуживании, на отношение плотностей обслуживания к поступлению заявок в систему

$$P_{\text{обс}}=\frac{\mu}{\lambda}\left[\sum_{k=1}^{n} kP_k+n\left(1-\sum_{k=0}^{n} P_k\right)\right]$$

или

$$P_{\text{обс}}=\frac{n-\sum\limits_{k=0}^{n-1} P_k\,(n-k)}{\alpha}, \tag{4.1.18}$$

откуда вероятность отказа в обслуживании определяется по формуле

$$P_{\text{отк}}=1-P_{\text{обс}}=\frac{\alpha-\sum\limits_{k=1}^{n} kP_k-n\left(1-\sum\limits_{k=0}^{n} P_k\right)}{\alpha}. \tag{4.1.19}$$

После ряда преобразований формулу (4.1.19) можно записать в виде

$$P_{\text{отк}}=\frac{\alpha-n+\sum\limits_{k=0}^{n-1}(n-k)\,P_k}{\alpha}. \tag{4.1.20}$$

Пример 3

Счетно-решающий прибор производит расчеты задачи по заданному алгоритму в зависимости от поступающей информации. Поступающая информация с плотностью $\lambda=2$ *инф/мин*, застав прибор занятым, ожидает его освобождения. Однако со временем информация теряет свое значение и через 5 *мин* считается негодной, а задача должна решаться заново, но уже с использованием поступающей свежей информации. Время решения задачи случайное и зависит от особенностей поступающей информации. Положим, что это время также имеет показательное распределение с параметром $\mu=0{,}5$.

Определить, какой процент информации не будет использован для решения вариантов задач, как целесообразнее поступить в случае увеличения объема использования поступающей информации до 60%, если это возможно сделать следующими путями:

— увеличением числа счетно-решающих приборов;

— проведением мероприятий по повышению их быстродействия.

Пусть стоимость одного счетно-решающего прибора равна $C_{\text{п}}=100$ единицам.

Повышение быстродействия счетно-решающих машин связано с увеличением их стоимости и обслуживания. При решении этого примера примем, что они обусловлены зависимостью

$$C_t = 100\,\frac{2-\bar{t}_{\text{обс}}}{\bar{t}_{\text{обс}}}.$$

Решение

1. Определим параметры

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 4,$$

$$\beta = \frac{\nu}{\mu} = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4.$$

2. Для определения вероятности того, что весь объем поступившей информации не будет использован при решении задач, применим формулу (4.1.19)

$$P_{\text{отк}} = \frac{\alpha - n + \sum\limits_{k=0}^{n-1}(n-k)\,P_k}{\alpha}.$$

После подстановки значений исходных данных получим

$$P_{\text{отк}} = \frac{4-1+P_0}{4}.$$

Величину P_0 определим из формулы (4.1.17):

$$P_0 \approx 0{,}01.$$

Тогда вероятность того, что весь объем информации не будет использован, равна

$$P_{\text{отк}} \approx 0{,}75,$$

т. е. около 75% всей информации будет потеряно. Это очень большой процент потерь, который нужно уменьшить.

Посмотрим, как будет меняться величина потерь информации с увеличением числа счетно-решающих приборов (n=1, 2, 3). Результаты расчетов по определению $P_{\text{отк}}$ приведены в табл. 4.1.3.

Таблица 4.1.3

n	1	2	3
$P_{\text{отк}}$, %	75	51	0,37

Из таблицы следует, что для уменьшения потери информации до 40% необходимо увеличить число счетно-решающих приборов до 3. В этом случае стоимость решения каждой задачи будет обходиться в C_t=200 единиц.

Но увеличение числа счетно-решающих приборов является не единственным путем снижения потерь поступающей информации. Поэтому целесообразно просмотреть и путь увеличения производительности приборов. С этой точки зрения определим, насколько необходимо повысить производительность одного прибора, т. е. уменьшить время обработки $\bar{t}_{обс}$, чтобы вероятность потери информации была не более 40%. Результаты расчетов представлены на рис. 4.1.1.

Как видно из рисунка, вероятность потери информации будет не более 40%, если время обработки одной порции информации не будет превосходить 0,88 *мин*. Чтобы повысить быстродействие при-

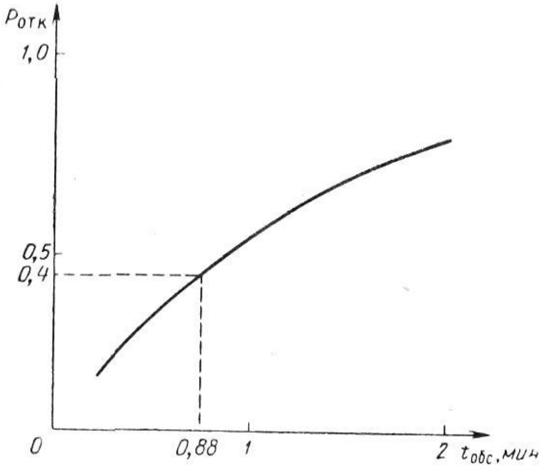

Рис. 4.1.1. Зависимость вероятности отказа $P_{отк}$ от производительности $t_{обс}$ приборов.

бора до этой величины, необходимо провести ряд мероприятий по усовершенствованию конструкции, при этом издержки при решении одной задачи составят (для условий данного примера)

$$C_2 = 100\,\frac{2-0,88}{0,88} \approx 127,3 \text{ единицы.}$$

Таким образом, для снижения вероятности потери информации до 40% целесообразнее усовершенствовать конструкцию машины и довести среднее время обработки одной информации примерно до 0,88 *мин*, чем увеличивать число счетно-решающих приборов.

Пример 4

У нападающей стороны имеется два образца вооружения. Для обстрела маневрирующей цели в среднем требуется 2 *мин* ($\bar{t}_{обс} = 2$ *мин*). Вероятность поражения цели при обстреле равна $P_п = 0,9$. Нападающая сторона обладает системой разведки, позволяющей в среднем обнаруживать одну цель в минуту (λ=*цель/мин*). Среднее время пребывания цели в зоне обстрела после ее обнаружения $\bar{t}_{ож}$ равно 4 *мин*. Независимо от того, обстреливается цель или нет, она по истечении определенного времени покидает свою позицию и для нападающей стороны считается потерянной, так как поражена быть не может.

Необходимо определить эффективность вооружения нападающей стороны по поражению появляющихся целей, определить, сколько единиц вооружения необходимо иметь нападающей стороне, чтобы ее потери не превосходили в среднем 10%, если цель противника в случае ее непоражения может нанести ответный удар с эффективностью $W_{\text{пр}}=0{,}5$.

Решение

1. Определим вероятность того, что любая обнаруженная цель противника будет уничтожена. Для этого по параметрам

$$n=2,\ \alpha=\frac{\lambda}{\mu}=2,\ \beta=\frac{\nu}{\mu}=0{,}5$$

и формуле (4.1.18) определим вероятность того, что цель будет обстреляна за время пребывания ее на огневой позиции:

$$P_{\text{обс}}=\frac{2-2P_0-P_1}{2}.$$

2. Вероятности P_0 и P_1 определяются по формулам (4.1.15) и (4.1.17)

$$P_1=\frac{2}{(1+0{,}5)}P_0,$$

$$P_0=\frac{1}{x}\approx\frac{1}{4{,}18}\approx 0{,}24,$$

где

$$x=1+\frac{2}{1+0{,}5}+\frac{2^2}{2!\,(1+0{,}5)^2}+\frac{2^2}{2!\,(1+0{,}5)^2}\left[\frac{2}{2+(2+1)\,0{,}5}+\right.$$
$$+\frac{2^2}{[2+(2+1)\,0{,}5]\,[2+(2+2)\,0{,}5]}+$$
$$+\frac{2^3}{[2+(2+1)\,0{,}5]\,[2+(2+2)\,0{,}5]\,[2+(2+3)\,0{,}5]}+$$
$$+\cdots\approx 4{,}18.$$

Тогда $P_1\approx 0{,}31$.

3. Тогда вероятность того, что обнаруженная цель противника будет обстреляна, равна

$$P_{\text{обс}}=\frac{2-2\cdot 0{,}24-0{,}31}{2}\approx 0{,}6.$$

4. Следовательно, если у нападающей стороны будет две единицы вооружения, то вероятность поражения цели противника равна

$$W=P_{\text{п}}P_{\text{обс}}=0{,}9\cdot 0{,}6=0{,}54.$$

5. Для определения количества единиц вооружения, необходимого нападающей стороне для увеличения ее огневой мощи, опре-

делим, какова должна быть вероятность поражения цели противника, чтобы он не смог нанести ущерб более 10%.

Ущерб, который нанесет противник, можно определить по формуле

$$W_у = (1 - P_п P_{обс}) W_{пр}.$$

Отсюда потребная вероятность обстрела цели противника определится зависимостью

$$P_{обс} = \frac{W_{пр} - W_у}{W_{пр} P_п} = 0,89.$$

6. По формуле (4.1.18) необходимо определить такое n, чтобы $P_{обс}$ было не меньше 0,89.

Результаты расчетов представлены в табл. 4.1.4.

Таблица 4.1.4

n	2	3
$P_{обс}$	0,6	0,9

Из таблицы видно, что при $n=3$ вероятность обстрела цели составляет 0,9, что является достаточным уровнем. В этом случае противник сможет нанести нападающей стороне ущерб не более

$$W_у = (1 - 0,9 \cdot 0,9) 0,5 = 0,095.$$

Следовательно, нападающей стороне необходимо довести количество единиц вооружения до трех.

4.2. Системы с ограниченной длиной очереди

Мы рассмотрели системы массового обслуживания с ограничениями по времени пребывания заявок в очереди или в системе. Однако в жизни нередко приходится сталкиваться с системами массового обслуживания, при работе которых накладываются ограничения на длину очереди. Как правило, это связано с ограничениями места для хранения заявок, ожидающих обслуживания (ремонтные мастерские и другие пункты обслуживания). Наряду с ограничениями на длину очереди ожидающих заявок возможны и дополнительные ограничения их времени ожидания в очереди и времени пребывания в системе обслуживания. Эти особенности систем массового обслуживания были рассмотрены в чистом виде в предыдущем параграфе. Таким образом, в смешанных системах массового обслуживания можно рассмотреть такие варианты ограничений, которые могут найти широкое применение:

— число заявок, стоящих в очереди, ограничено, на время пребывания заявок в очереди и системе ограничения не накладываются;

— число заявок, стоящих в очереди, и время пребывания в ней ограничены;

— число заявок, стоящих в очереди, и время пребывания заявки в системе ограничены. Рассмотрим варианты этих систем.

Ограничение на длину очереди заявок в системе. Пусть в n-канальную систему поступает поток заявок плотностью λ. Система обладает такой особенностью функционирования, что каждая вновь поступившая заявка, застав все каналы занятыми, становится в очередь только в том случае, если в ней находится менее m заявок. Если число заявок в очереди равно m (больше m оно быть не может), то прибывшая заявка в очередь не становится и покидает систему необслуженной. Время обслуживания заявки в системе случайное и распределено по показательному закону с параметром

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{обс}}.$$

Поток поступающих заявок будем считать простейшим.

Вероятности всевозможных состояний системы могут быть определены по следующей системе дифференциальных уравнений [7]:

$$\begin{gathered}
p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
p'_k(t) = -(\lambda + k\mu)\, p_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t), \\
0 < k \leqslant n-1, \\
p'_n(t) = -(\lambda + n\mu)\, p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + n\mu p_{n+1}(t), \qquad (4.2.1) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
p'_{n+s}(t) = -(\lambda + n\mu)\, p_{n+s}(t) + \lambda p_{n+s-1}(t) + n\mu p_{n+s+1}(t), \\
1 \leqslant s < m, \\
p'_{n+m}(t) = -n\mu p_{n+m}(t) + \lambda p_{n+m-1}(t).
\end{gathered}$$

Рассмотрим стационарные условия функционирования системы при $t \longrightarrow \infty$. В этом случае все производные равны нулю, а все вероятности становятся постоянными величинами, тогда вместо дифференциальных уравнений (4.2.1) получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}
-\lambda\cdot p_0+\mu p_1=0,\\
-(\lambda+k\mu)\,p_k+\lambda p_{k-1}+(k+1)\,\mu p_{k+1}=0,\\
0<k\leqslant n-1,\\
-(\lambda+n\mu)\,p_n+\lambda p_{n-1}+n\mu p_{n+1}=0,\\
-(\lambda+n\mu)\,p_{n+s}+\lambda p_{n+s-1}+n\mu p_{n+s+1}=0,\\
1\leqslant s<m,\\
-n\mu p_{n+m}+\lambda p_{n+m-1}=0.
\end{gathered}\tag{4.2.2}$$

Нормирующее условие запишем в виде

$$\sum_{k=0}^{n+m} p_k=1. \tag{4.2.3}$$

В результате решения системы уравнений (4.2.2.) и (4.2.3) получим следующие зависимости, характеризующие функционирование системы:

1. Вероятность того, что все каналы свободны и в системе нет ни одной заявки:

$$P_0=\frac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{m}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}, \tag{4.2.4}$$

где $\alpha=\frac{\lambda}{\mu}$.

2. Вероятность того, что k каналов заняты обслуживанием:

$$P_k=\frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{m}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}. \tag{4.2.5}$$

3. Вероятность того, что все каналы заняты обслуживанием и s заявок находится в очереди:

$$P_{n+s}=\frac{\frac{\alpha^n}{n!}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}{1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{m}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}. \tag{4.2.6}$$

4. Вероятность отказа заявке в обслуживании, которая равна вероятности P_{n+m} того, что в очереди уже стоят m заявок:

$$P_{\text{отк}}=\frac{\frac{\alpha^{n+m}}{n^m\cdot n!}}{1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}. \qquad (4.2.7)$$

5. Среднее число каналов, занятых обслуживанием:

$$M_з=\sum_{k=1}^{n}k\cdot P_k+n\sum_{k=1}^{m}P_{n+k}. \qquad (4.2.8)$$

6. Среднее число каналов, свободных от обслуживания:

$$M_0=n-M_з. \qquad (4.2.9)$$

7. Коэффициент загрузки каналов обслуживания

$$K_з=\frac{M_з}{n}. \qquad (4.2.10)$$

8. Коэффициент простоя каналов обслуживания

$$K_0=\frac{M_0}{n}. \qquad (4.2.11)$$

9. Среднее число заявок, стоящих в очереди:

$$M_{\text{ож}}=\sum_{s=1}^{m}sP_{n+s}. \qquad (4.2.12)$$

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение зависимостей, полученных при решении системы.

Пример 1

На станцию текущего ремонта сельскохозяйственной техники поступают в случайные моменты времени различные машины (косилки, сеялки, плуги и т. д.). Станция имеет одно помещение для одного технологического потока ремонта. Во дворе станции имеется небольшая крытая площадка, где одновременно может находиться, ожидая очереди, не более трех машин.

В зависимости от характера неисправности, наличия запасных частей и квалификации ремонтных рабочих время на ремонт каждой машины затрачивается случайное. Статистика ремонтного времени в этой мастерской показала, что оно распределено по показательному закону со средним значением $\bar{t}_{обс}=2$ суток.

Неисправная техника в мастерскую поступает из близлежащих хозяйств. Случайные, независимые друг от друга, моменты выхода из строя сельскохозяйственных машин и разное удаление мест их эксплуатации от ремонтной мастерской позволяет предположить, что поток поступающей неисправной техники в мастерскую простейший со средней плотностью $\lambda=0{,}5$ машин в сутки. Необходимо определить:

— пропускную способность мастерской;

— среднее время простоя мастерской;

— среднее число машин, ожидающих ремонта.

Интересно определить, насколько изменятся эти характеристики, если оборудовать второе помещение с новым технологическим потоком для ремонта техники.

Решение

1. Определяем параметр

$$\alpha=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{0{,}5}{0{,}5}=1.$$

2. Определяем вероятность того, что из-за недостатка мест для хранения неисправной техники в мастерской с одним технологическим потоком вновь поступившая на ремонт машина не будет принята:

$$P_{отк}=\frac{1}{1+1+3}=0{,}20.$$

3. Относительная пропускная способность мастерской

$$P_{обс}=1-P_{отк}=0{,}80.$$

4. Абсолютная пропускная способность мастерской

$$Q=\lambda P_{обс}=0{,}4 \text{ машины в сутки.}$$

5. Среднюю долю времени, в течение которого мастерская будет простаивать, найдем по формуле (4.2.4)

$$P_0=\frac{1}{1+1+3}=0{,}20.$$

6. Среднее число машин, ожидающих ремонта, найдем по формуле (4.2.12)

$$M_{ож}=1P_{1+1}+2P_{1+2}+3P_{1+3}=0{,}2+0{,}4+0{,}6=1{,}2 \text{ машины.}$$

Таким образом, в среднем 1,2 машины будет находиться в очереди и ожидать своего ремонта. Среднее время, в течение которого техника будет ожидать начала ремонта, можно определить из следующих соображений. Поступающая на ремонт очередная машина будет ожидать до тех пор, пока находящиеся в очереди машины не будут отремонтированы. Тогда среднее время ожидания начала ремонта будет равно

$$T_{ож}=M_{ож}\bar{t}_{обс}=1{,}2\cdot 2=2{,}4 \text{ суток.}$$

Общее время пребывания машин в мастерской (ожидание и собственно ремонт) равно

$$T=T_{ож}+\bar{t}_{обс}=2{,}4+2=4{,}4 \text{ суток,}$$

т. е. в среднем через несколько суток после поступления в мастерскую машина будет отремонтирована.

7. Если оборудовать еще один технологический поток ($n=2$), производительность мастерской изменится, а вероятность отказа в обслуживании можно определить по формуле (4.2.7) для $n=2$

$$P_{\text{отк}}=\frac{\frac{1}{16}}{1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}\approx 0{,}021.$$

Таким образом, если оборудовать еще один поток по ремонту сельскохозяйственной техники, то вероятность отказа уменьшится почти в 10 раз.

Следовательно, около 98% поступающей техники будет своевременно отремонтировано в мастреских станции обслуживания.

Пропускная способность мастерской увеличится более чем в 2 раза, т. е.

$$Q=\lambda\cdot 0{,}98=0{,}49 \text{ машины в сутки.}$$

Несколько увеличится относительное время простоя мастерской

$$P_0=\frac{16}{47}\approx 0{,}34,$$

Зато среднее число машин, ожидающих ремонта, резко уменьшится

$$M_{\text{ож}}=1\cdot P_{2+1}+2\cdot P_{2+2}+3\cdot P_{2+3}=$$
$$=1\cdot 0{,}085+2\cdot 0{,}043+3\cdot 0{,}021\approx 0{,}23.$$

Также уменьшится время ожидания в очереди

$$T_{\text{ож}}=0{,}23\cdot 2=0{,}46.$$

И, что очень важно, общее время, потерянное техникой на ремонт, сократится почти вдвое:

$$T=0{,}46+2=2{,}46.$$

Используя экономические показатели (стоимость оборудования помещения и содержания обслуживающего персонала, стоимость простоя техники и др.), можно определить целесообразность такого переоборудования станции текущего ремонта и определить тот выигрыш (экономию), который в результате этого получится.

Ограничение на длину очереди и время пребывания в ней. Рассмотрим обобщение описанной выше задачи. Особенность рассматриваемой системы в том, что всякая вновь поступившая заявка, застав все каналы уже занятыми обслуживанием, покидает систему, если уже имеется очередь, в которой находится не менее m заявок, и если она простояла в ожидании в среднем более некоторого времени $\bar{t}_{\text{ож}}$.

Возможные состояния системы описываются системой дифференциальных уравнений, которые можно получить из уже известной системы дифференциальных уравнений, написанной для системы массового обслуживания с ограниченным временем ожидания, если наложить ограничения на длину очереди:

$$
\begin{gathered}
p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\
p'_k(t) = -(\lambda + \mu) p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t), \\
1 \leqslant k \leqslant n-1, \\
p'_n(t) = -(\lambda + n\mu) p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + (n\mu + \nu) p_{n+1}(t), \\
p'_{n+s}(t) = -(\lambda + n\mu + s\nu) p_{n+s}(t) + \lambda p_{n+s-1}(t) + \\
+ [n\mu + (s+1)\nu] p_{n+s+1}(t), \\
1 \leqslant s < m, \\
p'_{n+m}(t) = -(n\mu + m\nu) p_{n+m}(t) + \lambda p_{n+m-1}(t),
\end{gathered}
\tag{4.2.13}
$$

где $\nu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{ож}}}$.

При установившемся режиме $(t \longrightarrow \infty)$ получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$
\begin{gathered}
-\alpha p_0 + p_1 = 0, \\
-(\alpha + k) p_k + \alpha p_{k-1} + (k+1) p_{k+1} = 0, \\
1 \leqslant k < n-1, \\
-(\alpha + n) p_n + \alpha p_{n-1} + (n + \beta) p_{n+1} = 0, \\
-(\alpha + n + s\beta) p_{n+s} + \alpha p_{n+s-1} + [n + (s+1)\beta] p_{n+s+1} = 0, \\
1 \leqslant s < m, \\
-(n + m\beta) p_{n+m} + \alpha p_{n+m-1} = 0,
\end{gathered}
\tag{4.2.14}
$$

где $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ и $\beta = \frac{\nu}{\mu}$.

Нормирующее условие запишется в виде

$$\sum_{k=0}^{n+m} p_k = 1. \tag{4.2.15}$$

В результате решения системы уравнений (4.2.14) и (4.2.15) получим следующие зависимости, характеризующие функционирование системы:

1. Вероятность того, что k каналов системы занято обслуживанием $(0<k\leqslant n)$:

$$P_k=\frac{\alpha^k}{k!}P_0. \tag{4.2.16}$$

и

2. Вероятность того, что все n каналов заняты обслуживанием и s заявок находится в очереди:

$$P_{n+s}=\frac{\dfrac{\alpha^{n+s}}{n!}}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}P_0,\quad 1\leqslant s\leqslant m. \tag{4.2.17}$$

3. Вероятность того, что все каналы свободны от обслуживания:

$$P_0=\frac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!}+\dfrac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{m}\dfrac{\alpha^s}{\prod\limits_{r=1}^{s}(n+r\beta)}}. \tag{4.2.18}$$

4. Среднее число каналов, занятых обслуживанием:

$$M_з=\sum_{k=1}^{n}kP_k+n\sum_{s=1}^{m}P_{n+s}. \tag{4.2.19}$$

5. Вероятность того, что заявка будет обслужена. Она определится как произведение математического ожидания числа каналов, занятых обслуживанием, на отношение плотности обслуживания к плотности поступления заявок

$$P_{обс}=\frac{\mu}{\lambda}M_з=\frac{n-\sum\limits_{k=0}^{n-1}(n-k)P_k}{\alpha}. \tag{4.2.20}$$

6. Вероятность отказа в обслуживании

$$P_{отк}=1-P_{обс}=\frac{\alpha-n+\sum\limits_{k=0}^{n-1}(n-k)P_k}{\alpha}. \tag{4.2.21}$$

7. Среднее число каналов, свободных от обслуживания:

$$M_0 = n - M_з. \qquad (4.2.22)$$

Коэффициенты загрузки и простоя каналов, а также среднее число заявок, которые находятся в очереди, можно определить так же, как и для системы с ограничением по длине очереди.

Применение полученных зависимостей проиллюстрируем двумя примерами.

Пример 2

Рыболовецкий колхоз вылавливает в среднем около 10 *т* рыбы в сутки. Улов зависит от ряда случайных факторов (обнаружения косяка рыбы, расстояния от причала до места лова, погоды и т. д.). Поэтому можно считать, что поток выловленной рыбы имеет пуассоновское распределение. Часть рыбы колхоз перерабатывает на собственном пункте, состоящем из двух одинаковых цехов. Производительность каждого цеха $\mu = 2$ *т* в сутки. Остальную часть улова колхоз отгружает для отправки на завод переработки рыбы. Колхозный завод имеет холодильник для хранения рыбы объемом 2 *т*, где она может храниться не более одних суток. Если за это время рыбу не начали обрабатывать, то ее немедленно отправляют на другой завод, который производит ее копчение. В противном случае она испортится.

Необходимо определить, сколько в среднем надо выделить автомашин для перевозки рыбы, если при существующем состоянии дорог и расстоянии до завода переработки машина грузоподъемностью 2,5 *т* может сделать два рейса в сутки, а до завода копчения — один рейс в сутки.

Решение

1. Определим параметры

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 5, \quad \beta = \frac{\nu}{\mu} = 0{,}5.$$

2. Определим, какой процент выловленной рыбы сможет обработать колхозный завод.

Вероятность того, что поступающая рыба будет обработана местным заводом, определим из уравнения (4.2.20)

$$P_{обс} = \frac{2 - 2P_0 - 1P_1}{5},$$

где вероятности P_0 и P_1 определяются по формулам (4.2.18) и (4.2.16):

$$P_0 = \frac{1}{1 + 5 + \frac{25}{2}\left[\frac{5}{2 + 0{,}5} + \frac{25}{(2 + 0{,}5)(2 + 2 \cdot 0{,}5)}\right]} \approx 0{,}012,$$

$$P_1 = \frac{5}{1} \cdot 0{,}012 \approx 0{,}06.$$

Тогда

$$P_{обс}=\frac{2-0,024-0,06}{5}\approx 0,38.$$

Таким образом, около 38% всей выловленной рыбы колхоз перерабатывает на своем заводе, что составляет

$$Q=10\times 0,38=3,8\ т\ \text{в сутки.}$$

Отсюда

$$10-3,8=6,2\ т$$

необходимо перевезти на заводы переработки и копчения.

Определим количество рыбы, которое необходимо перевозить сразу на завод переработки, и количество рыбы, подлежащее перевозке на завод копчения.

Для этого предварительно определим вес рыбы, которая находится в холодильнике и ожидает начала обработки (4.2.12):

$$M_{ож}=1P_{2+1}+2P_{2+2}.$$

Вероятности P_{2+1} и P_{2+2} определим по формуле (4.2.17)

$$P_{2+1}=\frac{\frac{5^3}{2!}}{2+0,5}0,012\approx 0,3,$$

$$P_{2+2}=\frac{\frac{5^4}{2!}}{(2+0,5)(2+2\cdot 0,5)}\cdot 0,012\approx 0,54,$$

откуда

$$M_{ож}=0,3+2\cdot 0,54=1,4\ т,$$

т. е. в холодильнике постоянно находится в среднем около 1,4 $т$ рыбы.

Найдем среднее количество рыбы, которое необходимо в течение суток отправить из холодильника на завод копчения:

$$Q_k=M_{ож}\cdot\nu=1,4\cdot 1=1,4\ т.$$

На завод переработки необходимо отправить 6,2—1,4=4,8 $т$ рыбы.

Для этого потребуется машин:

— для перевозки рыбы на завод переработки

$$N_г=\frac{4,8}{2,5\cdot 2}\approx 1;$$

— для перевозки на завод копчения

$$N_к=\frac{1,4}{2,5\cdot 1}\approx 0,6,$$

т. е. тоже в среднем одна машина, причем она будет загружена всего на 60%. Следовательно, для этого можно использовать машину меньшей грузоподъемности.

Пример 3

Для проведения первичной санитарной обработки личного состава, подвергшегося заражению, создается полевой пункт санитарной обработки. Требуется определить необходимую пропускную способность пункта, т. е. число мест для одновременной обработки личного состава, если среднее время на обработку одного человека равно 0,1 *час.* Поток поступления личного состава, требующего обработки, примем простейшим с плотностью $\lambda=100$ *чел/час.* Пункт оборудуется укрытием для личного состава на 5 *чел.* Половина личного состава, т. е. около 50 чел. в час, отправляется медицинским транспортом в тыл на стационарный пункт санитарной обработки. Кроме того, около 10% личного состава может быть отправлено в тыл попутным транспортом. Учитывая, что состояние организма человека зависит от времени, прошедшего с момента заражения, время ожидания начала обработки не должно превышать 10 *час.*

Решение

Определим параметры

$$\alpha=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{100}{10}=10,$$

$$\beta=\frac{\nu}{\mu}=\frac{10}{10}=1.$$

По условию задачи в среднем около 60% личного состава, требующего санитарной обработки, будет отправляться в тыл. Следовательно, остальные 40% должны пройти обработку в создаваемом полевом пункте. Определим необходимое число мест n на пункте, при котором обеспечивается своевременная обработка 40% личного состава, поступившего на санитарную обработку. Результаты расчетов представлены в табл. 4.2.1.

Таблица 4.2.1

n	2	3	4	5
$P_{обс}$	0,20	0,30	0,40	0,49

Как следует из таблицы, для своевременной обработки 40% личного состава на полевом пункте необходимо иметь не менее четырех мест обработки.

Ограничение на длину очереди и время пребывания заявок в системе. Другим вариантом обобщения систем массового обслуживания с ограниченной длиной очереди является наложение ограничения на время пребывания заявки в системе обслуживания. Примерами таких систем могут служить различные бытовые мастерские курортных городов. Отдыхающие испытывают различную потребность в ремонте фотоаппаратов, транзисторных приемников, в починке обуви и одежды.

Однако мастерские не всегда обеспечивают (особенно в разгар курортного сезона) быстрое обслуживание отдыхающих. Поэтому если та или иная мастерская имеет уже определенное количество заказов, то она не принимает новых (ограничение на длину очереди). Однако клиенты, как правило, ограничены временем пребывания в данном месте отдыха и поэтому по истечении срока отпуска вынуждены забирать сданные в ремонт вещи, независимо от того, началось обслуживание или они еще находились в ожидании ремонта (ограничение на время пребывания в системе).

Рассмотрим систему массового обслуживания, состоящую из n идентичных каналов обслуживания. Время обслуживания каждого канала является случайной величиной, распределенной по показательному закону с параметром μ. В систему поступает простейший поток заявок плотностью λ. Если очередная заявка застанет в очереди m заявок, то она теряется. Принятые в систему заявки (находящиеся в очереди или на обслуживании) могут находиться в ней ограниченное время. По истечении этого времени заявка покидает систему независимо от того, обслуживалась она или находилась в очереди. Время пребывания в системе является случайной величиной, распределенной по показательному закону с параметром ν.

Эта задача может быть описана следующей системой дифференциальных уравнений, которая получается из системы (4.1.13), если длину очереди ограничить величиной m:

$$
\begin{gathered}
p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + (\mu + \nu) p_1(t), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
p'_k(t) = -[\lambda + k(\mu + \nu)]\, p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + \\
+ (k+1)(\mu + \nu)\, p_{k+1}(t), \\
1 \leqslant k \leqslant n-1, \\
p'_n(t) = -[\lambda + n(\mu + \nu)]\, p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \\
+ [n\mu + (n+1)\nu]\, p_{n+1}(t),
\end{gathered}
\tag{4.2.23}
$$

$$
\begin{gathered}
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
p'_{n+s}(t) = -[\lambda + n\mu + (n+s)\nu]\, p_{n+s}(t) + \lambda p_{n+s-1}(t) + \\
+ [n\mu + (n+s+1)\nu]\, p_{n+s+1}(t), \\
1 \leqslant s < m, \\
p'_{n+m}(t) = -[n\mu + (n+m)\nu]\, p_{n+m}(t) + \lambda p_{n+m-1}(t).
\end{gathered}
$$

Для стационарных условий ($t \to \infty$) система дифференциальных уравнений (4.2.23) превращается в следующую систему алгебраических уравнений:

$$-\lambda p_0 + (\mu + \nu) p_1 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-[\lambda + k(\mu + \nu)] p_k + \lambda p_{k-1} + (k+1)(\mu + \nu) p_{k+1} = 0,$$

$$1 \leqslant k \leqslant n-1, \tag{4.2.24}$$

$$-[\lambda + n(\mu + \nu)] p_n + \lambda p_{n-1} + [n\mu + (n+1)\nu] p_{n+1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-[\lambda + n\mu + (n+s)\nu] p_{n+s} + \lambda p_{n+s-1} +$$
$$+ [n\mu + (n+s+1)\nu] p_{n+s+1} = 0,$$
$$1 \leqslant s < m,$$
$$-[n\mu + (n+m)\nu] p_{n+m} + \lambda p_{n+m-1} = 0.$$

Решение системы (4.2.24) дает следующие зависимости вероятностей состояний:

1. Вероятность того, что k заявок ($k \leqslant n$) находятся в системе:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!\,(1+\beta)^k} P_0, \quad k \leqslant n, \tag{4.2.25}$$

где $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ и $\beta = \frac{\nu}{\mu}$.

2. Вероятность того, что все каналы системы заняты обслуживанием и s заявок находятся в очереди:

$$P_{n+s} = \frac{\alpha^{n+s}}{n!\,(1+\beta)^n \prod\limits_{m=1}^{s} [n + (n+m)\beta]} P_0, \; 0 \leqslant s \leqslant m, \tag{4.2.26}$$

где $\prod\limits_{m=1}^{0} (x) = 0$.

3. Вероятность того, что в системе нет ни одной заявки, определится из нормирующего условия

$$\sum_{k=0}^{n+m} P_k = 1$$

и будет равна

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!\,(1+\beta)^k} + \frac{\alpha^n}{n!\,(1+\beta)^n} \sum_{s=1}^{m} \frac{\alpha^s}{\prod_{m=1}^{s} [n + (n+m)\beta]}}. \tag{4.2.27}$$

4. Вероятность того, что заявка будет обслужена, определится из зависимости

$$P_{\text{обс}} = \frac{\mu}{\lambda} \left[\sum_{k=1}^{n} kP_k + n \left(1 - \sum_{k=0}^{n} P_k \right) \right],$$

которая, после ряда преобразований приводится к виду

$$P_{\text{обс}} = \frac{n - \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\, P_k}{\alpha}, \tag{4.2.28}$$

где $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$.

5. Вероятность того, что заявка получит отказ в обслуживании, определится как противоположное событие вероятности обслуживания

$$P_{\text{отк}} = 1 - P_{\text{обс}} = \frac{\alpha - n + \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\, P_k}{\alpha}. \tag{4.2.29}$$

Если положить в формуле (4.2.29) ограничение по длине очереди $m=0$ и $\beta=0$, то получим известную формулу Эрланга для системы с отказами

$$P_{\text{отк}} = \frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}}.$$

Остальные характеристики (среднее число занятых или свободных каналов, коэффициенты загрузки или простоя и др.) могут быть получены так, как для системы с неограниченной очередью.

Проиллюстрируем использование полученных зависимостей примером.

Пример 4

Электронно-вычислительное устройство обрабатывает информацию, которая поступает в случайные моменты времени со средней плотностью 10 *групп/мин*.

Учитывая, что объемы информации, сложность обработки каждой и т. д. различны, можно принять, что время на обработку одной группы информации случайное и распределено по показательному закону с параметром $\mu = 10$ *групп/мин*. Машина имеет память для хранения поступающей информации объемом до 5 групп. Если очередная группа информации застанет всю память занятой, то она теряется. Одновременно можно обрабатывать две группы информации. Со временем поступившая информация теряет свою ценность и в среднем через 1 *мин* после поступления, если не была своевременно обработана, становится практически непригодной. Определить, какой процент информации теряется из-за того, что пропускная способность устройства не позволяет своевременно обрабатывать всю информацию.

Решение

1. Определим параметры α и β:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 1, \quad \beta = \frac{\nu}{\mu} = 0{,}1.$$

2. Вероятность того, что информация не будет обработана до того, как она потеряет свою ценность, определим по формуле (4.2.29), которая после подстановки данных $\alpha = 1$ и $n = 2$ примет вид

$$P_{\text{отк}} = \frac{1 - 2 + (2P_0 + 1P_1)}{1}.$$

Величины P_0 и P_1 определяются по формулам (4.2.27) и (4.2.25)

$$P_0 = \frac{1}{A} = \frac{1}{2{,}6} \approx 0{,}38,$$

где

$$A = 1 + \frac{1}{1{,}1} + \frac{1^2}{2!(1{,}1)^2} + \frac{1^2}{2!(1{,}1)^2}\left[\frac{1}{(2 + 3\cdot 0{,}1)} + \frac{1^2}{(2 + 3\cdot 0{,}1)(2 + 4\cdot 0{,}1)} + \frac{1^3}{(2 + 3\cdot 0{,}1)(2 + 4\cdot 0{,}1)(2 + 5\cdot 0{,}1)} + \frac{1^4}{(2 + 3\cdot 0{,}1)(2 + 4\cdot 0{,}1)(2 + 5\cdot 0{,}1)(2 + 6\cdot 0{,}1)} + \frac{1^5}{(2 + 3\cdot 0{,}1)(2 + 4\cdot 0{,}1)(2 + 5\cdot 0{,}1)(2 + 6\cdot 0{,}1)(2 + 7\cdot 0{,}1)}\right] \approx 2{,}6,$$

$$P_1 = \frac{1}{1{,}1}\cdot 0{,}38 \approx 0{,}35.$$

3. Вероятность того, что информация будет потеряна, равна

$$P_{\text{отк}} = \frac{1 - 2 + 0{,}76 + 0{,}35}{1} = 0{,}11.$$

Таким образом, около 11% информации будет потеряно из-за того, что электронно-вычислительное устройство не может ее своевременно обработать.

4.3. Оценка влияния нестационарности на вероятностные состояния системы

В предыдущих параграфах были рассмотрены особенности работы смешанных систем массового обслуживания, в которых накладывались ограничения на время пребывания требования в очереди и на ее длину. Для установившегося процесса были получены зависимости, при помощи которых можно оценить качество обслуживания этих систем. Однако на практике возможны ситуации, в которых работа системы длится ограниченное время и процесс еще полностью не устанавливается. Переходные режимы работы, характерные для работы систем массового обслуживания в течение относительно небольших промежутков времени, изменяют характеристики оценок функционирования систем. Они отличаются от тех, которые могут быть получены для стационарных условий. Поэтому необходимо проверить, можно ли пользоваться зависимостями, полученными для условий установившегося процесса, а если можно, то каких погрешностей следует при этом ожидать.

Рассмотрим влияние нестационарности на вероятности состояний системы с ограниченной длиной очереди требований. Как отмечалось в § 4.2, система дифференциальных уравнений (4.2.1), описывающая все вероятностные состояния, будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}
&P'_k(t) = -(\lambda + k\mu)P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t),\\
&\qquad\qquad k < n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&P'_n(t) = -(\lambda + n\mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + n\mu P_{n+1}(t),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&P'_{n+s}(t) = -(\lambda + n\mu)P_{n+s}(t) + \lambda P_{n+s-1}(t) + n\mu P_{n+s+1}(t),\\
&\qquad\qquad s < l,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&P'_{n+l}(t) = -n\mu P_{n+l}(t) + \lambda P_{n+l-1}(t).
\end{aligned}\right\}$$

Решение системы дифференциальных уравнений для n-канальной системы связано с громоздкими вычислениями, поэтому для простоты расчетов приведем решение только для одноканальной системы ($n=1$), когда в очереди может находиться не более одной заявки ($l=1$). В этом случае будем иметь следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} p'_0(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ p'_1(t) &= -(\lambda+\mu)\, p_1(t) + \lambda p_0(t) + \mu p_{1+1}(t), \\ p'_{1+1}(t) &= -\mu p_{1+1}(t) + \lambda p_1(t). \end{aligned}\right\} \quad (4.3.1)$$

Положим, что с некоторого момента времени $t=0$ ожидается поступление заявок. Тогда полученную систему (4.3.1) следует интегрировать при следующих условиях:

$$P_0(0)=1,\ P_1(0)=P_2(0)=0.$$

Система дифференциальных уравнений (4.3.1) линейная с постоянными коэффициентами и ее можно проинтегрировать посредством методов операционного исчисления. Не останавливаясь на промежуточных выкладках, получим следующее решение:

$$P_0(t)=\frac{\mu^2}{rq}-\frac{\lambda}{2r}e^{rt}-\frac{\lambda}{2q}e^{qt}, \qquad (4.3.2)$$

$$P_1(t)=\frac{\lambda\mu}{rq}+\frac{\lambda(-\lambda+\sqrt{\lambda\mu})}{2r\sqrt{\lambda\mu}}e^{rt}+\frac{\lambda(\lambda+\sqrt{\lambda\mu})}{2q\sqrt{\lambda\mu}}e^{qt}, \qquad (4.3.3)$$

$$P_{1+1}=\frac{\lambda^2}{rq}+\frac{\lambda^2}{2r\sqrt{\lambda\mu}}e^{rt}-\frac{\lambda^2}{rq\sqrt{\lambda\mu}}e^{qt}, \qquad (4.3.4)$$

где $r=-\lambda-\mu+\sqrt{\lambda\mu}$,

$q=-\lambda-\mu-\sqrt{\lambda\mu}.$

Для стационарного процесса из формул (4.2.4)—(4.2.6) можно получить для одноканальной системы с ограничением на длину очереди при $l=1$ следующие вероятности состояний, которые не зависят от t и являются постоянными *:

$$P^{c}_{0}=\frac{\mu^{2}}{\mu^{2}+\lambda\mu+\lambda^{2}}, \tag{4.3.5}$$

$$P^{c}_{1}=\frac{\lambda\mu}{\mu^{2}+\lambda\mu+\lambda^{2}}, \tag{4.3.6}$$

$$P^{c}_{1+1}=\frac{\lambda^{2}}{\mu^{2}+\lambda\mu+\lambda^{2}}. \tag{4.3.7}$$

Сравнивая значения основных параметров функционирования системы, полученных для неустановившегося и стационарного режимов работы, получим абсолютные погрешности:

$$M_{0}=P^{c}_{0}-P_{0}(t)=\frac{\lambda}{2r}\,e^{rt}+\frac{\lambda}{2q}\,e^{qt}, \tag{4.3.8}$$

$$M_{1}=P^{c}_{1}-P_{1}(t)=\frac{\lambda\left(\lambda-\sqrt{\lambda\mu}\right)}{2r\sqrt{\lambda\mu}}\,e^{rt}-\frac{\lambda\left(\lambda+\sqrt{\lambda\mu}\right)}{2q\sqrt{\lambda\mu}}\,e^{qt}, \tag{4.3.9}$$

$$M_{1+1}=P^{c}_{1+1}-P_{1+1}(t)=\frac{\lambda^{2}}{2q\sqrt{\lambda\mu}}\,e^{qt}-\frac{\lambda^{2}}{2r\sqrt{\lambda\mu}}\,e^{rt}. \tag{4.3.10}$$

Соответственно величины относительных ошибок равны:

$$\Delta M_{0}=\frac{M_{0}}{P^{c}_{0}}=\frac{M_{0}\left(\mu^{2}+\lambda\mu+\lambda^{2}\right)}{\mu^{2}}, \tag{4.3.11}$$

$$\Delta M_{1}=\frac{M_{1}}{P^{c}_{1}}=\frac{M_{1}\left(\mu^{2}+\lambda\mu+\lambda^{2}\right)}{\lambda\mu}, \tag{4.3.12}$$

$$\Delta M_{1+1}=\frac{M_{1+1}}{P^{c}_{1+1}}=\frac{M_{1+1}\left(\mu_{2}+\lambda\mu+\lambda^{2}\right)}{\lambda^{2}}. \tag{4.3.13}$$

На рис. 4.3.1 приведены графики вероятностей состояний одноканальной системы, рассчитанные для $\lambda=0{,}5$ и $\mu=0{,}5$ в зависимости от длительности процесса обслуживания. Время работы системы выражено в относительных единицах. За единицу измерения принято среднее время обслуживания. Пунктирная линия показывает значения вероятностей P^{c}_{0}, P^{c}_{1} и P^{c}_{1+1}. В этом

* Индекс «с» показывает, что зависимости относятся к условиям стационарного процесса.

примере они получились для стационарного режима равными по величине. Как видно из рисунка, вероятности $P_0(T)$ и $P_1(T)$ (для нестационарного процесса) уже при длительности процесса, равной 1,5 $\bar{t}_{обс}$, приближаются к вероятностям, вычисленным по формулам для стационарного режима работы системы. Если увеличить время работы системы до $(2\div3)$ $\bar{t}_{обс}$, то ошибки от пред-

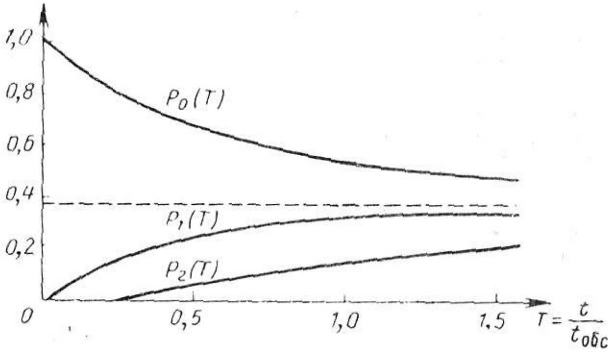

Рис. 4.3.1. Зависимость вероятностей состояний одноканальной системы от длительности процесса обслуживания при $n=1$; $\lambda=0,5$; $\mu=0,5$.

положения стационарности процесса станут практически незначительными. Таким образом, если производить расчеты по формулам, полученным для стационарного процесса, то появятся ошибки, которые зависят от времени работы системы. В табл. 4.3.1 приведены значения абсолютных ошибок, полученные от предположения стационарности процесса. Ошибки вычислены по формулам (4.3.8)—(4.3.10) и даны в процентах.

Результаты, приведенные в таблице, показывают, что использование формул, справедливых для стационарных условий, оправдано только в том случае, когда продолжительность процесса достаточно велика. При малом времени работы системы применение этих формул приводит к ошибкам, величина которых увеличивается с уменьшением времени. Для рассмотренной одноканальной системы при длительности процесса $T\geqslant4\bar{t}_{обс}$ для $\alpha\leqslant5$ абсолютная ошибка не будет превосходить 1,32%. При проведении расчетов для такой системы можно использовать данные, приведенные в табл. 4.3.1. При этом вероятность i-го состояния системы $(i=0, 1, 2)$

Таблица 4.3.1

α	$T/t_{обс}$							
	M_i	0,1	0,5	1	1,5	2	3	4
0,1	M_0	—8,96	—6,05	—3,77	—2,39	1,54	—0,66	—0,29
	M_1	8,07	5,24	3,12	1,90	1,18	0,48	0,21
	M_{1+1}	0,90	0,81	0,65	0,49	0,35	0,18	0,08
0,5	M_0	—38,21	—24,96	—15,52	—10,01	—6,59	—2,91	—1,32
	M_1	18,26	10,23	5,51	3,26	2,04	0,86	0,39
	M_{1+1}	19,95	14,73	10,01	6,75	4,55	2,05	0,93
1	M_0	—57,59	—34,05	—19,33	—11,35	—6,84	—2,49	—0,92
	M_1	24,70	7,44	1,66	0,37	0,08		
	M_{1+1}	32,89	26,61	17,57	10,98	6,73	2,49	0,92
5	M_0	—58,91	—10,61	—1,55	—0,23	—0,04		
	M_1	—13,29	—10,91	—1,88	—0,28	0,04		
	M_{1+1}	72,20	21,52	3,43	0,52	0,08		

в момент времени t можно вычислить по формуле

$$P_i(t) = P_i^c - M_i,$$

где P_i^c — вероятность i-го состояния системы, вычисленная по формуле (4.3.4)—(4.3.5) при допущении стационарности процесса;

M_i — величина абсолютной ошибки.

4.4. Особенности функционирования многоканальных систем массового обслуживания смешанного типа при поступлении потока групповых заявок

В гл. 2 уже рассматривались особенности функционирования систем с отказами при поступлении в них потока групповых заявок. Поступление групповых заявок в систему смешанного типа также усложняет ее работу и ухудшает пропускную способность. Как и при приходе ординарного потока, группы заявок, поступившие в систему и заставшие все приборы уже занятыми обслуживанием, вынуждены встать в очередь. По мере освобождения приборов заявки из групп принимаются на обслуживание, но уже случайным образом. Такие ситуации возникают, например, при отражении зенитными средствами налета самолетов противника, которые появляются в зоне ПВО в виде звеньев, эскадрилий.

Как уже отмечалось, смешанные системы массового обслуживания бывают нескольких видов. К ним относятся системы, в которых заявки могут находиться ограниченное время $t_{\text{ож}}$. Например, некоторые товары, поступившие в торговую сеть, могут находиться в ней ограниченное время из-за сроков хранения (продукты), старения фасонов (одежда, обувь), ухудшения технических характеристик (фотоматериалы, аккумуляторные батареи) и т. д. Если с истечением определенных сроков эти товары не будут реализованы, то они либо вообще изымаются из торговой сети (продукты), либо переоцениваются (промышленные товары). Другим ограничением для смешанных систем, обслуживающих потоки групповых заявок, может служить длина очереди. Если в очереди находится уже N заявок, то поступающая группа (или ее часть) покидает систему и считается потерянной. Например, работа электронно-вычислительной машины, обрабатывающей некоторую информацию.

Рассмотрим особенности функционирования смешанных систем массового обслуживания этих видов.

Системы с ограничением на время пребывания заявок в очереди с постоянным числом заявок в группе. Рассмотрим систему массового обслуживания, которая имеет n приборов. В систему поступает пуассоновский поток групп заявок с параметром λ. Каждая из этих групп содержит m заявок. Как только эти заявки попадают в систему, они начинают обслуживаться всеми приборами в случайном порядке. Полагаем, что время обслуживания каждой заявки прибором подчинено показательному закону с параметром $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{обс}}}$. Время пребывания каждой заявки в системе ограничено. Оно является случайной величиной и также подчинено показательному закону с параметром $\nu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{ож}}}$.

Введем следующие обозначения:

$p_0(t)$ — вероятность того, что в момент времени t все приборы свободны;

$p_k(t)$ — вероятность того, что в момент времени t занято обслуживанием k приборов $(1 \leqslant k \leqslant n)$;

$p_{n+s}(t)$ — вероятность того, что все приборы заняты обслуживанием и s заявок стоит в очереди на обслуживание. Для определения вероятности состояний системы $P_k(t)$ может быть использована следующая система однородных дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu P_1(t),\\
&p'_k(t) = -(\lambda + k\mu)\, p_k(t) + (k+1)\,\mu p_{k+1}(t)\\
&\qquad\qquad \text{при } 0 \leqslant k < m,\\
&p'_k(t) = -(\lambda + k\mu)\, p_k(t) + (k+1)\,\mu p_{k+1}(t) + \lambda p_{k-m}(t)\\
&\qquad\qquad \text{при } m \leqslant k \leqslant n-1;\\
&p'_n(t) = -(\lambda + n\mu)\, p_n(t) + \lambda p_{n-m}(t) + (n\mu + \nu)\, p_{n+1}(t),\\
&p'_{n+s}(t) = -(\lambda + n\mu + s\nu)\, p_{n+s}(t) + \lambda p_{n+s-m}(t) +\\
&\qquad + [n\mu + (s+1)\,\nu]\, p_{n+s+1}(t),
\end{aligned}\right\} \qquad (4.4.1)$$

при $s \geqslant 0$.

Вывод системы дифференциальных уравнений читатель может найти в работе [19].

Рассмотрим стационарное решение, для чего положим, что $t \longrightarrow \infty$. При этом

$$p'_k(t) \to 0, \text{ а } p_k(t) \to P_k = \text{const}.$$

В этом случае получим систему алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha P_0 = P_1;\\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&(\alpha + m)\, P_m = (m+1)\, P_{m+1} + \alpha P_0,\\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&(\alpha + k)\, P_k = (k+1)\, P_{k+1} + \alpha P_{k-m}\\
&\qquad\qquad \text{при } k \geqslant m,\\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&(\alpha + n)\, P_n = (n + \beta)\, P_{n+1} + \alpha P_{n-m},\\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&(\alpha + n + s\beta)\, P_{n+s} = [n + (s+1)\,\beta]\, P_{n+s+1} +\\
&\qquad + \alpha P_{n+s-m} \quad \text{при } 1 \leqslant s,
\end{aligned}\right\} \qquad (4.4.2)$$

где

$$\alpha = \lambda \bar{t}_{\text{обс}},$$

$$\beta = \frac{\nu}{\mu} = \frac{\bar{t}_{\text{обс}}}{\bar{t}_{\text{ож}}}.$$

Нормирующее условие запишем в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1. \qquad (4.4.3)$$

Решение системы (4.4.2) позволяет получить следующие зависимости для определения вероятности P_k:

$$P_k = \gamma_k P_0 \qquad (4.4.4)$$

где

$$\gamma_k = \frac{\prod_{r=1}^{k} (r + \alpha - 1)}{k!} \quad \text{при } k \leqslant m;$$

$$\gamma_k = \frac{\prod_{r=1}^{k} (\alpha + r - 1)}{k!} - \alpha \sum_{j=0}^{k-m-1} \frac{\prod_{i=1}^{k-m-j-1} (\alpha + m + j + i)}{\prod_{s=1}^{k-m-j} (m + j + s)} \gamma_j$$

$$\text{при } m < k \leqslant n;$$

$$\gamma_k = \frac{\prod_{r=1}^{n+1} (\alpha + r - 1) \prod_{l=1}^{k-n-1} (\alpha + n + l\beta)}{n! \prod_{l=1}^{k-n} (n - l\beta)} - \frac{\alpha}{[n - (k+n)\beta]} \gamma_{n-m-1} -$$

$$- \alpha \sum_{j=0}^{k-m-2} \frac{\prod_{i=1}^{n-m-j} (\alpha + m + j + i) \prod_{l=1}^{k-n-1} (\alpha + n + l\beta)}{\prod_{s=1}^{n-m-j} (n + j + s) \prod_{l=1}^{k-n} (n + l\beta)} \gamma_j$$

$$\text{при } k > n.$$

При этом принимаем $\prod_{1}^{0}(x) = 1$. Значение вероятности P_0 определится из условия (4.4.3). Вероятность того, что заявка не будет обслужена, равна

$$P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} kP_k + n\left(1 - \sum\limits_{k=0}^{n} P_k\right)}{m\alpha}. \qquad (4.4.5)$$

Если число заявок в группе больше, чем приборов в системе ($m>n$), то значение вероятностей P_k определяется по формуле

$$P_k = \frac{\dfrac{\prod\limits_{m=0}^{k-1} (\alpha+m)}{k!}}{\dfrac{\prod\limits_{m=1}^{n} (\alpha+m)}{n!} + \dfrac{\prod\limits_{m=0}^{n-1} (\alpha+m)}{n!} \sum\limits_{s=1}^{\infty} \dfrac{\alpha^s}{\prod\limits_{r=1}^{s} (n+r\beta)}}. \qquad (4.4.6)$$

Среднее число приборов, занятых обслуживанием, равно

$$M_з = \sum_{k=1}^{n} kP_k + n\left(1 - \sum_{k=0}^{n} P_k\right). \qquad (4.4.7)$$

Среднее число заявок в группе, которые становятся в очередь на обслуживание, равно

$$M_{оч} = m - (n - M_з). \qquad (4.4.8)$$

Коэффициент загруженности системы равен отношению числа занятых приборов к их общему числу:

$$K_з = \frac{M_з}{n}. \qquad (4.4.9)$$

Пример 1

Готовые изделия поступают партиями по 3 штуки ($m=3$) на конвейер, который доставляет их в цех на упаковку. Пока изделия движутся по конвейеру, они могут быть взяты на контроль, который осуществляется при помощи двух приборов ($n=2$). Время, в течение которого готовые изделия могут быть взяты на контроль, равно одной временной единице ($\bar{t}_{ож}=1$ ед. времени). Если за это время изделие не будет проверено, то оно поступит в цех упаковки без контроля. Время, необходимое на контроль одного изделия, величина случайная. Оно зависит от работы контролера и отклонений основных параметров изделия от установленных. Пусть время контроля распределено по показательному закону со средним значением $\bar{t}_{обс}=1$ ед. времени. Плотность поступления готовых изделий на конвейер равна двум партиям в единицу времени ($\lambda=2$ партии в ед. времени).

Требуется определить при такой организации выборочного контроля:

а) средний процент непроверенных изделий;

б) коэффициент загрузки системы контроля;

в) среднее число изделий в группе, которые не попадают сразу на контроль;

г) вероятности занятости приборов контролем готовых изделий.

Решение

1. Определим параметры

$$\alpha=\lambda\bar{t}_{обс}=2,$$

$$\beta=\frac{\bar{t}_{обс}}{\bar{t}_{ож}}=1.$$

Вероятность отказа в контроле готовых изделий определим по формуле (4.4.5). Так как $m>n$, то вероятности состояний следует определять по формуле (4.4.6):

$$P_0=\frac{1}{6+3\,(0,67+0,33+0,13+0,04+0,01)}\approx 0,10,$$

$$P_1=\frac{2}{6+3\,(0,67+0,33+0,13+0,04+0,01)}\approx 0,21,$$

$$P_2=\frac{\dfrac{2\cdot 3}{2}}{6+3\,(0,67+0,33+0,13+0,04+0,01)}\approx 0,31.$$

Отсюда вероятность того, что изделие не будет проверено, равно

$$P_{отк}=1-\frac{P_1+2P_2+2\,(1-P_1-P_2-P_0)}{3\cdot 2}\approx 0,73,$$

т. е. около 73% готовой продукции не пройдет контроль.

3. Коэффициент загрузки приборов определится по формуле (4.4.9)

$$K_з=\frac{M_з}{n}=\frac{P_1+2P_2+2\,(1-P_0-P_1-P_2)}{2}\approx 0,80,$$

т. е. *около 20% времени контролирующие приборы будут простаивать.*

4. Среднее число изделий в группе, которое не попадет сразу на контроль, определим по формуле (4.4.8)

$$M_0=m-(n-M_з)=3-(2-1,6)=2,6 \text{ изделия.}$$

Это означает, что в среднем

$$\Delta = \frac{m - M_{\text{оч}}}{m} = \frac{3 - 2,6}{3} \approx 0,13,$$

т. е. около 13% изделий поступает сразу же на контроль, а остальные 14% будут проверены, пока они движутся в цех упаковки.

5. Вероятность того, что контролем занят только один прибор, равна

$$P_1 = 0,21.$$

Вероятность того, что контролем заняты оба прибора одновременно, равна

$$P_{\text{одн}_2} = P_2 + (1 - P_0 - P_1 - P_2) \approx 0,69.$$

Вероятность того, что оба прибора свободны от контроля, равна

$$P_0 \approx 0,10.$$

Ограничение на время пребывания заявок в системе при случайном их числе в группе. Решение этой задачи было получено Б. В. Гнеденко [9]. Постановка задачи несколько отличается от рассмотренной ранее тем, что заявка может находиться в системе не более некоторого времени $t_{\text{ож}_c}$, для которого

$$P(t_{\text{ож}_c} < x) = 1 - e^{-\nu x}.$$

Кроме того, число заявок в группе случайное. В каждый момент появления группы в системе в ней с вероятностью a_s имеется s заявок. Для этих условий получена следующая система дифференциальных уравнений, описывающих различные состояния систем массового обслуживания:

$$\begin{gathered} p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + (\mu + \nu)\, p_1(t), \\ p'_k(t) = -(\lambda + k\mu + k\nu)\, p_k(t) + \\ + \lambda \sum_{s=1}^{k} a_s p_{k-s}(t) + (k+1)(\nu + \mu)\, p_{k+1}(t) \\ \text{при } 1 \leqslant k < n, \\ p'_k(t) = -(\lambda + n\mu + k\nu)\, p_k(t) + \lambda \sum_{s=1}^{k} a_s p_{k-s}(t) + \\ + [n\mu + (k+1)\nu]\, p_{k+1}(t) \text{ при } k \geqslant n. \end{gathered} \tag{4.4.10}$$

Для стационарных условий получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\alpha P_0 + (1+\beta) P_1 = 0,$$

$$-[\alpha + k(1+\beta)] P_k + \alpha \sum_{s=1}^{k} a_s P_{k-s} + (k+1)(1+\beta) P_{k+1} = 0$$

$$\text{при } 1 \leqslant k < n, \qquad (4.4.11)$$

$$-[\alpha + (n+\beta)] P_k + \alpha \sum_{s=1}^{k} a_s P_{k-s} + [n + (k+1)\beta] P_{k+1} = 0$$

$$\text{при } k \geqslant n.$$

Вероятность P_0 определяется из нормирующего условия

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1. \qquad (4.4.12)$$

Вероятность отказа в обслуживании равна отношению плотности заявок, покидающих систему, к плотности поступающего потока заявок

$$P_{\text{отк}} = \frac{\nu \sum\limits_{k=1}^{\infty} k P_k}{\lambda \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k} = \frac{\beta \sum\limits_{k=1}^{\infty} k P_k}{\alpha \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k}. \qquad (4.4.13)$$

Вероятность того, что заявка получит отказ до начала обслуживания («чистый» отказ), равна

$$P_{\text{откч}} = \frac{\beta \sum\limits_{s=1}^{\infty} s P_{n+s}}{\alpha \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k}. \qquad (4.4.14)$$

Отсюда вероятность того, что заявка покинет систему неполностью обслуженной, равна

$$P_{\text{но}} = P_{\text{отк}} - P_{\text{отк ч}}. \qquad (4.4.15)$$

Вероятность полного обслуживания заявки равна

$$P_{\text{обс}} = 1 - P_{\text{отк}}. \qquad (4.4.16)$$

Пример 2

На информационно-логическую машину по обработке информации поступает простейший поток групповых сообщений. Число сообщений в группе может быть от одного до четырех. Закон распределения числа сообщений в группе равномерный, т. е. с вероятностью 0,25 в группе может быть одно, два, три или четыре сообщения:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0{,}25.$$

Плотность поступления групп сообщений равна ($\lambda = 1$) одной группе в единицу времени. Машина может одновременно обрабатывать два сообщения ($n = 2$), а остальные, заставшие оба канала обработки занятыми, становятся в очередь. Машина может в единицу времени одним каналом обработать в среднем два сообщения ($\mu = 2$). Информация со временем теряет ценность. Время, в течение которого информация считается еще годной для обработки, случайно и имеет показательный закон распределения с параметром $\nu = 1$.

Требуется оценить пропускную способность информационно-логической машины.

Решение

Вероятности состояний определим из системы алгебраических уравнений (4.4.11):

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu + \nu} P_0,$$

$$P_2 = \frac{\lambda + \mu + \nu}{2(\mu + \nu)} \cdot \frac{\lambda}{(\mu + \nu)} P_0 - \frac{\lambda}{2(\mu + \nu)} a_1 P_0,$$

$$P_{2+1} = \frac{\lambda + 2\mu + 2\nu}{2\mu + 3\nu} P_2 - \frac{\lambda}{2\mu + 3\nu} (a_1 P_1 + a_2 P_0)$$

и т. д.

После подстановки числовых значений получим:

$$\begin{aligned}
P_1 &= 0{,}33 P_0,\\
P_2 &= 0{,}18 P_0,\\
P_{2+1} &= 0{,}12 P_0,\\
P_{2+2} &= 0{,}07 P_0,\\
P_{2+3} &= 0{,}02 P_0.
\end{aligned}$$

Отсюда, используя нормирующее условие (4.4.12), получим вероятность того, что машина свободна от обслуживания:

$$P_0 = \frac{1}{1{,}77} \approx 0{,}6.$$

Вероятность того, что машина обрабатывает только одно сообщение, равна

$$P_1 \approx 0{,}33 \cdot 0{,}6 \approx 0{,}20.$$

Вероятность того, что два сообщения обрабатываются одновременно и ни одного нет в очереди, равна

$$P_2 \approx 0{,}18 \cdot 0{,}6 \approx 0{,}11.$$

Вероятности того, что в очереди ожидает обработки одно, два или три сообщения, равны

$$\begin{aligned}
P_{2+1} &= 0{,}12 \cdot 0{,}6 \approx 0{,}07;\\
P_{2+2} &= 0{,}07 \cdot 0{,}6 \approx 0{,}04;\\
P_{2+3} &= 0{,}02 \cdot 0{,}6 \approx 0{,}01.
\end{aligned}$$

Вероятность того, что информация будет обработана до того, как она потеряет свою ценность, найдем по формуле

$$P_{обс} = \frac{\mu\left(P_1 + 2\sum\limits_{k=0}^{\infty} P_{2+k}\right)}{0,25\cdot\lambda(1+2+3+4)} =$$

$$= \frac{2(0,2+0,22+0,14+0,08+0,02)}{2,5} \approx 0,56,$$

т. е. более половины поступающей информации машина сможет переработать до того, как она устареет.

Вероятность того, что информация начнет обрабатываться, но обработка не будет закончена до конца из-за ее старения, определим по формуле

$$P_{но} = \frac{\nu\left(P_1 + 2\sum\limits_{k=0}^{\infty} P_{2+k}\right)}{0,25\cdot\lambda(1+2+3+4)} \approx 0,23.$$

Вероятность потери информации из очереди будет равна

$$P_{отк\ q} = 1 - P_{обс} - P_{н\ о} = 0,21.$$

Ограничение на длину очереди. На практике, как правило, длина очереди ограничивается. Например, память (или внешний накопитель) электронно-вычислительной машины имеет конечный объем. Другим примером может служить бункер или склад, который имеет ограниченные объемы для хранения деталей и изделий.

Рассмотрим систему массового обслуживания, в которой в очереди может находиться не более N заявок. Если очередная заявка, поступившая в систему, застанет в очереди уже N заявок, то она теряется. Дифференциальные уравнения и конечные зависимости, с помощью которых определяются вероятности состояний системы массового обслуживания, мало чем отличаются от полученных ранее в предыдущих разделах. Для системы с ограниченным временем ожидания в очереди и постоянным числом заявок в группе остаются справедливыми уравнения (4.4.1) и (4.4.2), но нормирующее условие запишется несколько в ином виде:

$$\sum_{k=0}^{n+N} P_k = 1. \qquad (4.4.17)$$

Тогда для определения вероятности состояний P_k можно использовать зависимости (4.4.4), где величина

P_0 определяется из условия (4.4.17). Вероятность отказа в этом случае можно определить по формуле (4.4.5), но вероятности P_k следует определять, как отмечалось выше, с учетом условия (4.4.17). При рассмотрении задачи по обслуживанию случайного неординарного потока заявок с ограниченным временем пребывания их в системе можно воспользоваться результатами, полученными выше. При этом надо иметь в виду, что нормирующее условие будет записано так:

$$\sum_{k=0}^{n+N} P_k = 1. \tag{4.4.18}$$

При определении вероятности отказа следует иметь в виду, что заявка может быть потеряна не только по истечении времени пребывания ее в системе, но и в результате того, что в момент поступления ее в очереди будет уже N заявок. Тогда вероятность отказа в обслуживании будет равна

$$P_{\text{отк}} = \frac{\beta \sum\limits_{k=1}^{n+N} kP_k + \alpha \sum\limits_{k=0}^{n+N} P_k \sum\limits_{s=1}^{\infty} s a_{n+N+s-k}}{\alpha \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k}. \tag{4.4.19}$$

В формуле (4.4.19) вторая сумма числителя определяет среднее число заявок, которое не попадет в систему из-за того, что в очереди будет уже N заявок.

Отсюда вероятность отказа из-за полной загруженности очереди равна

$$P_{\text{отк}_{\text{з}}} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n+N} P_k \sum\limits_{s=1}^{\infty} s a_{n+N+s-k}}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k}. \tag{4.4.20}$$

Среднее число заявок в очереди определится из зависимости

$$M_{\text{ож}} = \sum_{k=1}^{N} kP_{n+k}. \tag{4.4.21}$$

Среднее число приборов, занятых обслуживанием, равно

$$N_з = \sum_{k=1}^{n} kP_k + n\sum_{s=1}^{N} P_{n+N}. \tag{4.4.22}$$

Коэффициент загрузки приборов

$$K_з = \frac{N_з}{n}. \tag{4.4.23}$$

Коэффициент загрузки накопителя (очереди)

$$K_н = \frac{M_{ож}}{N}. \tag{4.4.24}$$

Пример 3

Рассмотрим использование полученных зависимостей применительно к задаче, рассмотренной в примере 2, но считая, что в машине имеется накопитель для очереди ограниченной длины. Пусть в очереди может находиться не более двух сообщений ($N=2$).

Вероятности состояний системы определим по формулам:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu + \nu} P_0,$$

$$P_2 = \frac{\lambda + \mu + \nu}{2(\mu + \nu)} P_1 - \frac{\lambda}{2(\mu + \nu)} a_1 P_0,$$

$$P_{2+1} = \frac{\lambda + 2\mu + 2\nu}{2\mu + 3\nu} P_2 - \frac{\lambda}{2\mu + 3\nu} (a_1 P_1 + a_2 P_0),$$

$$P_{2+2} = \frac{\lambda + 2\mu + 3\nu}{2\mu + 4\nu} P_{2+1} - \frac{\lambda}{2\mu + 4\nu} (a_1 P_{2+1} + a_2 P_2 + a_3 P_1).$$

Учитывая нормирующее условие и подставляя численные значения параметров, получим:

$$\begin{aligned} P_1 &= 0{,}33 P_0, \\ P_2 &= 0{,}18 P_0, \\ P_{2+1} &= 0{,}12 P_0, \\ P_{2+2} &= 0{,}07 P_0, \end{aligned}$$

откуда

$$P_0 = \frac{1}{1{,}7} = 0{,}59.$$

Тогда

$$\begin{aligned} P_1 &\approx 0{,}19, \\ P_2 &\approx 0{,}10, \\ P_{2+1} &\approx 0{,}07, \\ P_{2+2} &\approx 0{,}04. \end{aligned}$$

Вероятность того, что информация будет обработана, определим по формуле

$$P_{обс} = \frac{\mu\,[P_1 + 2(P_2 + P_{2+1} + P_{2+2})]}{0{,}25 \cdot \lambda \cdot (1 + 2 + 3 + 4)} \approx 0{,}49,$$

т. е. около 49% информации будет обработано своевременно. Процент заявок, не попавших в накопитель из-за того, что он был полностью занят, получим из равенства

$$P_{\text{отк н}}=P_{2+2}\approx 0{,}04,$$

т. е. около 4% информации вообще не попадет в машину из-за того, что в накопителе будет не менее двух сообщений.

Вероятность того, что сообщения, ожидающие в очереди, потеряют ценность до того, как начнется их обработка в машине, равна

$$P_{\text{отк ч}}=1-P_{\text{обс}}-P_{\text{отк н}}-P_{\text{н о}}\approx 0{,}22.$$

Следовательно, около 22% информации потеряется из очереди еще до того, как начнет обслуживаться.

Вероятность того, что информация не будет своевременно обработана до конца, равна

$$P_{\text{но}}=\frac{\nu\left[P_1+2\left(P_2+P_{2+1}+P_{2+2}\right)\right]}{0{,}25\cdot\lambda\cdot(1+2+3+4)}\approx 0{,}25.$$

4.5. Одноканальная система с переменным временем обслуживания

В этом параграфе рассмотрены системы массового обслуживания смешанного типа, в которых время обслуживания меняется с изменением длины очереди. На практике при массовом обслуживании вызовов весьма часто возникают ситуации, когда по мере увеличения длины очереди или плотности поступающих заявок операторы (аппараты, приборы) увеличивают темп работы до некоторого допустимого предела. Например, по мере увеличения очереди к кассиру или к продавцу они начинают несколько быстрее работать. При увеличении числа заказов в ателье, радиомастерской или комбинате бытового обслуживания сроки выполнения заказов начинают уменьшаться, правда иногда за счет качества.

Решение одной из подобных задач рассмотрим на примере одноканальной системы с ограниченным временем ожидания в очереди. Решение приведем в виде, предложенном В. И. Мудровым [16].

Имеется одноканальная система, на которую поступает простейший поток заявок плотности λ. Заявка, поступив в систему и застав прибор занятым обслуживанием, становится в очередь в том случае, если время ожидания начала обслуживания не будет превышать величину t. С увеличением длины очереди канал обслуживания увеличивает темп работы до некоторого предела. Положим, что время обслуживания $t_{\text{обс}}$ изменяется по линейному закону в зависимости от времени пребывания заявок в очереди

$$t_{\text{обс}} = t_{\text{обс макс}} - a t_{\text{ож}},$$

где $t_{\text{обс макс}}$ — максимальное значение времени обслуживания;

$t_{\text{ож}}$ — время пребывания заявок в очереди.

Заявки не становятся в очередь и покидают систему, если им предстоит ожидать начала обслуживания больше некоторого времени. Для простоты рассмотрим случай, когда

$$t \leqslant \frac{t_{\text{обс макс}}}{1+a},$$

что соответствует условию

$$t \leqslant t_{\text{обс мин}} = t_{\text{обс макс}} - at,$$

где $t_{\text{обс мин}}$ — минимально необходимое время для обслуживания.

Для лучшего представления механизма функционирования рассмотрим такую ситуацию. Пусть прибор занят обслуживанием очередной заявки. В конце обслуживания заявки имеется интервал времени t (см. рис. 4.5.1), когда возможно образование очереди. Если в течение этого интервала не поступит ни одной заявки,

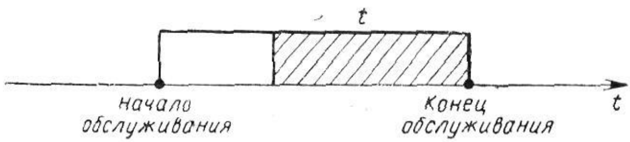

Рис. 4.5.1. Интервал времени t, в котором возможно образование очереди.

то прибор, как только закончит обслуживание, начинает простаивать до момента поступления очередной заявки. Время обслуживания этой заявки как бы увеличится на какую-то величину, равную времени простоя прибора. В среднем это время составляет величину $\frac{1}{\lambda}$. Пусть за время t поступила одна заявка. Тогда на основании свойства простейшего потока о независимости течения процесса в непересекающихся интервалах времени эта заявка будет распределена внутри интервала t с равной вероятностью. Среднее время ожидания этой заявки будет равно $\frac{t}{2}$, а среднее время обслуживания ее составит величину, равную

$$t_{\text{обс макс}} - a\frac{t}{2}.$$

В общем случае, если за время t поступит s заявок, то *каждая из них распределится внутри интервала* t с равной вероятностью. Расположенные в порядке возрастания, они образуют вариационный ряд. Распределение первого члена вариационного ряда, состоящего из s членов, каждый из которых распределен по закону $f(\tau)$, задается формулой

$$q(\tau) = C^1_m f(\tau)\,[1 - F(\tau)]^{s-1} \qquad (4.5.1)$$

где

$$F(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} f(\tau)\,d\tau;$$

$$1 - F(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} f(\tau)\,d\tau.$$

Если распределение случайной величины внутри отрезка $(0, t)$ равномерное, то получим

$$f(\tau) = \frac{1}{t},$$

$$F(\tau) = \frac{\tau}{t}, \quad 1 - F(\tau) = \frac{t-\tau}{t},$$

$$g(\tau) = \frac{s}{t}\left(\frac{t-\tau}{t}\right)^{s-1}.$$

Среднее время обслуживания заявки, принятой к обслуживанию, при равномерном распределении равно

$$g_s = \int_0^t (t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau = \frac{s}{s+1}\,t. \qquad (4.5.2)$$

Тогда время обслуживания

$$t_{\text{обс}} = t_{\text{обс макс}} - a\frac{s}{s+1}\,t. \qquad (4.5.3)$$

Найдем среднее значение времени обслуживания. При его определении принимается, что в случае отсутствия заявок время обслуживания следующей заявки увеличивается на время простоя прибора. Тогда, как показано в [16], среднее время обслуживания будет равно

$$\bar{t}_{\text{обс } n} = t_{\text{обс мин}} + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} + a \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}). \qquad (4.5.4)$$

Вероятность того, что заявка будет принята к обслуживанию, определится из отношения среднего темпа обслуживания $\frac{1}{\bar{t}_{\text{обс } n}}$ и среднего темпа поступления заявок λ

$$P_{\text{обс}} = \frac{1}{\lambda t_{\text{обс мин}} + e^{-\lambda t} + a(1 - e^{-\lambda t})}. \qquad (4.5.5)$$

Средняя вероятность отказа в обслуживании равна

$$P_{\text{отк}} = 1 - P_{\text{обс}} = 1 - \frac{1}{\lambda t_{\text{обс мин}} + e^{-\lambda t} + a(1 - e^{-\lambda t})}. \qquad (4.5.6)$$

Среднее время обслуживания одной заявки меняется в зависимости от плотности поступления заявок в пределах от $t_{\text{обс макс}}$ до $t_{\text{обс мин}}$. Минимальные возможности системы могут быть определены из условия, что время обслуживания равно $t_{\text{обс макс}}$, а простоев нет. Аналогично максимальные возможности будут определяться при $t_{\text{обс мин}}$ и отсутствии простоев в ожидании очередных заявок. В силу предположения потока заявок простейшим, прибор часть времени будет простаивать. Это учитывается при определении $\bar{t}_{\text{обс п}}$ как добавочное время к $t_{\text{обс макс}}$ в формуле (4.5.4).

На основании этого можно определить минимально и максимально возможные коэффициенты простоя прибора, которые будут характеризовать влияние случайного появления заявок на возможности системы по обслуживанию:

$$\eta_{\text{макс}} = \frac{t_{\text{обс макс}}}{\bar{t}_{\text{обс п}}}, \qquad (4.5.7)$$

$$\eta_{\text{мин}} = \frac{t_{\text{обс мин}}}{\bar{t}_{\text{обс п}}}.$$

Рассмотрим частный случай системы с отказами, т. е. $t=0$, при $\bar{t}_{\text{обс макс}} = t_{\text{обс мин}}$, когда время обслуживания не изменяется в зависимости от плотности потока. Тогда среднее время обслуживания с учетом времени простоя, приходящегося в среднем на одну заявку, будет равно

$$\bar{t}_{\text{обсп}} = \{[t_{\text{обс}}\lambda] + 1\} \frac{1}{\lambda},$$

где [ ] *обозначают целую часть числа.*

На следующем примере рассмотрим возможность использования полученных зависимостей для системы с переменным временем обслуживания и ограничением на время ожидания в очереди.

Пример 1

В мастерскую приходят клиенты с требованием срочного ремонта обуви в присутствии заказчика. Его выполняет один мастер, тратя в среднем на ремонт одной пары обуви $t_{\text{обс макс}} = 20$ *мин*. Если образуется очередь, то в помощь мастеру даются ученики, в результате чего производительность увеличивается, а среднее *минимальное время может стать* $t_{\text{обс мин}} = 10$ *мин. Клиент остается* в мастерской в том случае, если время ожидания в среднем не превышает $t = 10$ *мин.*

Оценить пропускную способность мастера по ремонту обуви, если в среднем поток запросов на такой ремонт составляет $\lambda = 6$ клиентов в час.

Решение

Определяем параметр a:

$$a = \frac{t_{\text{обс макс}} - t_{\text{обс мин}}}{t} = 1.$$

Вероятность того, что клиент будет обслужен с учетом ожидания начала обслуживания не более 0,16 *час*, определим по формуле (4.5.5)

$$P_{\text{обс}} = \frac{1}{6 \cdot 0,16 + e^{-1} + 1\,(1 - e^{-1})} = 0,5.$$

Таким образом, половина клиентов, у которых возникла необходимость в срочном ремонте обуви, будет удовлетворена. Если бы мастерская не могла в случае необходимости подключить в помощь мастеру учеников, то вероятность отказа в обслуживании можно получить по формуле (4.1.4) для одноканальной системы с ограниченным временем ожидания.

Определим параметры:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{обс макс}}} = 1,$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 2,$$

$$\beta = \frac{t_{\text{обс макс}}}{t} = 2.$$

Тогда по табл. 6 приложения 5 для $n = 1$, $\alpha = 2$ и $\beta = 2$ получим

$$P_{\text{отк}} = 0,60$$

Вероятность того, что клиент будет обслужен, равна

$$P_{обс}=1-0,60=0,40.$$

Таким образом, только 40% всех клиентов, нуждающихся в среднем ремонте, будет удовлетворено. Это на 10% меньше, чем в первом случае, когда в мастерской имеется возможность увеличить производительность ремонта за счет оказания помощи со стороны учеников. Среднее время, которое мастер затрачивает на ремонт обуви и ожидание клиентов, в первом случае составляет

$$\bar{t}_{обс\ п}=0,16+\frac{0,38}{6}+\frac{1}{6}(1-0,38)=0,33\ час.$$

Следовательно, несмотря на то, что мастер может при максимальном темпе работы сократить время ремонта одной пары обуви до 0,16 *час*, среднее время, которое приходится на одну отремонтированную пару обуви, составляет 0,33 *час*. Это происходит за счет того, что часть времени мастер простаивает из-за ожидания клиентов.

Пример 2

Противовоздушная оборона некоторого объекта обеспечивается одной зенитной установкой, у которой время на подготовку к обстрелу обнаруженного самолета равно $t_{подг}=1$ *мин*. Пусть вероятность поражения самолета за стрельбу практически равна 1. Если обстрел самолета производится на дальней границе зоны поражения, то по самолету будет выпущено больше снарядов и время обстрела будет равно $t_{макс}=1$ *мин*. При обстреле самолета на ближней границе зоны поражения время обстрела составит $t_{мин}=0,2$ *мин*. Противник совершает налет на объект со средней плотностью $\lambda=1$ самолет в минуту. Время пребывания самолетов противника в зоне стрельбы равно $\bar{t}=1$ *мин*. Требуется определить среднюю вероятность поражения самолетов противника.

Решение

Определим максимальное и минимальное время, необходимое зенитному средству на обстрел самолетов противника. Максимальное время обстрела будет в случае начала стрельбы при нахождении самолетов на дальней границе зоны стрельбы

$$t_{обс\ макс}=t_{подг}+t_{макс}=1+1=2\ мин.$$

Минимальное время обстрела равно при обстреле самолета на ближней границе зоны стрельбы

$$t_{обс\ мин}=t_{подг}+t_{мин}=1+0,2=1,2\ мин.$$

Определим параметр a:

$$a=\frac{2-1,2}{1}=0,8.$$

По формуле (4.5.5) определим вероятность поражения самолетов противника

$$P_{обс}=\frac{1}{1,2+0,38+0,8\cdot 0,62}\approx 0,50.$$

Таким образом, около 50% самолетов противника будет уничтожено средством ПВО объекта. Если бы зенитное средство обстреливало самолеты противника либо на дальней границе зоны стрельбы, либо на ближней, то время ожидания самолетом начала обстрела было бы равно $t=0$. Тогда вероятность поражения самолетов противника для любого из этих случаев можно определить по формуле Эрланга при $n=1$:

— при обстреле самолетов на дальней границе зоны стрельбы

$$P_{\text{обс д}}=\frac{1}{1+\lambda t_{\text{обс макс}}}=\frac{1}{1+2}\approx 0,33;$$

— при обстреле самолетов только на ближней границе зоны стрельбы

$$P_{\text{обс б}}=\frac{1}{1+\lambda t_{\text{обс мин}}}=\frac{1}{1+1,2}\approx 0,45.$$

Из примера видно, что маневрирование огнем по зоне поражения дает преимущества в первом случае на 17%, а во втором на 5%, а в среднем на 11%.

4.6. Система массового обслуживания, состоящая из приборов разной производительности

В главе, посвященной системам массового обслуживания с отказами, уже рассматривались особенности функционирования для тех случаев, когда системы состояли из приборов разной производительности. И в смешанных системах довольно часто могут встретиться случаи, когда приборы имеют различную производительность. Примером может служить парикмахерская, где обслуживание клиентов производится несколькими мастерами. Каждый мастер имеет различную квалификацию, опыт работы, поэтому производительность их различна. Другим примером может служить работа вычислительного центра по обслуживанию организаций вычислительными работами. Как правило, крупный вычислительный центр имеет несколько разнотипных электронно-вычислительных машин с различным быстродействием и памятью. Для оценки функционирования подобных систем рассмотрим работу системы массового обслуживания с ограниченным временем ожидания заявок в очереди. Пусть в систему массового обслуживания, состоящую из n приборов разной производительности, поступает простейший поток заявок с плотностью λ. Время обслуживания одной заявки для каждого прибора является величиной случайной с показательным законом распределения. Законы распределения времени обслуживания приборов характеризуются параметром μ_{k_i}, где i — номер прибора ($i=1, 2, \ldots, n$). Каждая заявка, прибывшая в систему, остается в ней и начинает обслуживаться немедленно, если только имеется хотя бы один свободный прибор. Если все приборы заняты, то заявка становится в очередь, но может находиться в ней не более некоторого времени T. Если за это время она не будет принята на обслуживание, то получает отказ. Каждый вновь освободившийся прибор в ходе работы системы начинает обслуживать любую заявку из очереди с вероятностью, равной

$$\frac{1}{j-n},$$

где j — число заявок в системе.

Вероятности состояний системы описываются дифференциальными уравнениями, вывод которых приводится в [29]:

$$\left.\begin{aligned}
&p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \sum_{i=1}^{n} p_1(k_i, t)\,\mu_{k_i},\\
&p'_j(k_1, \ldots, k_j, t) = -\left(\lambda + \sum_{i=1}^{n} \mu_{k_i}\right) p_i(k_j, \ldots,\\
&k_j, t) + \frac{\lambda}{n+j+1} \sum_{k_i^0} p_{j-1}(k_1, \ldots, k_j, k_i^0, t) +\\
&+ \sum_{k_i} p_{j+1}(k_1, \ldots, k_j, k_i, t)\,\mu_{k_i}\\
&\qquad \text{при } j < n,\\
&p'_j(t) = -\left[\lambda + \sum_{i=1}^{n} \mu_{k_i} + C_{j-n}(T, t)\right] p_j(t) +\\
&+ \left[\sum_{i=1}^{n} \mu_{k_i} + C_{j+1-n}(T, t)\right] P_{j+1}(t) + \lambda p_{j-1}(t)\\
&\qquad \text{при } j \geqslant n.
\end{aligned}\right\} \quad (4.6.1)$$

Переходя к пределу при $t \to \infty$, получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\lambda P_0+\sum_{k=i}^{n} P_1(k_i)\mu_{k_i}=0,\\
&-\left(\lambda+\sum_{i=1}^{j}\mu_{k_i}P_j(k_1,\ldots,k_j)\right)+\\
&+\frac{\lambda}{n-j+1}\sum_{k_i^0} P_j(k_1,\ldots,k_j,k_i^0)+\\
&+\sum_{k_i} P_{j+1}(k_1,\ldots,k_j,k_i)\mu_{k_i}=0 \text{ при } j<n,\\
&-\left[\lambda+\sum_{i=1}^{n}\mu_{k_i}+C_{j-n}(T)\right]P_j+\left[\sum_{i=1}^{n}\mu_{k_i}+\right.\\
&\left.+C_{j+1-n}(T)\right]P_{j+1}+\lambda P_{j-1}=0 \text{ при } j\geqslant n.
\end{aligned}
\right\}
\quad (4.6.2)
$$

Значение вероятностей $C_k(T)$, как показано в работе А. А. Шахбазова [29], равно

$$
C_k(T)=\sum_{i=1}^{n}\mu_{k_i}\left(e^{-T\frac{\sum_{i=1}^{n}\mu_{k_i}}{k}}-1\right)^{-1}. \quad (4.6.3)
$$

Отсюда решение системы (4.6.2) дает следующую зависимость для определения вероятности того, что в системе массового обслуживания находится j заявок:

$$
P_j=\frac{(n-j)!}{n!\prod_{i=1}^{n}\frac{\mu_{k_i}}{\lambda^n}}\sum_{C_{n-j}}\frac{\mu_{k_1}\mu_{k_2}\ldots\mu_{k_{n-j}}}{\lambda^{n-j}}P_0 \text{ при } j<n, \quad (4.6.4а)
$$

$$
P_j=\frac{P_0}{n!\prod_{i=1}^{n}\frac{\mu_{k_i}}{\lambda^n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_{k_i}}{\lambda}\right)^{j-n}}\prod_{k=1}^{j-n}\left(1-e^{-\frac{T}{k}\sum_{i=1}^{n}\mu_{k_i}}\right) \text{ при } j>n, \quad (4.6.4б)
$$

где $\sum\limits_{C_{n-j}}$ — суммирование распространяется по всем сочетаниям.

Значения вероятности P_0 определим из нормирующего условия

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1. \qquad (4.6.5)$$

Тогда

$$P_0^{-1} = \frac{1}{n! \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{\mu_{k_i}}{\lambda^n}} \left[\sum_{j=0}^{n} (n-j)! \times \right.$$

$$\times \sum_{C_{n-j}} \frac{\mu_{k_1} \mu_{k_2} \ldots \mu_{k_{n-j}}}{\lambda^{n-j}} +$$

$$\left. + \sum_{j=n+1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_{k_i}}{\lambda} \right)^{n-j} \prod_{k=1}^{j-n} \left(1 - e^{-\frac{T}{k} \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_{k_i}} \right) \right]. \qquad (4.6.6)$$

В частном случае при $\mu_{k_i} = \mu \; (i = 1, 2, \ldots, n)$ получаем известную формулу Баррера

$$P_j = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!} P_0 \text{ при } j \leqslant n,$$

$$P_j = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{n!\, n^{j-n}} P_0 \prod_{k=1}^{j-n} \left(1 - e^{-n\mu \frac{T}{k}} \right) \text{ при } j > n,$$

$$P_0^{-1} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{n^j} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{j} \left(1 - e^{-n\mu \frac{T}{k}} \right).$$

Пример

В вычислительный центр поступают заказы на проведение метеорологических расчетов. Так как прогноз погоды имеет смысл производить по свежим метеоданным, поступающая информация со временем стареет. Пусть по этой причине получаемая информация сохраняет определенную достоверность в течение $T=10$ *час*. Плотность поступления заказов на проведение расчетов составляет $\lambda=2$ заказа в час. Вычислительный центр для проведения этих работ может использовать электронно-вычислительные машины «Урал-1» и БЭСМ-2М. Время расчета на машине «Урал-1» одной задачи в среднем равно 5 *час*, а на БЭСМ-2М — 1 *час*. Учитывая, что при работе машин происходят сбои, время проведения этих расчетов будет колебаться в некоторых пределах. Для простоты положим, что это время имеет показательный закон распределения. Требуется оценить работу вычислительного центра по проведению расчетов, необходимых для прогноза погоды.

Решение

Определяем параметры для машины «Урал-1»

$$\mu_у = \frac{1}{5} = 0,2,$$

для БЭСМ-2М

$$\mu_б = \frac{1}{1} = 1.$$

По формуле (4.6.6) определяем вероятность того, что обе машины свободны от проведения расчетов:

$$P_0^{-1} = \frac{1}{2\,\frac{0,2\cdot 1}{4}}\left[2\left(\frac{0,2\cdot 1}{4}\right) + \left(\frac{0,2}{2}+\frac{1}{2}\right) + \right.$$

$$+\left(\frac{0,2+1}{2}\right)\left(1-e^{-\frac{10}{1}(0,2+1)}\right)+\left(\frac{0,2+1}{2}\right)^2\times$$

$$\times\left(1-e^{-\frac{10}{1}(0,2+1)}\right)\left(1-e^{-\frac{10}{2}(0,2+1)}\right)+$$

$$+\left(\frac{0,2+1}{2}\right)^3\left(1-e^{-\frac{10}{1}(0,2+1)}\right)\times$$

$$\left.\times\left(1-e^{-\frac{10}{2}(0,2+1)}\right)\left(1-e^{-\frac{10}{3}(0,2+1)}\right)+\ldots\right] = 21,$$

откуда

$$P_0 = \frac{1}{21} \approx 0,05.$$

Таким образом, около 5% всего времени машины будут свободны от расчетов.

Вероятность того, что одна из машин будет занята расчетом, а другая свободна, определим по формуле (4.6.4) при $j \leqslant n$

$$P_1 = \frac{1}{2\frac{\mu_у \mu_б}{\lambda^2}} \frac{\mu_у + \mu_б}{\lambda} P_0 \approx 0{,}30,$$

что составляет около 30% времени.

Вероятность того, что обе машины будут работать одновременно и не поступило новых данных для проведения расчетов, будет равна

$$P_2 = \frac{P_0}{2\frac{\mu_у \mu_б}{\lambda^2}} \approx 0{,}50.$$

Нужно определить вероятность того, что поступившие данные для расчетов не будут сразу же использованы. Это возможно в том случае, когда обе машины загружены расчетами

$$P_{заг} = 1 - P_0 - P_1 = 0{,}65.$$

Следовательно, две трети поступающей информации будет некоторое время ожидать начала обработки.

5

УЧЕТ НАДЕЖНОСТИ РАБОТЫ ОБСЛУЖИВАЮЩИХ ПРИБОРОВ

Развитие современной техники сделало весьма актуальной проблему надежности. Поэтому, рассматривая функционирование различных систем массового обслуживания, нельзя обойти вопрос об учете возможности выхода из строя в процессе работы обслуживающих приборов. Как известно, время выхода из строя аппаратуры (появление отказов) или время работы ее между отказами представляет собой случайные величины. Это объясняется различными изменениями условий эксплуатации (нестабильностью питания, изменением параметров элементов и др.), технологического процесса работы аппаратуры и т. д. Так как отказы в аппаратуре устраняются в течение определенного промежутка времени (стационарный режим), то они образуют поток. Анализ потоков отказов сложной аппаратуры показывает, что они обладают свойствами стационарности (в течение большого промежутка времени) и ординарности. Сложнее обстоит дело со свойством отсутствия последействия. Однако можно сделать вывод [28], что если все элементы сложной аппаратуры работают одновременно, то их отказы имеют мгновенный характер появления. Отказ любого элемента ведет к отказу в работе всей системы, старение элементов не происходит и процесс эксплуатации стабилизирован. Для таких систем поток отказов можно считать простейшим.

В этой главе рассмотрены особенности функционирования систем массового обслуживания, которые в процессе эксплуатации могут выходить из строя, при этом предполагается, что поток отказов является простейшим с некоторой плотностью q. Примеров подобных систем можно привести много: работа автоматических телефонных станций, сложной контрольно-измерительной аппаратуры, электронно-вычислительных машин, аппаратов военного назначения и т. д. При рассмотрении функционирования подобных систем массового обслуживания возможны различные ситуации, которые имеют много аналогов на практике. В связи с этим можно предложить большое число задач, в которых необходимо учитывать возможность выхода из рабочего состояния аппаратуры обслуживания. В этих системах в одних случаях заявки вынуждены ожидать обслуживания безгранично долго, а в других поступившая заявка покидает систему, если прибор не может начать ее обслуживание немедленно. Возможны случаи, когда время пребывания заявки в системе или в очереди не превосходит некоторой величины t.

Особенности функционирования могут проявляться и в том, что обслуживающий прибор в одних случаях выходит из строя только во время работы, в других возможно появление неисправности как в период обслуживания, так и в нерабочем состоянии. При организации работы предприятия, на котором имеется ряд однотипных аппаратов, возникает вопрос о целесообразном объеме запасных агрегатов или деталей, о необходимом числе ремонтных бригад (мастеров) и т. д. С учетом надежности работы приборов связаны также задачи по оценке вероятности выполнения прибором той или иной производственной задачи, если для повышения производительности оборудования применяются различные схемы резервирования.

Из сказанного видно, что круг задач массового обслуживания, где необходимо учитывать возможность выхода приборов из строя и их восстановления, довольно широк. Естественно, что дать решение всех возможных вариантов задач не представляется возможным, поэтому в дальнейшем будут рассмотрены некоторые типовые задачи. Материал главы даст возможность читателю представить себе методологию решения задач массового обслуживания с учетом надежности обслуживающих приборов и определить область возможных практических применений предлагаемого математического аппарата.

5.1. Система ненадежных приборов с отказами

Пусть имеется система массового обслуживания с отказами. Но в отличие от ранее рассмотренных случаев (см. гл. 2) здесь каждая вновь поступившая в систему заявка теряется не только тогда, когда все приборы уже заняты обслуживанием, но и тогда когда часть приборов занята обслуживанием, а остальные находятся в состоянии ремонта. При этом предполагается, что выход прибора из строя одинаково возможен как в период работы, так и когда он не обслуживает заявку. Предположим, что система обслуживания состоит из n приборов одного и того же типа. Для приведения в порядок этих приборов, когда они сами требуют обслуживания, имеется бригада из m рабочих. Каждый прибор обслуживается одним рабочим. Приборы системы массового обслуживания являются изделиями многократного действия, поэтому происходят отказы в их работе. Так как потом эти приборы вновь восстанавливаются обслуживающим персоналом, то наблюдается поток отказов, который обладает, как правило, свойствами ординарности и отсутствием последействия и стационарности. Поэтому можно полагать, что поток отказов является простейшим с параметром q. Время, необходимое на приведение прибора в порядок, распределено по показательному закону с параметром γ.

В свою очередь, на приборы для обслуживания поступает простейший поток заявок с параметром λ. Время обслуживания заявки случайное с показательным законом распределения и параметром μ. Если заявка попадет в систему тогда, когда приборы заняты обслуживанием или находятся в нерабочем состоянии, то она теряется. В случае, если прибор вышел из строя в тот момент, когда он был занят обслуживанием, обслуживаемая им заявка также теряется, даже если имелись другие свободные исправные приборы.

Введем следующие обозначения: $p_k(t)$ — вероятность того, что в момент времени t обслуживанием заявок заняты k приборов; $\pi_k(t)$ — вероятность того, что k приборов в момент времени t находятся в нерабочем состоянии.

Дифференциальные уравнения для определения вероятностей π_k были получены в [8] и имеют вид:

$$\left.\begin{array}{c}\pi'_0(t) = -nq\pi_0(t) + \gamma\pi_1(t),\\ \pi'_k(t) = -[(n-k)q + k\gamma]\pi_k(t) + \\ + (n-k+1)q\pi_{k-1}(t) + (k+1)\gamma\pi_{k+1}(t),\\ \text{при } 1 \leqslant k < m,\\ \pi'_k(t) = -[(n-k)q + m\gamma]\pi_k(t) + \\ + (n-k+1)q\pi_{k-1}(t) + m\gamma\pi_{k+1}(t) \text{ при } m \leqslant k < n,\\ \pi'_n(t) = -m\gamma\pi_n(t) + q\pi_{n-1}(t).\end{array}\right\} \quad (5.1.1)$$

Вывод дифференциальных уравнений для определения вероятностей $p_k(t)$ читатель может найти в [8], мы приведем их только в окончательном виде:

$$\left.\begin{array}{c}p'_0(t) = -\lambda p_0(t)[1 - \pi_r(t)] + (q+\mu)p_1(t),\\ p'_k(t) = -[\lambda(1 - \pi_{n-k}(t)) + k(q+\mu)]p_k(t) + \\ + \lambda p_{k-1}(t)\sum\limits_{j=0}^{n-k}\pi_j(t) + (k+1)(q+\mu)p_{k+1}(t)\\ \text{при } 1 \leqslant k < n,\\ p'_n(t) = -n(q+\mu)p_n(t) + \lambda\pi_0(t)p_{k-1}(t).\end{array}\right\} \quad (5.1.2)$$

Полагая, что существуют пределы

$$\pi_k = \lim_{t\to\infty}\pi_k(t),$$

$$P_k = \lim_{t\to\infty}p_k(t),$$

получим для стационарных условий систему алгебраических уравнений, описывающих вероятности π_k и P_k.

Для определения вероятностей π_k

$$\left.\begin{array}{c}-nq\pi_0 + \gamma\pi_1 = 0,\\ -[(n-k)q + k\gamma]\pi_k + (n-k+1)q\pi_{k-1} + \\ + (k+1)\gamma\pi_{k+1} = 0 \text{ при } 1 \leqslant k < m,\\ -[(n-k)q + m\gamma]\pi_k + (n-k+1)q\pi_{k-1} + \\ + m\gamma\pi_{k+1} = 0 \text{ при } m \leqslant k < n,\\ -m\gamma\pi_n + q\pi_{n-1} = 0.\end{array}\right\} \quad (5.1.3)$$

Для вероятностей P_k

$$\left.\begin{aligned}&-\lambda P_0(1-\pi_r)+(q+\mu)P_1=0,\\&-[\lambda(1-\pi_{r-k})+k(q+\mu)]P_k+\\&\quad+(k+1)(q+\mu)P_{k+1}+\\&+\lambda\sum_{j=0}^{n-k}\pi_j P_{k-j}=0 \quad \text{при } 1\leqslant k<n,\\&-n(q+\mu)P_n+\lambda\pi_0 P_{n-1}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(5.1.4)$$

Нормирующие условия при этом имеют вид

$$\sum_{k=0}^{n}\pi_k=1 \qquad (5.1.5)$$

и

$$\sum_{k=0}^{n}P_k=1. \qquad (5.1.6)$$

Решение системы (5.1.3) совместно с уравнением (5.1.5) даст следующие зависимости для вероятностей π_k:

$$\pi_k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\left(\frac{q}{\gamma}\right)^k\pi_0 \quad \text{при } 1\leqslant k\leqslant m \qquad (5.1.7)$$

и

$$\pi_k=\frac{n!}{m!\,m^{k-m}\,(n-k)!}\left(\frac{q}{\gamma}\right)^k\pi_0 \quad \text{при } m<k\leqslant n. \qquad (5.1.8)$$

Значение π_0 определится из нормирующего условия (5.1.5). Последовательное решение системы (5.1.4) совместно с условием (5.1.6) даст значения вероятностей P_k.

1. Вероятность того, что заявка не попала в систему (так как либо приборы заняты обслуживанием, либо неисправны), равна

$$P_{\text{нс}}=\sum_{s=0}^{n}P_s\pi_{n-s}. \qquad (5.1.9)$$

2. Вероятность того, что заявка, обслуживание которой не было закончено до того, как прибор вышел из

строя, покинет систему неполностью обслуженной, равна

$$P_{\text{но}}=\frac{q\sum\limits_{k=1}^{n}kP_k}{\lambda}. \qquad (5.1.10)$$

Отсюда общая вероятность отказа в обслуживании заявок системой равна

$$P_{\text{отк}}=P_{\text{но}}+P_{\text{нс}}=$$

$$=\sum_{s=0}^{n}P_s\pi_{n-s}+\frac{q\sum\limits_{k=1}^{n}kP_k}{\lambda}. \qquad (5.1.11)$$

3. Вероятность того, что заявка будет обслужена, равна

$$P_{\text{обс}}=1-P_{\text{отк}}. \qquad (5.1.12)$$

4. Математическое ожидание числа занятых приборов определится из зависимости

$$M_{\text{з}}=\sum_{k=1}^{n}kP_k. \qquad (5.1.13)$$

5. Среднее число приборов, которые находятся в нерабочем состоянии, равно

$$M_{\text{н}}=\sum_{s=1}^{n}s\pi_s. \qquad (5.1.14)$$

Отсюда среднее число исправных приборов, не занятых обслуживанием, определится из формулы

$$M_0=n-M_{\text{з}}-M_{\text{н}}. \qquad (5.1.15)$$

6. Коэффициент простоя свободных приборов из-за того, что они свободны от обслуживания, равен

$$K_{\text{пс}}=\frac{M_0}{n}. \qquad (5.1.16)$$

7. Коэффициент занятости приборов системы определится как отношение среднего числа занятых обслуживанием приборов к общему числу

$$K_{\text{з}}=\frac{M_{\text{з}}}{n}. \qquad (5.1.17)$$

8. Коэффициент надежности обслуживающей системы, который показывает среднюю долю неисправных

приборов, равен

$$K_{н} = \frac{M_{н}}{n}. \tag{5.1.18}$$

В частном случае при $n=1$ и $m=1$, т. е. для одноканальной системы, получим довольно простые выражения для определения величин P_0, P_1, π_0 и π_1:

$$\pi_0 = \frac{\gamma}{q+\gamma}; \ \pi_1 = \frac{q}{q+\gamma} \tag{5.1.19}$$

и

$$P_0 = \frac{q+\mu}{q+\mu+\frac{\lambda\gamma}{q+\gamma}}, \tag{5.1.20}$$

$$P_1 = \frac{\lambda\gamma}{(q+\gamma)(q+\mu)+\gamma\lambda}. \tag{5.1.21}$$

9. Вероятность того, что прибор либо занят обслуживанием, либо неисправен, равна

$$P_{н\,с} = P_1 + \pi_1 = \frac{q}{q+\gamma} + \frac{\lambda\gamma}{(q+\mu)(q+\gamma)+\lambda\gamma}. \tag{5.1.22}$$

Пример

На одноканальный коммутатор $n=1$ поступают заявки на телефонные разговоры с абонентами с плотностью $\lambda=0{,}5$ заявок в минуту. Пусть среднее время ведения одного разговора равно $\bar{t}_{обс}=2$ *мин.* Коммутатор может время от времени выходить из строя. Опыт работы показал, что среднее время наработки на один отказ для коммутатора равно $\bar{t}_{н}=1\,000$ *мин.* Время, необходимое для устранения неисправности, случайное и в среднем равно $\bar{t}_{вос}=100$ *мин.* *Если заявка на разговор поступит в тот момент,* когда коммутатор занят или неисправен, то заявка теряется. Для ремонта коммутатора имеется один оператор $(m=1)$. Требуется определить основные характеристики функционирования коммутатора.

Решение

Определяем параметры

$$q = \frac{1}{\bar{t}_{н}} = \frac{1}{1\,000} = 0{,}001,$$

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{обс}} = \frac{1}{2} = 0{,}5,$$

$$\gamma = \frac{1}{\bar{t}_{вос}} = \frac{1}{100} = 0{,}01.$$

По формуле (5.1.22) определяем вероятность того, что поступившая заявка на ведение разговора не будет удовлетворена:

$$P_{\text{нс}}=\frac{0,001}{0,011}+\frac{0,5\cdot 0,01}{(0,001+0,5)(0,001+0,01)+0,5\cdot 0,01}\approx 0,59.$$

Таким образом, с вероятностью 0,59 разговор не состоится из-за того, что коммутатор либо занят, либо неисправен. При этом вероятность того, что коммутатор неисправен, равна первому слагаемому, т. е. 0,09, а вероятность того, что коммутатор занят обслуживанием одного из предшествующих разговоров, равна второму слагаемому, т. е. 0,5. Из этого видно, что коммутатор явно перегружен и для повышения его пропускной способности необходимо увеличить число каналов. Так как коммутатор может выходить из строя и во время обслуживания разговора, то некоторая часть разговоров будет прервана до их полного окончания. Определим процент неоконченных разговоров из-за выхода коммутатора из строя. Для этого воспользуемся формулой (5.1.10), полученной применительно к одноканальной системе, т. е. при $n=1$:

$$P_{\text{но}}=\frac{qP_1}{\lambda}=\frac{0,5\cdot 0,001}{0,5}=0,001.$$

Таким образом, только 0,1% разговоров будет не закончено до конца из-за выхода коммутатора из строя.

5.2. Пропускные способности систем с запасными частями (блоками) на случай выхода из строя приборов

Как только машина новой конструкции поступает в эксплуатацию, всегда возникает вопрос об определении необходимого количества запасных частей. Недостаток их вызывает вынужденные простои машин из-за невозможности быстрой ликвидации неисправности. С другой стороны, завышение необходимого количества запасных частей приводит к замораживанию капитала и поэтому не может быть экономически оправдано. Все это требует серьезного экономического подхода при обосновании необходимого количества запасных частей.

При определении количества запасных частей надо учитывать статистику выхода из строя машины в процессе ее эксплуатации, уровень подготовки обслуживающего технического персонала, возможности по восстановлению вышедших из строя деталей, узлов, блоков и т. д. и, конечно, экономические показатели.

Рассмотрим две задачи. В первой задаче делается попытка показать метод обоснования необходимого количества запасных частей для машины, состоящей из большого числа одинаковых блоков. Примерами подобных машин могут служить аналоговые электронные, цифровые электронно-вычислительные машины и др.

Во второй задаче рассматривается зависимость числа запасных агрегатов от группы работающих машин, а также количества ремонтных органов, обслуживающих их. Примером может служить дублирование автоматических линий связи и др.

Обслуживающий аппарат состоит из m однотипных блоков. Рассмотрим постановку первой задачи. Пусть имеется некоторая непрерывно работающая машина, состоящая из m одинаковых блоков. В процессе ее работы определенные блоки могут выходить случайным образом из строя. Время наработки на один отказ примем распределенным по показательному закону с параметром $\lambda = \frac{1}{\bar{t}_н}$. Для замены неисправных блоков имеется n запасных. Как только блок выходит из строя, его сразу заменяют запасным, если имеется исправный. Блок, который был заменен из-за неисправности, поступает в ремонт. Машину обслуживают c операторов, которые могут восстанавливать неисправные блоки. Время восстановления каждого блока случайно, так как оно определяется характером полученного повреждения. Однако на ремонт каждого блока в среднем оператором тратится время $\bar{t}_{обс}$. Примем, что время восстановления распределено по показательному закону с параметром

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{обс}}.$$

Восстановленные блоки вновь идут на пополнение резервных.

Требуется рассмотреть особенности функционирования подобной машины. Введем следующие обозначения:

$p_0(t)$ — вероятность того, что в момент t все блоки находятся в исправном состоянии и машина работает;

$p_k(t)$ — вероятность того, что в момент t имеется k неисправных блоков;

$p_{n+1}(t)$ — вероятность того, что машина не может работать из-за отсутствия исправных блоков для замены вновь вышедшего.

Вероятности возможных состояний системы описываются следующей системой дифференциальных уравнений [22]

$$\left.\begin{aligned}
p'_0(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),\\
p'_k(t) &= -(\lambda + k\cdot\mu)\,p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) +\\
&+ (k+1)\,\mu p_{k+1}(t) \text{ при } 0 < k < c,\\
p'_k(t) &= -(\lambda + c\mu)\,p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) +\\
&+ c\mu p_{k+1}(t) \text{ при } c \leqslant k < n+1,\\
p'_{n+1}(t) &= -c\mu p_{n+1}(t) + \lambda p_n(t).
\end{aligned}\right\} \qquad (5.2.1)$$

Если обозначить $\alpha = \lambda/\mu$ и учесть нормирующее условие

$$\sum_{k=0}^{n+1} p_k(t) = 1,$$

то получим для стационарных условий следующие решения.

1. Вероятность того, что k блоков машины находятся в ремонте:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0 \text{ при } k \leqslant c, \qquad (5.2.2)$$

$$P_k = \left(\frac{\alpha}{c}\right)^{k-c} \frac{\alpha^c}{c!} P_0 \text{ при } c \leqslant k \leqslant n+1.$$

2. Вероятность того, что все n запасных блоков находятся в исправном состоянии:

$$P_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{c} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^c}{c!} \sum_{k=1}^{n-c+1} \left(\frac{\alpha}{c}\right)^k\right]^{-1}. \qquad (5.2.3)$$

3. Машина не будет работать в том случае, если $n+1$ блок выйдет из строя. Вероятность этого состояния определяется формулой (5.2.2) при $k=n+1$, т. е.

$$P_{\text{отк}} = \frac{\left(\frac{\alpha}{c}\right)^{n-c+1} \frac{\alpha^c}{c!}}{1 + \sum_{k=1}^{c} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^c}{c!} \sum_{k=1}^{n-c+1} \left(\frac{\alpha}{c}\right)^k}. \qquad (5.2.4)$$

4. Среднее число блоков, находящихся в ремонте при бесперебойной работе машины, определится из зависимости

$$N_р = \sum_{k=1}^{n} kP_k. \qquad (5.2.5)$$

5. Среднее число занятых ремонтом операторов

$$N_з = \sum_{k=1}^{c} kP_k + c \sum_{k=c+1}^{n+1} P_k. \qquad (5.2.6)$$

6. Коэффициент загрузки операторов равен

$$K_з = \frac{N_з}{c}. \qquad (5.2.7)$$

7. Среднее число блоков, ожидающих ремонта

$$N_о = \sum_{k=c+1}^{n+1} (k-c) P_k. \qquad (5.2.8)$$

Для определения экономически целесообразного количества запасных блоков и числа операторов, производящих их ремонт, предлагается воспользоваться следующей формулой, по которой среди всех вариантов надо выбрать такой, который обеспечивает минимум потерь при эксплуатации машины:

$$\min C_0 = nC_{зап} + (cC_{оп} + C_{пр}P_{отк})\, T_а, \qquad (5.2.9)$$

где $C_{зап}$ — стоимость запасных блоков (частей);
$C_{пр}$ — стоимость одной единицы времени простоя машины;
$C_{оп}$ — стоимость содержания одного оператора в единицу времени;
$T_а$ — среднее время амортизации запасного блока (части).

Если число операторов вполне определенное (т. е. задано), то оптимальное число запасных деталей, обеспечивающее минимум потерь, возникающих из-за простоя машины и затрат на запасные блоки (детали), можно определить по формуле

$$\min C_0 = nC_{\text{зап}} + C_{\text{пр}} P_{\text{отк}} T_{\text{а}}.$$

Пример 1

Электронно-вычислительная машина состоит из 500 однотипных блоков, каждый из которых имеет надежность работы, характеризуемую средней наработкой на один отказ, равной 500 *час/отказ*. Время выхода каждого блока из строя случайное. Примем, что оно имеет показательное распределение. Вышедший из строя блок поступает в ремонт. Время ремонта является случайной величиной и зависит от ряда факторов: характера неисправности, квалификации оператора, наличия инструмента и ремонтного материала и др. Положим, что время ремонта имеет показательное распределение с параметром $\mu=1$. Ремонт производят два оператора. Как только блок выйдет из строя, машина останавливается и не работает до тех пор, пока не будет либо устранена неисправность, либо поставлен исправный блок, причем на замену блока времени затрачивается мало и его можно практически считать равным нулю. Очевидно, для того чтобы машина работала без остановок, необходимо иметь запасные блоки, которыми можно было бы сразу заменять вышедшие из строя блоки. Однако запасные блоки обходятся довольно дорого, поэтому иметь их много неэкономично. Необходимо определить число запасных блоков, если стоимость одного блока $C_{\text{зап}}=100$ ед. стоимости. Стоимость одного часа простоя машины равна $C_{\text{пр}}=0{,}7$ ед. стоимости.

Решение

Определим плотность потока выхода из строя блоков. Так как время выхода каждого из них имеет показательный закон распределения, то и суммарный поток неисправных блоков будет иметь показательное распределение. Параметр его будет равен

$$\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i,$$

где k — число блоков;

λ_i — плотность выхода из строя i-го блока.

Учитывая, что средняя плотность λ_i выхода из строя каждого блока одинаковая, получим

$$\lambda = k\lambda_i.$$

Плотность выхода из строя одного блока будет равна

$$\lambda_i = \frac{1}{500}.$$

Тогда общая средняя плотность

$$\lambda = 500\,\frac{1}{500} = 1.$$

Отсюда параметр α равен

$$\alpha = \lambda \bar{t}_{\text{обс}} = 1.$$

Стоимость затрат, которые получаются в результате эксплуатации машины, определятся по формуле

$$C_0 = nC_{\text{зап}} + C_{\text{пр}}P_{\text{отк}}T_{\text{а}}.$$

Примем, что $T_{\text{а}} = 5000$ *час.*

Оптимальное число запасных частей будет при минимуме C_0. Найдем $P_{\text{отк}}$ для различного числа запасных блоков. Результаты расчетов представлены в табл. 5.2.1.

Таблица 5.2.1

n	2	3	4
$P_{\text{отк}}$	0,091	0,043	0,021

Таблица 5.2.2

n	2	3	4
C_0	518,5	450,5	473,5

Найдем стоимость затрат. Результаты расчетов сведены в табл. 5.2.2.

Как видно из данных табл. 5.2.2, наиболее рациональный запас для обслуживания машины равен трем блокам. При этом среднее время простоя будет составлять 4,3% общего времени.

Обслуживание резервом группы однотипных машин (агрегатный способ ремонта). Рассмотрим вторую задачу. Пусть имеется m однотипных машин. В процессе работы агрегаты, приводящие их в движение, могут выходить из строя. Естественно предположить, что агрегаты выходят из строя случайным образом и в данных конкретных условиях эксплуатации машин с постоянной плотностью λ. Время выхода из строя распределено по показательному закону со средним значением $\bar{t}_{\text{н}}$. Для замены вышедших из строя неисправных агрегатов имеется n запасных. Как только агрегат выходит из строя, чтобы не простаивала машина, его сразу заменяют запасным, если среди них имеется исправный. Неисправный агрегат поступает в ремонт. Пункт ремонта неисправных агрегатов обслуживает c операторов. Время восстановления каждого агрегата определяется характером неисправности, опытом оператора и другими причинами, поэтому оно будет случайным. Примем время восстановления неисправных агрегатов распределенным по показательному закону со средним временем $\bar{t}_{\text{обс}}$. При решении следует учесть следующие состояния системы:

— все запасные агрегаты исправны и все машины работают;

— *k запасных агрегатов* $(1 \leqslant k \leqslant n)$ *неисправны* и либо ремонтируются все, либо часть ремонтируется, а часть ожидает ремонта;

n — запасных агрегатов неисправны и s машин не работает ($1 \leqslant s \leqslant m$).

Обозначим вероятности этих состояний в момент времени t соответственно через $p_0(t)$; $p_k(t)$ и $p_{n+s}(t)$. Получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
p'_0(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),\\
p'_k(t) &= -(\lambda + k\mu)\, p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) +\\
&\quad + (k+1)\,\mu_{k+1}(t) \text{ при } 0 < k < c,\\
p'_k(t) &= -(\lambda + c\mu)\, p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) +\\
&\quad + c\mu p_{k+1}(t) \text{ при } c \leqslant k < n+1,\\
p'_{n+s}(t) &= -(\lambda + c\mu)\, p_{n+s}(t) +\\
&\quad + \lambda p_{n+s-1}(t) + c\mu p_{n+s+1}(t)\\
&\quad \text{при } 1 \leqslant s < m,\\
p'_{n+m}(t) &= -c\mu p_{n+m}(t) + \lambda p_{n+m-1}(t).
\end{aligned}\right\} \qquad (5.2.10)$$

Введем обозначение $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$. Тогда, учитывая нормирующее условие $\sum\limits_{k=0}^{n+m} p_k(t) = 1$, получим для стационарных условий следующие решения:

1. Вероятность того, что все агрегаты исправны:

$$P_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{c} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^c}{c!} \sum_{k=1}^{n-c+1} \left(\frac{\alpha}{c}\right)^k + \left(\frac{\alpha}{c}\right)^{n-c} \frac{\alpha^c}{c!} \sum_{k=2}^{m} \left(\frac{\alpha}{c}\right)^k\right]^{-1}. \qquad (5.2.11)$$

2. Вероятность того, что вышло из строя k агрегатов:

$$\left.\begin{aligned}
P_k &= \frac{\alpha^k}{k!} P_0 \text{ при } k \leqslant c,\\
P_k &= \left(\frac{\alpha}{c}\right)^{k-c} \frac{\alpha^c}{c!} P_0 \text{ при } c \leqslant k \leqslant n+1,\\
P_k &= \left(\frac{\alpha}{c}\right)^{k-c} \frac{\alpha^c}{c!} P_0 \text{ при } n+1 < k \leqslant m+n.
\end{aligned}\right. \qquad (5.2.12)$$

3. Среднее число неисправных машин, ожидающих ремонта:

$$N_0 = \sum_{k=1}^{m} k P_{k+n}. \qquad (5.2.13)$$

4. Коэффициент простоя машин

$$K_0 = \frac{N_0}{m}. \qquad (5.2.14)$$

5. Среднее число неисправных агрегатов

$$N_p = \sum_{k=1}^{n+m} kP_k. \qquad (5.2.15)$$

6. Среднее число занятых ремонтом операторов или среднее число ремонтируемых агрегатов

$$N_з = \sum_{k=1}^{c} kP_k + c \sum_{k=1}^{m} P_{n+k}. \qquad (5.2.16)$$

Пример 2

Для повышения производительности труда на производстве устанавливается автоматизированная система управления процессами, которая состоит из четырех звеньев ($m=4$). Каждое звено имеет электронно-вычислительную машину и пункты сбора и обработки информации. Питание ЭВМ производится от отдельных агрегатов питания. Во время работы агрегаты питания могут выходить из строя и требовать некоторого времени на ремонт. Среднее время наработки на один отказ равно $\bar{t}_н=100$ *час.* Ремонт производится одной бригадой ($c=1$). Среднее время восстановления одного неисправного агрегата равно $\bar{t}_{обс}=10$ *час.* Чтобы из-за выхода из строя агрегата питания ЭВМ меньше простаивали, имеются два запасных ($n=2$), которые в случае выхода из строя любого из агрегатов питания могут мгновенно заменять их. Если нет исправных запасных агрегатов, то машина простаивает.

От того, сколько в среднем машины будут простаивать, зависит процент увеличения производительности труда. Положим, что повышение производительности труда пропорционально числу работающих ЭВМ и выражается зависимостью (в %)

$$\Delta П = \frac{m - N_0}{m} 100,$$

где N_0 — среднее число ЭВМ, простаивающих из-за того, что нет запасных исправных агрегатов питания; m — число ЭВМ.

Требуется определить процент увеличения производительности труда от введенной автоматизации процессов.

Решение

Величину N_0 определим по формуле (5.2.13). Но для этого предварительно надо определить P_3, P_4, P_5 и P_6. Эти вероятности определяются по формуле (5.2.12). Средняя плотность потока неисправностей равна

$$\lambda = 4\frac{1}{100} = 0,04.$$

Тогда

$$\alpha = 0,04 \cdot 10 = 0,4.$$

По формуле (5.2.11) определим

$$P_0=\frac{1}{1+0,4+0,4\,(0,4+0,16)+0,4\cdot 0,4(0,16+0,064+0,0256)}\approx 0,6.$$

Вероятности P_3, P_4, P_5 и P_6 равны:

$$P_3=0,16\cdot 0,4\cdot 0,6\approx 0,038,$$
$$P_4=(0,4)^3\cdot 0,4\cdot 0,6\approx 0,015,$$
$$P_5=(0,4)^4\cdot 0,4\cdot 0,6\approx 0,006,$$
$$P_6=(0,4)^5\cdot 0,4\cdot 0,6\approx 0,0025.$$

Отсюда среднее число ЭВМ, простаивающих из-за выхода из строя агрегатов питания, равно

$$N_0=1P_3+2P_4+3P_5+4P_6\approx 0,096.$$

Тогда процент повышения производительности труда равен

$$\Delta\Pi=\frac{4-0,096}{4}\cdot 100=97,6\%.$$

Если бы агрегаты не выходили из строя, то производительность труда увеличилась бы на 100%. Следовательно, 2,4% потеряно из-за того, что агрегаты работают не вполне надежно.

Посмотрим, как увеличился бы процент производительности труда, если работа ЭВМ производилась без запасных источников питания, но на каждой ЭВМ была бы своя ремонтная бригада. В этом случае на каждый источник питания (агрегат), как указано в задаче, поступает поток неисправностей с плотностью

$$\lambda_0=\frac{1}{100}=0,01.$$

Время восстановления $\bar{t}_{\text{обс}}=10$ *час.* Вероятность выхода каждой ЭВМ из строя из-за неисправности агрегата питания можно определить по формуле Эрланга, где параметр α_0 равен

$$\alpha_0=\lambda_0\bar{t}_{\text{обс}}=0,01\cdot 10=0,1.$$

Тогда

$$P_{\text{отк}}=\frac{0,1}{1+0,1}\approx 0,09.$$

Отсюда среднее число машин, простаивающих из-за выхода из строя агрегатов питания, равно

$$N_0=4P_{\text{отк}}=0,36.$$

Процент повышения производительности труда в этом случае будет равен

$$\Delta\Pi=\frac{4-0,36}{4}\cdot 100\approx 91\%.$$

Таким образом, видно, что производительность труда в этом случае будет на 6,6% ниже, чем в случае с двумя запасными агрегатами питания. Кроме того, число ремонтных бригад будет в четыре раза больше. Имея экономические показатели (стоимость запасных агрегатов, затраты на содержание ремонтных бригад, доход от увеличения производительности труда), можно определить, какой из этих способов целесообразен с экономической точки зрения.

5.3. Среднее время работы рабочего элемента до появления отказа в системе со скользящим резервом

Для повышения надежности систем на практике часто применяют скользящий резерв, при котором в случае выхода любого из последовательно соединенных элементов из строя производится замена его запасным из имеющихся в резерве. Заменять неисправные элементы резервными, восстанавливать их опять и заменять можно по-разному. Мы рассмотрим некоторые примеры, наиболее часто встречающиеся на практике. Разновидностей систем с элементами, которые могут выходить из строя в процессе работы, и скользящим резервом из n элементов много. Например:

— система, в которой при выходе элемента из строя, производится замена (дублирование) элементом из имеющихся в резерве. После восстановления неисправного элемента он вновь становится на свое место, а замещающий его элемент вновь возвращается в резерв;

— система, у которой при восстановлении вышедшего из строя элемента обратная замена происходит только в том случае, когда дублируемый выйдет из строя;

— система, у которой каждый резервный элемент закреплен за определенными номерами последовательно распределенных элементов.

Для иллюстрации возможности использования методов теории массового обслуживания в решении подобных практических задач рассмотрим пример по определению надежности только одного из n рабочих элементов в системе со скользящим резервом из m элементов при условии, что резервные элементы используются для замены любого другого отказавшего элемента. В результате решения необходимо выяснить, что дает скользящий резерв для повышения надежности выбранного элемента. Будем в дальнейшем называть его выделенной подсистемой. За критерий оценки качества функционирования примем среднее время работы рассматриваемой подсистемы до получения отказа. На рис. 5.3.1 показана принципиальная схема такой системы. Решение подобной задачи может встретиться, например, при организации связи по n каналам, которые разнесены территориально; для повышения надежности всей системы и каждого канала используется m резервных каналов.

В этом случае при выходе какого-либо узла из строя его можно заменить резервным, если такой имеется. Канал надолго может выйти из строя, если не будет в наличии ни одного резервного.

Пусть рассматриваемая система состоит из n одинаковых элементов. Все они характеризуются одной и той

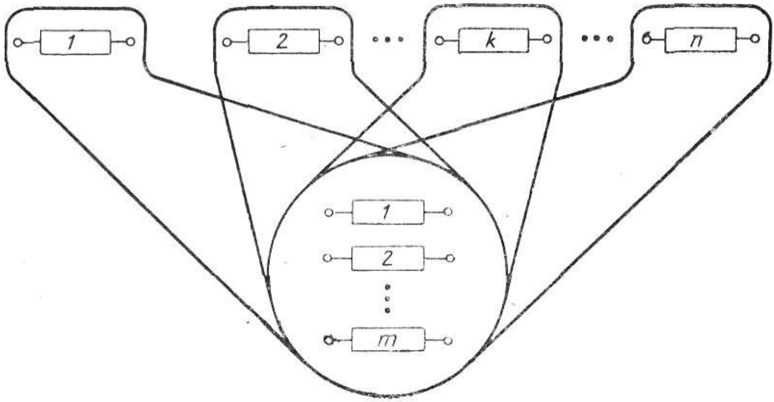

Рис. 5.3.1. Схема функционирования системы со скользящим резервом.

же интенсивностью отказов $\lambda = \frac{1}{\bar{t}_{\text{п}}}$, где $\bar{t}_{\text{п}}$ — среднее время наработки на один отказ. Рассмотрим вариант задачи, когда время восстановления вышедшего из строя элемента — величина случайная, распределенная по показательному закону с параметром $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{обс}}}$, где $\bar{t}_{\text{обс}}$ — среднее время восстановления. Для повышения надежности системы имеется резерв, состоящий из m элементов. При выходе любого элемента из строя его заменяют резервным, если такой имеется. Необходимо определить надежность работы одного канала с учетом работы элементов скользящего резерва. Приведем решение, предложенное Б. А. Козловым [11]. Рассмотрим сначала систему с одним резервным элементом, т. е. $m=1$. На рис. 5.3.2 показана схема такой системы.

Введем обозначения:

$p_0(t)$ — вероятность того, что система находится в исправном состоянии, т. е. все элементы исправны;

$p_1(t)$ — вероятность того, что в системе имеется один (любой из $n+1$) отказавший элемент;

$p_2(t)$ — вероятность того, что в системе имеется два отказавших элемента, причем среди них нет выделенного элемента;

$p_i(t)$ — вероятность того, что в системе имеется i отказавших элементов $(2 \leqslant i \leqslant n-1)$, причем среди них нет выделенного элемента;

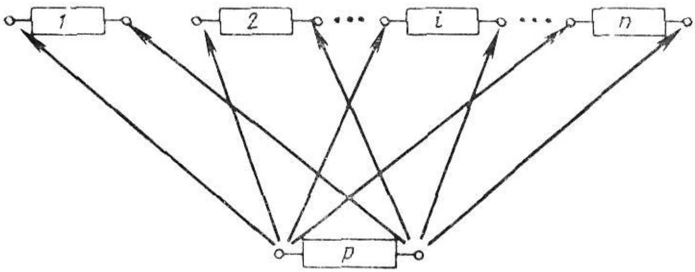

Рис. 5.3.2. Схема функционирования системы с одним резервным элементом.

$p_{\text{отк}}(t)$ — вероятность того, что выделенный элемент отказал, а резервный уже работает вместо одного из ранее отказавших невыделенных элементов и потому не может заменить его.

Условия обслуживания примем следующие: при любом числе отказавших элементов одновременно восстанавливаться может только один из них, т. е. это соответствует тому, что для ремонта имеется один оператор. Система дифференциальных уравнений, отвечающих данной постановке задачи, имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}
&p'_0(t) = -(n+1)\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),\\
&p'_1(t) = -(n\lambda+\mu)\, p_1(t) + (n+1)\,\lambda \cdot p_0(t) + \mu p_2(t),\\
&p'_i(t) = -\{[n-(i-1)]\,\lambda + \mu\}\, p_i(t) +\\
&\quad + [n-(i-1)]\,\lambda p_{i-1}(t) + \mu p_{i+1}(t)\\
&\text{при } 2 \leqslant i \leqslant n-1,\\
&p'_n(t) = -(\lambda+\mu)\, p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t),\\
&p'_{\text{отк}}(t) = \lambda \sum_{j=1}^{n} p_j(t).
\end{aligned}\right\} \quad (5.3.1)$$

В качестве основной характеристики функционирования элемента (подсистемы) принято среднее время его работы до появления отказа. В работе [11] получены следующие зависимости для среднего времени работы до отказа выделенной подсистемы:

$$T_1 = \frac{\frac{n}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\frac{\alpha^i}{i!} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{n-j}\frac{\alpha^i}{i!}}{\lambda\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-i)\,\alpha^i}{i!}}, \tag{5.3.2}$$

где $\alpha = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{T_н}{T_{обс}}$.

Формулу (5.3.2) можно упростить, если ввести функцию

$$l(\alpha,\ p) = \sum_{s=0}^{p}\frac{l^{-\alpha}\alpha^s}{s!}\,.$$

Тогда

$$T_1 = \frac{1}{\lambda}\,\frac{\frac{n}{n+1}\,l(\alpha,\ n) + \sum_{i=0}^{n-1} l(\alpha,\ i)}{nl(\alpha,\ n-1) - \alpha l(\alpha,\ n-2)}. \tag{5.3.3}$$

Функцию $l(\alpha,\ p)$ можно выразить через известную неполную гамма-функцию

$$l(\alpha,\ p) = 1 - \mathcal{I}(u,\ p),$$

где

$$u = \frac{\alpha}{\sqrt{p+1}}.$$

Функция $\mathcal{I}(u,\ p)$ является табулированной, значения которой можно определить по таблицам [24].

Если отношение времени наработки на один отказ к восстановлению во много раз превышает число последовательно соединенных элементов, т. е. $\alpha \gg n$, то из (5.3.3) можно получить приближенную оценку для

$$T_1 \approx \frac{3+\alpha}{\lambda(n+1)}. \tag{5.3.4}$$

Абсолютная ошибка формулы (5.3.4) имеет порядок

$$\Delta \simeq \frac{2(-2n^2+5n-3)}{\lambda\alpha(n+1)}.$$

Пример 1

На предприятии имеется пять агрегатов ($n=5$), которые имеют свои идентичные источники электропитания. Время от времени источники могут выходить из строя. Опыт показал, что в среднем время наработки на один отказ для каждого из них равно $\bar{t}_н = 100$ *час*. Время восстановления вышедшего из строя источника электропитания распределено по показательному закону. Оно зависит от множества случайных факторов: характера неисправности, квалификации рабочих ремонтной бригады и других. Среднее значение параметра $\mu=0,1$.

Когда источник электропитания неисправен, агрегат не работает. Для повышения общего времени работы агрегатов решено иметь один источник питания в качестве скользящего резерва. Требуется определить надежность снабжения электропитанием каждого агрегата.

Решение

Определим параметры

$$\lambda = \frac{1}{\bar{t}_н} = 0,01,$$

$$\alpha = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{0,1}{0,01} = 10.$$

По формуле (5.3.3) находим среднее время работы агрегата до его остановки из-за выхода из строя источника питания и невозможности замены его резервными, так как он уже использован вместо ранее вышедшего:

$$T_1 = 100\left[\frac{5}{6}\left(1+10+50+\frac{1\,000}{6}+\frac{10\,000}{24}+\frac{100\,000}{120}\right)+\right.$$
$$+\left(1+10+50+\frac{1\,000}{6}+\frac{10\,000}{24}\right)+\left(1+10+50+\frac{1\,000}{6}\right)+$$
$$\left.+(1+10+50)+(1+10)+1\right] : \left[0,01\left(5+4\cdot 10+3\cdot 50+\right.\right.$$
$$\left.\left.+2\frac{1\,000}{6}+\frac{10\,000}{24}\right)\right] \approx 267 \text{ час.}$$

Этот расчет показал преимущество скользящего резерва. Только один дополнительный источник электропитания, служащий в качестве скользящего резерва для пяти агрегатов, повышает среднее время работы каждого из агрегатов со 100 до 267 *час*, т. е. более чем в 2,5 раза. Определим, насколько уменьшилась вероятность выхода из строя агрегата при введении одного агрегата в качестве скользящего резерва. Средняя вероятность выхода из строя агрегата может быть определена по формуле

$$P_{отк} = \frac{\bar{t}_{обс}}{\bar{t}_н + \bar{t}_{обс}}.$$

Тогда вероятность отказа агрегата для случая, когда нет резервного агрегата, будет равна

$$P_{отк} = \frac{10}{110} \approx 0,099.$$

При наличии одного источника питания в качестве скользящего резерва вероятность выхода из строя будет соответственно равна

$$P_{\text{отр}}=\frac{10}{267+10}\approx 0{,}036.$$

Таким образом, при введении скользящего резерва из одного источника питания вероятность отказа уменьшилась с 9,9 до 3,6%. Если провести расчет по приближенной формуле (5.3.9), то получим, что среднее время до выхода агрегата равно

$$T\approx\frac{13}{0{,}01\cdot 6}=217\ \textit{час}.$$

С увеличением α ошибка уменьшается. Следовательно, для примерных расчетов можно использовать приближенную формулу. При числе резервных элементов более одного, т. е. $m>1$, среднее время работы до отказа выделенной подсистемы (рассматриваемого элемента) определится из зависимости

$$T=\{\lambda e^{\alpha}[nl(\alpha,\ n-1)-\alpha l(\alpha,\ n-2)]\}^{-1}\times$$
$$\times\left\{\frac{l(\alpha,\ n+m)-l(\alpha,\ n)}{\alpha^{n}}n!\,l(\alpha,\ n-1)+\right.$$
$$+e^{\alpha}\sum_{i=0}^{n-1}l(\alpha,\ i)+\left[\frac{n}{\alpha}l(\alpha,\ n-1)-\right.$$
$$\left.\left.-l(\alpha,\ n-2)\right]\sum_{i=n}^{n+m}\frac{l(\alpha,\ n+m)-l(\alpha,\ i)}{\alpha^{i}}i!\right\}. \qquad (5.3.5)$$

Если выполняется условие

$$\alpha\gg n+m,$$

то из (5.3.5) можно получить приближенную формулу для определения T:

$$T\approx\frac{n!\,\alpha^{m}}{\lambda(n+m)!}\left(1+\frac{2+m}{\alpha}\right), \qquad (5.3.6)$$

Абсолютная ошибка формулы (5.3.6) при $m>2$ имеет порядок

$$\Delta\approx\frac{n!\,\alpha^{m-2}(nm+m^{2}+m-4n^{2}+12n-5)}{\lambda(n+m)!}.$$

При $m=2$ абсолютная ошибка имеет порядок

$$\Delta\approx\frac{-3n^{2}+17n+3}{\lambda(n+1)(n+2)}.$$

Проиллюстрируем применение полученных зависимостей на примере.

Пример 2

На заводе установлен сложный комплекс радиоэлектронной аппаратуры по управлению десятью автоматизированными линиями, который имеет для каждой из них блок управления. Эти блоки могут выходить из строя и требовать некоторого времени на ремонт. Опыт эксплуатации показал, что время наработки на один отказ $\bar{t}_{н}=1\,000$ *час*. Среднее время восстановления одного блока равно $\bar{t}_{вос}=10$ *час*. Если не работает хотя бы одна автоматизированная линия, то нарушается технологический процесс. Для повышения надежности решено ввести скользящий резерв. Требуется определить, какое минимальное количество блоков управления необходимо использовать дополнительно в качестве скользящего резерва; чтобы вероятность нарушения технологического процесса не превышала 1% (т. е. $P_{отк}=0{,}01$).

Решение

Определяем параметры системы

$$\lambda=\frac{1}{\bar{t}_{н}}=0{,}001, \quad \mu=\frac{1}{\bar{t}_{вос}}=0{,}1.$$

На вероятность нарушения процесса влияет надежность работы каждого блока. При этом можно записать следующую зависимость:

$$P_{отк}=1-(1-P_{отк1})^{n}, \tag{5.3.7}$$

где $P_{отк}$ — вероятность нарушения технологического процесса;

$P_{отк1}$ — вероятность выхода из строя отдельного блока управления, которая определяется по формуле

$$P_{отк1}=\frac{t_{вос}}{\bar{t}_{н}+\bar{t}_{вос}}; \tag{5.3.8}$$

n — число автоматических линий (или число блоков управления, приводящих в работу автоматические линии).

Из формулы (5.3.7) определим вероятность отказа одного блока управления, которая обеспечит общую вероятность технологического процесса, равную 0,01:

$$0{,}01=1-(1-P_{отк1})^{10},$$

откуда

$$P_{отк1}=0{,}001.$$

Тогда по формуле (5.3.13) имеем

$$0{,}001=\frac{10}{\bar{t}^{*}+10}.$$

Отсюда среднее время выхода одной линии из строя из-за отказа блока управления должно быть равно

$$\bar{t}^{*}_{н}=9\,090 \text{ час}.$$

Таким образом, задача свелась к следующему: определить число блоков управления в скользящем резерве, чтобы выход из строя каждой из обслуживающейся линии наступал в среднем не ранее, чем через $\bar{t}^*_{н}=9\,090$ *час.* Для этого, задавая ряд значений величины $m=1, 2\ldots$, по формуле (5.3.6) определим величину T в зависимости от числа резервных блоков m. При $m=1$

$$T=\frac{10!\,100}{0{,}001\cdot 11!}\left(1+\frac{3}{100}\right)\approx 9364 \text{ час.}$$

Следовательно, наличие уже одного дополнительного блока управления, включенного в скользящий резерв, дает повышение надежности работы автоматизированного комплекса до заданного уровня.

5.4. Учет надежности приборов в смешанной многоканальной системе

Рассмотрим примеры решения вопросов оценки надежности функционирования многоканальных систем массового обслуживания. Математический аппарат для определения основных характеристик функционирования систем разработан применительно к различным ограничениям, налагаемым на поведение поступивших заявок в очереди или системе. Такие ограничения могут быть следующими:

— на время пребывания заявки в очереди,
— на время пребывания заявки в системе,
— на длину очереди и др.

Выход приборов из строя одинаково возможен как в период обслуживания, так и в период бездействия. При этом могут встретиться следующие разновидности. Обслуживаемая заявка при выходе прибора из строя может покидать систему даже при условии, что были другие свободные приборы, или такая заявка может быть передана на дообслуживание любому свободному прибору. Первая разновидность задачи для системы с отказом была решена Т. П. Марьяновичем [15]. Рассмотрим случай, когда поступившая заявка, застав все приборы занятыми или находящимися в состоянии ремонта, остается ожидать обслуживания, причем время ожидания ограничено некоторой величиной.

Ограничение на время пребывания в очереди. Пусть задана система обслуживания, состоящая из n одинаковых по производительности приборов, в которую поступает простейший поток требований с интенсивностью λ. Заявка, застав все приборы занятыми, становится в очередь и ожидает начала обслуживания. Время ожидания ограничено случайной величиной, которая распределена по показательному закону с параметром $\nu = \frac{1}{\bar{t}_{ож}}$, где $\bar{t}_{ож}$ — среднее значение времени ожидания. Время обслуживания одной заявки также случайно и распределено по показательному закону. Среднее значение времени обслуживания для всех приборов одинаковое и равно $\bar{t}_{обс}$.

Для удобства и простоты решения принимается предположение о показательном распределении времени обслуживания и ожидания. Однако в дальнейшем методом статистических испытаний будет показана справедливость конечных формул, полученных для стационарных условий, в тех случаях, когда величины $t_{обс}$ и $t_{ож}$ подчинены законам распределения, отличным от показательного. Обслуживающие приборы время от времени выходят из строя и сами требуют некоторого времени на восстановление. Вероятность выхода обслуживающего прибора из рабочего состояния за время Δt равна $\alpha\Delta t + 0(\Delta t)$. Эта вероятность стационарна по оси времени, не зависит ни от того, сколько приборов находится в ремонте, ни от того, обслуживает ли в данный момент прибор заявку или тоже свободен, ни от того, когда прибор начал работать. Вышедший из строя прибор восстанавливается одной бригадой (оператором). Одновременно может ремонтироваться только один прибор, остальные неисправные приборы ожидают своего ремонта. Время, необходимое на приведение вышедшего из строя прибора в рабочее положение, распределено по показательному закону с параметром $\gamma = \frac{1}{\bar{t}_{вос}}$, где $\bar{t}_{вос}$ — среднее время ремонта прибора. Если прибор вышел из строя в момент, когда он был занят, то обслуживаемая им заявка теряется.

Введем следующие обозначения:

$p_{ij}(t)$ — вероятность того, что в момент t в системе обслуживания имеется i заявок и j приборов находится в ремонте;

$p_i(t)$ — вероятность того, что в момент t в системе имеется i заявок.

Тогда, очевидно:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} p_{ij}(t)=1$$

и

$$\sum_{j=0}^{n} p_{ij}(t)=p_i(t).$$

Вероятностные состояния описываются следующей системой дифференциальных уравнений, вывод которых приведен в приложении 3:

$$p'_0(t)=-\lambda p_0(t)+[p_1(t)-p_{1,n}(t)](\mu+\alpha)+\lambda p_{1,n}(t),$$

$$p'_i(t)=-\lambda p_i(t)-i\mu\sum_{j=0}^{n-1} p_{i,j}(t)-i\alpha\sum_{j=0}^{n-1} p_{i,j}(t)-$$

$$-\mu\sum_{j=n-i+1}^{n} p_{i,j}(t)(n-j)-\nu\sum_{j=n-i+1}^{n} p_{i,j}(t)(j-n+1)-$$

$$-\alpha\sum_{j=n-i+1}^{n} p_{i,j}(t)(n-j)+\lambda p_{i-1}(t)+$$

$$+\mu(i+1)\sum_{j=0}^{n-i-1} p_{i+1,j}(t)+$$

$$+\alpha(i+1)\sum_{j=0}^{n-i-1} p_{i+1,j}(t)+\mu\sum_{j=n-i}^{n} p_{i,j}(t)(n-j)+$$

$$+\alpha\sum_{j=n-1}^{n} p_{i+1,j}(t)(n-j)+$$

$$+\nu\sum_{j=n-i}^{n} P_{i+1,j}(t)(j-n+i+1) \qquad (5.4.1)$$

при $1\leqslant i<n$,

$$p'_{n+s}(t)=-\lambda p_{n+s}(t)-\mu\sum_{j=0}^{n} p_{n+s,j}(t)(n-j)-$$

$$-\nu\sum_{j=0}^{n} p_{n+s,j}(t)(s+j)-\alpha\sum_{j=0}^{n} P_{n+s,j}(t)(n-j)+$$

$$+\lambda P_{n+s-1}(t)+\mu\sum_{j=0}^{n} p_{n+s+1,\,j}(t)(n-j)+$$
$$+\nu\sum_{j=0}^{n} p_{n+s+1,\,j}(t)(j+s+1)+$$
$$+\alpha\sum_{j=0}^{n} p_{n+s+1,\,j}(t)\cdot(n-j)$$
$$\text{при } s\geqslant 1,$$

где $\mu=\frac{1}{\bar{t}_{\text{обс}}}$.

Обозначим через $\pi_j(t)$ вероятность того, что в момент t ровно j приборов находятся в нерабочем состоянии. Тогда можно записать:

$$p_{ij}(t)=p_i(t)\,\pi_j(t). \tag{5.4.2}$$

Для стационарного решения, т. е. после предельного перехода при $t\longrightarrow\infty$, имеем

$$P_i=\lim_{t\to\infty} p_i(t)$$

и

$$\pi_j=\lim_{t\to\infty}\pi_j(t).$$

Тогда производные будут равны нулю и мы получим следующую систему алгебраических уравнений:

1. $$-\lambda P_0+P_1[\mu(1-\pi_n)+\alpha(1-\pi_n)+\nu\pi_n]=0,$$

2. $$-P_i\left\{\lambda+i\mu\sum_{j=0}^{n-i}\pi_j+i\alpha\sum_{j=0}^{n-i}\pi_j+\right.$$
$$+\mu\sum_{j=n-i+1}^{n}\pi_j(n-j)+\nu\sum_{j=n-i+1}^{n}\pi_j(j-n+i)+$$
$$\left.+\alpha\sum_{j=n-i+1}^{n}\pi_i(n-j)\right\}+\lambda P_{i-1}+$$
$$+P_{i+1}\left\{\mu(i+1)\sum_{j=0}^{n-i-1}\pi_j+(i+1)\alpha\sum_{j=0}^{n-i-1}\pi_j+\right.$$
$$+\mu\sum_{j=n-i}^{n}\pi_j(n-j)+\nu\sum_{j=n-i}^{n}\pi_j(j-n+i+1)+$$
$$\left.+\alpha\sum_{j=n-i}^{n}\pi_j(n-j)\right\}=0,\quad 0\leqslant i\leqslant n, \tag{5.4.3}$$

$$3. \; -P_{n+s}\left\{\lambda+\mu\sum_{j=0}^{n}\pi_j(n-j)+\nu\sum_{j=0}^{n}\pi_j(j+s)+\right.$$

$$\left.+\alpha\sum_{j=0}^{n}\pi_j(n-j)\right\}+\lambda P_{n+s-1}+$$

$$+P_{n+s+1}\left\{\mu\sum_{j=0}^{n}\pi_j(n-j)+\nu\sum_{j=0}^{n}\pi_j(j+s+1)+\right.$$

$$\left.+\alpha\sum_{j=0}^{n}\pi_j(n-j)\right\}=0, \quad s\geqslant 0.$$

Введем обозначения:

$$z_1=\lambda P_{i-1}-P_i\left\{i\mu\sum_{j=0}^{n-i}\pi_j+\mu\sum_{j=n-i+1}^{n}\pi_j(n-j)+\right.$$

$$+\nu\sum_{j=n-i+1}^{n}\pi_j(j-n+1)+$$

$$\left.+i\alpha\sum_{j=0}^{n-i}\pi_j+\alpha\sum_{j=n-i+1}^{n}\pi_j(n-j)\right\},$$

$$z_{n+s}=\lambda P_{n+s-1}-P_{n+s}\left\{\mu\sum_{j=0}^{n}\pi_j(n-j)+\right.$$

$$\left.+\nu\sum_{j=0}^{n}\pi_j(j+s)+\alpha\sum_{j=0}^{n}\pi_j(n-j)\right\}.$$

Тогда систему уравнений (5.4.3) можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} z_1&=0,\\ z_i&=z_{i+1},\\ z_{n+s}&=z_{n+s+1}.\end{aligned}\right\} \qquad (5.4.4)$$

Отсюда решение системы (5.4.3) получится следующим:

$$P_i=\frac{\lambda P_{i-1}}{i\mu\sum\limits_{j=0}^{n-i}\pi_j+\mu\sum\limits_{j=n-i+1}^{n}\pi_j(n-j)+\nu\sum\limits_{j=n-i+1}^{n}\pi_j(j-n+i)+}\cdots\rightarrow$$

$$\rightarrow\cdots\frac{}{+\alpha\sum\limits_{j=n-i+1}^{n}\pi_j(n-j)+i\alpha\sum\limits_{j=0}^{n-i}\pi_j}, \qquad (5.4.5)$$

$$P_{n+s}=\frac{\lambda P_{n+s-1}}{\mu\sum_{j=0}^{n}\pi_j(n-j)+\nu\sum_{j=0}^{n}\pi_j(j+s)+\alpha\sum_{j=0}^{n}\pi_j(n-j)}. \tag{5.4.6}$$

Введем обозначения:

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu},\quad \beta=\frac{\nu}{\mu},$$

$$q=\frac{\alpha}{\mu},\quad \delta=\frac{\gamma}{\mu}.$$

Тогда можно записать следующую зависимость для определения вероятности состояний системы:

$$P_i=\frac{\rho^i P_0}{\prod_{k=1}^{i}\left\{k(1+q)\sum_{j=0}^{n-k}\pi_j+(1+q)\sum_{j=n-k+1}^{n}\pi_j(n-j)+\beta\sum_{j=n-k+1}^{n}\pi_j(k+j-n)\right\}},\quad 1\leqslant i\leqslant n, \tag{5.4.7}$$

$$P_{n+s}=\frac{\rho^{n+s}P_0}{\prod_{k=1}^{n}\left\{k(1+q)\sum_{j=0}^{n-k}\pi_j+(1+q)\sum_{j=n-k+1}^{n}\pi_j(n-j)+\beta\sum_{j=n-k+1}^{n}\pi_j(k+j-n)\right\}}\times$$

$$\times\frac{1}{\prod_{r=1}^{s}\left\{(1+q)\sum_{j=0}^{n}\pi_j(n-j)+\beta\sum_{j=0}^{n}\pi_j(r+j)\right\}}. \tag{5.4.8}$$

Значение вероятности P_0 определяется из нормирующего условия

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_k=1.$$

Вероятность того, что j приборов находятся в неисправном состоянии, можно определить по формуле, приведенной в работе Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко [8]:

$$\pi_j = \frac{\left(\frac{q}{\delta}\right)^j}{(n-j)\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{q}{\delta}\right)^k \frac{1}{(n-k)!}}. \tag{5.4.9}$$

Вероятность того, что заявка покинет систему обслуженной неполностью, определим как отношение суммы среднего числа заявок, уходящих в единицу времени из очереди по окончании времени ожидания и покидающих систему в результате выхода из строя тех приборов, которые заняты обслуживанием, к среднему числу заявок, поступающих в единицу времени в систему:

$$P_{\text{отк}} = \frac{\beta\,[M(i) + M(s)] + qM(q)}{\rho}, \tag{5.4.10}$$

где $M_i = \sum\limits_{i=1}^{n} P_i \sum\limits_{j=n-i+1}^{n} (i+j-n)\,\pi_j$ — среднее число заявок в очереди, когда общее число их не более n;

$$M(s) = \sum_{s=1}^{\infty} P_{n+s}\left[s + \sum_{j=0}^{n} j\pi_j\right]$$

— среднее число заявок в очереди, когда общее число их в системе более n;

$$M(q) = \sum_{k=1}^{n} P_k\left[k\sum_{j=0}^{n-k}\pi_j + \sum_{j=n-k+1}^{n}(n-j)\,\pi_j\right] + \sum_{s=1}^{\infty} P_{n+s}\sum_{j=0}^{n}(n-j)\,\pi_j$$

— среднее число обслуживаемых системой заявок в каждый момент времени.

На рис. 5.4.1. и 5.4.2 показано влияние надежности и ремонтоспособности на пропускные способности рассматриваемой системы при $n=1$, $\beta=0{,}5$ и $\rho=1$. Как видно из рисунков, увеличение отношения среднего времени обслуживания к среднему времени выхода прибора из строя $q=\frac{\alpha}{\mu}=\frac{\bar{t}_{\text{обс}}}{\bar{t}_{\text{н}}}$ резко ухудшает пропускные способности системы. Увеличение отношения среднего времени обслуживания к среднему времени восстановления

$$\delta = \frac{\gamma}{\mu} = \frac{\bar{t}_{обс}}{\bar{t}_{вос}}$$

от 0 до 0,5 сначала значительно снижает вероятность отказа, а затем увеличение этого отношения начинает все меньше сказываться на уменьшении вероятности от-

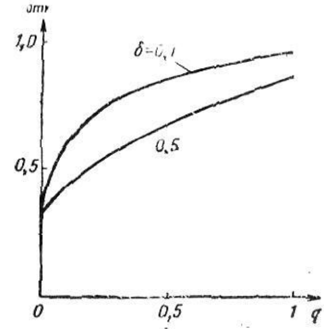

Рис. 5.4.1. Влияние среднего времени выхода прибора из строя на его пропускную способность.

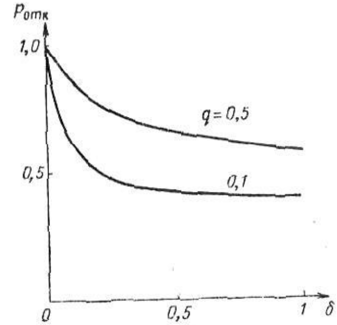

Рис. 5.4.2. Влияние работоспособности прибора на его пропускную способность.

каза, которая приближается к вероятности отказа для абсолютно надежных приборов.

Если заранее рассчитать по формуле (5.4.10) зависимости вероятностей отказа от параметров надежности и ремонтоспособности и построить графики, аналогичные представленным на рис. 5.4.1 и 5.4.2, то можно довольно просто и быстро решать большой класс задач с учетом выхода обслуживающих приборов из строя. Полученные зависимости были выведены в предположении показательного распределения времени обслуживания $t_{обс}$ и времени ожидания заявки в очереди $t_{ож}$. Однако, как показали исследования, проведенные методом статистических испытаний, результаты, получаемые по формулам (5.4.7), (5.4.8) и (5.4.10), остаются справедливыми в некотором диапазоне изменения параметров и при распределении времени $t_{обс}$ и $t_{ож}$ по законам, отличным от показательного, но с конечным математическим ожиданием.

Исследования проводились в следующем диапазоне изменения величин: $0{,}1 \leqslant \rho \leqslant 10$; $0{,}3 \leqslant \beta \leqslant 10$; $0{,}1 \leqslant q \leqslant 1$; $0{,}1 \leqslant \delta \leqslant 1$.

В табл. 5.4.1 представлены некоторые варианты расчетов при $n=1$, $\lambda=1{,}14$ и $\beta=0{,}33$, выполненных методом статистических испытаний и по полученным формулам.

Как видно из таблицы, результаты расчетов, полученные методом статистических испытаний для других законов распределения $t_{обс}$ и $t_{ож}$, показывают, что использование полученных зависимостей в этом случае дает вполне приемлемую для практики точность.

Таблица 5.4.1

Закон распределения времени $t_{обс}$ и $t_{ож}$	Варианты			
	$q=0{,}24$; $\delta=0{,}56$ $\rho=1{,}14$		$q=0{,}12$; $\delta=0{,}28$; $\rho=0{,}57$	
	статистич.	по формуле (5.4.10)	статистич.	по формуле (5.4.10)
Показательный	0,451	0,443	0,276	0,297
Равномерный	0,453		0,284	
Нормальный усеченный	0,441		0,279	
Релея	0,449		0,294	
При постоянном значении	0,444		0,298	

Пример 1

Для управления производственным процессом используется ЭВМ, которая обрабатывает поступающую информацию о протекании производственного процесса и решает в соответствии с полученной информацией задачу об изменении параметров процесса для достижения максимальной производительности. Поток информации пуассоновский с параметром $\lambda=1$ *инф/час*. Если информация застанет машину занятой обработкой предшествующей информации, то она становится в очередь (записывается в память). Время ожидания в очереди ограничено некоторой величиной $\bar{t}_{ож}=0{,}2$ *час*, так как информация со временем теряет свою ценность. Время обработки одной группы информации и решения задачи по корректировке процесса зависит от многих факторов: характера поступающей информации, времени решения задачи по данной информации и т. д. Примем, что время обработки информации имеет показательное распределение с параметром $\mu=10$, т. е. $\bar{t}_{обс}=0{,}1$ *час*. ЭВМ время от времени дает сбои и выходит из строя. Среднее время наработки на один отказ равно $\bar{t}_н=1$ *час*. Время на устранение неисправности состоит в основном из времени поиска неисправности, так как ремонт производится методом замены неисправного блока, и равно $\bar{t}_{вос}=1$ *час*. Как видно, время восстановления очень большое и его необходимо уменьшить. Для этого может быть использован метод автоматического поиска неисправности, что значительно сокращает время восстановления машины. Однако этот метод связан с увеличением объема радиоэлектронной аппаратуры, который приводит к удорожанию ремонта.

Примем, что стоимость дополнительного объема аппаратуры, которая может быть использована для осуществления автоматического поиска, зависит от времени поиска

$$C_{\text{доп}} = \frac{100}{2{,}3 + \ln \dfrac{\bar{t}^*_{\text{вос}}}{\bar{t}_{\text{вос}}}}, \qquad \text{(а)}$$

где $\bar{t}^*_{\text{вос}}$ — время на восстановление в результате применения некоторой аппаратуры для осуществления автоматического поиска.

Если будет обработана вся поступающая на ЭВМ информация, то автоматическое управление процессом даст максимальное повышение производительности труда. При уменьшении количества обрабатываемой информации процесс идет менее эффективно по сравнению с максимальными возможностями и предприятие терпит убыток. Зависимость величины понесенных убытков от вероятности обработки каждой порции информации можно ориентировочно (для примера) представить в виде

$$C_{\text{уб}} = 100 \cdot P_{\text{отк}}, \qquad \text{(б)}$$

где $P_{\text{отк}}$ — вероятность отказа в обработке информации.

Требуется определить степень автоматизации поиска возникающих неисправностей, чтобы суммарные затраты на производстве были минимальными.

Решение

Суммарные затраты производства будут состоять из потерь, возникающих в результате невозможности обработать всю поступающую информацию, и затрат на ремонт ЭВМ. Отсюда можно записать следующую зависимость для суммарных затрат в результате ненадежной работы ЭВМ:

$$C = C_{\text{доп}} + 300 P_{\text{отк}}. \qquad \text{(в)}$$

Определим составляющие стоимости. Для этого вычислим параметры системы:

$$\rho = \lambda \bar{t}_{\text{обс}} = 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}1; \quad \beta = \frac{\bar{t}_{\text{обс}}}{\bar{t}_{\text{ож}}} = \frac{0{,}1}{0{,}2} = 0{,}5;$$

$$q = \frac{\bar{t}_{\text{обс}}}{\bar{t}_{\text{н}}} = \frac{0{,}1}{1} = 0{,}1.$$

Начальный параметр δ, характеризующий ремонтоспособность ЭВМ, до осуществления автоматического поиска неисправности равен

$$\delta = \frac{\bar{t}_{\text{обс}}}{\bar{t}_{\text{вос}}} = \frac{0{,}1}{1} = 0{,}1.$$

Очевидно, что с уменьшением времени восстановления будет увеличиваться величина δ, поэтому, задавая ряд значений δ, рассчитаем вероятность отказа в обработке информации. Результаты расчетов представлены на рис. 5.4.3. Зависимости затрат на дополнительную аппаратуру, осуществляющую автоматический поиск неисправности, и убытков от потери информации, рассчитанные соответственно по формулам а) и б), представлены на рис. 5.4.4 и 5.4.5. Используя полученные зависимости, определим по формуле в) суммарные издержки. Результаты расчетов пред-

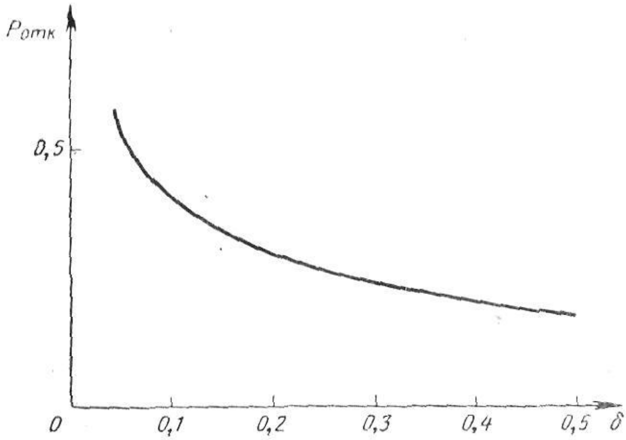

Рис. 5.4.3. Зависимость вероятности отказа $P_{отк}$ от времени восстановления.

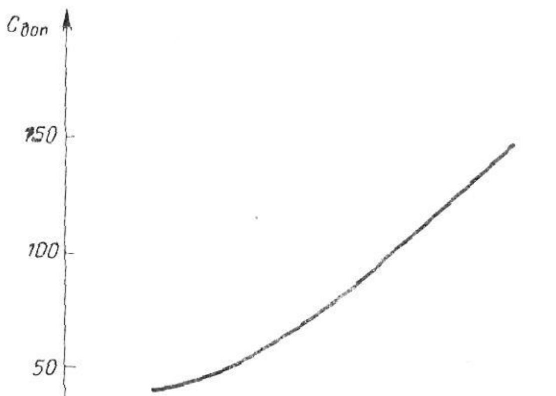

Рис. 5.4.4. Зависимость дополнительных затрат на аппаратуру автоматического поиска от времени поиска неисправности и ее восстановления.

ставлены на рис. 5.4.6. Как видно из рисунка, наиболее подходящим значением для времени поиска неисправности является параметр $\delta=0,3$, что соответствует времени восстановления $\bar{t}_{вос}=0,33$ *час*. Таким образом, объем аппаратуры автоматического поиска неисправности должен быть таким, чтобы время восстановления было равно 0,33 *час*, т. е. в 3 раза меньше по сравнению

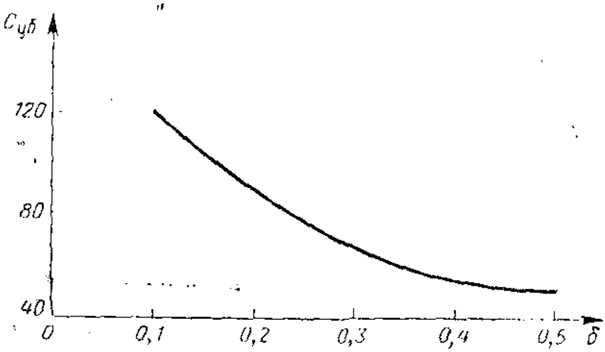

Рис. 5.4.5. Зависимость стоимости потерянной информации от времени поиска неисправности и ее восстановления.

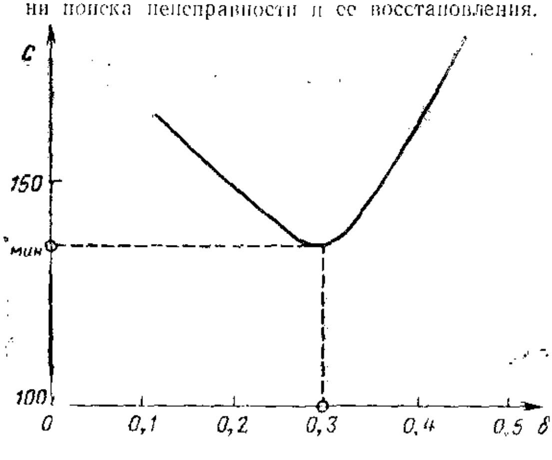

Рис. 5.4.6. Зависимость суммарных издержек от времени поиска неисправности и ее восстановления.

с имеющимся. Дальнейшее уменьшение времени восстановления, если стоимость аппаратуры определяется зависимостью а), нецелесообразно, так как это обходится очень дорого предприятию.

Ограничения на длину очереди. На практике довольно часто встречаются случаи, когда обслуживающая система имеет ограничения на число клиентов, ожидающих начала своего обслуживания. Примером может служить мастерская, в которой количество принимаемой в ремонт аппаратуры ограничивается из-за ограниченного объема складского помещения для ее хранения. Другим примером может быть бензозаправочная колонка с ограниченной площадкой для стоянки машин в очереди. Поэтому возникает необходимость в решении задачи по оценке функционирования систем с ненадежными приборами, в которых поступающие заявки на обслуживание становятся в очередь только тогда, если в них имеется менее N заявок. В противном случае заявки покидают систему и считаются потерянными. Если же заявки попали в очередь, то они дожидаются начала обслуживания. Остальные параметры системы, касающиеся надежности, ремонтоспособности и производительности, остаются аналогичными параметрам систем с ограниченным временем ожидания заявок в очереди для ненадежных приборов.

На основании приведенных условий функционирования системы каждая заявка, попавшая в очередь, не покинет ее до начала своего обслуживания. Тогда $\nu=0$. Вероятностные состояния этой системы в стационарном режиме могут быть описаны такой системой алгебраических уравнений:

$$
\begin{gathered}
-\lambda P_0+P_1\left[\mu\left(1-\pi_n\right)+\alpha\left(1-\pi_n\right)\right]=0, \\
-P_i\left\{\lambda+i(\mu+\alpha) \sum_{j=0}^{n-i} \pi_j+(\mu+\alpha) \sum_{j=n-i+1}^{n} \pi_j(n-j)\right\}+ \\
+\lambda P_{i-1}+P_{i+1}\left\{(\alpha+\mu)(i+1) \sum_{j=0}^{n-i-1} \pi_j+\right. \\
\left.+(\mu+\alpha) \sum_{j=n-i}^{n} \pi_j(n-j)\right\}=0 \\
\text{при } 0 \leqslant i<n, \\
-P_{n+s}\left\{\lambda+(\mu+\alpha) \sum_{j=0}^{n} \pi_j(n-j)\right\}+ \\
+\lambda P_{n+s-1}+P_{n+s+1}(\mu+\alpha) \sum_{j=0}^{n} \pi_j(n-j)=0 \\
\text{при } 0 \leqslant s<N, \\
-P_{n+N}(\mu+\alpha) \sum_{j=0}^{n} \pi_j(n-j)+\lambda P_{n+N-1}=0.
\end{gathered} \tag{5.4.11}
$$

Решение системы уравнений (5.4.11) даст следующие зависимости:

1. Вероятность того, что в системе находится i заявок $(0 \leqslant i \leqslant n+N)$:

$$P_i = \frac{\rho^i P_0}{\prod\limits_{k=1}^{i} \left\{ k(1+q) \sum\limits_{j=0}^{n-k} \pi_j + (1+q) \sum\limits_{j=n-k+1}^{n} \pi_j (n-j) \right\}}$$

$$\text{при } 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{5.4.12}$$

$$P_{n+s} = \frac{\rho^{n+s} P_0}{\prod\limits_{k=1}^{n} \left\{ k(1+q) \sum\limits_{j=0}^{n-k} \pi_j + (1+q) \sum\limits_{j=n-k+i}^{n} \pi_j (n-j) \right\}} \times$$

$$\times \frac{1}{\left[(1+q) \sum\limits_{j=0}^{n} \pi_j (n-j) \right]^s} \quad \text{при } 1 \leqslant s \leqslant N. \tag{5.4.13}$$

2. Значение вероятности P_0 определится из нормирующего условия

$$\sum_{k=0}^{n+N} P_k = 1. \tag{5.4.14}$$

3. Вероятность того, что заявка не будет обслужена, равна вероятности потери ее либо из-за выхода обслуживающего прибора из строя, либо из-за наличия заявок в очереди

$$P_{\text{отк}} = \frac{qM[q] + \rho P_{n+N}}{\rho}, \tag{5.4.15}$$

где $M[q]$ — математическое ожидание числа заявок, которые находятся на обслуживании в данный момент.

4. Величина $M[q]$ определяется из зависимости

$$M[q] = \sum_{k=1}^{n} P_k \left[k \sum_{j=0}^{n-k} \pi_j + \sum_{j=n-k+1}^{n} (n-j)\pi_j \right] +$$

$$+ \sum_{s=1}^{N} P_{n+s} \sum_{j=0}^{n} (n-j)\pi_j. \tag{5.4.16}$$

5. Вероятность того, что заявка не попадет в очередь из-за наличия в ней уже N заявок, равна

$$P_{\text{нс}} = P_{N+n}. \tag{5.4.17}$$

6. Вероятность того, что заявка попадет в систему, но не будет обслужена до конца из-за выхода обслуживающего ее прибора из строя, определяется по формуле

$$P_{\text{но}} = \frac{qM[q]}{\rho}. \tag{5.4.18}$$

7. Среднее число заявок, находящихся в системе, определится по формуле

$$N_{\text{с}} = \sum_{k=1}^{n} kP_k\pi_{n-k} + \sum_{s=1}^{N} sP_k + \\ + \sum_{s=1}^{N} P_{n+s} \sum_{k=1}^{n} k\pi_{n-k}. \tag{5.4.19}$$

Пример 2

Для выборочной проверки качества выпускаемых изделий на предприятии имеется автоматизированный контрольно-проверочный комплекс. Он устроен так, что в нем одновременно могут находиться не более трех изделий, одно из которых находится на проверке ($n=1$) соответствия основных параметров изделия заданным, а два ожидают проверки ($N=2$). Если очередное выпускаемое изделие застанет в контрольно-проверочном комплексе три изделия, то оно поступает на склад без проверки.

Время проверки одного изделия в среднем $\bar{t}_{\text{обс}}=0{,}5$ *час.* Предприятие выпускает в среднем около двух изделий в час ($\lambda = 2$ *изд/час*).

Контрольно-проверочный комплекс время от времени выходит из строя. Среднее время безотказной работы равно 10 *час.* При выходе из строя контрольно-проверочного комплекса изделие, которое находилось на проверке, поступает на склад неполностью проверенным.

Среднее время восстановления контрольно-проверочного комплекса равно одному часу ($\bar{t}_{\text{вос}}=1$ *час*). Требуется определить:

а) средний процент проверенных изделий;

б) средний процент неполностью проверенных изделий из-за выхода КПК из строя;

в) среднее число изделий, находящихся в КПК.

Решение

Определяем параметры системы

$$\rho = \lambda \bar{t}_{\text{обс}} = 2 \cdot 0{,}5 = 1,$$

$$q = \frac{\bar{t}_{\text{обс}}}{\bar{t}_{\text{н}}} = \frac{0{,}5}{10} = 0{,}05,$$

$$\delta = \frac{\bar{t}_{\text{обс}}}{\bar{t}_{\text{вос}}} = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5.$$

По формуле (5.4.9) определяем π_0 и π_1:

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\frac{q}{\delta}} \approx 0,9,$$

$$\pi_1 = 1 - \pi_0 \approx 0,1.$$

Для определения вероятности отказа по формуле (5.4.15) необходимо знать величины P_1, P_{1+1} и P_{1+2}, которые определим по формулам (5.4.12) и (5.4.13):

$$P_1 = \frac{\rho P_0}{(1+q)\pi_0} \approx 1,05P_0,$$

$$P_{1+1} = \frac{\rho^2 P_0}{(1+q)\,\pi_0\,(1+q)\,\pi_0} \approx 1,12P_0,$$

$$P_{2+2} = \frac{\rho^3 P_0}{(1+q)^3\pi_0^3} \approx 1,20P_0.$$

Вероятность P_0 определим из нормирующего условия (5.4.14)

$$1 = P_0 + P_1 + P_{1+1} + P_{1+2} = P_0 + 1,05P_0 + 1,12P_0 + 1,20P_0 = 4,37P_0,$$

откуда

$$P_0 = \frac{1}{4,37} \approx 0,23.$$

Тогда

$$P_1 \approx 0,24,\quad P_{1+1} \approx 0,26,\quad P_{1+2} \approx 0,28.$$

Определим величину $M[q]$ по формуле (5.4.16)

$$M[q] = 0,24 \cdot 0,9 + (0,26 + 0,28)0,9 \approx 0,71.$$

Тогда вероятность отказа в проведении контроля будет равна

$$P_{\text{отк}} = \frac{0,05 \cdot 0,71 + 1 \cdot 0,28}{1} \approx 0,32.$$

а) Таким образом, среднее число проверенных изделий будет равно

$$P_{\text{обс}} = (1 - 0,32) \cdot 100 = 68\%.$$

б) Средний процент неполностью обслуженных изделий определим по формуле (5.4.18)

$$P_{\text{но}} = \frac{0,05 \cdot 0,71}{1} \approx 0,04,$$

т. е. около 4% изделий покинет КПК неполностью проверенными из-за возникновения неисправности.

в) Среднее число изделий, которое находится в контрольно-проверочном комплексе, определим по формуле (5.4.19)

$$N_c = P_1\pi_0 + P_{1+1} + 2P_{1+2} + P_{1+1}\pi_0 + P_{1+2}\pi \approx 1,53,$$

т. е. около 1,53 изделия в среднем будет находиться в контрольно-проверочном комплексе. Из них 1,53—0,71 = 0,82 изделий будет ожидать в очереди начала проверки.

5.5. Повышение надежности системы путем резервирования с восстановлением

Комплексная автоматизация производственных процессов ставит перед управляющими устройствами исключительно ответственные задачи, которые должны решаться безупречно в течение всего периода работы автоматической линии, автоматизированного цеха или предприятия. Перерыв в работе того или иного узла может привести к частичному, а часто и к полному прекращению работы производственного процесса. Поэтому следует стремиться к тому, чтобы крупные комплексные автоматические агрегаты (машины) были максимально безотказны в работе. При этом следует обратить внимание на то, что с усложнением аппаратуры для повышения ее безотказной работы резко увеличивается ее стоимость. Отсюда возникает вопрос: каким путем целесообразней повысить надежность аппаратуры:

— повышением надежности отдельных элементов,
— выбором режимов работы,
— резервированием и пр.

Рассмотрим последний путь. Резервирование является одним из основных методов повышения надежности, который позволяет по крайней мере теоретически безгранично повышать надежность. В зависимости от того, в каком состоянии находятся резервные элементы до момента их включения в работу, резервирование элемента делится на несколько типов:

а) Нагруженный резерв. Резервные элементы находятся в том же режиме, что и основной элемент, их надежность не зависит от того, в какой момент они включались на место основного.

б) Облегченный резерв. Резервные элементы находятся в облегченном режиме до момента их включения на место основного. Во время ожидания в резерве они могут отказать, но с вероятностью меньшей, чем вероятность отказа основного элемента.

в) Ненагруженный резерв. Резервные элементы находятся в выключенном состоянии и по условию до момента включения их на место основного не могут отказать.

В работе [10] А. Д. Соловьевым было рассмотрено функционирование некоторой системы, состоящей из нагруженного, облегченного и ненагруженного резервов.

Приведем некоторые зависимости, характеризующие работу такой системы. Рассмотрим постановку задачи.

Пусть имеется система, состоящая из $N=n+m+l+s$ одинаковых элементов или приборов. Время безотказной работы каждого элемента распределено по показательному закону, n элементов находятся в рабочем состоянии и имеют опасность отказа, равную λ, m элементов находятся в нагруженном резерве с той же опасностью отказа λ, l элементов составляют облегченный резерв и имеют опасность отказа ν и, наконец, s элементов находятся в ненагруженном резерве и в этом состоянии не отказывают.

Каждый отказавший элемент мгновенно поступает в ремонтное устройство, которое состоит из r ремонтных единиц. Каждая ремонтная единица может одновременно ремонтировать один элемент. Время ремонта элемента случайное и распределено по показательному закону с параметром μ. Если все ремонтные единицы заняты, то отказавший элемент становится в очередь и ожидает начала своего ремонта.

Каждый отказавший рабочий элемент мгновенно заменяется из нагруженного резерва, каждый отказавший или перешедший в рабочее состояние элемент из нагруженного резерва мгновенно заменяется элементом из облегченного резерва, а каждый отказавший или перешедший в нагруженный резерв элемент из облегченного резерва мгновенно заменяется элементом из ненагруженного резерва. Каждый восстановленный элемент поступает в ненагруженный резерв. Структурная схема системы показана на рис. 5.5.1. Система работает исправно, если число исправных элементов не меньше n.

Обозначим через $P_k(t)$ вероятность того, что в системе в момент t неисправно k элементов.

Как показано в [10], работа такой системы описывается процессом гибели и размножения, причем параметры процесса (λ_k и μ_k) выражаются формулами:

$$\lambda_k=\begin{cases}(n+m)\lambda+\nu l, & \text{если } 0\leqslant k\leqslant s,\\ (n+m)\lambda+\nu(l+s-k) & \text{если } s<k\leqslant s+l,\\ (n+m+l+s-k)\lambda, & \text{если } l+s<k\leqslant N,\end{cases} \tag{5.5.1}$$

$$\mu_k=\begin{cases}k\mu, \text{ если } k\leqslant r,\\ r\mu, \text{ если } k>r.\end{cases} \tag{5.5.2}$$

Тогда вероятность того, что в системе неисправно k элементов, может быть определена по формуле

$$P_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \ \cdot \ \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \ \cdot \ \cdot \mu_{k-1}} P_0, \qquad (5.5.3)$$

где параметры λ_i и μ_i ($i=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1$) определяются из условий (5.5.1) и (5.5.2).

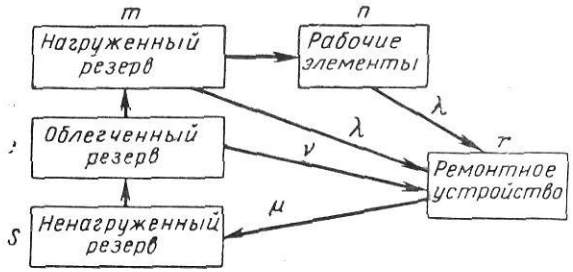

Рис. 5.5.1. Схема функционирования системы с нагруженным, облегченным и ненагруженным резервами.

Значения величины P_0 определится из нормирующего условия

$$\sum_{k=0}^{N} P_k = 1. \qquad (5.5.4)$$

Вероятность того, что система работает исправно, равна

$$P_{\text{обс}} = \sum_{k=0}^{N-n} P_k. \qquad (5.5.5)$$

Вероятность того, что система находится в нерабочем состоянии, равна

$$P_{\text{отк}} = 1 - P_{\text{обс}}. \qquad (5.5.6)$$

Приведем для ряда случаев конечные формульные зависимости для определения вероятностей P_k.

а) Система состоит из n элементов. Из них $(n-m)$ находятся в рабочем состоянии и m — в нагруженном резерве. Число ремонтных единиц (операторов) $r \geqslant n$. Тогда параметры системы имеют вид

$$\lambda_k = (n-k)\,\lambda,$$
$$\mu_k = k\mu.$$

Вероятность того, что в системе k элементов неисправно, равна

$$P_k = C_n^k \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n}. \qquad (5.5.7)$$

Если число ремонтных единиц (операторов) равно единице, т. е. $r=1$, то вероятность P_k определяется по формуле

$$P_k = \frac{\frac{1}{(n-k)!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-k}}{\sum\limits_{l=0}^{n} \frac{1}{l!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{l}}. \qquad (5.5.8)$$

б) Система состоит из n рабочих элементов и неограниченного ненагруженного резерва. Число ремонтных единиц также неограниченно. Параметры системы в этом случае имеют вид

$$\lambda_k = n\lambda,$$
$$\mu_k = k\mu.$$

Вероятность того, что в системе k элементов находятся в неисправном состоянии, равна

$$P_k = \frac{\frac{(n\lambda)^k}{\mu^k}}{k!} e^{-\frac{n\lambda}{\mu}}. \qquad (5.5.9)$$

Если число ремонтных единиц равно единице, т. е. $r=1$, то формула для вероятности P_k примет вид

$$P_k = \left(\frac{n\lambda}{\mu}\right)^k \left(1 - \frac{n\lambda}{\mu}\right) \text{ при } n\lambda < \mu. \qquad (5.5.10)$$

Определим вероятность безотказной работы в течение времени t. Очевидно, что система будет работать безотказно до момента t, если ни разу до этого число отказавших элементов не превысило $N-n$. Здесь предполагается, что вначале все элементы системы исправны. Тогда вероятность безотказной работы системы равна

$$P(t) = 1 - P_{N-n+1}(t), \qquad (5.5.11)$$

где $P_{N-n+1}(t)$ может быть определено из системы дифференциальных уравнений, составленных для процесса гибели и размножения.

Если величина $N-n+1$ большая, то вероятность безотказной работы может быть получена по формуле

$$P(t) \approx e^{-\frac{t}{T_{N-n+1}}}, \qquad (5.5.12)$$

где T_{N-n+1} — среднее время безотказной работы $N-n+$ $+1$ элемента.

Для случая а) отказ системы наступает, когда число отказавших элементов становится равным $(m+1)$. Тогда среднее время безотказной работы системы равно

$$T_{m+1} = \frac{\sum_{l=0}^{m}\left[C_n^{m-l}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{l+1}\frac{1}{l+1}+\frac{1}{m+1-l}\right]}{(\lambda+\mu)\,C_n^{m+1}}. \qquad (5.5.13)$$

В частности, если имеется только один рабочий элемент, то

$$T_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)^k}{(\lambda+\mu)k} \qquad (5.5.14)$$

Для случая б) отказ системы наступает, как и в случае а), когда выходит из строя $m+1$ элемент. Тогда среднее время безотказной работы выражается формулой

$$T_{m+1} = \sum_{k=n-m}^{n}\sum_{l=k}^{n}\frac{(k-1)!}{\lambda l!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{l-k}. \qquad (5.5.15)$$

Пример

На автоматизированном предприятии имеется сложный комплекс радиоэлектронной аппаратуры, состоящий из пяти однотипных блоков. Из них три ($n=3$) находятся в рабочем состоянии и осуществляют управление процессом производства, а два ($m=2$) находятся в нагруженном резерве.

Блоки могут выходить из строя. Среднее время безотказной работы равно 100 *час* ($\bar{t}_н=100$ *час*). Вышедший из строя блок восстанавливается ремонтной бригадой ($r=1$). Если один блок находится уже на ремонте и выйдет из строя еще один, то последний будет ожидать своего ремонта.

Время восстановления — величина случайная и зависит от ряда факторов: характера неисправности, наличия запасных деталей, квалификации операторов в ремонтной бригаде и др. Опыт эксплуатации показал, что в среднем время восстановления равно 10 *час* ($\bar{t}_{\text{вос}}=10$ *час*).

Требуется определить, что производство работает исправно.

Решение

1. Определяем параметры системы

$$\lambda=\frac{1}{\bar{t}_{\text{н}}}=\frac{1}{100}=0,01,$$

$$\mu=\frac{1}{\bar{t}_{\text{вос}}}=\frac{1}{10}=0,1.$$

2. Вероятность того, что производство не работает, определим по формуле (5.5.15)

$$P_{\text{обс}}=P_0+P_1+P_2,$$

где величины P_0, P_1 и P_2 определяются по формуле (5.5.8), так как $r=1$.

3. Вероятность того, что нет ни одного неисправного блока, равна

$$P_0=\frac{\frac{1}{3!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3}{1+\frac{\mu}{\lambda}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3}\approx 0,732.$$

4. Вероятность того, что неисправен один блок, равна

$$P_1=\frac{\frac{1}{2}\,100}{228}\approx 0,220.$$

5. Вероятность того, что неисправны два блока, равна

$$P_2=\frac{10}{228}\approx 0,040.$$

6. Отсюда вероятность безотказной работы предприятия равна

$$P_{\text{обс}}\approx 0,732+0,220+0,040\approx 0,992.$$