אא"ן 17

סמ" פלינסקיה

320414741

שאלה #1

נתון בשלב כי f גזירה ⟸ ניקח $a,b \in \mathbb{R}$
כאשר נניח כי $a < b$ ונראה כי $f(a) = f(b)$.
f רציפה ב-$[a,b]$ ולכן מקבלת מינימום ומקסימום
בקטע לפי מש"ה שמ של "וירשטראס".

אם נקודת המקסימום מתקבלת בתוך הקטע $[a,b]$ אז היא נקודת
קיצון, ספציפית פנימי ⟸ נקודות קיצון פנימית היא נקודת
מקסימום בקטע. בגלל זאת, נקודת מקסימום היא נקודת
מקסימום בקטע.

$f(a) = f(b)$ ⟸ נקודות המינימום והמקסימום בקטע $[a,b]$
שוות ⟸ פונקציה f קבועה בקטע כולו בקטע.
⟸ כל נקודת בקטע (a,b) היא נקודת מינימום,
ולכן נקודת קיצון פנימי. ⟸ f גזירה.

f רציפה ב-$[a,b]$. $[a,c] \subset [a,b] \Leftarrow f$

רציפה ב-$[a,c]$. f גזירה ב-(a,b) ולכן

גזירה ב-(a,c). לפי משפט לגראנז' קיים $d \in (a,c)$

המקיים

$$f'(d) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

$$f'(d) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} > 0 \quad \begin{cases} f(c)-f(a)>0 \Leftarrow f(c)>0 \text{ ו-} f(a)=0 \text{ כיוון } \\ c-a>0 \Leftarrow c>a \Leftarrow c \in (a,b) \end{cases}$$

בצורה דומה נוכיח כי מלגראנז' כי קיים $e \in (c,b)$

המקיים

$$f'(e) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

$$f'(e) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} < 0 \quad \begin{cases} f(b)-f(c)<0 \Leftarrow f(c)>0 \text{ ו-} f(b)=0 \text{ כיוון } \\ b-c>0 \Leftarrow b>c \Leftarrow c \in (a,b) \end{cases}$$

f גזירה פעמיים ב-$(a,b) \Leftarrow f'$ קיים וגזירה ב-$(a,b) \Leftarrow$

$\Leftarrow f'$ רציפה ב-(a,b)

$[d,e] \subset (a,b)$ לכן f' רציפה ב-$[d,e]$ וגזירה ב-(d,e)

לפי משפט לגראנז' קיים $x \in (d,e)$ המקיים

$$f''(x) = \frac{f'(e) - f'(d)}{e - d}$$

$$f''(x) = \frac{f'(e) - f'(d)}{e - d} < 0 \quad \begin{cases} f'(e)-f'(d)<0 \Leftarrow f'(e)<0 \text{ , } f'(d)>0 \\ e-d>0 \Leftarrow e>d \end{cases}$$

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) \qquad \text{נגדיר}$$

$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ הינו פולינום ולכן גזיר ב- $\mathbb{R}$ ורציף ב- $[0,1]$.

f גזיר ב- $[0,1]$

$\Leftarrow g$ גזיר ב- $[0,1]$

נתון: $0 \le f'(x) \le 2$ לכל x ב- $[0,2]$ $\Leftarrow$ $f'(0) \ge 0$, $f'(1) \le 2$

$g'(x) = f'(x) - \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)' = f'(x) - (x^2 + x)$

$g'(0) = f'(0) - 0 = f'(0) \ge 0$

$g'(1) = f'(1) - 2 \le 2 - 2 = 0$

g גזיר ב- $[0,1]$ ובנוסף $g'(0) \ge 0 \ge g'(1)$

לכן לפי משפט דרבו קיים $c \in [0,1]$ שמקיים ומתקיים

$g'(c) = f'(c) - (c^2 + c) = 0 \implies f'(c) = c^2 + c$

f נגזרת בקטע $[1,\infty)$, ונוכיח חסומה (ועל ידי כך)

רציפה ושלמה במידה.

$$f'(x) = \cos\frac{1}{x} + x\cdot\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$$

$$\left|f'(x)\right| = \left|\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right| \leq \left|\cos\frac{1}{x}\right| + \left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right|$$

$$\left|\cos x\right| \leq 1, \quad \left|\sin x\right| \leq 1 \qquad x\in\mathbb{R} \quad \text{כי}$$

$$\Rightarrow \left|f'(x)\right| = \left|\cos\frac{1}{x}\right| + \left|\frac{1}{x}\right|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1 + 1\cdot 1 = 2$$

$\Leftarrow \quad -2 \leq f'(x) \leq 2 \quad \Leftarrow$ חסומה f' בקטע $[1,\infty)$

f נגזרת בקטע $[1,\infty)$ ו־f' חסומה $\Leftarrow$ f רציפה,

(ב.ע.מ.) שלמה במידה בקטע $[1,\infty)$