ממ"ן 11

סרגי" פלוטניקוב

ת.ז: 320414741

שאלה #1 סעיף א

$$4^n = (1+1)^{2n} =$$

$$= \binom{2n}{0} 1^{2n} \cdot 1^0 + \dots + \binom{2n}{n} 1^n \cdot 1^n + \dots + \binom{2n}{2n} 1^0 \cdot 1^{2n} \ge \binom{2n}{n} 1^n \cdot 1^n = \binom{2n}{n}$$

שאלה #1 סעיף ב

נוכיח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים $\binom{2n}{n} \ge \frac{4^n}{2n+1}$

נבדוק נכונות בסיס. עבור $n=1$:

$$2 = \frac{2!}{1!\cdot 1!} = \binom{2\cdot 1}{1} \ge \frac{4^1}{2\cdot 1+1} = 1\frac{1}{3}$$

נניח נכונות עבור n ונוכיח נכונות עבור $n+1$:

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!\cdot(n+1)n!} = \frac{2\cancel{(n+1)}(2n+1)(2n)!}{(n+1)^{\cancel{2}}\cdot n!\cdot n!} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$$

נשתמש בהנחת הנכונות עבור n

$$\frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n} \ge \frac{2(2n+1)}{n+1}\cdot\frac{4^n}{2n+1} = \frac{2}{n+1}\cdot 4^n = \frac{4}{2n+2}\cdot 4^n =$$

$$= \frac{4^{n+1}}{2n+2} \ge \frac{4^{n+1}}{2n+3}$$

שאלה #2
סעיף א

$$b^2 \geq |a-b| \geq |a|-|b|$$

$$\Rightarrow b^2 \geq |a|-|b|$$

$$b^2+|b| \geq |a|$$

$$|b|^2+|b| \geq |a| \quad / \cdot \frac{1}{|b|}$$

$$|b|+1 \geq \left|\frac{a}{b}\right| \quad \Leftarrow b \neq 0$$

שאלה #2
סעיף ב

$$\left(\frac{a+|a|}{2}\right)^2+\left(\frac{a-|a|}{2}\right)^2=\frac{a^2\cancel{+2a|a|}+|a|^2+a^2\cancel{-2a|a|}+|a|^2}{4}=$$

$$=\frac{2a^2+2|a|^2}{4}=\frac{2a^2+2a^2}{4}=a^2$$

שאלה #3 סעיף א

$$\lfloor |x+1|-|x| \rfloor \geq x^2$$

נניח כי $x<0$:

$$|x+1| = |-(-x-1)| = |-1||-x-1| = ||x|-1|$$

$$|x+1|-|x| = ||x|-1|-|x| = -1$$

$$\lfloor -1 \rfloor \geq x^2 \Rightarrow -1 \geq x^2 \Rightarrow$$ אין פתרון עבור $x<0$

עבור $x \geq 0$:

$$|x+1|-|x| = x+1-x = 1$$

$$1 = \lfloor 1 \rfloor \geq x^2 \Rightarrow (1-x)(1+x) \geq 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{c} -1 \leq x \leq 1 \\ \text{וגם} \\ x \geq 0 \end{array}\right\} \underline{\underline{0 \leq x \leq 1}}$$

שאלה #3 סעיף ב-i

$$\lfloor x \rfloor^2 = 16 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 4 \text{ או } \lfloor x \rfloor = -4$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{4 \leq x < 5 \text{ או } -4 \leq x < -3}}$$

שאלה #3 סעיף ב-ii

$$\lfloor x^2 \rfloor = 3 \Rightarrow x \in \{a \in \mathbb{R} \mid a^2 < 4 \wedge a^2 \geq 3\}$$

$x^2-3 \geq 0$ וגם $x^2-4<0$

$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \geq 0$; $(x-2)(x+2)<0$

$x \leq -\sqrt{3}$ או $x \geq \sqrt{3}$; $-2<x<2$

$$\Rightarrow -2<x<2 \text{ וגם } x \leq -\sqrt{3} \Rightarrow -2<x \leq -\sqrt{3}$$

או

$$\Rightarrow -2<x<2 \text{ וגם } x \geq \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} \leq x < 2$$

שאלה #4 סעיף א

עבור כל שני מספרים $a,b\in(0,1)$ המקיימים $a<b$

קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $1<n\cdot a$ לפי תכונת ארכימדס.

$$\Rightarrow 1<n\cdot a<n\cdot b$$

$$n\cdot a, n\cdot b\in(1,\infty) \underset{\text{עקב צפיפות A בקטע } (1,\infty)}{\Longrightarrow} \exists x\in A.\ na<x<nb$$

$$\Rightarrow a<\frac{x}{n}<b$$

הראנו כי עבור כל שתי נקודות בקטע $(0,1)$ ניתן למצוא נקודה מהצורה $\frac{x}{n}$ כאשר $x\in A$ ו- $n\in\mathbb{N}$ ולכן $\frac{x}{n}\in B$.

שאלה #4 סעיף ב

A אינה צפופה בקטע I: קיימות נקודות $a,b\in I$ המקיימות $a<b$ כך שלכל $x\in A$ מתקיים $x<a$ או $x>b$.

שאלה #4 סעיף ג

$$A\subseteq(1,\infty) \Rightarrow \overset{\in A}{a}>1$$

$$a+1>a \Rightarrow 1>\frac{a}{a+1}=\frac{a+1-1}{a+1}=\frac{a+1}{a+1}-\frac{1}{a+1}=1-\frac{1}{a+1}>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$C=\left\{\frac{a}{n^2(a+1)}\,\middle|\, a\in A, n\in\mathbb{N}\right\}$$

עבור $n=1$: $\frac{a}{1^2(a+1)} > \frac{1}{1^2}\cdot\frac{1}{2}$

עבור $n\geq 2$: $\frac{a}{n^2(a+1)} < \frac{a+1}{n^2(a+1)} = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

עבור כל שתי נקודות $a,b\in(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ המקיימות $a<b$

לא קיימת נקודה $c\in C$ המקיימת $a<c<b$.