Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f_i(x) = x^T A_i x + 2b_i^T x$, $A_i = A_i^T$.
Обозначим $F = f(\mathbb{R}^n)$, $G = \mathrm{conv}F$
Обозначим $H_i = \begin{Vmatrix} A_i & b_i \\ b_i^T & 0 \end{Vmatrix}$
Обозначим $X = \begin{Vmatrix} x \\ 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x^T & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} xx^T & x \\ x^T & 1 \end{Vmatrix}$
Тогда $f_i(x) = \mathrm{tr} H_i X$, $f(x) = H(X)$
Обозначим $V = \{X \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)} | X = X^T,\, X \geqslant 0,\, X_{n+1,n+1} = 1\}$
Обозначим $G_1 = H(V)$.
Доказать: $G_1 = G$ (On the feasibility for the system of quadratic equations, Theorem 3.1. (Convex hull))

1. $G \subseteq G_1$. Пусть $y \in G$. Тогда $\exists \{y_i\}_{i=1}^l \subset F$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^l \colon y = \sum\limits_{i=1}^l \lambda_i y_i$, где $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum \lambda_i = 1$. Поскольку $y_i \in F$, $\exists \{X_i\} \colon y_i = H(X_i)$, причем $X_i = \begin{Vmatrix} x_i x_i^T & x_i \\ x_i^T & 1 \end{Vmatrix} \in V$. Рассмотрим j-ю компоненту $y^j = \sum \lambda_i y_i^j = \sum \lambda_i \mathrm{tr} H_j X_i = \mathrm{tr} H_j \underbrace{\sum \lambda_i X_i}_{X}$. То есть, найден $X \in V \colon y = H(X)$. Значит, $y \in G_1$
2. $G_1 \subseteq G$. Пусть $y \in G_1$. Тогда $y = H(X)$, $X \in V$. Доказать: $y \in G = \mathrm{conv}F$. Представим X в виде выпуклой комбинации $X = \sum \lambda_i X_i$, где $X_i \in V$, причем $X_i = \begin{Vmatrix} x_i x_i^T & x_i \\ x_i^T & 1 \end{Vmatrix} \in V$ для некоторого x_i. Это докажет $y \in G$.
   Рассмотрим $X = \sum \lambda_k s_k s_k^T$ — спектральное разложение.

Проблема: У s_k последняя компонента может быть нулем. Тогда $s_k s_k^T \notin V$. А если брать линейные комбинации из $s_k s_k^T$, то их ранг может быть больше 1.

Вопрос: правильная ли идея доказательства? Как исправить ситуацию с $s_k^{n+1} = 0$?