

Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f_i(x) = x^T A_i x - 2b_i^T x$, $A_i = A_i^T$. Пусть $c \in \mathbb{R}^m$.

Обозначим $c \cdot A = \sum_{i=1}^n c_i A_i$, $c \cdot b = \sum_{i=1}^n c_i b_i$, $F_c(x) = c^T f(x)$

Хотим найти:

$$\min_{\|x\|^2=1} F_c(x)$$

Функция Лагранжа: $L(x, \lambda) = x^T (c \cdot A) x - 2(c \cdot b)^T x - \lambda(\|x\|^2 - 1)$.

Находим $L_x = 2(c \cdot A)x - 2c \cdot b - 2\lambda x = 0$, $L_\lambda = \|x\|^2 - 1 = 0$,

Получаем систему
$$\begin{cases} \|x\| = 1 \\ (c \cdot A - \lambda)x = c \cdot b \end{cases} \quad \text{Это совпадает с (2.3).}$$

Далее переходим в базис из собственных векторов $\{x_i\}$ симметричной матрицы $c \cdot A$

$$S = \|x_1 \dots x_n\|, \quad S^T S = E$$

$$x = Sy, \quad \Lambda = S^T (c \cdot A) S, \quad c \cdot b = S\alpha$$

Получаем

$$\begin{cases} \|y\| = 1 & (1) \\ (\Lambda - \lambda)y = \alpha & (2) \end{cases}$$

Выражаем из (2)

$$y_k = \frac{\alpha_k}{\lambda_k - \lambda}$$

Подставляем в (1) — это совпадает с (2.7)

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k - \lambda} \right)^2 = 1$$

Это соотношение определяет λ , по λ находим y_k , затем находим x в старом базисе.