ТРЯП, 8-ое домашнее задание

Сергей Пучинин, 873

25 ноября 2019 г.

Задача 1. Постройте МП-автомат, распознающий язык палиндромов PAL над алфавитом $\Sigma = \{a, b\}$.
Решение. Нужный автомат изображён на Рис. 1.[1] Докажем его корректность. Бегая из состояния q_0 в q_0 мы

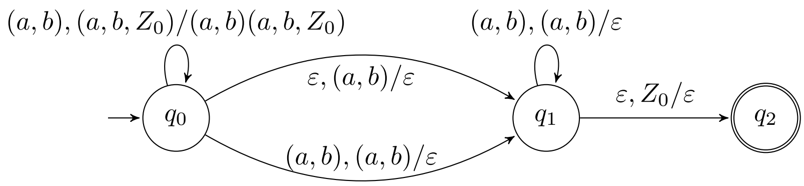

Рис. 1: МП-автомат, распознающий PAL.

считываем символ и записываем его на верхушку стека. Далее, мы начинаем считывать символы, которые находятся на верхушке стека. То есть, проверяем, что слово является палиндромом. Из q_0 в q_1 ведут два пути, так как в случае палиндрома из нечётного числа букв, у центрального символа нет симметричного ему. В конце, если мы смогли опустошить стек до первого элемента, то убираем его и идём в принимающее состояние. Тем самым, данный МП-автомат и вправду распознаёт PAL.

Задача 2. Язык Дика с двумя типами скобок D_2 порождается грамматикой

$$S \to SS \mid (S) \mid [S] \mid \varepsilon.$$

А. Постройте недетерминированный МП-автомат, распознающий язык D_2.
Решение. Нужный автомат изображён на Рис. 2.[2] Докажем его корректность. Верхняя стрелка считывает от-

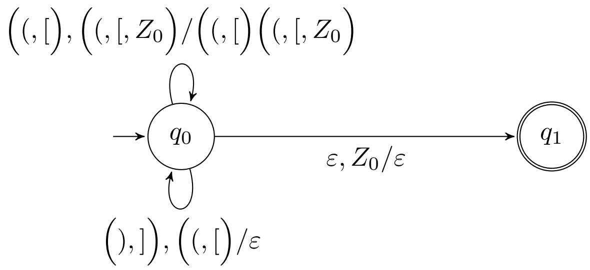

Рис. 2: МП-автомат, распознающий D_2.

крывающую скобку и помещает её на верхушку стека, тем самым получаем в стеке открывающие скобки в той последовательности, в которой они открывались. А значит, закрывать мы должны их в обратной последовательности в случае правильной скобочной последовательности. Это и делает нижний переход — считывает скобку, противоположную той, которая находится на верхушке стека. Опустошив стек до первого элемента, и только в этом случае, идём в принимающее состояние, удаляя Z_0. Тем самым, данный МП-автомат и вправду распознаёт D_2.

Б. Постройте детерминированный МП-автомат, распознающий язык D_2, и приведите доказательство его корректности по индукции.

Задача 3. Постройте МП-автомат, распознающий язык непалиндромов над двоичным алфавитом $\Sigma^* \setminus \text{PAL}$.

[1] Обозначения над стрелками нужно понимать так, что из каждой скобочки мы можем выбрать что угодно, но во всех последующих подобных скобках мы должны выбирать то же самое.
[2] Обозначения над стрелками нужно понимать, как и в предыдущем случае, разве что с инверсий скобок в случае нижней стрелки.

Задача 4. Построить КС-грамматику G, порождающую L, или МП-автомат M, распознающий L.

А. $L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \vee i = k;\ i, j, k \geq 0\}$

Решение. Построим КС-грамматику:

$$S \to Q_1 \mid Q_2$$

$$\begin{gathered} Q_1 \to RC \\ R \to aRb \mid \varepsilon \\ C \to cC \mid \varepsilon \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} Q_2 \to AL \\ A \to aA \mid \varepsilon \\ L \to bLc \mid \varepsilon. \end{gathered}$$

R порождает $\{a^n b^n \mid n \geqslant 0\}$, L порождает $\{b^n c^n \mid n \geqslant 0\}$, A порождает $\{a^n \mid n \geqslant 0\}$, C порождает $\{c^n \mid n \geqslant 0\}$. Следовательно, Q_1 порождает $\{a^n b^n c^m \mid n, m \geqslant 0\}$, Q_2 порождает $\{a^m b^n c^n \mid n, m \geqslant 0\}$. Следовательно S порождает $\{a^i b^j c^k \mid i = j \vee j = k;\ i, j, k \geqslant 0\}$, что и требовалось.

Б*. $L = \{w \mid w = uv \Rightarrow u \neq v\}$, то есть $w \in L$ непредставимо в виде uu.

Задача 5. Докажите, что класс КС-языков замкнут относительно операции пересечения с регулярным языком.

Доказательство. Докажём, что пересечение КС-языка K и регулярного языка R задаётся МП-автоматов. Рассмотрим МП-автомат с допуском по принимающему состоянию для K и ДКА для R. Тогда автомат для пересечения выглядит следующим образом (аналогия прямого произведения)[3]:

$$\begin{gathered} \Sigma = \Sigma_R = \Sigma_K, \\ \Gamma = \Gamma_K, \\ Q = \Big\{[q_R, q_K] \mid q_R \in Q_R;\ q_K \in Q_K\Big\}, \\ q_0 = [q_{0R}, q_{0K}], \\ Z_0 = Z_{0K}, \\ \delta\Big([q_R, q_K], \sigma, z\Big) = \Bigg(\Big[\delta_R(q_R, \sigma), \delta_K(q_2, \sigma, z)\Big], \gamma_{\delta_K(q_2, \sigma, z)}\Bigg), \\ F = \Big\{[f_R, f_K] \mid f_R \in F_R;\ f_K \in F_k\Big\} \end{gathered}$$

За операции со стеком отвечает МП-автомат с допуском по принимающему состоянию, поэтому тут изменений нет, а в остальном — это обычное ПП, доказательство корректности которого было доказано ранее в курсе. □

[3] Под $\gamma_{\delta_K(q_2,\sigma,z)}$ мы понимаем γ из пары, которую возвращает $\delta_K(q_2, \sigma, z)$