Проверка статистических гипотез

Грауэр Л.В.

Статистические гипотезы

Гипотеза о равенстве математических ожиданий двух генеральных совокупностей

Гипотеза о равенстве дисперсий нескольких генеральных совокупностей

Гипотеза о законе распределения генеральной совокупности

Гипотеза об однородности выборки

Гипотеза о наличии аномальных результатов наблюдений (выбросов)

Гипотеза о независимости двух случайных величин

Статистической гипотезой называется предположение о виде или свойствах генерального или выборочного распределений, которое можно проверить статистическими методами на основе имеющейся выборки.

- простая гипотеза
- сложная гипотеза

Критерий значимости

ξ, $F_\xi(x)$
$X_{[n]}$

- $H_0 : F_\xi(x) = F_0(x)$.
- $H_1 : F_\xi(x) = F_1(x)$.

По выборке $X_{[n]}$ требуется принять решение об истинности гипотезы H_0 при гипотезе H_1.

Правило проверки статистической гипотезы при некоторой фиксированной альтернативе называется статистическим критерием.

Статистикой критерия значимости называется статистика, по значениям которой судят о справедливости выдвинутой гипотезы.

Уровень значимости

Уровнем значимости α называется столь малая вероятность, что событие с такой вероятностью является практически невозможной.

Критической областью критерия называется подобласть области значений статистики критерия, вероятность попадания в которую для этой статистики при условии истинности нулевой гипотезы равна уровню значимости.

Схема проверки статистических гипотез, α

- Формулируем нулевую и альтернативную гипотезу
- Задаем уровень значимости
- Выбираем критерий и статистику критерия
- Строим критическую область при условии справедливости нулевой гипотезы
- Вычисляем выборочное значение статистики
- Проверяем, принадлежит ли выборочное значение статистики критической области
- Принимаем статистическое решение

p-значение

Пусть Z, $F_Z(\cdot|H_0)$

$X_{[n]}$, $H_0 \Rightarrow z(X_{[n]})$

p-значением (p-value) называется статистика, равная вероятности того, что статистика критерия примет значение такое же как $z(X_{[n]})$ или более "экстремальное" при условии, что верна нулевая гипотеза.

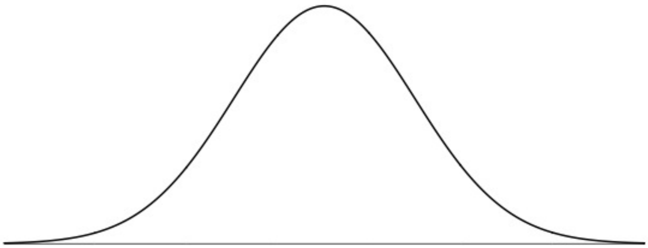


Схема проверки статистических гипотез, $p - value$

- Формулируем нулевую и альтернативную гипотезы
- Задаем уровень значимости
- Выбираем критерий и статистику критерия
- Вычисляем выборочное значение статистики критерия
- Вычисляем соответствующее p-value
- Сравниваем p-value с уровнем значимости
- Принимаем статистическое решение

Ошибки 1го и 2го рода

Ошибка первого рода — отклонить гипотезу H_0, когда она верна, вероятность ошибки первого рода α определяется равенством:

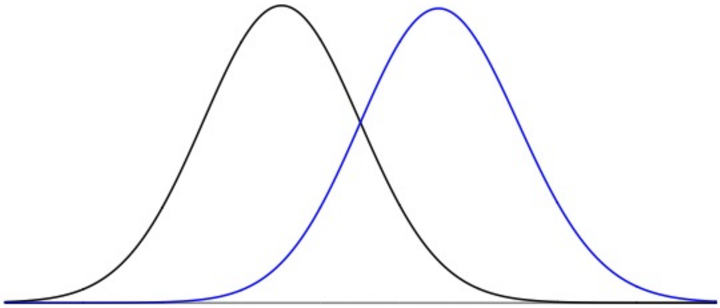
Ошибка второго рода — принять гипотезу H_0, когда верна H_1, вероятность ошибки второго рода β определяется равенством:

Мощность критерия

$$\gamma = 1 - \beta = P\{Z \in V_k | H_1\}$$

Критерий называется *несмещенным*, если выполняется условие

$$\gamma > \alpha.$$



Нерандомизированный и рандомизированный критерии

$\varphi(x) = I\{x \in S\}$
Нерандомизированный критерий имеет вид:

- Если $\varphi(X_{[n]}) = 1$, тогда отвергаем H_0, принимаем H_1.
- Если $\varphi(X_{[n]}) = 0$, тогда принимаем H_0, отвергаем H_1.

$\varphi(x) = P\left\{\bar{H}_0 / X_{[n]} = x\right\}$
Рандомизированный критерий:

- с вероятностью $1 - \varphi(X_{[n]})$ следует принимать гипотезу H_0
- с вероятностью $\varphi(X_{[n]})$ принимать гипотезу H_1.

$\varphi(x)$ — *критическая функция*

Задача построения оптимального критерия

Зададим α_0

$$\begin{cases} \alpha_0 \geqslant \alpha(S), \\ \gamma(S) \to \max\limits_{S}. \end{cases}$$

Проверка двух простых статистических гипотез

- $H_0 : F_\xi(x) = F_0(x)$.
- $H_1 : F_\xi(x) = F_1(x)$.

$F_0(x)$ и $F_1(x)$ полностью известны.

По $X_{[n]}$ требуется принять решение об истинности H_0 при H_1.

Лемма Неймана-Пирсона

При фиксированной вероятности ошибки первого рода $\alpha_0 \in (0,1)$ наиболее мощный критерий имеет критическую функцию φ^* вида

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } L_1(x) > cL_0(x); \\ \varepsilon, & \text{если } L_1(x) = cL_0(x); \\ 0, & \text{если } L_1(x) < cL_0(x), \end{cases}$$

где

$L_0(x) = \prod_{i=1}^{n} f_0(x_i)$ соответствует H_0,

$L_1(x) = \prod_{i=1}^{n} f_1(x_i)$ соответствует H_1.

Константы c и ε — решения уравнения $\alpha(\varphi^*) = \alpha_0$.

Гипотезы о параметрах. Проверка гипотез о мат.ожидании нормально распределенной генеральной совокупности

Гипотезы о параметрах распределения

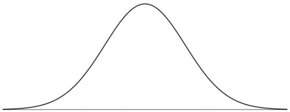
ξ, $F_\xi(x, \theta)$, θ
$X_{[n]}$

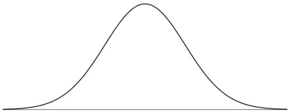
$$H_0 : \theta = \theta_0$$

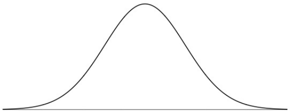
$$H_1^1 : \theta = \theta_1 \neq \theta_0$$
$$H_1^2 : \theta > \theta_0$$
$$H_1^3 : \theta < \theta_0$$
$$H_1^4 : \theta \neq \theta_0$$

Пусть $Z = \hat{\theta}$

Односторонний и двусторонний критерий







Проверка гипотез о параметрах $N(a, \sigma)$

Пусть $\xi \sim N(a, \sigma)$, $X_{[n]}$

$$H_0 : a = a_0$$

$$H_1^1 : a = a_1 \neq a_0$$
$$H_1^2 : a > a_0$$
$$H_1^3 : a < a_0$$
$$H_1^4 : a \neq a_0$$

a неизвестно, σ^2 известна

$$Z = \frac{\bar{X} - a_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Z_{obs} — Z-выборочное

H_1	V_k	$p - value$
$a > a_0$	$V_k\{Z > u_{1-\alpha} \vert H_0\}$	$1 - \Phi(Z_{obs} \vert H_0)$
$a = a_1 > a_0$	$V_k\{Z > u_{1-\alpha} \vert H_0\}$	$1 - \Phi(Z_{obs} \vert H_0)$
$a < a_0$		
$a \neq a_0$		

a неизвестно, σ^2 неизвестна

$$Z = \frac{\bar{X} - a_0}{s/\sqrt{n}} \sim T(n-1)$$

H_1	V_k	$p - value$
$a > a_0$		
$a < a_0$	$V_k\{Z < t_\alpha(n-1) \| H_0\}$	$F_T(Z_{obs} \| H_0)$
$a \neq a_0$		

Пример

$\xi \sim N(a, \sigma)$, $D\xi = 1$ мм^2, $a = 40$ мм

$n = 36$

$\bar{x} = 40.2$ мм

Наиболее мощный критерий

Пусть $\xi \sim N(a, \sigma)$, $X_{[n]}$, a неизвестно, σ^2 известна

$$H_0 : a = a_0$$

$$H_1 : a = a_1 > a_0$$

Применим критерий Неймана-Пирсона.

$$L_0(X_{[n]}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - a_0)^2},$$

$$L_1(X_{[n]}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - a_1)^2}.$$

Рассмотрим отношение:

$$\frac{L_1(X_{[n]})}{L_0(X_{[n]})} = \exp\frac{1}{2\sigma^2}\left\{2(a_1 - a_0)n\bar{X} - n(a_1^2 - a_0^2)\right\}.$$

$L_1(X_{[n]})/L_0(X_{[n]}) > c$ тогда и только тогда, когда $\bar{X} > c_1$.

Оптимальный критерий Неймана-Пирсона:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \bar{X} > c_1; \\ \varepsilon, & \bar{X} = c_1; \\ 0, & \bar{X} < c_1, \end{cases}$$

константы c_1 и ε выбираются при заданном $\alpha_0 \in (0,1)$ как решение уравнения $\alpha_0 = \alpha(\varphi^*)$.

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \bar{X} > c_1; \\ 0, & \bar{X} \leqslant c_1. \end{cases}$$

Оптимальный критерий является нерандомизированным.

Зададим вероятность ошибки первого рода α_0:

$$\alpha_0 = \alpha(\varphi^*) = P\{\bar{X} > c_1 | H_0\} = P_0\left\{\frac{\bar{X} - a_0}{\sigma}\sqrt{n} > \frac{c_1 - a_0}{\sigma}\sqrt{n}\right\} =$$

$=$1-$\Phi\left(\frac{c_1 - a_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$,
$\Phi(x)$ — функция распределения, соответствующая стандартному нормальному распределению,

$$\Phi\left(\frac{c_1 - a_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) = 1 - \alpha_0.$$

Достаточный объем выборки n

Пусть

$$c_1 \geqslant a_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha_0}$$

Зададим β_0. Когда $\beta(\varphi^*) \leqslant \beta_0$?

$\beta(\varphi^*) = P\{\bar{X} \leqslant c_1 | H_1\} = P_1 \left\{ \frac{\bar{X}-a_1}{\sigma}\sqrt{n} \leqslant \frac{c_1-a_1}{\sigma}\sqrt{n} \right\} = \Phi \left\{ \frac{c_1-a_1}{\sigma}\sqrt{n} \right\}$.

$\beta(\varphi^*) \leqslant \beta_0$, если
$$\frac{c_1 - a_1}{\sigma}\sqrt{n} \leqslant u_{\beta_0}$$

Совместим условия для c_1
$$a_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha_0} \leqslant c_1 \leqslant a_1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\beta_0}.$$

Если
$$n \geqslant \frac{\sigma^2 (u_{1-\alpha_0} - u_{\beta_0})^2}{(a_1 - a_0)^2},$$

$\alpha(\varphi^*) \leqslant \alpha_0$ и $\beta(\varphi^*) \leqslant \beta_0$.

Проверка гипотезы о значении дисперсии $N(a, \sigma)$

Проверка гипотезы о значении дисперсии $N(a,\sigma)$

Пусть $\xi \sim N(a,\sigma)$, $X_{[n]}$

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1^1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 \neq \sigma_0^2$$
$$H_1^2 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$
$$H_1^3 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$
$$H_1^4 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

a неизвестно, σ^2 неизвестна

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

H_1	V_k	$p-value$
$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\{Z > \chi^2_{1-\alpha}(n-1) \vert H_0\}$	$1 - F_{\chi^2}(Z_{obs} \vert H_0)$
$\sigma^2 = \sigma_1^2 > \sigma_0^2$		
$\sigma^2 < \sigma_0^2$		
$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$		

Пример

$\xi \sim N(a, \sigma)$, a, σ^2 неизвестны, $\sigma^2 < 50$ мкм^2 ?

$n = 10$
$D^* = 100$ мкм^2

Наиболее мощный критерий. Дисперсия

Пусть $\xi \sim N(a, \sigma)$, $X_{[n]}$, a известно, σ^2 неизвестна

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 > \sigma_0^2$$

Применим критерий Неймана-Пирсона.

$$L_0(X_{[n]}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a_0)^2},$$

$$L_1(X_{[n]}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a_1)^2}.$$

Рассмотрим отношение:

$$\frac{L_1(X_{[n]})}{L_0(X_{[n]})} = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n \exp\left(\frac{1}{2\sigma_0^2} - \frac{1}{2\sigma_1^2}\right) \sum_{i=1}^{n} (X_i - a)^2$$

$L_1(X_{[n]})/L_0(X_{[n]}) > c$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - a)^2 > c_1$$

Оптимальный критерий Неймана-Пирсона:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2 > c_1 \\ \varepsilon, & \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2 = c_1 \\ 0, & \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2 < c_1 \end{cases}$$

константы c_1 и ε выбираются при заданном $\alpha_0 \in (0,1)$ как решение уравнения $\alpha_0 = \alpha(\varphi^*)$.

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2 > c_1; \\ 0, & \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2 \leqslant c_1. \end{cases}$$

Оптимальный критерий является нерандомизированным.

Зададим вероятность ошибки первого рода α_0:

$$\alpha_0 = \alpha(\varphi^*) = P\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 > c_1 | H_0\right\}$$
$$= P_0\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 \sigma_0^2 > c_1 \sigma_0^2 | H_0\right\} =$$
$$= 1 - F_{\chi^2(n)}\left(\frac{c_1}{\sigma_0^2}\right),$$

$$F_{\chi^2(n)}\left(\frac{c_1}{\sigma_0^2}\right) = 1 - \alpha_0.$$

Проверка гипотезы о параметре биномиального распределения

Гипотезы о параметре биномиального распределения

Схема Бернулли, $\xi \sim B(n, p)$ p-?

$X_{[n]}$

$$P_n\{\xi = m\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$$

$$H_0 : p = p_0$$

$$H_1^1 : p = p_1 \neq p_0$$

$$H_1^2 : p > p_0$$

$$H_1^3 : p < p_0$$

$$H_1^4 : p \neq p_0$$

Две простые гипотезы

$$H_0 : p = p_0$$

$$H_1 : p = p_1 > p_0$$

$$L_1(m) = C_n^m p_1^m (1 - p_1)^{n-m},$$

$$L_0(m) = C_n^m p_0^m (1 - p_0)^{n-m}.$$

$$\frac{L_1(m)}{L_0(m)} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^m \left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{n-m}$$

эквивалентно неравенству:

$$\left(\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}\right)^m \left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^n > c,$$

или эквивалентно неравенству: $m > c_1$.

Оптимальная критическая функция

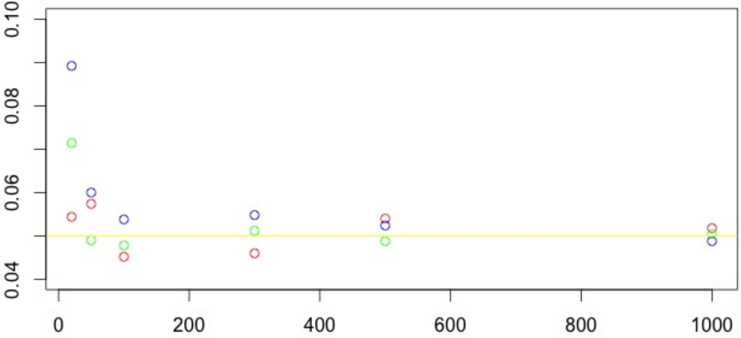
$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & m > c_1; \\ \varepsilon, & m = c_1; \\ 0, & m < c_1. \end{cases}$$

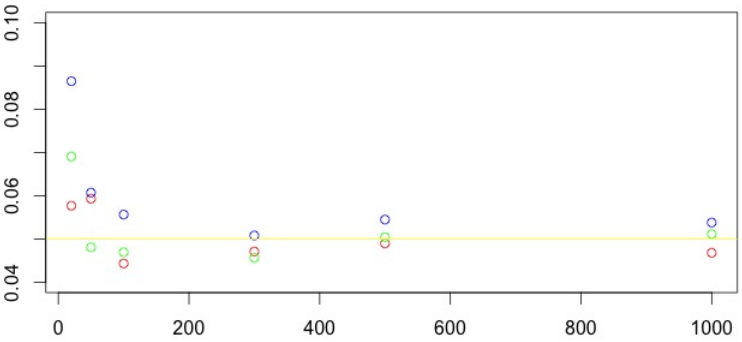
Приближенный критерий

$$\alpha(\varphi^*) = P_0\{m > c_1\} + \varepsilon P_0\{m = c_1\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \Phi\left(\frac{c_1 - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right).$$

$$c_1 = np_0 + \sqrt{np_0(1-p_0)}\,z_{1-\alpha_0}.$$

Оценка вероятности ошибки 1го рода




0.10
0.08
0.06
0.04
0
200
400
600
800
1000