ЛЕКЦИЯ 4.07

КОНЕЧНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА. ПОВОРОТЫ ТВЁРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ. КВАТЕРНИОНЫ ПОВОРОТА. СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ ПОВОРОТА. КОНЕЧНЫЕ ВИНТОВЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА.

5. КОНЕЧНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА.

5.1. ПОВОРОТЫ ТВЁРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ.

Одним из движений твердого тела является его вращение вокруг неподвижной оси.

Вращательным движением вокруг оси называется движение твердого тела, при котором некоторая прямая, принадлежащая телу, ось вращения, остается неподвижной.

Положение тела при таком движении определяется углом поворота, двугранным углом между начальным и текущим положениями в неподвижной среде какой-либо плоскости тела, проходящей через ось вращения. Измеряется двугранный угол своим линейным углом $\varphi(t)$. Чтобы угловая координата φ однозначно определяла положение тела, необходимо условиться относительно положительного направления отсчета этого угла.

Положительным направлением вращения считается поворот оси Ox_1 ***к оси*** Ox_2 ***на*** 90°***, если смотреть с положительного конца оси*** Ox_3.
Задается ориентация осей $Ox_1x_2x_3$, связанных с телом, относительно системы отсчета $OX_1X_2X_3$ матрицей косинусов углов между ортами движущихся и неподвижных осей

$$s_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{E}_j, \quad i,j = 1,2,3. \tag{5.1}$$

Умножение векторного равенства $\mathbf{A} = \mathbf{E}_i\, A_i = \mathbf{e}_i\, a_i = \mathbf{a}$ последовательно на $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{E}_i$ дает

$$a_i = s_{ij}\, A_j, \quad A_i = a_j\, s_{ji}, \quad i = 1,2,3. \tag{5.2}$$

По формулам (5.2) преобразуются проекции произвольного вектора. Косинусы s_{ij} являются компонентами орта $\mathbf{E}_j$ в относительной системе координат и компонентами орта $\mathbf{e}_i$ в абсолютной системе $\mathbf{E}_j = \mathbf{e}_i\, s_{ij}$ $\quad \mathbf{e}_j = s_{ji}\, \mathbf{E}_i$. Из этого факта получаем, что косинусы s_{ij} удовлетворяют равенствам

$$\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j = \delta_{ij} = s_{\alpha i}\, s_{\alpha j}, \qquad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = s_{i\alpha}\, s_{j\alpha}, \tag{5.3}$$

то есть из девяти косинусов независимых только три. На основании векторного равенства $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$ имеем $s_{1i}\,\mathbf{E}_i = \begin{vmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 & \mathbf{E}_3 \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}$ или

$$s_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}, \; s_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} s_{21} & s_{23} \\ s_{31} & s_{33} \end{vmatrix}, \; s_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} s_{21} & s_{22} \\ s_{31} & s_{32} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, каждый элемент первой строки определителя $\det\left(s_{ij}\right)$ равен своему алгебраическому дополнению. Отсюда следует, что численное значение этого определителя равно длине вектора $\mathbf{e}_1 = s_{1i}s_{1i}$, то есть единице. Итак, матрица S определяет закон преобразования компонент вектора при повороте системы координат и называется матрицей конечного поворота. В связи с этим возникает задача определения по компонентам матрицы S угла и оси поворота. Эта задача имеет решение и отражена теоремой Леонарда Эйлера (1707-1783).

Триедр может быть переведен в любое положение из произвольного заданного одним поворотом вокруг некоторой оси на некоторый угол.

Проведем сферическую поверхность с центром в неподвижной точке O. Положение тела вполне определяется положением тех его точек, которые лежат на поверхности этой сферы, и любое перемещение тела, которое оставляет неподвижную точку O, есть жесткое преобразование сферы в себя. При этом имеет место утверждение, отраженное в другой теореме Эйлера.

Произвольное жесткое перемещение сферической поверхности в себя оставляет неподвижными две точки этой поверхности, лежащие на одном диаметре.

Ось вращения этого жесткого перемещения может быть найдена простым построением. Пусть перемещение переводит точку A в B и точку B в C. Соединим точки A, B и B, C дугами большого круга. Через середины этих дуг перпендикулярно к ним проведем еще две дуги большого круга. Тогда точки пересечения этих дуг и будут искомыми неподвижными точками. Можно рассматривать также сложение двух поворотов.

Любой вектор на оси поворота, если она существует, при повороте не изменяется $SU = \lambda U$, $\lambda = 1$. Таким образом, имеем задачу на собственные значения $(S - \lambda E)U = 0, \quad \det(S - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} s_{11} - \lambda & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} - \lambda & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 (s_{11} + s_{22} + s_{33}) - \lambda (s_{11}s_{33} + s_{22}s_{33} + s_{11}s_{22} - s_{23}s_{32} - s_{12}s_{21} - s_{13}s_{31}) + 1 = 0.$$

Каждый элемент матрицы S равен своему дополнению, в частности,

$$s_{11} = s_{22}\, s_{33} - s_{32}\, s_{23}, \quad s_{22} = s_{33}\, s_{11} - s_{13}\, s_{31}, \quad s_{33} = s_{11}\, s_{22} - s_{21}\, s_{12},$$

поэтому
$$\lambda^3 - \lambda^2\, Sp\, S + \lambda\, Sp\, S - 1 = 0, \qquad (5.4)$$

где $Sp\, S = s_{11} + s_{22} + s_{33}$ - след матрицы S. Это уравнение имеет корень $\lambda = 1$, что означает существование оси, остающейся без изменения при рассматриваемом преобразовании. Направлящие косинусы единичного вектора вдоль этой оси (U_{11}, U_{12}, U_{13}) удовлетворяют системе уравнений

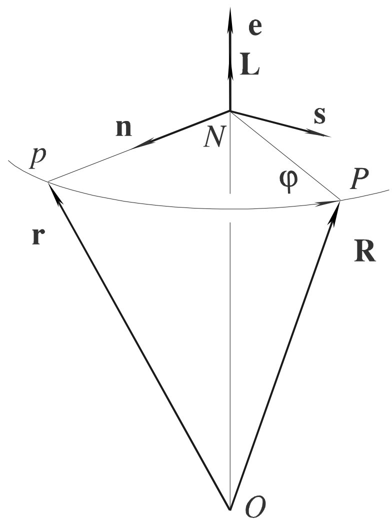
$$\begin{cases} (s_{11} - 1)U_{11} + s_{12}U_{12} + s_{13}U_{13} = 0, \\ s_{21}U_{11} + (s_{22} - 1)U_{12} + s_{23}U_{13} = 0, \\ U_{11}{}^2 + U_{12}{}^2 + U_{13}{}^2 = 1. \end{cases} \qquad (5.5)$$

Разделив многочлен (4) на двучлен $(\lambda - 1)$, получим уравнение $-\lambda^2 + \lambda\,(Sp\, S - 1) - 1 = 0$ для определения еще двух собственных значений $\lambda_{2,3} = \dfrac{Sp\, S - 1}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{Sp\, S - 1}{2}\right)^2 - 1}.$

При повороте на 180° вокруг одной из осей след матрицы поворота принимает свое минимальное значение -1, максимальное значение имеет место при отсутствии поворота. Матрица совпадает с единичной, и ее след равен 3. Итак, $-1 \le Sp\, S \le 3$. Введем обозначение $\dfrac{Sp\, S - 1}{2} = \cos\psi$, тогда $-1 \le \cos\psi \le 1$ и $\lambda_{2,3} = \cos\psi \pm i\, \sin\psi.$ Общее решение системы уравнений (5.5) и смысл угла

ψ дадим после того, как будет выяснена структура элементов матрицы S в общем виде.

Рассмотрим теперь обратную задачу



При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси точки тела описывают окружности, лежащие в плоскости, нормальной к оси вращения, а радиус-вектор любой точки с началом на оси вращения описывает коническую поверхность. Пусть в начальный момент оси абсолютной и относительной системы координат с началом на оси вращения совпадали. Тогда в результате поворота радиус- вектор $\mathbf{r}$ любой точки преобразуется в $\mathbf{R}$. Вращение вокруг оси, совпадающей по направлению с единичным вектором $\mathbf{e}$, можно определить вектором $\mathbf{L}$ и скаляром λ_0 $\quad \mathbf{L} = \mathbf{e}\sin\dfrac{\varphi}{2}, \quad \lambda_0 = \cos\dfrac{\varphi}{2},$ (5.6)

где φ - угол поворота.

Обозначая компоненты вектора $\mathbf{L}$ символами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, получаем

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1. \qquad (5.7)$$

Величины λ_i $i = 0,1,2,3$ называются параметрами Эйлера, которые можно считать прямоугольными декартовыми координатами точки в четырехмерном пространстве. Точки на гиперсфере (5.7) определяют конечное положение тела. Выразим матрицу поворота S через параметры Эйлера. Пусть N общее основание перпендикуляров, опущенных из точек p и P на вектор $\mathbf{L}$. Единичный вектор вдоль Np обозначим через $\mathbf{n}$ и введем единичный вектор $\mathbf{s} = \mathbf{e}\times\mathbf{n}$. Разложим $\mathbf{R}$ по трем взаимно ортогональным направлениям $\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{s}$: $\mathbf{R} = \mathbf{e}\, ON + \mathbf{n}\, NP\cos\varphi + \mathbf{s}\, NP\sin\varphi,$ где $ON = \mathbf{e}\cdot\mathbf{r},\ NP = Np.$

С другой стороны, $\mathbf{n}\, Np = \mathbf{r} - \mathbf{e}\, ON, \quad \mathbf{s}\, Np = \mathbf{e}\times\mathbf{n}\, Np = \mathbf{e}\times\mathbf{r}$ и, значит,

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \mathbf{r}\cos\varphi + \mathbf{e}\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r})(1-\cos\varphi) + \mathbf{e}\times\mathbf{r}\sin\varphi = \\
&= \mathbf{r}\left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) + \mathbf{e}\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r})\, 2\sin^2\frac{\varphi}{2} + \mathbf{e}\times\mathbf{r}\, 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \qquad (5.8)\\
&= \mathbf{r}\,(\lambda_0 - \mathbf{L}^2) + 2\,\mathbf{L}\,(\mathbf{L}\cdot\mathbf{r}) + 2\,\lambda_0\,(\mathbf{L}\times\mathbf{r}).
\end{aligned}$$

В скалярной форме имеем

$$X_1 = x_1(\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) + 2\lambda_1(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) + 2\lambda_0(\lambda_2 x_3 - \lambda_3 x_2),$$
$$X_2 = x_2(\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) + 2\lambda_2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) + 2\lambda_0(\lambda_3 x_1 - \lambda_1 x_3),$$
$$X_3 = x_3(\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) + 2\lambda_3(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) + 2\lambda_0(\lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1),$$

или в матричном виде $R = L\, r$, где

$$L = \left\{\begin{matrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_2\lambda_1 + \lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_3\lambda_1 - \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_3\lambda_2 + \lambda_0\lambda_1) & \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \end{matrix}\right\}. \qquad (5.9)$$

Матрица поворота S устанавливает связь между компонентами постоянного вектора $\mathbf{r} = \mathbf{R}$ при повороте системы координат $r = S\,R$. В рассмотренном выше построении наоборот поворачивался вектор $\mathbf{r}$, что эквивалентно повороту системы координат на угол $-\varphi$ вокруг вектора $\mathbf{e}$, то есть для получения матрицы S в матрице L параметры $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ нужно заменить соответственно на $-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3$. При этом матрица L оказывается просто транспонированной. Итак, $r = L^T R$, но $r = S R$, поэтому $S = L^T =$

$$= \begin{Bmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_2\lambda_1 - \lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_3\lambda_1 + \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_3\lambda_2 - \lambda_0\lambda_1) & \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \end{Bmatrix}. \quad (5.10)$$

Структура матрицы S позволяет записать решение уравнений (5.5) для произвольного поворота. Компоненты l_1, l_2, l_3 единичного неизменного вектора пропорциональны параметрам Эйлера

$$\lambda_1 = l_1 \sin\frac{\varphi}{2}, \quad \lambda_2 = l_2 \sin\frac{\varphi}{2}, \quad \lambda_3 = l_3 \sin\frac{\varphi}{2},$$

$$U_{11} = l_1 = (s_{23} - s_{32})/\Delta = 4\lambda_0\lambda_1/\Delta$$

$$U_{12} = l_2 = (s_{31} - s_{13})/\Delta = 4\lambda_0\lambda_2/\Delta$$

$$U_{13} = l_3 = (s_{12} - s_{21})/\Delta = 4\lambda_0\lambda_3/\Delta$$

$$\Delta = [(s_{23} - s_{32})^2 + (s_{31} - s_{13})^2 + (s_{12} - s_{21})^2]^{1/2} = 4\lambda_0\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} = 4\lambda_0\sqrt{1 - \lambda_0^2}.$$

Выясним смысл угла ψ

$$\cos\psi = \tfrac{1}{2}(Sp\, S - 1) = \tfrac{1}{2}(3\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - 1) = 2\lambda_0^2 - 1 = \cos\varphi.$$

Итак, матрица поворота S, с одной стороны, показывает, как меняются компоненты вектора заданного в системе отсчета $OX_1X_2X_3$ при переходе к повернутой системе координат $Ox_1x_2x_3$ $r = SR = L^T R$, либо как меняются в неподвижной системе отсчета $OX_1X_2X_3$ компоненты вектора, поворачиваемого вместе с системой $Ox_1x_2x_3$ $R = Lr = S^T r$. Матрица поворота оставляет неизменной длину вектора $r^T r = R^T S^T S R = R^T R$, то есть $S^T S = E$. Такие матрицы называются ортогональными.

Все ортогональные матрицы образуют группу:

A -ортогональная матрица;

B -ортогональная матрица;

произведение AB -ортогональная матрица;

произведение матриц -ассоциативно $(AB)C = A(BC)$;

существует единица E -единичная матрица $E A = A E = A$;

A^{-1}-матрица, обратная матрице A $\quad A^{-1}A = E = A^T A$.

Определитель матрицы поворота равен единице. Ортогональные матрицы с определителем, равным единице, образуют подгруппу, которая обозначается $SO(3)$ (специальная ортогональная, действующая в трехмерном пространстве). Соответствие между всеми возможными ориентациями тела и элементами группы $SO(3)$ взаимно однозначно. Соотношения ортогональности (5.3) задают в девятимерном пространстве всех матриц 3×3 трехмерное многообразие. Группа $SO(3)$ -конфигурационное многообразие твердого тела. Каждая матрица поворота характеризуется набором параметров, и переход от одной матрицы к другой осуществляется изменением этих параметров. Композиции двух преобразований-поворотов с параметрами $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ и $b=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ соответствует преобразование с параметрами $c=(c_1,c_2,...,c_n)$, где $c=\varphi(a,b)$. Функция φ представляет собой выражение групповой операции.

Формуле (5.8) можно придать другой вид, если ввести вектор конечного поворота

$$\mathbf{F}=\mathbf{e}\ tg\frac{\varphi}{2}, \tag{5.11}$$

где, как и выше, $\mathbf{e}$ - единичный вектор оси вращения, φ - угол поворота. Равенства $\mathbf{r}=(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e})\ \mathbf{e}+\mathbf{n}\ Np$, $\mathbf{s}=\mathbf{e}\times\mathbf{n}$, $NP=Np$ или $-\mathbf{n}\ NP=(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e})\,\mathbf{e}-\mathbf{r}=\mathbf{e}\times(\mathbf{e}\times\mathbf{r})$, $\mathbf{e}\times\mathbf{n}\ NP=\mathbf{e}\times\mathbf{r}$ позволяют записать $\mathbf{R}=\mathbf{e}ON+\mathbf{n}NP\cos\varphi+\mathbf{s}NP\sin\varphi=$

$$=(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e}+\mathbf{n}NP\left(1-tg^2\frac{\varphi}{2}\right)\Big/\left(1+tg^2\frac{\varphi}{2}\right)+(\mathbf{e}\times\mathbf{n})NP2tg\frac{\varphi}{2}\Big/\left(1+tg^2\frac{\varphi}{2}\right)=$$

$$=\mathbf{r}+\mathbf{e}\times(\mathbf{e}\times\mathbf{r})2tg^2\frac{\varphi}{2}\Big/\left(1+tg^2\frac{\varphi}{2}\right)+(\mathbf{e}\times\mathbf{r})2tg\frac{\varphi}{2}\Big/\left(1+tg^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

Учитывая (5.11), получаем формулу О.Родригеса (1794-1851)

$$\mathbf{R}=\mathbf{r}+\frac{2\mathbf{F}}{1+\mathbf{F}^2}\times(\mathbf{r}+\mathbf{F}\times\mathbf{r}) \tag{5.12}$$

5.2. КВАТЕРНИОНЫ ПОВОРОТА.

Для описания вращения твердого тела могут быть использованы кватернионы. Будем считать, что радиус-вектор принадлежит четырехмерному пространству $r\in H$. Рассмотрим отображение $H\to H$, ставя каждому кватерниону r кватернион R по правилу

$$R=\Lambda\circ r\circ\widetilde{\Lambda}, \qquad \|\Lambda\|=1.$$

Проведем вычисления $R=(\lambda_0+\bar\lambda)\circ(r_0+\bar r)\circ(\lambda_0-\bar\lambda)=$

$$\begin{aligned}
&=\left[\lambda_0r_0+r_0\bar\lambda+\lambda_0\bar r-(\bar\lambda\cdot\bar r)+(\bar\lambda\times\bar r)\right]\circ(\lambda_0-\bar\lambda)=\\
&=\lambda_0{}^2r_0+r_0\lambda_0\bar\lambda+\lambda_0{}^2\bar r-\lambda_0(\bar\lambda\cdot\bar r)+\lambda_0(\bar\lambda\times\bar r)-\\
&-\lambda_0r_0\bar\lambda+r_0(\bar\lambda\cdot\bar\lambda)+\lambda_0(\bar r\cdot\bar\lambda)-\lambda_0(\bar r\times\bar\lambda)+(\bar\lambda\cdot\bar r)\bar\lambda+\bar\lambda(\bar\lambda\cdot\bar r)-\bar r(\bar\lambda\cdot\bar\lambda)=\\
&=r_0\left(\lambda_0{}^2+\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2+\lambda_3{}^2\right)+\bar r\left(\lambda_0{}^2-\lambda_1{}^2-\lambda_2{}^2-\lambda_3{}^2\right)+2\bar\lambda(\bar\lambda\cdot\bar r)+2\lambda_0(\bar\lambda\times\bar r).
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Векторная часть этого выражения совпадает с (5.8).
Преобразование (5.13) может быть записано в матричной форме

$$R=\Lambda\, r, \qquad \Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & L\end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

Скалярная часть кватерниона r остается неизменной $R_0=r_0$. Норма кватерниона сохраняется $\|r\|=\|R\|$, то есть Λ -ортогональная матрица, сохраняется также норма векторной части $r_1{}^2+r_2{}^2+r_3{}^2=R_1{}^2+R_2{}^2+R_3{}^2$. В матрице Λ блок L определяет поворот трехмерной векторной части кватерниона r. Таким образом, преобразование (5.13) определяет вращение, а числа λ_i, $i=0,1,2,3$ в выражении кватерниона являются параметрами Эйлера. Наоборот, если мы хотим выразить кватернион R в повернутой системе координат, в матричной форме следует записать

$$r = \Sigma\ R, \qquad \text{где} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, \qquad (5.15)$$

или в кватернионной форме $r = \widetilde{\Lambda} \circ R \circ \Lambda$.

Рассмотрим теперь суперпозицию поворотов

$$R' = L \circ R \circ \widetilde{L}, \quad R'' = M \circ R' \circ \widetilde{M} = M \circ L \circ R \circ \widetilde{L} \circ \widetilde{M} = N \circ R \circ \widetilde{N},$$

где $N = M \circ L$ -кватернион результирующего поворота равен произведению составляющих кватернионов в обратном порядке.

Кватернионы L и M заданы в исходной системе отсчета $OX_1X_2X_2$, и каждый из них поворачивает произвольный вектор на некоторый угол вокруг некоторого единичного вектора, то есть произведение кватернионов есть два поворота вокруг двух фиксированных в системе отсчета $OX_1X_2X_2$ единичных векторов. Это правило получения кватерниона результирующего поворота не изменяется при отображении составляющих кватернионов на любой базис. Пусть это отображение задается кватернионом S, то есть

$$N_e = \widetilde{S} \circ N \circ S, \quad L_e = \widetilde{S} \circ L \circ S, \quad M_e = \widetilde{S} \circ M \circ S,$$

$$N_e = \widetilde{S} \circ M \circ L \circ S = \widetilde{S} \circ M \circ S \circ \widetilde{S} \circ L \circ S = M_e \circ L_e.$$

В большинстве практических случаев кватернионы составляющих поворотов заданы своими компонентами в базисах, поворачиваемых ими самими же. В этих же осях требуется найти компоненты результирующего поворота. Кватернионы, заданные таким образом, называются собственными и обозначаются символом (*). Один кватернион можно считать собственным, так как его компоненты в исходных и повернутых им самим же осях совпадают $L \circ L \circ \widetilde{L} = L = L^*$. Пусть теперь имеется два собственных кватерниона L^* и M^*, и требуется найти результирующий кватернион. Выражая кватернион L^* в системе координат преобразованной вторым кватернионом M^*, получим $L^*{}_M = \widetilde{M}^* \circ L^* \circ M^*$. Так как кватернион M^* собственный, имеем два кватерниона, представленных в одной системе координат, поэтому

$$N = M^* \circ L^*{}_M = M^* \circ \widetilde{M}^* \circ L^* \circ M^* = L^* \circ M^*.$$

Таким образом, если кватернионы составляющих поворотов собственные, то они перемножаются в прямом порядке. Кватернион результирующего поворота также является собственным

$$N \circ N \circ \widetilde{N} = L^* \circ M^* \circ L^* \circ M^* \circ \widetilde{M}^* \circ \widetilde{L}^* = L^* \circ M^*.$$

Итак, $$N = M \circ L, \quad N^* = L^* \circ M^*. \qquad (5.16)$$

Этот же результат можно получить следующим рассуждением. Оба кватерниона L^* и M^* заданы в поворачиваемой системе координат, которая до поворота совпадает с системой отсчета. После первого поворота L^* второй кватернион преобразуется, и его фактическое описание в системе отсчета примет вид $M_L = L^* \circ M^* \circ \widetilde{L}^*$. Таким образом, имеем два кватерниона, заданные в системе отсчета, и, перемножая их в обратном порядке, получаем

$$N = M_L \circ L^* = L^* \circ M^* \circ \widetilde{L}^* \circ L^* = L^* \circ M^*.$$

Наконец, можно считать, что оба кватерниона L^* и M^* заданы в промежуточной системе координат, то есть в системе координат, в которую переходит исходная после первого преобразования. Кватернион результирующего поворота $M^* \circ L^*$ преобразуем к исходной и конечной системам координат

$$N = L^* \circ M^* \circ L^* \circ \widetilde{L}^* = \widetilde{M}^* \circ M^* \circ L^* \circ M^* = L^* \circ M^*.$$

5.3. СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ ПОВОРОТА.

Кватернионы поворота, записанные в виде

$$N = \nu_o\left(1 + \overline{\nu}/\nu_o\right) = \nu_o\left(1 + \overline{F_\nu}\right),$$
$$L = \lambda_o\left(1 + \overline{\lambda}/\lambda_o\right) = \lambda_o\left(1 + \overline{F_\lambda}\right),$$
$$M = \mu_o\left(1 + \overline{\mu}/\mu_o\right) = \mu_o\left(1 + \overline{F_\mu}\right)$$

устанавливают также связь между векторами конечного поворота

$$\mathbf{F}_\nu = \mathbf{e}_\nu tg\frac{\varphi_\nu}{2}, \quad \mathbf{F}_\lambda = \mathbf{e}_\lambda tg\frac{\varphi_\lambda}{2}, \quad \mathbf{F}_\mu = \mathbf{e}_\mu tg\frac{\varphi_\mu}{2},$$
$$N = \nu_o\left(1 + \overline{F_\nu}\right) = M \circ L = \mu_o\left(1 + \overline{F_\mu}\right) \circ \lambda_o\left(1 + \overline{F_\lambda}\right) =$$
$$= \mu_o\lambda_o\left(1 - \overline{F_\mu}\,\overline{F_\lambda} + \overline{F_\mu} + \overline{F_\lambda} - \overline{F_\lambda} \times \overline{F_\mu}\right) =$$
$$= \lambda_o\mu_o\left(1 - \overline{F_\lambda}\,\overline{F_\mu}\right)\left(1 + \frac{\overline{F_\lambda} + \overline{F_\mu} - \overline{F_\lambda} \times \overline{F_\mu}}{1 - \overline{F_\lambda}\,\overline{F_\mu}}\right).$$

Из этого равенства получаем правило сложения векторов поворота

$$\mathbf{F}_\nu = \frac{\mathbf{F}_\lambda + \mathbf{F}_\mu - \mathbf{F}_\lambda \times \mathbf{F}_\mu}{1 - \mathbf{F}_\lambda \cdot \mathbf{F}_\mu}, \quad \nu_o = \lambda_o\mu_o\left(1 - \mathbf{F}_\lambda \cdot \mathbf{F}_\mu\right). \qquad (5.17)$$

Из этой формулы, например, следует:

1. Формулу (5.17) можно рассматривать также как групповую операцию $c = \varphi(a, b)$ группы $SO(3)$.
2. Поворот тела на угол φ вокруг некоторой оси эквивалентен двум последовательным полуоборотам тела вокруг осей, пересекающих под прямым углом в одной точке данную ось и образующих между собой угол $\varphi/2$

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{e}_1 tg\frac{\pi}{2}, \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{e}_2 tg\frac{\pi}{2}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{e} tg\frac{\varphi}{2} = \lim_{\varphi_1,\varphi_2 \to \frac{\pi}{2}} \frac{\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2}{1 - \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2} = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2}.$$

3. Если повороты осуществляются вокруг одной оси, то формула (5.17) принимает вид $\mathbf{F} = \mathbf{e}\, tg\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{\mathbf{e}\, tg\dfrac{\varphi_1}{2} + \mathbf{e}\, tg\dfrac{\varphi_2}{2}}{1 - tg\dfrac{\varphi_1}{2} tg\dfrac{\varphi_2}{2}} = \mathbf{e}\, tg\left(\dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$, то есть $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Конечные повороты обладают свойством ассоциативности, то есть при сложении более двух поворотов любые два последовательных поворота можно заменять их суммой $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3) = ((\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2), \mathbf{F}_3) = (\mathbf{F}_1, (\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3))$.

4. Ассоциативность поворотов позволяет по результирующему и одному из составляющих находить второй поворот. Если $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}$, то $\mathbf{F}_1 = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, -\mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}, -\mathbf{F}_2)$, $\mathbf{F}_2 = (-\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = (-\mathbf{F}_1, \mathbf{F})$, и по формуле (5.17) имеем $\mathbf{F}_1 = \dfrac{\mathbf{F} - \mathbf{F}_2 + \mathbf{F} \times \mathbf{F}_2}{1 + \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}_2}$, $\mathbf{F}_2 = \dfrac{-\mathbf{F}_1 + \mathbf{F} + \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}}{1 + \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}}$.

5. Результирующий поворот можно разложить по двум заданным направлениям $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Вектор $\mathbf{e}$ результирующего поворота в формуле (5.17) можно представить в виде

$$\mathbf{e} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 - a_3(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2). \qquad (*)$$

Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}$ являются единичными, поэтому, умножая последовательно это равенство на $[\mathbf{e}_2 \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)]$, $[\mathbf{e}_1 \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)]$, $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)$, получаем

$$a_1 = \frac{\mathbf{e} \cdot [\mathbf{e}_2 \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)]}{\mathbf{e}_1 \cdot [\mathbf{e}_2 \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)]} = \frac{(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_1) - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)}{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)^2},$$

$$a_2 = \frac{\mathbf{e} \cdot [\mathbf{e}_1 \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)]}{\mathbf{e}_2 \cdot [\mathbf{e}_1 \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)]} = \frac{(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_2)}{-(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)^2},$$

$$a_3 = -\frac{\mathbf{e} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)}{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)^2}.$$

Подстановка выражения (*) в формулу (5.17) дает тождество, из которого следует

$$a_1\, tg \frac{\varphi}{2} = tg \frac{\varphi_1}{2} \Bigg/ \left(1 - \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2\, tg \frac{\varphi_1}{2} tg \frac{\varphi_2}{2}\right),$$

$$a_2\, tg \frac{\varphi}{2} = tg \frac{\varphi_2}{2} \Bigg/ \left(1 - \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2\, tg \frac{\varphi_1}{2} tg \frac{\varphi_2}{2}\right),$$

$$a_3\, tg \frac{\varphi}{2} = tg \frac{\varphi_1}{2} tg \frac{\varphi_2}{2} \Bigg/ \left(1 - \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2\, tg \frac{\varphi_1}{2} tg \frac{\varphi_2}{2}\right).$$

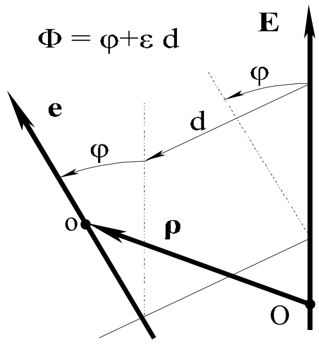
Отношения

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\mathbf{e} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)}{(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_2)} = tg \frac{\varphi_1}{2}, \quad \frac{a_3}{a_1} = \frac{\mathbf{e} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)}{(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_1)} = tg \frac{\varphi_2}{2}.$$

решают задачу о разложении вектора поворота $\mathbf{F}$ по двум заданным направлениям $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

5.3. КОНЕЧНЫЕ ВИНТОВЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА.

При отсутствии неподвижной точки имеем дело с винтовыми перемещениями твёрдого тела, которые истолковываются как повороты на дуальные углы. ***При винтовом движении тело поворачивается вокруг какой-либо фиксированной оси и смещается вдоль этой же оси.*** Полученные выше выражения должны рассматриваться как формулы с дуальными величинами. Углы трактуются как дуальные, единичные векторы – как единичные винты, а модули векторов – как дуальные модули.



Дуальный подход распространяется также на преобразование координатных систем. Пусть две прямоугольные системы координат, развернуты и смещены относительно друг друга. Построение дуальной матрицы поворота этого движения состоит в вычислении косинусов дуальных углов $\Phi_{ij} = \varphi_{ij} + \varepsilon\, d_{ij}$ между осями системы отсчета $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ и осями $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, связанными с телом

$$\cos \Phi_{ij} = \cos(\varphi_{ij} + \varepsilon\, d_{ij}) = \cos \varphi_{ij} - \varepsilon\, d_{ij} \sin \varphi_{ij} =$$
$$= \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{e}_i - \varepsilon (\mathbf{E}_j \times \mathbf{e}_i) \cdot \boldsymbol{\rho} = [\mathbf{e}_i + \varepsilon (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{e}_i)] \cdot \mathbf{E}_j$$

В этом выражении φ_{ij} – угол между осями, возникающий при сдвиге какой-либо из осей до их пересечения, а $d_{ij} = (\mathbf{E}_j \times \mathbf{e}_i) \cdot \boldsymbol{\rho} = -(\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{E}_j$ -

расстояние между скрещивающимися осями (проекция вектора $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_{Oo}$ на перпендикуляр к осям).

В винтовом исчислении каждый орт рассматривается, как единичный винт, и составляются матрицы скалярных произведений всех винтов-ортов. Пусть $(\mathbf{E}_i, 0) \Rightarrow \boldsymbol{E}_i = \mathbf{E}_i + \varepsilon 0, \quad i = 1,2,3$ -орты-винты исходной системы отсчета $OX_1X_2X_3$ и $(\mathbf{e}_j, 0) \Rightarrow \boldsymbol{E}_j = \mathbf{e}_j + \varepsilon 0, \quad j = 1,2,3$ -орты-винты системы координат $ox_1x_2x_3$ смещенной и развернутой относительно системы отсчета $OX_1X_2X_3$, и $\mathbf{r}$ -вектор смещения, то есть вектор, проведенный из начала системы отсчета в начало смещенной системы координат. Вычисление скалярного произведения требует преобразования винтов к единой точке приведения, поэтому

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \boldsymbol{E}_i \cdot \boldsymbol{E}_j = (\mathbf{e}_i - \varepsilon\, \mathbf{r} \times \mathbf{e}_j) \cdot \boldsymbol{E}_j = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{E}_j + \varepsilon\, \mathbf{r} \times \mathbf{E}_j) = \\ &= \cos\alpha_{ij} - \varepsilon\, \alpha_{ij}^o \sin\alpha_{ij} = \cos A_{ij} \end{aligned} \tag{5.18}$$

В этом выражении α_{ij} - угол между направлениями ортов $\mathbf{e}_i, \mathbf{E}_j$ и $\alpha_{ij}^{\;o}$ - проекция вектора смещения $\mathbf{r}$ на ось дуального угла.

Элементы дуальной матрицы поворота, построенной по формулам (5.18), обладают теми же свойствами, что и элементы обычной матрицы , например,

$$\begin{aligned} s_{22}s_{33} - s_{32}s_{23} &= (\mathbf{e}_2 - \varepsilon \mathbf{r} \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{E}_2 (\mathbf{e}_3 - \varepsilon \mathbf{r} \times \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{E}_3 - \\ &- (\mathbf{e}_3 - \varepsilon \mathbf{r} \times \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{E}_2 (\mathbf{e}_2 - \varepsilon \mathbf{r} \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{E}_3 = \\ &= (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E}_2)(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_3) - (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_2)(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E}_3) - \\ &- \varepsilon (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{E}_2 (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_3) - \varepsilon (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{E}_3 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E}_2) + \\ &+ \varepsilon (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{E}_2 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E}_3) + \varepsilon (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{E}_3 (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_2). \end{aligned}$$

Главная часть этого дуального числа равна $(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_1)$, как для обычной матрицы поворота, а моментная - преобразуется к виду

$$\begin{aligned} &\varepsilon (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_2) [\mathbf{e}_3 \times (\mathbf{E}_3 \times \mathbf{E}_2)] + \varepsilon (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_3) [\mathbf{e}_2 \times (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{E}_3)] = \\ &= -\varepsilon (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_1) + \varepsilon (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{E}_1) = \\ &= \varepsilon\, \mathbf{r} \cdot [\mathbf{e}_3 \times (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{E}_1) - \mathbf{e}_2 \times (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_1)] = \\ &= \varepsilon\, \mathbf{r} [\mathbf{e}_2 (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_1) - \mathbf{E}_1 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3) - \mathbf{e}_3 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E}_1) + \mathbf{E}_1 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3)] = \\ &= \varepsilon\, \mathbf{r} \cdot [\mathbf{E}_1 \times (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)] = -\varepsilon (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{E}_1 \end{aligned}$$

Итак, $s_{22}s_{33} - s_{32}s_{23} = s_{11}$, то есть каждый элемент матрицы (5.18) равен своему дополнению. Так как $\mathbf{E}_\alpha (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{E}_\alpha) = \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{E}_\alpha (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{E}_\alpha) = \mathbf{e}_i$

получаем

$$\begin{aligned} s_{i\alpha}s_{j\alpha} &= (\mathbf{e}_i - \varepsilon\, \mathbf{r} \times \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{E}_\alpha (\mathbf{e}_j - \varepsilon\, \mathbf{r} \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{E}_\alpha = \\ &= (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{E}_\alpha)(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{E}_\alpha) - \varepsilon (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{E}_\alpha (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{E}_\alpha) - \varepsilon (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{E}_\alpha (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{E}_\alpha) = \\ &= \delta_{ij} - \varepsilon\, \mathbf{r} (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) - \varepsilon\, \mathbf{r} (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_i) = \delta_{ij} \end{aligned}$$

и аналогично $s_{\alpha i}s_{\alpha j} = \delta_{ij}$. Из этих свойств следует, что $\det(s_{ij}) = 1$ и уравнение $\det(\mathbf{S} - \lambda \mathbf{E}) = -\lambda^3 + \lambda^2 Sp\mathbf{S} - \lambda Sp\mathbf{S} + 1 = 0$ имеет корень $\lambda = 1$, то есть существует вектор $\mathbf{U}$, остающийся неизменным при преобразовании $\mathbf{SU} = \mathbf{U}$. Кроме того, из начального положения в конечное тело можно перевести одним винтовым перемещением.

Девять дуальных косинусов матрицы поворота определяются восемнадцатью вещественными величинами. Шесть независимых соотношений между девятью косинусами эквивалентны двенадцати вещественным равенствам. Таким образом, независимых вещественных величин, определяющих дуальную матрицу поворота, шесть. Формулы преобразования винтов имеют вид $\mathbf{F}=\mathbf{S}^T\mathbf{f}$, $\mathbf{f}=\mathbf{SF}$. Матрицы $\mathbf{S}^T$ и $\mathbf{S}$ с дуальными элементами осуществляют аффинное ортогональное преобразование, которое представляет собой винтовое перемещение, сохраняющее дуальные модули винтов, а также дуальные углы между осями двух любых винтов.

Построим дуальный верзор, осуществляющий винтовое перемещение тела на заданный дуальный угол Φ. Положим, что винтовая ось совпадает с осью OZ некоторой системы координат $OXYZ$. Тогда базис $\mathbf{IJK}$ преобразуется в базис $\mathbf{ijk}$ по формулам $\mathbf{i}=\mathbf{I}\cos\Phi+\mathbf{J}\sin\Phi$, $\mathbf{j}=-\mathbf{I}\sin\Phi+\mathbf{J}\cos\Phi$, $\mathbf{k}=\mathbf{K}$ и единичный винт $\mathbf{R}$ преобразуется в единичный винт $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r}=\overline{\overline{G}}\cdot\mathbf{R},\quad \overline{\overline{G}}=\begin{Vmatrix}\cos\Phi & \sin\Phi & 0\\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}, \tag{5.19}$$

$$\overline{\overline{G}}=\mathbf{iI}+\mathbf{jJ}+\mathbf{kK}=(\mathbf{II}+\mathbf{JJ})\cos\Phi+(\mathbf{JI}-\mathbf{IJ})\sin\Phi+\mathbf{KK}$$

Введём диаду-единицу $\overline{\overline{J}}=\mathbf{II}+\mathbf{JJ}+\mathbf{KK}$, осуществляющую тождественное преобразование $\overline{\overline{J}}\cdot\mathbf{R}=\mathbf{R}$. Поскольку $\mathbf{II}+\mathbf{JJ}=\overline{\overline{J}}-\mathbf{KK}$ и $\mathbf{JI}-\mathbf{IJ}=\overline{\overline{J}}\times\mathbf{K}$, получаем $\overline{\overline{G}}=\left(\overline{\overline{J}}-\mathbf{KK}\right)\cos\Phi+\overline{\overline{J}}\times\mathbf{K}\sin\Phi+\mathbf{KK}$.

Единичный вектор $\mathbf{K}$ оси винтового перемещения, может быть истолкован как любой единичный вектор $\mathbf{E}$ поскольку векторы $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}$ из диады $\overline{\overline{G}}$ исключены. Итак, $\overline{\overline{G}}=\left(\overline{\overline{J}}-\mathbf{EE}\right)\cos\Phi+\overline{\overline{J}}\times\mathbf{E}\sin\Phi+\mathbf{EE}$. (5.20)

После подстановки $\theta=tg\dfrac{\Phi}{2}$, $\cos\Phi=\dfrac{1-\theta^2}{1+\theta^2}$, $\sin\Phi=\dfrac{2\theta}{1+\theta^2}$ диада $\overline{\overline{G}}$ приобретает вид

$$\overline{\overline{G}}=\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}\overline{\overline{J}}+\frac{2\theta^2}{1+\theta^2}\mathbf{EE}+\frac{2\theta}{1+\theta^2}\overline{\overline{J}}\times\mathbf{E} \tag{5.21}$$

Умножение этой диады на винт $\mathbf{R}$ даёт

$$\begin{aligned}\mathbf{r}=\overline{\overline{G}}\cdot\mathbf{R}&=\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}\mathbf{R}+\frac{2\theta^2}{1+\theta^2}\mathbf{E}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{R})+\frac{2\theta}{1+\theta^2}\mathbf{E}\times\mathbf{R}=\\ &=\mathbf{R}+\frac{2\theta}{1+\theta^2}\mathbf{E}\times(\mathbf{R}+\theta\mathbf{E}\times\mathbf{R}),\end{aligned} \tag{5.22}$$

а это есть дуальная формула (5.12) Родригеса.

Винтовое перемещение можно описать дуальным кватернионом. Дуальный кватернион этого винта - суперпозиция сдвига $\boldsymbol{\rho}_{//}=\mathbf{e}\rho_{//}$ в направлении оси винта и поворота вокруг оси $\mathbf{e}$, проходящей через точку C, радиус-вектор которой - $\boldsymbol{\rho}_{\perp}$, либо просто поворот вокруг оси $\mathbf{e}$, проходящей через точку O, мотора $\mathbf{f}+\varepsilon\,\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{f}=\mathbf{f}+\varepsilon\,(\boldsymbol{\rho}_{\perp}+\boldsymbol{\rho}_{//})\times\mathbf{f}=\mathbf{f}+\varepsilon\,\mathbf{m}_o(\mathbf{f})$.
Дуальный кватернион поворота вводится равенством

$$\begin{aligned}L&=L_0+\overline{L}=L_0+\tau_i L_i=\cos\frac{\Phi}{2}+\overline{E}\sin\frac{\Phi}{2}=\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\overline{E}\sin\frac{\varphi}{2}\right)+\\ &+\varepsilon\frac{\varphi^o}{2}\left(-\sin\frac{\varphi}{2}+\overline{E}\cos\frac{\varphi}{2}\right)=\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\overline{E}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\circ\left(1+\varepsilon\overline{E}\frac{\varphi^o}{2}\right),\end{aligned} \tag{5.23}$$

где $\overline{E} = \tau_i E_i$, $\overline{E} \circ \overline{E} = -1$, $\Phi = \varphi + \varepsilon\varphi^o$ - дуальный аргумент дуального кватерниона, и представляет собой произведение кватерниона поворота и соосного ему кватерниона сдвига. Кватернион сдвига $L^o = 1 + \varepsilon\overline{E}\frac{\varphi^o}{2}$ получается из кватерниона поворота простой заменой угла φ на смещение $\varepsilon\varphi^o$. Вектор Родрига $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{E}tg\frac{\varphi}{2}$ при такой замене переходит в $\boldsymbol{\theta}^o = \mathbf{E}tg\left(\varepsilon\frac{\varphi^o}{2}\right) = \varepsilon\mathbf{E}\frac{\varphi^o}{2}$ и $1 + (\theta^o)^2 = 1$, $\boldsymbol{\theta}^o \times (\boldsymbol{\theta}^o \times \mathbf{R}) = 0$.

Рассмотрим преобразование $L^o \circ \bar{f} \circ \widetilde{L}^o$, где $\bar{f}$ – произвольный вектор-кватернион $\left(1 + \varepsilon\,\overline{E}\frac{\varphi^o}{2}\right) \circ \bar{f} \circ \left(1 - \varepsilon\,\overline{E}\frac{\varphi^o}{2}\right) = \bar{f} + \varepsilon\,\varphi^o \overline{E} \times \bar{f}$.

Преобразование $\mathbf{f} + 2\frac{\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{f} + \boldsymbol{\theta}\times(\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{f})}{1+\theta^2}$, эквивалентное $L \circ \bar{f} \circ \widetilde{L}$, при замене вектора $\boldsymbol{\theta}$ на вектор $\boldsymbol{\theta}^o$ сразу дает $\mathbf{f} + \varepsilon\,\varphi^o \mathbf{E} \times \mathbf{f}$.

Итак, преобразуемый вектор заменяется совокупностью того же вектора и момента вектора относительно исходного полюса.

Тогда преобразование $L \circ (\bar{f} + \varepsilon\,\bar{r} \times \bar{f}) \circ \widetilde{L}$, где $L = \lambda_o + \bar{\lambda}$, есть поворот вектора $\mathbf{f}$, приложенного в точке $\mathbf{r}$. Непосредственными вычислениями убеждаемся в том, что $\Lambda(F) = \Lambda(\varphi) \circ \Lambda(\rho_{//}) = \Lambda(\rho_{//}) \circ \Lambda(\varphi)$,

$$\Lambda(F) \circ \bar{f} \circ \widetilde{\Lambda}(F) = \Lambda(\varphi) \circ (\bar{f} + \varepsilon m_c(\mathbf{f})) \circ \widetilde{\Lambda}(\varphi),$$
$$\Lambda(\rho) \circ \Lambda(\varphi) = \Lambda(\rho_\perp) \circ \Lambda(\rho_{//}) \circ \Lambda(\varphi) = \Lambda(\rho_\perp) \circ \Lambda(F),$$
$$\Lambda(F) \circ (\bar{f} + \varepsilon\overline{m}_o(\mathbf{f})) \circ \widetilde{\Lambda}(F) = \Lambda(\varphi) \circ (\bar{f} + \varepsilon\overline{m}_o(\mathbf{f})) \circ \widetilde{\Lambda}(\varphi).$$

Перенесение дуального формализма на трехмерное векторное пространство состоит в введении дуальных координат винта. Пусть будет задан винт $\boldsymbol{F} = \mathbf{E}F = \mathbf{E}f\exp(\varepsilon p) = \mathbf{F} + \varepsilon p\mathbf{F}$ и пусть $\mathbf{r}$ радиус-вектор какой-либо точки на оси винта.

Тогда $\mathbf{N}_i = \mathbf{E}_i \times \mathbf{E} = \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}$. - вектор общего перпендикуляра между осью OX_i и осью винта. Кратчайшее расстояние между осью OX_i и осью винта равно абсолютной величине проекции вектора $\mathbf{r}$ на вектор $\mathbf{N}_i$

$$\alpha_i^o = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{N}_i}{|\mathbf{N}_i|} = \frac{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e})}{|\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}|}, \quad \alpha_i = \arcsin|\mathbf{N}_i| = \arcsin|\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}|. \qquad (5.24)$$

Тогда дуальные углы, образуемые осью винта с осями прямоугольной системы координат $OX_1X_2X_3$, будут соответственно $A_i = \alpha_i + \varepsilon\alpha_i^o$.

Для проекций винта на оси декартовой системы координат получаем выражения

$$F_i = f_i + \varepsilon f_i^o = f\exp(\varepsilon p)\cos A_i = f[\cos\alpha_i + \varepsilon(p\cos\alpha_i - \alpha_i^o\sin\alpha_i)] \qquad (5.25)$$

Главные части этих выражений суть прямоугольные координаты вектора $\mathbf{F}$, а моментные части - прямоугольные координаты момента $\mathbf{F}^o$ винта относительно начала координат или моменты винта относительно координатных осей. Формально приведение винта $\boldsymbol{F}$ к началу координат дает

$\boldsymbol{F} = \mathbf{F} + \varepsilon\mathbf{F}^o = \mathbf{F} + \varepsilon(p\mathbf{F} + \mathbf{r}\times\mathbf{F})$ и далее $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{E}_i = \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_i + \varepsilon(p\mathbf{F} + \mathbf{r}\times\mathbf{F})\mathbf{e}_i$.

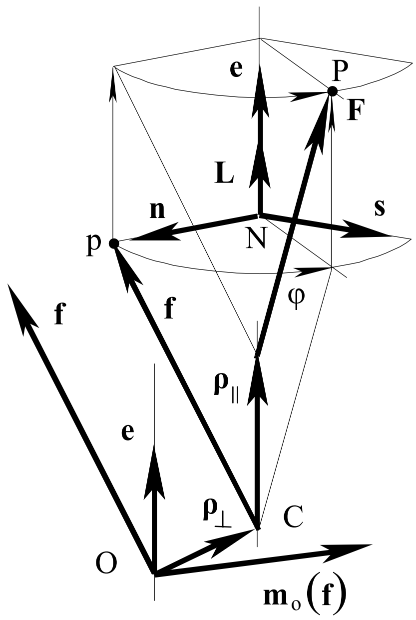
Дуальные координаты единичного винта равны дуальным направляющим косинусам $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_i=\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}_i+\varepsilon(\mathbf{r}\times\mathbf{e})\cdot\mathbf{e}_i=\cos A_i$ и равенство

$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}=\cos A_i\cdot\cos A_i=1$ распадается на два

$$\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_1+\cos\alpha_2\cdot\cos\alpha_2+\cos\alpha_3\cdot\cos\alpha_3=1,$$

$$\alpha_1^{\,o}\cos\alpha_1\sin\alpha_1+\alpha_2^{\,o}\cos\alpha_2\sin\alpha_2+\alpha_3^{\,o}\cos\alpha_3\sin\alpha_3=0,$$

выражающих равенство единице квадрата длины вектора и равенство нулю скалярного произведения вектора на момент этого вектора относительно начала координат.



Введение дуальных прямоугольных координат винта позволяет формально проводить вычисления для более сложных произведений винтов: смешанного скалярно - векторного, двойного векторного, скалярного произведения двух векторных произведений, векторного произведения двух других векторных произведений и так далее. На этом пути можно получить серию утверждений обобщающих векторную алгебру.

Рассмотрим преобразование

$$\boldsymbol{F}=L\circ\mathbf{f}\circ\tilde{L}, \tag{5.26}$$

где $\mathbf{f}=\mathbf{f}_o+\bar{\mathbf{f}}$ -дуальный кватернион, соответствующий какому-либо винту. Согласно (5.13), имеем

$$\boldsymbol{F}=f_o\left(L_o^{\,2}+L_1^{\,2}+L_2^{\,2}+L_3^{\,2}\right)+\bar{f}\left(L_o^{\,2}-L_1^{\,2}-L_2^{\,2}-L_3^{\,2}\right)+2\bar{L}\left(\bar{L}\cdot\bar{f}\right)+2L_o\left(\bar{L}\times\bar{f}\right)$$

Скалярная часть дуального кватерниона $\mathbf{f}$ остается без изменения и ее можно считать равной нулю, то есть $\mathbf{f}=\bar{f}$, $\boldsymbol{F}=\bar{F}$, и преобразование (5.26) может быть записано в матричной форме $F=Lf$, где $L-$дуальная матрица со структурой (5.9).

Пусть $\bar{f}-$дуальный кватернион, соответствующий единичному вектору $\bar{f}=\bar{e}+\varepsilon 0=\tau_i e_i+\varepsilon 0$, тогда $\boldsymbol{F}=\bar{F}=\mathbf{e}\cos A+\mathbf{E}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{e})(1-\cos A)+(\mathbf{E}\times\mathbf{e})\sin A=$

$$=\left[\mathbf{e}\cos\alpha+\mathbf{E}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{e})(1-\cos\alpha)+(\mathbf{E}\times\mathbf{e})\sin\alpha\right]+$$

$$+\varepsilon\alpha^o\left[-\mathbf{e}\sin\alpha+\mathbf{E}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{e})\sin\alpha+(\mathbf{E}\times\mathbf{e})\cos\alpha\right]$$

Главная часть дуального вектора $\bar{F}$ представляет собой, согласно (5.8), исходный вектор $\boldsymbol{f}=\mathbf{e}$, повернутый вокруг оси $\mathbf{E}$ на угол α, а моментная часть - результат приведения этого повернутого вектора к началу координат

$$\alpha^o\mathbf{E}\times\left[\mathbf{e}\cos\alpha+\mathbf{E}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{e})(1-\cos\alpha)+(\mathbf{E}\times\mathbf{e})\sin\alpha\right]=$$

$$=\alpha^o\left[(\mathbf{E}\times\mathbf{e})\cos\alpha+\mathbf{E}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{e})\sin\alpha-\mathbf{e}\sin\alpha\right].$$

Таким образом, преобразование (5.26) состоит в повороте и смещении повернутого вектора. Смещение равно $\alpha^o\mathbf{E}$. Если ось винта $\boldsymbol{f}=\mathbf{e}$ не проходит через начало координат, то его следует привести к началу, то есть представить в виде $\boldsymbol{f}=\mathbf{e}+\varepsilon\mathbf{r}\times\mathbf{e}$, где $\mathbf{r}$ -радиус-вектор какой-либо точки на оси единичного винта. Тогда $\boldsymbol{F}=\bar{F}=\left[\mathbf{e}\cos\alpha+\mathbf{E}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{e})(1-\cos\alpha)+(\mathbf{E}\times\mathbf{e})\sin\alpha\right]+$

$$+\varepsilon\alpha^{o}\mathbf{E}\times\left[\mathbf{e}\cos\alpha+\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{e}\right)\left(1-\cos\alpha\right)+\left(\mathbf{E}\times\mathbf{e}\right)\sin\alpha\right]+$$
$$+\varepsilon\left[\left(\mathbf{r}\times\mathbf{e}\right)\cos\alpha+\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\cdot\left(\mathbf{r}\times\mathbf{e}\right)\right)\left(1-\cos\alpha\right)+\left(\mathbf{E}\times\left(\mathbf{r}\times\mathbf{e}\right)\right)\sin\alpha\right] \quad (5.27)$$

Последнее слагаемое в этом выражении представляет собой повернутый вектор момента преобразуемого винта и в силу инвариантности векторных операций может быть представлено в виде

$$\varepsilon\left[\mathbf{r}\cos\alpha+\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{r}\right)\left(1-\cos\alpha\right)+\left(\mathbf{E}\times\mathbf{r}\right)\sin\alpha\right]\times$$
$$\times\left[\mathbf{e}\cos\alpha+\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{e}\right)\left(1-\cos\alpha\right)+\left(\mathbf{E}\times\mathbf{e}\right)\sin\alpha\right]=$$
$$=\varepsilon\left[\left(\mathbf{r}\times\mathbf{e}\right)\cos\alpha+\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\cdot\left(\mathbf{r}\times\mathbf{e}\right)\right)\left(1-\cos\alpha\right)+\left(\mathbf{E}\times\left(\mathbf{r}\times\mathbf{e}\right)\right)\sin\alpha\right],$$

то есть моментная часть выражения (5.27) и в этом случае - результат приведения к началу координат повернутого и смещенного вектора.

Отметим, что основные формулы алгебры винтов, как отмечалось выше, инвариантны по отношению к выбору точки, к которой приведены заданные винты, то есть остаются неизменными при добавлении к каждому из дуальных векторов $\boldsymbol{r}_i = \mathbf{r}_i + \varepsilon\mathbf{r}_i^o$ слагаемого $\varepsilon\,\mathbf{r}\times\mathbf{r}_i$, где $\mathbf{r}$ - один и тот же вектор для всех $\boldsymbol{r}_i$. Такое преобразование равносильно параллельному переносу рассматриваемой совокупности винтов.

Рассмотренные операции над дуальными объектами показывают, что существует аналогия в выражениях этих операций с операциями в обычной векторной алгебре. Этот факт позволил А.П.Котельникову и Э.Штуди сформулировать "принцип перенесения": ***все формулы векторной алгебры сохраняют силу при замене модулей векторов дуальными модулями винтов и углов между векторами - дуальными углами между осями винтов.*** Принцип перенесения устанавливает соответствие типа гомоморфизма между векторным (точечным) пространством и пространством винтов. Для всякой задачи кинематики произвольно движущегося тела можно сформулировать соответствующую задачу движения с неподвижной точкой. Решение этой более простой задачи автоматически, с помощью принципа перенесения, приводит к решению исходной задачи.