ЛЕКЦИЯ 4_03

ПОДАЛГЕБРЫ; НОРМИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ; ТЕОРЕМА ГУРВИЦА.

Среди бесконечного многообразия всех алгебр некоторые алгебры занимают исключительное положение. Это - алгебра действительных чисел R, алгебра комплексных чисел C, алгебра кватернионов Q и алгебра октав O.

Все эти алгебры – есть алгебры с делением, имеют единицу, допускают введение скалярного произведения так, что норма произведения равна произведению норм.

В иерархии алгебр “основой основ” служит алгебра действительных чисел. Её ближайшим соседом является алгебра комплексных чисел, в которой умножение сохраняет все важнейшие свойства умножения действительных чисел: оно коммутативно, ассоциативно, обратимо (возможно деление) и для него существует единица. Далее следует алгебра кватернионов – из перечисленных выше свойств в ней теряется коммутативность умножения. В алгебре октав помимо коммутативности теряется ещё и ассоциативность. Она заменяется альтернативностью. Остальные алгебры не удерживают и этих свойств.

2.6.1. ПОДАЛГЕБРЫ. НОРМИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ.

Множество P элементов алгебры A называется ***подалгеброй*** алгебры A, если - P является подпространством векторного пространства A;

- P замкнуто относительно умножения в алгебре A, то есть если $a \in P, \quad b \in P$, то $ab \in P$.

Первое требование равносильно тому, что P есть множество всех линейных комбинаций $k_1 a_1 + k_2 a_2 + ... + k_p a_p$ векторов $a_1, a_2, ... a_p$. Эти векторы могут быть выбраны линейно независимыми. В этом случае они составляют базис подпространства P $(p \le n)$. Второе требование означает, что $a_\alpha a_\beta = k_{\alpha\beta}{}^1 a_1 + k_{\alpha\beta}{}^2 a_2 + ... + k_{\alpha\beta}{}^p a_p \quad \left(\alpha, \beta = \overline{1, p}\right)$. Таким образом, подалгебра может рассматриваться как самостоятельная алгебра.

Например, в алгебре кватернионов подалгеброй является подпространство с базисом $1, \mathbf{q}$, где $\mathbf{q}$ – кватернион не пропорциональный 1. Любая такая подалгебра изоморфна алгебре комплексных чисел.

В алгебре октав любое подпространство с базисом e, a, b, ab, где a, b – любые мнимые единицы из первоначального базиса e, i, j, k, E, I, J, K алгебры октав, образуют подалгебру изоморфную алгебре кватернионов.

Алгебра A называется ***нормированной***, если в ней можно ввести скалярное произведение так, что выполняется тождество

$$(\mathbf{XY}, \mathbf{XY}) = (\mathbf{X}, \mathbf{X})(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) \tag{1}$$

либо $$z_1^2 + z_2^2 + ... + z_n^2 = \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2\right).$$

Заметим, что с этим тождеством связана некоторая алгебра, поскольку произведение $\mathbf{XY} = z_1 \mathbf{i}_1 + z_2 \mathbf{i}_2 + ... + z_n \mathbf{i}_n$ любых двух элементов $\mathbf{X} = x_1 \mathbf{i}_1 + x_2 \mathbf{i}_2 + ... + x_n \mathbf{i}_n$ и $\mathbf{Y} = y_1 \mathbf{i}_1 + y_2 \mathbf{i}_2 + ... + y_n \mathbf{i}_n$ n – мерного векторного пространства удовлетворяет равенствам $k\mathbf{XY} = k(\mathbf{XY}), \quad \mathbf{X}k\mathbf{Y} = k(\mathbf{XY})$,

$$(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1\mathbf{Y} + \mathbf{X}_2\mathbf{Y}, \quad \mathbf{X}(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2) = \mathbf{XY}_1 + \mathbf{XY}_2.$$

Скалярное произведение в виде $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$, $(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$ устанавливает ортонормированность базиса.

Нормированные алгебры обладают рядом свойств.

1. В любой нормированной алгебре справедливо тождество $\left(\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1,\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_2\right)+\left(\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_2,\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_1\right)=2\left(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2\right)\left(\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2\right)$. (2)

Подставляя в тождество (1) вместо элемента $\mathbf{X}$ сумму $\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2$, получаем

$$\left(\mathbf{X}_1\mathbf{Y}+\mathbf{X}_2\mathbf{Y},\mathbf{X}_1\mathbf{Y}+\mathbf{X}_2\mathbf{Y}\right)=\left(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\right)\left(\mathbf{Y},\mathbf{Y}\right)\quad\rightarrow$$
$$\rightarrow\quad\left(\mathbf{X}_1\mathbf{Y},\mathbf{X}_1\mathbf{Y}\right)+\left(\mathbf{X}_2\mathbf{Y},\mathbf{X}_2\mathbf{Y}\right)+2\left(\mathbf{X}_1\mathbf{Y},\mathbf{X}_2\mathbf{Y}\right)=$$
$$=\left(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_1\right)\left(\mathbf{Y},\mathbf{Y}\right)+\left(\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_2\right)\left(\mathbf{Y},\mathbf{Y}\right)+2\left(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2\right)\left(\mathbf{Y},\mathbf{Y}\right).$$

В силу (1) первые два слагаемые левой и правой частей равенства равны, поэтому

$$\left(\mathbf{X}_1\mathbf{Y},\mathbf{X}_2\mathbf{Y}\right)=\left(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2\right)\left(\mathbf{Y},\mathbf{Y}\right). \tag{3}$$

В этом равенстве элемент $\mathbf{Y}$ заменим на сумму $\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2$:

$$\left(\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1+\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_2,\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_1+\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_2\right)=\left(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2\right)\left(\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2,\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2\right)\quad\rightarrow$$
$$\rightarrow\quad\left(\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1,\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_1\right)+\left(\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_2,\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_2\right)+\left(\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1,\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_2\right)+\left(\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_2,\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_1\right)=$$
$$=\left(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2\right)\left(\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_1\right)+\left(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2\right)\left(\mathbf{Y}_2,\mathbf{Y}_2\right)+2\left(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2\right)\left(\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2\right)$$

В силу (3) первые два слагаемые левой и правой частей равенства равны, поэтому имеем (2) $\quad\left(\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1,\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_2\right)+\left(\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_2,\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_1\right)=2\left(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2\right)\left(\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2\right)$.

2. В нормированной алгебре с единицей справедливо тождество

$$\left(\mathbf{X}\mathbf{Y}\right)\widetilde{\mathbf{Y}}=\left(\mathbf{Y},\mathbf{Y}\right)\mathbf{X}. \tag{4}$$

Положим $\mathbf{Y}=k\mathbf{1}+\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}$, где $\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}\perp\mathbf{1}$, тогда $\widetilde{\mathbf{Y}}_{\perp\mathbf{1}}=-\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}$ и

$$\left(\mathbf{X}\mathbf{Y}\right)\widetilde{\mathbf{Y}}=\left(\mathbf{X}\left(k\mathbf{1}+\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}\right)\right)\left(k\mathbf{1}-\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}\right)=\left(k\mathbf{X}+\mathbf{X}\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}\right)\left(k\mathbf{1}-\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}\right)=$$
$$=k^2\mathbf{X}-\left(\mathbf{X}\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}\right)\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}=k^2\mathbf{X}+\left(\mathbf{X}\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}\right)\widetilde{\mathbf{Y}}_{\perp\mathbf{1}},$$
$$\left(\mathbf{Y},\mathbf{Y}\right)\mathbf{X}=\left(k^2\left(\mathbf{1},\mathbf{1}\right)+\left(\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}},\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}\right)\right)\mathbf{X}=k^2\mathbf{X}+\left(\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}},\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}\right)\mathbf{X}.$$

Таким образом, имеем $\quad\left(\mathbf{X}\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}\right)\widetilde{\mathbf{Y}}_{\perp\mathbf{1}}=\left(\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}},\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}\right)\mathbf{X}$, (5)

то есть достаточно рассмотреть случай $\mathbf{Y}=\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}$. Тождество будет доказано, если покажем, что $\quad\mathbf{Z}=\left(\mathbf{X}\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}\right)\widetilde{\mathbf{Y}}_{\perp\mathbf{1}}-\left(\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}},\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}\right)\mathbf{X}=0\quad$ или $\quad\left(\mathbf{Z},\mathbf{Z}\right)=0$.

Для сокращения записей положим $\left(\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}},\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}\right)=\lambda$ и вычислим скалярное произведение $\quad\left(\mathbf{Z},\mathbf{Z}\right)=\left(\left(\mathbf{X}\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}\right)\widetilde{\mathbf{Y}}_{\perp\mathbf{1}},\left(\mathbf{X}\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}\right)\widetilde{\mathbf{Y}}_{\perp\mathbf{1}}\right)-2\lambda\left(\left(\mathbf{X}\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}\right)\widetilde{\mathbf{Y}}_{\perp\mathbf{1}},\mathbf{X}\right)+\lambda^2\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)$.

Первое слагаемое в правой части этого равенства в силу основного тождества (1) упрощается: $\quad\left(\left(\mathbf{X}\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}\right)\widetilde{\mathbf{Y}}_{\perp\mathbf{1}},\left(\mathbf{X}\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}\right)\widetilde{\mathbf{Y}}_{\perp\mathbf{1}}\right)=$

$$=\left(\mathbf{X}\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}},\mathbf{X}\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}\right)\left(\widetilde{\mathbf{Y}}_{\perp\mathbf{1}},\widetilde{\mathbf{Y}}_{\perp\mathbf{1}}\right)=\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\left(\widetilde{\mathbf{Y}}_{\perp\mathbf{1}},\widetilde{\mathbf{Y}}_{\perp\mathbf{1}}\right)^2=\lambda^2\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right).$$

Второе слагаемое, записанное в виде $\quad-2\lambda\left(\left(\mathbf{X}\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}}\right)\widetilde{\mathbf{Y}}_{\perp\mathbf{1}},\mathbf{X}\mathbf{1}\right)\quad$ в силу тождества (2) $\quad\left(\mathbf{X}_1\cdot\mathbf{Y}_1,\mathbf{X}_2\cdot\mathbf{Y}_2\right)=2\left(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2\right)\left(\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2\right)-\left(\mathbf{X}_1\cdot\mathbf{Y}_2,\mathbf{X}_2\cdot\mathbf{Y}_1\right)$

эквивалентно разности $\quad-2\lambda\left[2\left(\mathbf{X}\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}},\mathbf{X}\right)\left(\widetilde{\mathbf{Y}}_{\perp\mathbf{1}},\mathbf{1}\right)-\left(\mathbf{X}\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}},\mathbf{X}\widetilde{\mathbf{Y}}_{\perp\mathbf{1}}\right)\right]$, в которой

$\left(\widetilde{\mathbf{Y}}_{\perp\mathbf{1}},\mathbf{1}\right)=0\quad$ и $\quad\left(\mathbf{X}\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}},\mathbf{X}\widetilde{\mathbf{Y}}_{\perp\mathbf{1}}\right)=\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\left(\mathbf{Y}_{\perp\mathbf{1}},\widetilde{\mathbf{Y}}_{\perp\mathbf{1}}\right)=-\lambda\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)$.

Итак, $\quad\left(\mathbf{Z},\mathbf{Z}\right)=\lambda^2\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)-2\lambda^2\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)+\lambda^2\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\equiv0$, то есть тождество (5) и следовательно (4) доказаны.

3. Полагая в (4) $\mathbf{Y}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$, получаем $\quad\left(\mathbf{X}\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)\right)\left(\widetilde{\mathbf{A}}+\widetilde{\mathbf{B}}\right)=\left(\mathbf{A}+\mathbf{B},\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)\mathbf{X}$

или $\quad\left(\mathbf{X}\mathbf{A}\right)\widetilde{\mathbf{A}}+\left(\mathbf{X}\mathbf{A}\right)\widetilde{\mathbf{B}}+\left(\mathbf{X}\mathbf{B}\right)\widetilde{\mathbf{A}}+\left(\mathbf{X}\mathbf{B}\right)\widetilde{\mathbf{B}}=\left(\mathbf{A},\mathbf{A}\right)\mathbf{X}+\left(\mathbf{A},\mathbf{B}\right)\mathbf{X}+\left(\mathbf{B},\mathbf{A}\right)\mathbf{X}+\left(\mathbf{B},\mathbf{B}\right)\mathbf{X}$.

В силу того же тождества (4) первое и четвёртое слагаемые в обеих частях равенства равны, поэтому имеем ещё одно тождество

$$\left(\mathbf{X}\mathbf{A}\right)\widetilde{\mathbf{B}}+\left(\mathbf{X}\mathbf{B}\right)\widetilde{\mathbf{A}}=2\left(\mathbf{A},\mathbf{B}\right)\mathbf{X}. \tag{6}$$

Перейдём к доказательству теоремы Гурвица (1858-1919).

2.6.2. ТЕОРЕМА ГУРВИЦА

Любая нормированная алгебра с единицей изоморфна одной из четырех алгебр: действительных чисел, комплексных чисел, кватернионов или октав.

Условие, что алгебра имеет единицу, не может быть опущено, поскольку существуют нормированные алгебры не содержащие единицы. Такие алгебры не могут быть изоморфны ни одной из указанных в формулировке четырёх алгебр.

В нормированной алгебре A с единицей можно ввести скалярное произведение со свойством (1): $(\mathbf{XY},\mathbf{XY})=(\mathbf{X},\mathbf{X})(\mathbf{Y},\mathbf{Y})$.

Пусть U – какая-нибудь подалгебра алгебры A, содержащая $\mathbf{1}$ и не совпадающая со всей алгеброй. Тогда существует единичный вектор $\mathbf{e}$, ортогональный U и допустима процедура удвоения $\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2\mathbf{e}$ $(\mathbf{u}_1\in U,\mathbf{u}_2\in U)$. Множество таких элементов замкнуто относительно умножения

$$(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2\mathbf{e})(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\mathbf{e})=(\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1-\tilde{\mathbf{v}}_2\mathbf{u}_2)+(\mathbf{v}_2\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2\tilde{\mathbf{v}}_1)\mathbf{e}, \qquad (7)$$

то есть снова образует подалгебру, обозначаемую $U+U\mathbf{e}$. *Представление* $\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2\mathbf{e}$ $(\mathbf{u}_1\in U,\mathbf{u}_2\in U)$ *любого элемента из* $U+U\mathbf{e}$ *единственно.* Подалгебра $U+U\mathbf{e}$ изоморфна удвоенной подалгебре алгебры U. Кроме того, *любая подалгебра* U, *содержащая* $\mathbf{1}$ *и не совпадающая со всей алгеброй* A, *ассоциативна!!!.*

Отметим, что в алгебре с единицей для вектора $\mathbf{e}$, ортогонального $\mathbf{1}$ имеем согласно правилу умножения

$$\mathbf{e}^2=(0+1\mathbf{e})\cdot(0+1\mathbf{e})=(0\cdot 0-\tilde{\mathbf{1}}\cdot\mathbf{1})+(\mathbf{1}\cdot 0+\mathbf{1}\cdot 0)\mathbf{e}=-1.$$

Доказательство теоремы Гурвица представляет собой весьма прозрачное рассуждение.

Поскольку алгебра A содержит единицу, то в ней имеется подалгебра, состоящая из элементов вида $k\mathbf{1}$, изоморфная алгебре D действительных чисел. Если она не совпадает со всей алгеброй, то найдётся единичный вектор $\mathbf{e}$ ортогональный D. Рассмотрим теперь подалгебру $C=D+D\mathbf{e}$. Она является удвоением D и, следовательно, изоморфна алгебре комплексных чисел. Поскольку $\mathbf{e}^2=-\mathbf{1}$ заключаем, что для элементов из C сопряжение совпадает с обычным сопряжением комплексных чисел.

Если подалгебра C не совпадает со всей алгеброй A, то найдётся единичный вектор $\mathbf{e}'$, ортогональный C. Рассмотрим подалгебру $Q=C+C\mathbf{e}'$, являющуюся удвоением C. Она изоморфна алгебре кватернионов. Сопряжение в этой подалгебре совпадает с сопряжением кватернионов.

Если подалгебра Q не совпадает со всей алгеброй A, то снова выберем единичный вектор $\mathbf{e}''$, ортогональный Q, и рассмотрим подалгебру $O=Q+Q\mathbf{e}''$, являющуюся удвоением Q и, следовательно, изоморфную алгебре октав. Эта подалгебра уже обязательно совпадает с A, так как умножение октав не ассоциативно.

Итак, нужно доказать *единственность представления любого элемента* $\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2\mathbf{e}$ $(\mathbf{u}_1\in U,\mathbf{u}_2\in U)$ *из* $U+U\mathbf{e}$, *правило умножения* (7) *и ассоциативность подалгебры, содержащей единицу.*

Сначала покажем, что подпространства U и $U\mathbf{e}$ ортогональны друг другу, то есть, что $\mathbf{u}_1\perp\mathbf{u}_2\mathbf{e}$ $(\mathbf{u}_1\in U,\mathbf{u}_2\in U)$. В тождестве (2)

$$(\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1,\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_2)+(\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_2,\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_1)=2(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)(\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2)$$

полагая $\mathbf{X}_1=\mathbf{u}_1$, $\mathbf{Y}_1=\mathbf{u}_2$, $\mathbf{X}_2=\mathbf{e}$, $\mathbf{Y}_2=\mathbf{1}$, получаем

$$(\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2,\mathbf{e})+(\mathbf{u}_1,\mathbf{e}\mathbf{u}_2)=2(\mathbf{u}_1,\mathbf{e})(\mathbf{u}_2,\mathbf{1}).$$

U есть подалгебра, $\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2$ принадлежит U и поэтому $\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\perp\mathbf{e}$, $\mathbf{u}_1\perp\mathbf{e}$. Итак, $(\mathbf{u}_1,\mathbf{e}\mathbf{u}_2)=0$.

Теперь можно доказывать единственность разложения. Пусть $\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2\mathbf{e}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\mathbf{e} \;\;\to\;\; \mathbf{u}_1-\mathbf{v}_1=(\mathbf{v}_2-\mathbf{u}_2)\mathbf{e}$. Последнее равенство означает, что элементы $\mathbf{u}_1-\mathbf{v}_1$, $(\mathbf{v}_2-\mathbf{u}_2)\mathbf{e}$ принадлежат одновременно ортогональным пространствам, то есть $\big((\mathbf{u}_1-\mathbf{v}_1),(\mathbf{u}_1-\mathbf{v}_1)\big)=\big((\mathbf{u}_1-\mathbf{v}_1),(\mathbf{v}_2-\mathbf{u}_2)\mathbf{e}\big)=0$, $\big((\mathbf{v}_2-\mathbf{u}_2)\mathbf{e},(\mathbf{v}_2-\mathbf{u}_2)\mathbf{e}\big)=\big((\mathbf{u}_1-\mathbf{v}_1),(\mathbf{v}_2-\mathbf{u}_2)\mathbf{e}\big)=0$ и следовательно

$$\mathbf{u}_1-\mathbf{v}_1=0,\quad \mathbf{v}_2-\mathbf{u}_2=0.$$

Доказательство правила умножения основано на нескольких вспомогательных соотношениях.

Полагая в тождестве (6) $\quad(\mathbf{XA})\tilde{\mathbf{B}}+(\mathbf{XB})\tilde{\mathbf{A}}=2(\mathbf{A},\mathbf{B})\mathbf{X}$

$\mathbf{X}=\mathbf{u},\quad \mathbf{A}=\mathbf{e},\quad \mathbf{B}=\tilde{\mathbf{v}}\perp\mathbf{e}$ имеем $\quad(\mathbf{ue})\mathbf{v}+(\mathbf{u}\tilde{\mathbf{v}})\tilde{\mathbf{e}}=2(\mathbf{e},\tilde{\mathbf{v}})\mathbf{u}=0$

или
$$(\mathbf{ue})\mathbf{v}=(\mathbf{u}\tilde{\mathbf{v}})\mathbf{e} \tag{8}$$

Полагая в тождестве (6) $\quad(\mathbf{XA})\tilde{\mathbf{B}}+(\mathbf{XB})\tilde{\mathbf{A}}=2(\mathbf{A},\mathbf{B})\mathbf{X}$

$\mathbf{X}=\mathbf{1}$, $\mathbf{A}=\mathbf{u}$, $\mathbf{B}=\widetilde{\mathbf{ve}}=-\mathbf{ve}$ (ибо $\mathbf{ve}\perp U$ и, значит, $\mathbf{ve}\perp\mathbf{1}$) получим

$\mathbf{u}(\mathbf{ve})-(\mathbf{ve})\tilde{\mathbf{u}}=-2(\mathbf{u},\mathbf{ve})=0$ или $\mathbf{u}(\mathbf{ve})=(\mathbf{ve})\tilde{\mathbf{u}}$ и в силу (8)
$$\mathbf{u}(\mathbf{ve})=(\mathbf{vu})\mathbf{e} \tag{9}$$

Полагая в тождестве (6) $\quad(\mathbf{XA})\tilde{\mathbf{B}}+(\mathbf{XB})\tilde{\mathbf{A}}=2(\mathbf{A},\mathbf{B})\mathbf{X}$

$\mathbf{X}=\mathbf{u},\quad \mathbf{A}=\mathbf{e},\quad \mathbf{B}=-\mathbf{ve}$, где $\mathbf{v}\perp\mathbf{1}\;\;\to\;\;\tilde{\mathbf{v}}=-\mathbf{v}$, $(\mathbf{1},\mathbf{v})=0$ имеем

$$(\mathbf{ue})(\mathbf{ve})-(\mathbf{u}(\mathbf{ve}))\tilde{\mathbf{e}}=-2(\mathbf{e},\mathbf{ve})\mathbf{u}.$$

В силу основного тождества (1) $\quad(\mathbf{e},\mathbf{ve})=(\mathbf{1e},\mathbf{ve})=(\mathbf{1},\mathbf{v})(\mathbf{e},\mathbf{e})=0$, а в силу (9)

$-(\mathbf{u}(\mathbf{ve}))\tilde{\mathbf{e}}=-((\mathbf{vu})\mathbf{e})\tilde{\mathbf{e}}=-\mathbf{vu}=\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{u}$. Итак, имеем
$$(\mathbf{ue})(\mathbf{ve})=-\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{u}. \tag{10}$$

Тождество (10) справедливо и в случае $\quad\mathbf{v}=k\mathbf{1}\quad k(\mathbf{ue})\mathbf{e}=-k\mathbf{u}$, что совпадает с тождеством (4) $\quad(\mathbf{XY})\tilde{\mathbf{Y}}=(\mathbf{Y},\mathbf{Y})\mathbf{X}\quad$ при $\quad\mathbf{X}=\mathbf{u},\quad \mathbf{Y}=\tilde{\mathbf{e}}=-\mathbf{e}$.

Соответственно тождество (5), полученное из (4) принимает вид (10) при $\mathbf{X}=\mathbf{u},\quad \mathbf{A}=\mathbf{e},\quad \mathbf{B}=k\mathbf{1}-\mathbf{ve}$.

Теперь можно приступить к рассмотрению правила умножения. По обычному правилу перемножения сумм имеем

$$(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2\mathbf{e})(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\mathbf{e})=\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1+(\mathbf{u}_2\mathbf{e})(\mathbf{v}_2\mathbf{e})+(\mathbf{u}_2\mathbf{e})\mathbf{v}_1+\mathbf{u}_1(\mathbf{v}_2\mathbf{e}).$$

Преобразуя последние три слагаемых правой части равенства по формулам (10),(8),(9), получаем требуемую формулу (7)

$$(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2\mathbf{e})(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\mathbf{e})=(\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1-\tilde{\mathbf{v}}_2\mathbf{u}_2)+(\mathbf{v}_2\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2\tilde{\mathbf{v}}_1)\mathbf{e}.$$

Наконец, последнее утверждение (ассоциативность).

Полагая в тождестве (6) $\quad\mathbf{X}=\mathbf{ve},\quad \mathbf{A}=\tilde{\mathbf{w}},\quad \mathbf{B}=\tilde{\mathbf{u}}\mathbf{e}$, имеем

$((\mathbf{ve})\tilde{\mathbf{w}})(-\mathbf{ue})+((\mathbf{ve})(\tilde{\mathbf{u}}\mathbf{e}))\mathbf{w}=2(\tilde{\mathbf{w}},\tilde{\mathbf{u}}\mathbf{e})\mathbf{ve}=0$ так как $\tilde{\mathbf{w}}\perp\tilde{\mathbf{u}}\mathbf{e}$.

В силу (8) и (10) получаем $\quad(\mathbf{vw})\mathbf{u}-(\mathbf{uv})\mathbf{w}=0$, что означает ассоциативность. Теорема доказана.