ЛЕКЦИЯ 4.08

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА. КВАТЕРНИОННОЕ ОПИСАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ Х.ЛОРЕНЦА. ДИНАМИКА РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЧАСТИЦА В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ.

6. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА.

6.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ Х.ЛОРЕНЦА.

Аппарат кватернионов может быть использован для описания метрики Г.Минковского (1864-1909), инвариантной относительно преобразования Х.Лоренца (1853-1928). Обозначим какое-либо событие в пространстве-времени кватернионом $X = X_o + \tau_\alpha X_\alpha$, где $X_o = icT$, $T-$время, $c-$скорость света (фундаментальная постоянная), $X_\alpha -$ декартовы координаты точки. Интервал между двумя событиями метрики Минковского определяется формулой $s^2 = x \circ \tilde{x} = X \circ \tilde{X} = S^2$. Результаты измерений одного и того же события, наблюдаемого двумя наблюдателями s и S, связаны преобразованием Лоренца

$$\bar{r}_{//} = \left(\bar{R}_{//} - \bar{V}T\right)\gamma,\ \bar{r}_\perp = \bar{R}_\perp,\ t = \left(T - \frac{\bar{V}\cdot\bar{R}}{c^2}\right)\gamma,\ \gamma = 1\Big/\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}, \tag{6.1}$$

оставляющим инвариантным интервал

$$s^2 = \bar{r}_{//}^{\,2} + \bar{r}_\perp^{\,2} - c^2t^2 = \bar{R}_{//}^{\,2} + \bar{R}_\perp^{\,2} - c^2T^2 = S^2.$$

Формально преобразование Лоренца есть “жесткое” преобразование пространства-времени в себя и описывается ортогональной матрицей S: $x_\alpha = S_{\alpha\beta}X_\beta$. Например, при движении вдоль оси OX_1

$$S = \begin{pmatrix} ch\psi & -ish\psi & 0 & 0 \\ ish\psi & ch\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -i\gamma V/c & 0 & 0 \\ i\gamma V/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

Рассмотрим преобразование $$L \circ R \circ \tilde{L}^*, \tag{6.3}$$

где $R = icT + \tau_1 X_1 + \tau_2 X_2 + \tau_3 X_3$, $L = \cos\frac{i\psi}{2} + \tau_1 \sin\frac{i\psi}{2} = ch\frac{\psi}{2} + \tau_1\ ish\frac{\psi}{2}$.

Запишем в матричном виде произведение

$$L \circ R = \lambda_o X_o - \bar{\lambda}\cdot\bar{X} + \lambda_o\bar{X} + X_o\bar{\lambda} + \bar{\lambda}\times\bar{X} =$$
$$= \left(\lambda_o X_o - \lambda_1 X_1 - \lambda_2 X_2 - \lambda_3 X_3\right) + \tau_1\left(\lambda_1 X_o + \lambda_o X_1 - \lambda_3 X_2 + \lambda_2 X_3\right) +$$
$$+ \tau_2\left(\lambda_2 X_o + \lambda_3 X_1 + \lambda_o X_2 - \lambda_1 X_3\right) + \tau_3\left(\lambda_3 X_o - \lambda_2 X_1 + \lambda_1 X_2 + \lambda_o X_3\right).$$

В произведении кватернионов $L \circ R$ первому сомножителю соответствует квадратная матрица, а второму – матрица столбец

$$L \circ R \to \begin{pmatrix} \lambda_o & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_o & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_o & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_o \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_o \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = A_Z R. \tag{6.4}$$

Далее запишем в явном виде произведение

$$R \circ \widetilde{L}^* = \lambda_o^* X_o + \overline{\lambda}^* \cdot \overline{X} + \lambda_o^* \overline{X} - X_o \overline{\lambda}^* + \overline{\lambda}^* \times \overline{X} =$$

$$= \left(\lambda_o^* X_o + \lambda_1^* X_1 + \lambda_2^* X_2 + \lambda_3^* X_3\right) + \tau_1\left(-\lambda_1^* X_o + \lambda_o^* X_1 - \lambda_3^* X_2 + \lambda_2^* X_3\right) +$$
$$+ \tau_2\left(-\lambda_2^* X_o + \lambda_3^* X_1 + \lambda_o^* X_2 - \lambda_1^* X_3\right) + \tau_3\left(-\lambda_3^* X_o - \lambda_2^* X_1 + \lambda_1^* X_2 + \lambda_o^* X_3\right),$$

$$R \circ \widetilde{L}^* \to \begin{pmatrix} \lambda_o & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_o & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_o & \lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_o \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_o \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = B_Z R. \qquad (6.5)$$

В последнем равенстве учтено, что $\lambda_o^* = \lambda_o$ и $\lambda_\alpha^* = -\lambda_\alpha$, $\alpha = 1,2,3$.
По сравнению с выражением (6.4) транспонированным оказался блок, соответствующий векторной части. Это понятно: кватернионное и комплексное сопряжения в рассматриваемом случае совпадают, то есть $\widetilde{L}^* = L$, а произведение $R \circ \widetilde{L}^* = R \circ L$ отличается от произведения $L \circ R$ знаком векторного произведения.

Вычислим результирующую матрицу преобразования

$$S = A_Z \cdot B_Z = B_Z \cdot A_Z = \begin{pmatrix} 2\lambda_o^2 - 1 & -2\lambda_o\lambda_1 & -2\lambda_o\lambda_2 & -2\lambda_o\lambda_3 \\ 2\lambda_1\lambda_o & 1 - 2\lambda_1^2 & -2\lambda_1\lambda_2 & -2\lambda_1\lambda_3 \\ 2\lambda_2\lambda_o & -2\lambda_2\lambda_1 & 1 - 2\lambda_2^2 & -2\lambda_2\lambda_3 \\ 2\lambda_3\lambda_o & -2\lambda_3\lambda_1 & -2\lambda_3\lambda_2 & 1 - 2\lambda_3^2 \end{pmatrix}. \qquad (6.6)$$

В рассматриваемом случае $\lambda_o = ch\dfrac{\psi}{2}$, $\lambda_1 = ish\dfrac{\psi}{2}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ и S совпадает с (6.2). Само преобразование $r = SR$ есть преобразование Лоренца (6.1)

$$ict = icT\gamma - i\frac{V}{c}X_1\gamma = ic\left(T - \frac{VX_1}{c^2}\right)\gamma, \quad x_1 = -VT\gamma + X_1\gamma, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3.$$

В общем случае $\mathbf{V} = \mathbf{e}\,V$ и кватернион преобразования имеет вид

$$L = \cos\frac{i\psi}{2} + \tau_1\alpha_1 \sin\frac{i\psi}{2} + \tau_2\alpha_2 \sin\frac{i\psi}{2} + \tau_3\alpha_3 \sin\frac{i\psi}{2}, \qquad (6.7)$$

где $\cos i\psi = ch\psi = \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$, $\quad \sin i\psi = ish\psi = i\dfrac{V}{c}\gamma = \dfrac{iV}{c\sqrt{1-(V/c)^2}}$.

Матрица поворота (6.3) в рассматриваемом случае принимает вид

$$S = \begin{pmatrix} \gamma & -i\dfrac{V_1}{c}\gamma & -i\dfrac{V_2}{c}\gamma & -i\dfrac{V_3}{c}\gamma \\ i\dfrac{V_1}{c}\gamma & 1+\alpha_1^2(\gamma-1) & \alpha_1\alpha_2(\gamma-1) & \alpha_1\alpha_3(\gamma-1) \\ i\dfrac{V_2}{c}\gamma & \alpha_2\alpha_1(\gamma-1) & 1+\alpha_2^2(\gamma-1) & \alpha_2\alpha_3(\gamma-1) \\ i\dfrac{V_3}{c}\gamma & \alpha_3\alpha_1(\gamma-1) & \alpha_3\alpha_2(\gamma-1) & 1+\alpha_3^2(\gamma-1) \end{pmatrix} \qquad (6.8)$$

Запишем само преобразование Лоренца

$$ict = icT\gamma - \frac{i\gamma}{c}\sum_{\alpha=1}^{3} V_\alpha X_\alpha \qquad x_j = -V_j T\gamma + X_j + \alpha_j \sum_{k=1}^{3} \alpha_k X_k (\gamma - 1) \qquad \text{или}$$

$$t = \left(T - \frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{R}}{c^2}\right)\gamma, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{V}}{V}\frac{(\mathbf{R}\cdot\mathbf{V})}{V} + \left(\frac{\mathbf{V}}{V}\frac{(\mathbf{R}\cdot\mathbf{V})}{V} - \mathbf{V}T\right)\gamma \qquad (6.9)$$

6.2. ДИНАМИКА РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ.

Строя релятивистскую механику, А.Пуанкаре ввёл безразмерную четыре скорость $U^o = U_o = \frac{1}{c}\frac{dX^o}{d\tau}$ $\left(X^o = cT\right)$, $U^i = \frac{1}{c}\frac{dX^i}{d\tau}$, $U_i = -\frac{1}{c}\frac{dX^i}{d\tau}$, $\left(i = 1,2,3\right)$ четыре импульс $\pi_\nu = m_o c U^\nu$, $\pi^\nu = m_o c U_\nu$ $\left(\nu = 0,1,2,3\right)$, и записал уравнения динамики в виде $\frac{d\pi_\nu}{d\tau} = F_\nu$. В этих выражениях $c = const -$ скорость света, $\tau -$ абсолютное время, $T -$ координатное время. Условие $\frac{ds}{d\tau}\frac{ds}{d\tau} = c^2\frac{dT}{d\tau}\frac{dT}{d\tau} - \frac{dX^i}{d\tau}\frac{dX^i}{d\tau} = c^2$ или $U^o U^o - U^i U^i = U_o U_o - U_i U_i = = U^o U_o + U^i U_i = 1$ устанавливает связь между ходом часов (масштабом) в неподвижной и движущейся системах координат $\frac{d\tau}{dT} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\frac{dX^i}{dT}\frac{dX^i}{dT}} = \frac{1}{\delta}$, $\frac{dT}{d\tau} = \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}\frac{dX^i}{d\tau}\frac{dX^i}{d\tau}} = \delta$. Произвол в задании сил недопустим, так как $\pi_o = m_o c\delta = m_o c\sqrt{1 + \frac{\pi_i}{m_o c}\frac{\pi_i}{m_o c}}$, то есть уравнения динамики должны иметь интеграл $\pi_o\pi_o - \pi_i\pi_i = \left(m_o c\right)^2 = const$ и переходить в уравнения И.Ньютона при $c \to \infty$. Четыре силы А.Пуанкаре определил соотношениями $F_o = \frac{f_i}{c}\frac{dX^i}{d\tau}$, $F_i = \frac{f_i}{c}\frac{dX^o}{d\tau}$, где $f_i -$ трёхмерные силы. Итак, имеем (не гамильтонову) систему

$$\frac{dX^o}{d\tau} = \frac{\pi_o}{m_o}, \quad \frac{dX^i}{d\tau} = \frac{\pi_i}{m_o}, \quad \frac{d\pi_o}{d\tau} = \frac{f_i\pi_i}{m_o c}, \quad \frac{d\pi_i}{d\tau} = \frac{f_i\pi_o}{m_o c}$$

либо

$$m_o\frac{d^2X^o}{d\tau^2} = \frac{f_i}{c}\frac{dX^i}{d\tau}, \quad m_o\frac{d^2X^i}{d\tau^2} = \frac{f_i}{c}\frac{dX^o}{d\tau}.$$

В случае потенциальных сил можно ввести функцию Лагранжа

$$L = -\frac{1}{2}m_o\left(\frac{dX^o}{d\tau}\frac{dX^o}{d\tau} - \frac{dX^i}{d\tau}\frac{dX^i}{d\tau}\right) - \frac{1}{c}\frac{dX^o}{d\tau}\Pi(X). \qquad (6.10)$$

Сразу отметим неаддитивность потенциальной энергии и искажение псевдоевклидовости метрики. Соответствующий гамильтониан и канонические уравнения имеют вид

$$H = -\frac{1}{2m_o}\left[\left(P_o + \frac{\Pi(X)}{c}\right)^2 - P_i P_i\right], \qquad (6.11)$$

$$\frac{dX^o}{d\tau}=\frac{1}{m_o}\left(P_o+\frac{\Pi}{c}\right),\qquad \frac{dP_o}{d\tau}=0,$$
$$\frac{dX^i}{d\tau}=-\frac{1}{m_o}P_i,\qquad \frac{dP_i}{d\tau}=\frac{1}{m_o c}\left(P_o+\frac{\Pi}{c}\right)\frac{\partial\Pi}{\partial X^i}.$$

Наличие интеграла $\left(P_o+\frac{\Pi(X)}{c}\right)^2-P_iP_i={m_o}^2c^2=const$ позволяет понизить порядок системы. Следуя Уиттекеру, в качестве новой функции Гамильтона примем $-P_o=\sqrt{{m_o}^2c^2+P_iP_i}+\frac{1}{c}\Pi(X)$. Переход от независимой переменной $X^o=cT$ к T даёт $H=c\sqrt{{m_o}^2c^2+P_iP_i}+\Pi(X)$,

$$\frac{dX^i}{dT}=\frac{cP_i}{\sqrt{{m_o}^2c^2+P_iP_i}},\qquad \frac{dP_i}{dT}=-\frac{\partial\Pi}{\partial X^i}$$ и далее

$$L=-m_oc^2\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\frac{dX^i}{dT}\frac{dX^i}{dT}}-\Pi(X),\quad \frac{d}{dT}\left(m_o\frac{dX^i}{dT}\Big/\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\frac{dX^i}{dT}\frac{dX^i}{dT}}\right)+\frac{\partial\Pi(X)}{\partial X^i}=0.$$

А.Пуанкаре этот переход сделал сразу, и получил из исходной системы точно такие же уравнения $\frac{dX^i}{dT}=\frac{\pi_i}{m_o\sqrt{1+\pi_i\pi_i/{m_o}^2c^2}},\quad \frac{d\pi_i}{dT}=f_i$

либо $$\frac{d}{dT}\left(m_o\frac{dX^i}{dT}\Big/\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\frac{dX^i}{dT}\frac{dX^i}{dT}}\right)=f_i.$$

Таким образом, уравнения, определяющие динамику релятивистской частицы в трёхмерном пространстве, являются уравнениями Уиттекера по отношению к четырёхмерному пространству Минковского. Потенциальная энергия стала аддитивной, но система перестала быть натуральной. И вопрос о метрике вообще некорректен.

При отсутствии силового поля функция Лагранжа (6.10) в переменных Минковского с точностью до множителя $-1/2$ совпадает с энергией покоя

$$L=-\frac{m_o}{2}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2=-\frac{m_oc^2}{2},\qquad \text{где}\qquad ds^2=c^2d\tau d\tau=c^2dTdT-dX^idX^i.$$

Чтобы это совпадение не нарушалось и при наличии силового поля, определим пространственно-временной интервал выражением

$$ds^2=\left[c^2+(\Pi/m_oc)^2\right]d\tau d\tau=\left[cdT+(\Pi d\tau/m_oc)\right]^2-dX^idX^i, \tag{6.12}$$

из которого следует

$$L=-\frac{m_oc^2}{2}=-\frac{m_o}{2}\left[\left(\frac{dX^o}{d\tau}+\frac{\Pi}{m_oc}\right)^2-\frac{dX^i}{d\tau}\frac{dX^i}{d\tau}\right]+\frac{m_o}{2}\left(\frac{\Pi}{m_oc}\right)^2,$$ что

совпадает с исходной функцией Лагранжа (6.10). Требование форминвариантности позволяет представить (6.12) в виде $ds^2=\tilde{c}\,d\tau\,\tilde{c}\,d\tau=d\tilde{X}^od\tilde{X}^o-dX^idX^i$, где $\tilde{c}=c\sqrt{1+\left[\Pi(X)/m_oc^2\right]^2}$ – локальная скорость света и $\frac{d\tilde{X}^o}{d\tau}=\frac{dX^o}{d\tau}+\frac{\Pi(X)}{m_oc}$ – локальный ход часов (масштаб оси $\tilde{X}^o$)

при наличии силового поля. В метрике $\widetilde{X}^o, X^i$ движение происходит по геодезическим.

6.3. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЧАСТИЦА В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

В случае центрального поля угловые движения могут быть отделены от радиальных: $H = -\dfrac{1}{2m_o}\left[\left(P_o + \dfrac{\Pi(R)}{c}\right)^2 - P_R{}^2 - \dfrac{1}{R^2} P_i P_i Q^j Q^j\right]$, где $Q^j -$ направляющие косинусы радиус-вектора точки и $P_i -$ соответствующие импульсы. Имеет место интеграл $P_i P_i Q^j Q^j = k = const$, координата X^o является циклической. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, определяющий движение в плоскости $X^o R$, имеет вид

$$S = -\frac{p_r}{2m_o}\tau + X^o p_o + \int \sqrt{\left[p_o + \frac{1}{c}\Pi(R)\right]^2 + p_r - \frac{k}{R^2}}\, dR,$$

где $p_r, p_o -$ постоянные. Движение определяется квадратурами

$$\frac{\partial S}{\partial p_o} = X^o + \int \left[p_o + \frac{1}{c}\Pi(R)\right] dR \Bigg/ \sqrt{\left[p_o + \frac{1}{c}\Pi(R)\right]^2 + p_r - \frac{k}{R^2}} = x^o,$$

$$\frac{\partial S}{\partial p_r} = -\frac{\tau}{2m_o} + \int dR \Bigg/ \sqrt{\left[p_o + \frac{1}{c}\Pi(R)\right]^2 + p_r - \frac{k}{R^2}} = r.$$

Например, если $\Pi = -\dfrac{\gamma m_o}{R}$, то $\widetilde{c}^2 = c^2 + \left(\dfrac{\gamma}{cR}\right)^2$,

$\dfrac{d\widetilde{X}^o}{d\tau} = \sqrt{c^2 + \dfrac{dX^i}{d\tau}\dfrac{dX^i}{d\tau}} - \dfrac{\gamma}{cR}$ и все интегралы оказываются табличными:

$$S = -\frac{p_r}{2m_o}\tau + X^o p_o + \int \sqrt{\left(p_o{}^2 + p_r\right)R^2 - 2\frac{\gamma m_o}{c} p_o R - k + \left(\frac{\gamma m_o}{c}\right)^2}\,\frac{dR}{R} =$$

$$= -\frac{p_r}{2m_o}\tau + X^o p_o + \sqrt{\left(p_o{}^2 + p_r\right)R^2 - 2\frac{\gamma m_o}{c} p_o R - k + \left(\frac{\gamma m_o}{c}\right)^2} -$$

$$-\frac{\gamma m_o}{c}\frac{p_o}{\sqrt{p_o{}^2 + p_r}} \ln\left[2\sqrt{\left(p_o{}^2 + p_r\right)\left[\left(p_o{}^2 + p_r\right)R^2 - 2\frac{\gamma m_o}{c} p_o R - k + \left(\frac{\gamma m_o}{c}\right)^2\right]}\right] +$$

$$+\sqrt{k - \left(\frac{\gamma m_o}{c}\right)^2}\arcsin\frac{-2\dfrac{\gamma m_o}{c} p_o R + 2\left[\left(\dfrac{\gamma m_o}{c}\right)^2 - k\right]}{R\sqrt{\left(2\dfrac{\gamma m_o}{c} p_o\right)^2 - 4\left(p_o{}^2 + p_r\right)\left[\left(\dfrac{\gamma m_o}{c}\right)^2 - k\right]}}.$$

Выделяя угловые движения в гамильтониане

$$H = c\sqrt{m_o{}^2 c^2 + P_r^2 + \frac{P_i P_i Q^j Q^j}{R^2}} - \frac{\gamma m_o}{R},$$

получаем $$S = -cht + \int \sqrt{\left(h + \frac{\gamma m_o}{cR}\right)^2 - m_o{}^2 c^2 - \frac{k}{R^2}}\, dR =$$

$$= -cht + \int \sqrt{\left(-m_o{}^2 c^2 + h^2\right) R^2 + 2h \frac{\gamma m_o}{c} R - k + \left(\frac{\gamma m_o}{c}\right)^2}\, \frac{dR}{R}.$$