ЛЕКЦИЯ 4.02

КВАТЕРНИОНЫ; ПРОЦЕДУРА УДВОЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ - ОПРЕДЕЛЕНИЕ КВАТЕРНИОНОВ; УДВОЕНИЕ КВАТЕРНИОНОВ - ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОКТАВ.

2.3. КВАТЕРНИОНЫ $A=\{a_0,a_1,a_2,a_3\}=a_0+\tau_1 a_1+\tau_2 a_2+\tau_3 a_3=a_0+\overline{a}$.

Опыт построения систем комплексных, двойных и дуальных чисел наводит на мысль рассмотреть числа вида $z=a+ib+jc$, где $a,b,c-$произвольные действительные числа, а $i,j-$некоторые символы. В качестве правила сложения разумно принять $(a+ib+jc)+(a'+ib'+jc')=(a+a')+i(b+b')+j(c+c')$.

Перечислим требования естественного характера предъявляемые к произведению.

1. $(k+i0+j0)\cdot(a+ib+jc)=ka+ikb+jkc$;
2. $(az_1)\cdot(bz_2)=(ab)(z_1\cdot z_2)$, где $a,b-$произвольные действительные числа;
3. $z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$, $(z_1+z_2)\cdot z_3=z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_3-$ распределительный закон.

Закон умножения, удовлетворяющий этим требованиям, например,

$$(a+ib+jc)\cdot(a'+ib'+jc')=aa'+i(ab'+ba')+j(ac'+ca').$$

При таком правиле имеют место коммутативность и ассоциативность умножения $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$, $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1(z_2\cdot z_3)$, но отсутствует деление. Например, уравнение $(0+i+j0)\cdot x=1+i0+j0$ не имеет решения. Можно показать, что при любом правиле умножения чисел $z=a+ib+jc$, удовлетворяющем перечисленным условиям, найдётся хотя бы одна пара чисел $z_1,z_2\neq 0$ таких, что z_1 нельзя разделить на z_2. Таким образом, из чисел вида $z=a+ib+jc$ построить систему с делением нельзя.

Однако, для чисел вида $A=a_0+\tau_1 a_1+\tau_2 a_2+\tau_3 a_3=a_0+\overline{a}$, где a_0- скалярная величина, а $\overline{a}-$ вектор, уже можно построить систему с делением.

В 1843 году У.Гамильтон (1805-1865) ввел понятие кватернионов. Аппарат кватернионов является обобщением аппарата комплексных чисел на четырехмерное пространство и представляет собой пример четырехмерной алгебры, в которой для операции умножения однозначно определена обратная операция - деление. Особенность кватернионов состоит в правиле умножения кватернионных единиц. Операции умножения отражают возведение во вторую степень мнимой единицы и векторное перемножение элементов базиса ортогональной системы координат:

$$\tau_1\circ\tau_1=-1,\qquad \tau_2\circ\tau_2=-1,\qquad \tau_3\circ\tau_3=-1,$$

$$\tau_1\circ\tau_2=\tau_3,\qquad \tau_2\circ\tau_3=\tau_1,\qquad \tau_3\circ\tau_1=\tau_2,$$

$$\tau_2\circ\tau_1=-\tau_3,\qquad \tau_3\circ\tau_2=-\tau_1,\qquad \tau_1\circ\tau_3=-\tau_2.$$

Таким образом, имеем гиперкомплексное пространство

a_0 - скалярная часть кватерниона,

$\overline{a}=\tau_s\,a_s$ - векторная часть кватерниона.

Операции перемножения мнимых единиц позволяют записать

$$C=A\circ B=a_0b_0-(\overline{a}\cdot\overline{b})+a_0\overline{b}+b_0\overline{a}+\overline{a}\times\overline{b}.$$

Отсюда видно, что перемножение кватернионов не коммутативно. В скалярной форме

$$c_0 = a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3,$$
$$c_1 = a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2,$$
$$c_2 = a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3,$$
$$c_3 = a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1.$$

Для умножения кватернионов выполняется сочетательный закон $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$. Поскольку числовые множители можно выносить за знак произведения, то достаточно проверить равенство для кватернионных единиц. Например, $(\tau_1 \circ \tau_1) \circ \tau_1 = -\tau_1 = \tau_1 \circ (\tau_1 \circ \tau_1)$;

$$(\tau_1 \circ \tau_1) \circ \tau_2 = -\tau_2 = \tau_1 \circ \tau_3 = \tau_1 \circ (\tau_1 \circ \tau_2);$$
$$(\tau_1 \circ \tau_2) \circ \tau_1 = \tau_3 \circ \tau_1 = -\tau_1 \circ \tau_3 = \tau_1 \circ (\tau_2 \circ \tau_1);$$
$$(\tau_1 \circ \tau_2) \circ \tau_3 = \tau_3 \circ \tau_3 = -1 = \tau_1 \circ (\tau_2 \circ \tau_3)$$ и так далее.

По аналогии с комплексными числами вводится понятие сопряженного кватерниона и норма кватерниона:

$\tilde{A} = a_0 - \bar{a}$ -кватернион, сопряженный кватерниону $A = a_0 + \bar{a}$.

Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости равенств $\widetilde{A+B} = \tilde{A} + \tilde{B}$, $\widetilde{A \circ B} = \tilde{B} \circ \tilde{A}$. Очевидно, что сумма и произведение сопряжённых кватернионов есть действительное число: $A + \tilde{A} = 2a_0$, $A \circ \tilde{A} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

Число $|A| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ называют модулем, а число $\|A\| = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ -нормой кватерниона A, и очевидно имеем $A \circ \tilde{A} = \|A\| = |A|^2$. Модуль произведения равен произведению модулей :

$$|A \circ B|^2 = (A \circ B) \circ (\widetilde{A \circ B}) = (A \circ B) \circ (\tilde{B} \circ \tilde{A}) = (A \circ \tilde{A}) \circ (B \circ \tilde{B}) = |A|^2 |B|^2,$$

то есть имеем тождество для четырёх квадратов.

В 1898 году А.Гурвиц доказал удивительную теорему: тождества типа

$$(X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2)(Y_1^2 + Y_2^2 + ... + Y_n^2) = Z_1^2 + Z_2^2 + ... + Z_n^2,$$ где

$Z_i = z_i^{sk} X_s Y_k$, z_i^{sk} – действительные числа, возможны только при $n = 1,2,4.8$ и невозможны ни при каких других n. Тождество для октав $n = 8$ будет построено позже.

Помимо ассоциативности кватернионы образуют систему с делением. Для кватернионов произведение зависит от порядка сомножителей, поэтому вместо одного уравнения нужно рассматривать два:

$$A \circ X = B \quad \text{и} \quad X \circ A = B.$$

Соответственно решение первого уравнения называют ***левым частным***, а решение второго – ***правым частным*** от деления B на A. Умножим эти уравнения на $\tilde{A}$ соответственно слева и справа: $|A|^2 X = \tilde{A} \circ B$, $X|A^2| = B \circ \tilde{A}$.

Отсюда имеем $$X_L = \frac{\tilde{A} \circ B}{|A|^2}, \quad X_R = \frac{B \circ \tilde{A}}{|A^2|}.$$

$B = \dfrac{\tilde{A}}{\|A\|} = A^{-1}$ - кватернион, обратный A. Если кватернион нормирован, то обратный кватернион равен сопряженному. Операция деления определяется как умножение на обратный кватернион:

$$A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = 1, \quad A^{-1} = \frac{\widetilde{A}}{\|A\|}.$$

Отметим, что свойства сложения, умножения и обращения кватернионов аналогичны свойствам сложения, умножения и обращения матриц. Как следствие этого правила, решения кватернионных уравнений аналогичны правилам решения матричных уравнений.

Кватернион Λ, норма которого равна единице, можно представить в виде $\Lambda = \cos\varphi + \overline{\tau}\sin\varphi$, где $\overline{\tau} = \tau_1\alpha_1 + \tau_2\alpha_2 + \tau_3\alpha_3$ – единичный вектор, $\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \alpha_3{}^2 = 1$, $\overline{\tau}^2 = -1$ и φ – угол.

Произвольный кватернион можно записать в виде

$$A = \|A\|^{1/2}\left(\cos\varphi + \overline{\tau}\sin\varphi\right) = \|A\|^{1/2}\exp\left(\overline{\tau}\varphi\right),$$

что позволяет рассматривать функции комплексных переменных как неразвернутые функции кватернионов.

Для любых четырёх кватернионов имеет место тождество

$$\begin{aligned} S &= D \circ A \circ C \circ \widetilde{B} + B \circ \widetilde{C} \circ \widetilde{A} \circ \widetilde{D} - A \circ C \circ \widetilde{B} \circ D - \widetilde{D} \circ B \circ \widetilde{C} \circ \widetilde{A} = \\ &= \overline{d} \circ A \circ C \circ \widetilde{B} - A \circ C \circ \widetilde{B} \circ \overline{d} + \overline{d} \circ B \circ \widetilde{C} \circ \widetilde{A} - B \circ \widetilde{C} \circ \widetilde{A} \circ \overline{d} = \\ &= \overline{d} \circ \left(A \circ C \circ \widetilde{B} + B \circ \widetilde{C} \circ \widetilde{A}\right) - \left(A \circ C \circ \widetilde{B} + B \circ \widetilde{C} \circ \widetilde{A}\right) \circ \overline{d} \equiv 0 \end{aligned}$$

В скобках стоят суммы сопряженных кватернионов, то есть действительные числа, поэтому имеем тождественный нуль.

Кватернионам $Q = q_o + \tau_1 q_1 + \tau_2 q_2 + \tau_3 q_3$ можно сопоставить векторы $\mathbf{q} = \mathbf{i}_o q_o + \mathbf{i}_1 q_1 + \mathbf{i}_2 q_2 + \mathbf{i}_3 q_3$ как линейные комбинации базисных элементов $\mathbf{i}_o, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, а векторам - 4×4 матрицы. Из покомпонентной записи произведения кватернионов

$$Z = X \circ Y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} z_o &= x_o y_o - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 \\ z_1 &= x_1 y_o + x_o y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ z_2 &= x_2 y_o + x_o y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ z_3 &= x_3 y_o + x_o y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} z &= Xy \\ z^T &= x^T Y \end{aligned} \quad \Leftrightarrow$$

имеем

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} &\begin{pmatrix} z_o \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_o & -x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_o & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_o \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_o \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} z_o \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_o \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} y_o & y_1 & y_2 & y_3 \\ -y_1 & y_o & -y_3 & y_2 \\ -y_2 & y_3 & y_o & -y_1 \\ -y_3 & -y_2 & y_1 & y_o \end{pmatrix} \end{aligned} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{pmatrix} z_o & -z_1 & -z_2 & -z_3 \\ z_1 & z_o & -z_3 & z_2 \\ z_2 & z_3 & z_o & -z_1 \\ z_3 & -z_2 & z_1 & z_o \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_o & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_o & -x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_o & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_o \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_o & -y_1 & -y_2 & -y_3 \\ y_1 & y_o & -y_3 & y_2 \\ y_2 & y_3 & y_o & -y_1 \\ y_3 & -y_2 & y_1 & y_o \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_o & z_1 & z_2 & z_3 \\ -z_1 & z_o & -z_3 & z_2 \\ -z_2 & z_3 & z_o & -z_1 \\ -z_3 & -z_2 & z_1 & z_o \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_o & y_1 & y_2 & y_3 \\ -y_1 & y_o & -y_3 & y_2 \\ -y_2 & y_3 & y_o & -y_1 \\ -y_3 & -y_2 & y_1 & y_o \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_o & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & x_o & -x_3 & x_2 \\ -x_2 & x_3 & x_o & -x_1 \\ -x_3 & -x_2 & x_1 & x_o \end{pmatrix}\end{cases}$$

Итак, кватерниону можно сопоставить матрицу

$$Q_L=\begin{pmatrix} q_o & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_o & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_o & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_o \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}q_o+\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}q_1+\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}q_2+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}q_3 \qquad \text{либо}$$

$$Q_R=\begin{pmatrix} q_o & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_o & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_o & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_o \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}q_o+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}q_1+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}q_2+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}q_3.$$

Матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}1 \\ \mathbf{i}_o\end{cases}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\tau_1 \\ \mathbf{i}_1\end{cases},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\tau_2 \\ \mathbf{i}_2\end{cases}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\tau_3 \\ \mathbf{i}_3\end{cases}$$

либо

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}1 \\ \mathbf{i}_o\end{cases}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\tau_1 \\ \mathbf{i}_1\end{cases},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_2 \\ \mathbf{i}_2 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_3 \\ \mathbf{i}_3 \end{cases}$$

перемножаются как кватернионные единицы $1, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ или элементы базиса $\mathbf{i}_o, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$.

Отметим ряд свойств матриц Q: $q_{is}q_{sj} = q_{si}q_{sj} = \delta_{ij}\left(q_o^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2\right)$; дополнение к элементу $q_{ij} = \pm q_k$ равно $\pm q_k\left(q_o^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2\right)$; $\det Q = \left(q_o^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2\right)^2$. Итак, если $q_o^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$, имеем дело с ортогональными матрицами поворота. Произведение этих коммутирующих матриц $S^T = Q_L Q_R = Q_R Q_L$ - также ортогональная матрица

$$S = \begin{pmatrix} \sum q_s^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_o^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_oq_3) & 2(q_1q_3 - q_oq_2) \\ 0 & 2(q_2q_1 - q_oq_3) & q_o^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_oq_1) \\ 0 & 2(q_3q_1 + q_oq_2) & 2(q_3q_2 - q_oq_1) & q_o^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix},$$

которая поворачивает векторную часть кватерниона, оставляя неизменной его скалярную часть.

Изоморфизм кватернионов и полученных матриц 4×4 означает, например, возможность описания ортогональных преобразований с помощью этих матриц. Векторам $\mathbf{R} = \mathbf{E}_i X_i$, $\mathbf{r} = \mathbf{e}_i x_i$ сопоставим кватернионы $R = X_o + \tau_i X_i = R_o + \overline{R}$, $r = x_o + \tau_i x_i = r_o + \overline{r}$ и матрицы

$$R_L = \begin{pmatrix} X_o & -X_1 & -X_2 & -X_3 \\ X_1 & X_o & -X_3 & X_2 \\ X_2 & X_3 & X_o & -X_1 \\ X_3 & -X_2 & X_1 & X_o \end{pmatrix}, \quad r_L = \begin{pmatrix} x_o & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_o & -x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_o & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_o \end{pmatrix}$$

либо $R_R = \begin{pmatrix} X_o & X_1 & X_2 & X_3 \\ -X_1 & X_o & -X_3 & X_2 \\ -X_2 & X_3 & X_o & -X_1 \\ -X_3 & -X_2 & X_1 & X_o \end{pmatrix}$, $r_R = \begin{pmatrix} x_o & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & x_o & -x_3 & x_2 \\ -x_2 & x_3 & x_o & -x_1 \\ -x_3 & -x_2 & x_1 & x_o \end{pmatrix}$.

Соответственно кватернионное $R = Q \circ r \circ \widetilde{Q}$ и матричные $R_L = Q_L r_L Q_L^T$, $R_R = Q_R r_R Q_R^T$ выражения дают одинаковый результат $X = S^T x$.

Кватернионам $L = \lambda_o + \tau_1\lambda_1 + \tau_2\lambda_2 + \tau_3\lambda_3$ или векторам $\mathbf{L} = \mathbf{i}_o\lambda_o + \mathbf{i}_1\lambda_1 + \mathbf{i}_2\lambda_2 + \mathbf{i}_3\lambda_3$ можно сопоставить унитарную матрицу 2×2 Кэли (1821-1895)-Клейна (1849-1925):

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_o - i\lambda_3 & -\lambda_2 - i\lambda_1 \\ \lambda_2 - i\lambda_1 & \lambda_o + i\lambda_3 \end{pmatrix} = \sigma_o\lambda_o + \sigma_1\lambda_1 + \sigma_2\lambda_2 + \sigma_3\lambda_3,$$

где матрицы

$$\sigma_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

подчиняются правилам умножения кватернионных единиц $1, \tau_1, \tau_2, \tau_3$. Это позволяет интерпретировать величины $\lambda_o, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ как компоненты вектора в пространстве, "ортами" которого являются матрицы σ_s, $s = 0,1,2,3$.

Изоморфизм кватернионов и матриц Кэли - Клейна означает, например, возможность описания ортогональных преобразований с помощью матриц Кэли-Клейна. Векторам $\mathbf{R} = \mathbf{E}_i X_i$, $\mathbf{r} = \mathbf{e}_i x_i$ сопоставим матрицы

$$R = \begin{pmatrix} X_o - iX_3 & -X_2 - iX_1 \\ X_2 - iX_1 & X_o + iX_3 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} x_o - ix_3 & -x_2 - ix_1 \\ x_2 - ix_1 & x_o + ix_3 \end{pmatrix}$$

и проведем вычисления $R = L \circ r \circ \widetilde{L}$ $\quad (\widetilde{L} = L^{*T})$

$$X_o - iX_3 = x_o - i\left[x_1 2(\lambda_3\lambda_1 - \lambda_o\lambda_2) + x_2 2(\lambda_3\lambda_2 + \lambda_o\lambda_1) + x_3\left(\lambda_o^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right)\right],$$

$$X_2 - iX_1 = \left[x_1 2(\lambda_2\lambda_1 + \lambda_o\lambda_3) + x_2\left(\lambda_o^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right) + x_3 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_o\lambda_1)\right] -$$
$$- i\left[x_1\left(\lambda_o^2 + \lambda_1^2 - \lambda_o^2 - \lambda_3^2\right) + x_2 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3\lambda_o) + x_3 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_o\lambda_2)\right],$$

Итак, $\quad R = S^T r$.

2.4. ДРУГОЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КВАТЕРНИОНОВ. ПРОЦЕДУРА УДВОЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ.

Пользуясь тем, что $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_3$, произвольный кватернион можно представить в виде $X = x_0 + \tau_1 x_1 + \tau_2 x_2 + \tau_3 x_3 = (x_0 + \tau_1 x_1) + (x_2 + \tau_1 x_3) \circ \tau_2$ или $X = X_1 + X_2 \circ \tau_2$, где $X_1 = x_0 + \tau_1 x_1$, $X_2 = x_2 + \tau_1 x_3$. Любой другой кватернион также можно представить в аналогичном виде $Y = Y_1 + Y_2 \circ \tau_2$.

Перемножим эти кватернионы

$$X \circ Y = X_1 \circ Y_1 + (X_2 \circ \tau_2) \circ Y_1 + X_1 \circ (Y_2 \circ \tau_2) + (X_2 \circ \tau_2) \circ (Y_2 \circ \tau_2).$$

Поскольку произведение кватернионов ассоциативно скобки в этом выражении можно опустить. Все элементы X_1, X_2, Y_1, Y_2 однотипны и в произведениях перестановочны как комплексные числа: $X_i \circ Y_j = Y_j \circ X_i$; коме того $\tau_2 \circ Y_1 = \widetilde{Y}_1 \circ \tau_2$, $\tau_2 \circ Y_2 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_2 \circ \widetilde{Y}_2 = -\widetilde{Y}_2$. Итак, имеем

$$X \circ Y = \left(X_1 \circ Y_1 - \widetilde{Y}_2 \circ X_2\right) + \left(Y_2 \circ X_1 + X_2 \circ \widetilde{Y}_1\right) \circ \tau_2.$$

Это выражение есть закон умножения кватернионов, записанных в виде совокупности комплексных чисел. Имеем две мнимые единицы $\tau_1 \circ \tau_1 = -1$, $\tau_2 \circ \tau_2 = -1$ и $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_3$, $\tau_2 \circ \tau_1 = -\tau_3$.

Описанное представление кватернионов называют процедурой удвоения комплексных чисел. Её называют иногда процедурой Кэли-Диксона, по именам А.Кэли- автора октав и Л.Диксона, впервые рассмотревшего эту процедуру.

2.5. УДВОЕНИЕ ГИПЕРКОМПЛЕКСНОЙ СИСТЕМЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОКТАВ.

Удвоением системы гиперкомплесных чисел $X = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots$ с некоторым законом умножения называется новая гиперкомплесная система вдвое большей размерности, элементы которой строятся по правилу $X_1 + X_2 \circ E$,

где E – некоторый символ. Сложение элементов производится естественным образом: $(X_1 + X_2 \circ E) + (Y_1 + Y_2 \circ E) = (X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2) \circ E$,
а умножение определяется по формуле

$$(X_1 + X_2 \circ E) \circ (Y_1 + Y_2 \circ E) = \left(X_1 \circ Y_1 - \widetilde{Y}_2 \circ X_2\right) + \left(Y_2 \circ X_1 + X_2 \circ \widetilde{Y}_1\right) \circ E, \qquad (*)$$

где $\widetilde{Y}_j$ – элементы сопряжённые с Y_j.

Примером может служить переход от комплексных чисел к кватернионам. Полезно убедиться в том, что комплексные числа получаются удвоением действительных.

Системы октав могут быть определены как удвоение системы кватернионов. Все свойства системы октав получаются естественным образом из этого определения. Чтобы не загружать выкладки индексами запишем октаву в виде $ae + bi + cj + dk + AE + BI + CJ + DK$ где $ae + bi + cj + dk$ и $Ae + Bi + Cj + Dk$ – исходные кватернионы. Тогда очевидно, что $eE = E,\ \ iE = I,\ \ jE = J,\ \ kE = K$. Выражение (*) определяет таблицу умножения.

$$\begin{aligned}
&(a_1e + b_1i + c_1j + d_1k + A_1E + B_1I + C_1J + D_1K) \circ \\
&\qquad (a_2e + b_2i + c_2j + d_2k + A_2E + B_2I + C_2J + D_2K) = \\
&= [(a_1e + b_1i + c_1j + d_1k) \circ (a_2e + b_2i + c_2j + d_2k) - \\
&\qquad - (A_2e - B_2i - C_2j - D_2k) \circ (A_1e + B_1i + C_1j + D_1k)] + \\
&+ [(A_2e + B_2i + C_2j + D_2k) \circ (a_1e + b_1i + c_1j + d_1k) + \\
&\qquad + (A_1e + B_1i + C_1j + D_1k) \circ (a_2e - b_2i - c_2j - d_2k)] \circ E
\end{aligned}$$

	a_2e	b_2i	c_2j	d_2k	A_2E	B_2I	C_2J	D_2K
a_1e	e	i	j	k	E	I	J	K
b_1i	i	$-e$	k	$-j$	I	$-E$	$-K$	J
c_1j	j	$-k$	$-e$	i	J	K	$-E$	$-I$
d_1k	k	j	$-i$	$-e$	K	$-J$	I	$-E$
A_1E	E	$-I$	$-J$	$-K$	$-e$	i	j	k
B_1I	I	E	$-K$	J	$-i$	$-e$	$-k$	j
C_1J	J	K	E	$-I$	$-j$	k	$-e$	$-i$
D_1K	K	$-J$	I	E	$-k$	$-j$	i	$-e$

Существует другой способ построения этой таблицы. Он состоит в вычислении произведений элементов следующих семи троек i, j, k $\ -i, J, K$ $\ I, -j, K$ $\ I, J, -k$ $\ i, E, I$ $\ j, E, J$ $\ k, E, K$. Элементы троек перемножаются как τ_1, τ_2, τ_3 в кватернионе $X = x_0 + \tau_1 x_1 + \tau_2 x_2 + \tau_3 x_3$ $(\tau_j \circ \tau_j = -e,\ \ \tau_1 \circ \tau_2 = \tau_3,\ \ \ldots\ \ e \circ e = e,\ \ E \circ E = -e)$. Порядок символов в каждой тройке существен. Вторая, третья и четвёртая тройки получаются из первой изменением знака одного символа и заменой других заглавными. Три последние тройки содержат символ E и два других одноимённых символа.

Октаву $\widetilde{X} = ae - bi - cj - dk - AE - BI - CJ - DK = \widetilde{X}_1 - X_2 \circ E$ называют сопряженной к октаве $X = ae + bi + cj + dk + AE + BI + CJ + DK = X_1 + X_2 \circ E$.
По правилу (*) вычислим теперь произведение $X \circ \widetilde{X} =$

$$= \left(X_1 \circ \widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2 \circ X_2\right) + (-X_2 \circ X_1 + X_2 \circ X_1) \circ E = |X_1|^2 + |X_2|^2 = \|X\| = |X|^2; \quad (**)$$

$\|X\|$ называется нормой октавы, а $|X|$ – её модулем.

Модуль произведения октав равен произведению модулей этих октав

$$|X \circ Y| = |X| \cdot |Y| \qquad \text{или, что эквивалентно} \qquad \|X \circ Y\| = \|X\| \cdot \|Y\|.$$

Доказательство этого равенства проведём вычислением по отдельности правой и левой частей. Согласно (*) и (**)

$$\|X \circ Y\| = \left(X_1 \circ Y_1 - \tilde{Y}_2 \circ X_2\right) \circ \overline{\left(X_1 \circ Y_1 - \tilde{Y}_2 \circ X_2\right)} + \left(Y_2 \circ X_1 + X_2 \circ \tilde{Y}_1\right) \circ \overline{\left(Y_2 \circ X_1 + X_2 \circ \tilde{Y}_1\right)} =$$

$$= \left(X_1 \circ Y_1 - \tilde{Y}_2 \circ X_2\right) \circ \left(\tilde{Y}_1 \circ \tilde{X}_1 - \tilde{X}_2 \circ Y_2\right) + \left(Y_2 \circ X_1 + X_2 \circ \tilde{Y}_1\right) \circ \left(\tilde{X}_1 \circ \tilde{Y}_2 + Y_1 \circ \tilde{X}_2\right) =$$

$$= X_1 \circ Y_1 \circ \tilde{Y}_1 \circ \tilde{X}_1 \underline{- \tilde{Y}_2 \circ X_2 \circ \tilde{Y}_1 \circ \tilde{X}_1} \underline{- X_1 \circ Y_1 \circ \tilde{X}_2 \circ Y_2} + \tilde{Y}_2 \circ X_2 \circ \tilde{X}_2 \circ Y_2 +$$

$$+ Y_2 \circ X_1 \circ \tilde{X}_1 \circ \tilde{Y}_2 \underline{+ X_2 \circ \tilde{Y}_1 \circ \tilde{X}_1 \circ \tilde{Y}_2} \underline{+ Y_2 \circ X_1 \circ Y_1 \circ \tilde{X}_2} + X_2 \circ \tilde{Y}_1 \circ Y_1 \circ \tilde{X}_2.$$

С другой стороны $\quad \|X\| \cdot \|Y\| = \left(X_1 \circ \tilde{X}_1 + X_2 \circ \tilde{X}_2\right) \cdot \left(Y_1 \circ \tilde{Y}_1 + Y_2 \circ \tilde{Y}_2\right) =$

$$= X_1 \circ \tilde{X}_1 \cdot Y_1 \circ \tilde{Y}_1 + X_2 \circ \tilde{X}_2 \cdot Y_1 \circ \tilde{Y}_1 + X_1 \circ \tilde{X}_1 \cdot Y_2 \circ \tilde{Y}_2 + X_2 \circ \tilde{X}_2 \cdot Y_2 \circ \tilde{Y}_2.$$

Эти выражения отличаются на сумму четырёх слагаемых

$$S = Y_2 \circ X_1 \circ Y_1 \circ \tilde{X}_2 + X_2 \circ \tilde{Y}_1 \circ \tilde{X}_1 \circ \tilde{Y}_2 - X_1 \circ Y_1 \circ \tilde{X}_2 \circ Y_2 - \tilde{Y}_2 \circ X_2 \circ \tilde{Y}_1 \circ \tilde{X}_1 \equiv 0,$$

которая, как было показано выше, тождественно равна нулю для любых четырёх кватернионов.

Установленное равенство $|X \circ Y|^2 = |X|^2 \cdot |Y|^2$ означает новый вклад в решение «задачи о сумме квадратов». Имеет место тождество: ***произведение суммы восьми квадратов на сумму восьми квадратов есть снова сумма восьми квадратов.*** Именно поиски тождества для 8 квадратов привели А.Кэли к открытию октав.

Пусть $\quad X = a_1 e + b_1 i + c_1 j + d_1 k + A_1 E + B_1 I + C_1 J + D_1 K$,

$\quad Y = a_2 e + b_2 i + c_2 j + d_2 k + A_2 E + B_2 I + C_2 J + D_2 K$,

а $\quad X \circ Y = Z_0 e + Z_1 i + Z_2 j + Z_3 k + Z_4 E + Z_5 I + Z_6 J + Z_7 K$.

Тождество принимает вид

$$\left(a_1^2 + b_1^2 + ... + C_1^2 + D_1^2\right) \cdot \left(a_2^2 + b_2^2 + ... + C_2^2 + D_2^2\right) = Z_0^2 + Z_1^2 + ... + Z_6^2 + Z_7^2,$$

где

$$Z_0 = a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 - A_1A_2 - B_1B_2 - C_1C_2 - D_1D_2,$$
$$Z_1 = a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2 + A_1B_2 - B_1A_2 - C_1D_2 + D_1C_2,$$
$$Z_2 = a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2 + A_1C_2 + B_1D_2 - C_1A_2 - D_1B_2,$$
$$Z_3 = a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2 + A_1D_2 - B_1C_2 + C_1B_2 - D_1A_2,$$
$$Z_4 = a_1A_2 - b_1B_2 - c_1C_2 - d_1D_2 + A_1a_2 + B_1b_2 + C_1c_2 + D_1d_2,$$
$$Z_5 = a_1B_2 + b_1A_2 - c_1D_2 + d_1C_2 - A_1b_2 + B_1a_2 - C_1d_2 + D_1c_2,$$
$$Z_6 = a_1C_2 + b_1D_2 + c_1A_2 - d_1B_2 - A_1c_2 + B_1d_2 + C_1a_2 - D_1b_2,$$
$$Z_7 = a_1D_2 - b_1C_2 + c_1B_2 + d_1A_2 - A_1d_2 - B_1c_2 + C_1b_2 + D_1a_2$$

либо

$$Z_0 = a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 - A_1A_2 - B_1B_2 - C_1C_2 - D_1D_2,$$
$$Z_1 = b_1a_2 + a_1b_2 - d_1c_2 + c_1d_2 - B_1A_2 + A_1B_2 + D_1C_2 - C_1D_2,$$
$$Z_2 = c_1a_2 + d_1b_2 + a_1c_2 - b_1d_2 - C_1A_2 - D_1B_2 + A_1C_2 + B_1D_2,$$
$$Z_3 = d_1a_2 - c_1b_2 + b_1c_2 + a_1d_2 - D_1A_2 + C_1B_2 - B_1C_2 + A_1D_2,$$
$$Z_4 = A_1a_2 + B_1b_2 + C_1c_2 + D_1d_2 + a_1A_2 - b_1B_2 - c_1C_2 - d_1D_2,$$
$$Z_5 = B_1a_2 - A_1b_2 + D_1c_2 - C_1d_2 + b_1A_2 + a_1B_2 + d_1C_2 - c_1D_2,$$
$$Z_6 = C_1a_2 - D_1b_2 - A_1c_2 + B_1d_2 + c_1A_2 - d_1B_2 + a_1C_2 + b_1D_2,$$
$$Z_7 = D_1a_2 + C_1b_2 - B_1c_2 - A_1d_2 + d_1A_2 + c_1B_2 - b_1C_2 + a_1D_2$$

-суммы произведений элементов перемножаемых октав.
Эти выражения можно трактовать как произведение матрицы строки на квадратную матрицу или как произведение квадратной матрицы на матрицу столбец. В первом случае имеем матрицу

$$Y_R = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ -b_2 & a_2 & -d_2 & c_2 & -B_2 & A_2 & D_2 & -C_2 \\ -c_2 & d_2 & a_2 & -b_2 & -C_2 & -D_2 & A_2 & B_2 \\ -d_2 & -c_2 & b_2 & a_2 & -D_2 & C_2 & -B_2 & A_2 \\ -A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & a_2 & -b_2 & -c_2 & -d_2 \\ -B_2 & -A_2 & D_2 & -C_2 & b_2 & a_2 & d_2 & -c_2 \\ -C_2 & -D_2 & -A_2 & B_2 & c_2 & -d_2 & a_2 & b_2 \\ -D_2 & C_2 & -B_2 & -A_2 & d_2 & c_2 & -b_2 & a_2 \end{pmatrix},$$

а во втором матрицу

$$X_L = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & -c_1 & -d_1 & -A_1 & -B_1 & -C_1 & -D_1 \\ b_1 & a_1 & -d_1 & c_1 & -B_1 & A_1 & D_1 & -C_1 \\ c_1 & d_1 & a_1 & -b_1 & -C_1 & -D_1 & A_1 & B_1 \\ d_1 & -c_1 & b_1 & a_1 & -D_1 & C_1 & -B_1 & A_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & a_1 & -b_1 & -c_1 & -d_1 \\ B_1 & -A_1 & D_1 & -C_1 & b_1 & a_1 & d_1 & -c_1 \\ C_1 & -D_1 & -A_1 & B_1 & c_1 & -d_1 & a_1 & b_1 \\ D_1 & C_1 & -B_1 & -A_1 & d_1 & c_1 & -b_1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, октавы изоморфны матрицам указанной структуры, а элементам e, i, j, k, E, I, J, K можно сопоставить матрицы

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad i = \begin{pmatrix} 0 & \mp 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mp 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mp 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \mp 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mp 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mp 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Многие свойства октав сходны со свойствами кватернионов и комплексных чисел, однако, есть и отличие. ***Для умножения октав ассоциативный закон не выполняется.*** Например, $(i\circ j)\circ E \neq i\circ(j\circ E)$ так как $(i\circ j)\circ E = k\circ E = K$ а $i\circ(j\circ E)=i\circ J=-K$.

Для октав имеет место «ослабленный» вариант ассоциативности $(X\circ Y)\circ Y = X\circ(Y\circ Y)$ и $X\circ(X\circ Y)=(X\circ X)\circ Y$ где $X,Y-$ произвольные октавы.

Системы с такой ассоциативностью называют ***альтернативными***.

Равенство $(X\circ Y)\circ Y = X\circ(Y\circ Y)$ эквивалентно равенству $(X\circ Y)\circ \widetilde{Y} = X\circ(Y\circ \widetilde{Y})$ поскольку $\widetilde{Y}=Y_0-\overline{Y}=2Y_0-Y$, а действительное число и знак не нарушают исходное равенство. Пусть $X=X_1+X_2\circ E,\quad Y=Y_1+Y_2\circ E$, тогда имеем

$$\begin{aligned}(X\circ Y)\circ \widetilde{Y} &= ((X_1+X_2\circ E)\circ(Y_1+Y_2\circ E))\circ(\widetilde{Y}_1-Y_2\circ E)=\\ &=\left((X_1\circ Y_1-\widetilde{Y}_2\circ X_2)+(Y_2\circ X_1+X_2\circ\widetilde{Y}_1)\circ E\right)\circ(\widetilde{Y}_1-Y_2\circ E)=\\ &=\left((X_1\circ Y_1-\widetilde{Y}_2\circ X_2)\circ\widetilde{Y}_1+\widetilde{Y}_2\circ(Y_2\circ X_1+X_2\circ\widetilde{Y}_1)\right)+\\ &+\left((-Y_2)\circ(X_1\circ Y_1-\widetilde{Y}_2\circ X_2)+(Y_2\circ X_1+X_2\circ\widetilde{Y}_1)\circ Y_1\right)\circ E=\\ &=X_1\|Y_1\|+\|Y_2\|X_1+(\|Y_2\|X_2+X_2\|Y_1\|)\circ E = X\circ(Y\circ\widetilde{Y}).\end{aligned}$$

Аналогичным образом доказывается второе равенство $X\circ(X\circ Y)=(X\circ X)\circ Y$ эквивалентное $\widetilde{X}\circ(X\circ Y)=(\widetilde{X}\circ X)\circ Y$.

Ещё одно важное свойство октав, сближающее их с комплексными числами и кватернионами, есть возможность деления. Умножим обе части уравнения $A\circ X=B$ на $\widetilde{A}$.

Тогда $\widetilde{A}\circ(A\circ X)=(\widetilde{A}\circ A)\circ X=\widetilde{A}\circ B \quad\rightarrow\quad X=\dfrac{\widetilde{A}\circ B}{\widetilde{A}\circ A}-$ левое частное.

Аналогичным образом получаем решение уравнения $X\circ A=B$

$$(X\circ A)\circ\widetilde{A}=X\circ(A\circ\widetilde{A})=B\circ\widetilde{A}\quad\rightarrow\quad X=\frac{B\circ\widetilde{A}}{A\circ\widetilde{A}}-\text{правое частное.}$$