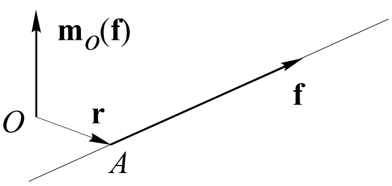
ЛЕКЦИЯ 4.05

ВИНТОВОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. СИСТЕМА СКОЛЬЗЯЩИХ ВЕКТОРОВ, МОТОР И ВИНТ, ФУНКЦИИ ДУАЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ, ДУАЛЬНАЯ ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА, ПРИНЦИП ПЕРЕНЕСЕНИЯ.

3. ВИНТОВОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

3.1. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ВИНТОВ. СИСТЕМА СКОЛЬЗЯЩИХ ВЕКТОРОВ. МОТОР И ВИНТ.

Считая известными определение вектора и все операции над свободными векторами, напомним определение момента вектора относительно некоторой точки.



Моментом $\mathbf{m}_o(\mathbf{f})$ вектора $\mathbf{f}$, приложенного в точке A, относительно точки O называется вектор, равный векторному произведению радиус-вектора $\mathbf{r}$ из точки O в точку A на заданный вектор $\mathbf{f}$, то есть $\mathbf{m}_o(\mathbf{f}) = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$.

Момент не изменится, если вектор $\mathbf{f}$ перемещать по линии его действия либо проводить радиус вектор $\mathbf{r}$ из точки O в любую точку на линии действия вектора $\mathbf{f}$.

Два равных вектора, моменты которых относительно любой точки пространства равны, называются эквивалентными. Следовательно, перемещение вектора в любое положение вдоль его прямой, даёт эквивалентные векторы. Во многих задачах механики твёрдого тела условия задачи сохраняют силу при замене векторов эквивалентными. Такие векторы, определяемые с точность до эквивалентности, то есть которые можно перемещать вдоль линии их действия, называют скользящими.

При рассмотрении системы скользящих векторов вводят понятия главного вектора и главного момента относительно некой точки, полюса O:

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}_k , \quad \mathbf{M}_o = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_{ok} \times \mathbf{f}_k \ . \tag{3.1}$$

При изменении полюса O изменяется только компонента главного момента перпендикулярная главному вектору:

$$\mathbf{M}_o = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_{ok} \times \mathbf{f}_k = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{r}_{oa} + \mathbf{r}_{ak}) \times \mathbf{f}_k = \mathbf{r}_{oa} \times \mathbf{F} + \mathbf{M}_a , \tag{3.2}$$

поэтому скалярное произведение главного вектора и главного момента не зависит от выбора полюса и называется инвариантом системы $\mathbf{F} \cdot \mathbf{M} = I$.

Возможны случаи:

$$\begin{array}{ll} 1.\ \mathbf{F} \neq 0,\ M_o \neq 0,\ I \neq 0; & 2.\ \mathbf{F} \neq 0,\ M_o \neq 0,\ I = 0; \\ 3.\ \mathbf{F} = 0,\ M_o \neq 0; & 4.\ \mathbf{F} = 0,\ M_o = 0. \end{array} \tag{3.3}$$

Две системы скользящих векторов называются эквивалентными, если у них равны главные векторы и главные моменты относительно какой-либо точки пространства. Система скользящих векторов, эквивалентная исходной и содержащая минимальное количество определяющих её векторов, называется простейшей. В общем случае система может быть бесчисленным числом способов приведена к двум скользящим векторам.

Существуют такие точки приведения, для которых главный момент коллинеарен главному вектору. Положив в выражении (3.2) $\mathbf{r}_{oa} = \dfrac{\mathbf{M}_o \times \mathbf{F}}{F^2} + \lambda \mathbf{F}$

получаем $$\mathbf{M}_o = \left(\frac{\mathbf{M}_o \times \mathbf{F}}{F^2} + \lambda \mathbf{F}\right) \times \mathbf{F} + \mathbf{M}_a = \frac{\mathbf{M}_o \cdot \mathbf{F}}{F^2}\mathbf{F} = p\mathbf{F}. \qquad (3.4)$$

Таким образом, имеем прямую $\mathbf{r}_{oa} = \dfrac{\mathbf{M}_o \times \mathbf{F}}{F^2} + \lambda \mathbf{F}$, коллинеарную главному вектору, относительно точек которой главный вектор и главный момент коллинеарны. Эта прямая называется центральной осью системы. Центральная ось системы – единственная прямая, точки которой обладают отмеченным свойством. Главный момент относительно точек центральной оси минимален.

Геометрический образ – ***эквивалент системы векторов, представляемый для любой точки пространства главным вектором и главным моментом системы относительно этой точки, называется мотором***, то есть мотор – совокупность векторов $(\mathbf{F}, \mathbf{M}_o)$. ***Мотор*** $(\mathbf{F}, p\mathbf{F})$***, у которого момент коллинеарен вектору, называется винтом*** ($p-$ ***параметр винта***).

Винт $(\mathbf{F}, p\mathbf{F})$ полностью определяет мотор $(\mathbf{F}, \mathbf{M}_o)$ для любой точки пространства; этот мотор в свою очередь единственным образом определяет винт.

Всякий скользящий вектор $\mathbf{F}$ есть винт $(\mathbf{F}, 0)$ с нулевым параметром, а прямая, на которой он лежит, есть ось этого винта. Всякий момент $\mathbf{M}_o$ есть винт $(0, \mathbf{M}_o)$, осью которого может служить любая прямая ему параллельная (параметр такого винта не имеет смысла).

3.2. ФУНКЦИИ ДУАЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ.

В основе действий над винтами лежат действия над моторами, соответствующих этим винтам. При наличии нескольких винтов выбирается какая-либо точка, и к ней относятся моторы всех винтов.

У.Клиффорд (1845-1879) предложил мотор и эквивалентный ему винт представлять в виде дуального вектора $\mathbf{F} + \varepsilon \mathbf{M}_o$, где $\varepsilon^2 = 0$, что привело к полной аналогии между описанием винтов и описанием векторов. Термин дуальный введён Э.Штуди (1862-1930).

Сначала рассмотрим общие свойства дуальных чисел.

Действия над дуальными числами ассоциативны по отношению к умножению и дистрибутивны по отношению к сложению.

В дуальном числе $A = a + \varepsilon a^o = a[1 + \varepsilon p(A)]$ $a-$главная часть, a^o-моментная часть, $p(A) = \dfrac{a^o}{a}-$параметр. Равенство $A = a + \varepsilon a^o = 0$ означает $a = 0$ и $a^o = 0$. Если $a^o = 0$, то $p(A) = 0$, и число A вещественно. Рассматривая каждое дуальное число формально как сумму, а множитель ε как число, обладающее формально свойством $\varepsilon^2 = 0$, имеем

$$A \pm B = (a \pm b) + \varepsilon(a^o \pm b^o).$$
$$AB = (a + \varepsilon a^o)(b + \varepsilon b^o) = ab + \varepsilon(a^o b + ab^o).$$

Деление возможно при $b \neq 0$:

$$\frac{A}{B} = \frac{(a + \varepsilon a^o)}{(b + \varepsilon b^o)} = \frac{(a + \varepsilon a^o)(b - \varepsilon b^o)}{(b + \varepsilon b^o)(b - \varepsilon b^o)} = \frac{a}{b} + \varepsilon \frac{a^o b - ab^o}{b^2}.$$

Возведение в степень и извлечение корня производится по формулам, которые могут быть проверены с помощью бинома Ньютона (n-целое)

$$A^n = \left(a + \varepsilon\, a^o\right)^n = a^n + \varepsilon\, n a^o a^{n-1},$$

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{a + \varepsilon\, a^o} = \sqrt[n]{a} + \varepsilon \frac{a^o}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}.$$

Особенности извлечения корня переносятся и на алгебраические уравнения с дуальными коэффициентами.

Например, квадратное уравнение $AX^2 + BX + C = 0$ $\rightarrow$ $\left(a + \varepsilon\, a^o\right)\left(x^2 + \varepsilon\, 2xx^o\right) + \left(b + \varepsilon\, b^o\right)\left(x + \varepsilon\, x^o\right) + \left(c + \varepsilon\, c^o\right) = 0$ распадается на два уравнения: $ax^2 + bx + c = 0,\quad a^o x^2 + b^o x + c^o + \left(2ax + b\right)x^o = 0$.

Из первого уравнения определяется $x -$ главная часть корня. Второе уравнение, если $2ax + b \neq 0$ определяет моментную часть корня $x^o = -\dfrac{a^o x^2 + b^o x + c^o}{2ax + b}$.

Если $2ax + b = 0$, то $x = -\dfrac{b}{2a}$, то есть дискриминант первого уравнения равен нулю $b^2 - 4ac = 0$. Для разрешимости исходного уравнения необходимо чтобы и второе уравнение имело тот же корень. Для этого необходимо и достаточно чтобы результант этих уравнений был равен нулю, то есть

$$\begin{vmatrix} a^o & b^o & c^o & 0 \\ 0 & 2a & b & 0 \\ 0 & a^o & b^o & c^o \\ 0 & 0 & 2a & b \end{vmatrix} = 0 \qquad a^o\left(2ab^o b - ba^o b - 4ac^o a\right) = 0,\quad b^2 - 4ac = 0$$

$$\rightarrow\quad a^o a\left(2b^o b - 4a^o c - 4ac^o\right) = 0.$$

Функции дуальной переменной $X = x + \varepsilon\, x^o$ представляют также в виде дуальной величины $F\left(X\right) = U\left(x, x^\circ\right) + \varepsilon V\left(x, x^\circ\right)$ и считают дифференцируемыми. По аналогии с функциями комплексной переменной требуют, чтобы предел отношения $\lim\limits_{\Delta X \to 0} \dfrac{\Delta F}{\Delta X}$, вычисленный в некоторой точке X_o, не зависел от способа стремления X к X_o, а ΔX к нулю. Для этого нужно исключить направления дифференцирования по $\varepsilon \Delta x^o$, так как деление на число с нулевой главной частью невозможно $\Delta x \neq 0$. Итак,

$$\frac{dF}{dX} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta X} = \lim_{\Delta x \to 0, \Delta x^o \to 0} \frac{\Delta U + \varepsilon \Delta V}{\Delta x + \varepsilon \Delta x^o} = \lim_{\Delta x \to 0, \Delta x^o \to 0} \frac{\left(\Delta U + \varepsilon\, \Delta V\right)\left(\Delta x - \varepsilon\, \Delta x^o\right)}{\left(\Delta x + \varepsilon\, \Delta x^o\right)\left(\Delta x - \varepsilon\, \Delta x^o\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0, \Delta x^o \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0, \Delta x^o \to 0} \varepsilon \left(\frac{\Delta V}{\Delta x} - \frac{\Delta U \Delta x^o}{\Delta x \Delta x}\right).$$

Поскольку $\Delta U = \dfrac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial U}{\partial x^o}\Delta x^o,\quad \Delta V = \dfrac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial V}{\partial x^o}\Delta x^o$, получаем

$$\frac{dF}{d\mathrm{X}} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x^o} \lim_{\Delta x \to 0, \Delta x^o \to 0} \frac{\Delta x^o}{\Delta x} +$$

$$+ \varepsilon\left[\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x^o} \lim_{\Delta x \to 0, \Delta x^o \to 0} \frac{\Delta x^o}{\Delta x} - \frac{\partial U}{\partial x} \lim_{\Delta x \to 0, \Delta x^o \to 0} \frac{\Delta x^o}{\Delta x} - \frac{\partial U}{\partial x^o} \lim_{\Delta x \to 0, \Delta x^o \to 0} \left(\frac{\Delta x^o}{\Delta x}\right)^2\right].$$

Чтобы исключить зависимость производной от изменения моментной части аргумента X, необходимо приравнять нулю коэффициенты при

$$\lim_{\Delta x \to 0, \Delta x^o \to 0} \frac{\Delta x^o}{\Delta x} \text{ и } \lim_{\Delta x \to 0, \Delta x^o \to 0} \left(\frac{\Delta x^o}{\Delta x} \right)^2, \qquad \text{то есть положить}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x^o} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x^o} = \frac{\partial U}{\partial x}. \tag{3.5}$$

Это означает, что функция U зависит только от x, то есть $U = f(x)$, а функция V имеет вид $V = x^o \dfrac{d f(x)}{dx} + f^o(x)$, где $f^o(x)$ – некоторая функция от x

Следовательно, общее выражение дифференцируемой функции дуальной переменной $X = x + \varepsilon x^o$ будет $F(X) = f(x) + \varepsilon \left[x^o \dfrac{df(x)}{dx} + f^o(x) \right]$. (3.6)

При вещественном $X = x$ $(x^o = 0)$ функция имеет вид $F(X) = F(x) = f(x) + \varepsilon f^o(x)$, следовательно $f^o(x)$ определяется значением функции $F(X) = F(x)$; а при $x^o \neq 0$ функция представляет собой первые два члена ряда Тейлора, в котором εx^o играет роль приращения.

$$F(X) = \left[f(x) + \varepsilon f^o(x) \right] + \varepsilon x^o \left[\frac{df(x)}{dx} + \varepsilon \frac{df^o(x)}{dx} \right] = f(x) + \varepsilon \left[x^o \frac{df(x)}{dx} + f^o(x) \right].$$

Функция называется аналитической, если ее производная не зависит от направления изменения независимой переменной.

Соотношения (3.5) являются необходимыми и достаточными условиями аналитичности функции дуальной переменной. Как следствие, необходимым и достаточным признаком аналитичности является возможность представить функцию формулой (3.6).

Например, для функции e^X имеем

$$e^X = e^x e^{\varepsilon x^\circ} = e^x + \varepsilon x^\circ \left({de^x}/{dx} \right) = e^x \left(1 + \varepsilon x^\circ \right),$$

откуда следует, что $e^{\varepsilon x^\circ} = \left(1 + \varepsilon x^\circ \right)$.

Тогда любое дуальное число можно представить в виде

$$A = a + \varepsilon\, a^o = a\left(1 + \varepsilon \frac{a^o}{a} \right) = a(1 + \varepsilon\, p) = a \exp(\varepsilon\, p)$$

Из этой формулы следует, что $p(AB) = p(A) + p(B)$, $p\left(\dfrac{A}{B} \right) = p(A) - p(B)$.

За модуль дуального числа A принимают модуль его главной части $|a|$.

Для аналитических функций дуальных величин сохраняются все формулы и теоремы дифференциального и интегрального исчислений

$$\frac{d\left(X^n\right)}{dX} = nX^{n-1}, \quad \frac{de^X}{dX} = e^X, \quad \frac{d\ln X}{dX} = \frac{1}{X},$$

$$\frac{d\sin X}{dX} = \cos X, \quad \frac{d\cos X}{dX} = -\sin X,$$

$$\int X^A dX = \frac{1}{A+1} X^{A+1} + C, \quad \int \cos(AX) dX = \frac{1}{A} \sin(AX) + C.$$

3.3. ДУАЛЬНАЯ ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.

Поскольку моторы выражаются дуальными векторами, то алгебра винтов сводится к алгебре дуальных векторов. Дуальные векторы это - векторы, у которых компоненты есть дуальные числа $\left(\mathbf{A},\mathbf{A}^o\right)\Leftrightarrow \mathbf{A}+\varepsilon\,\mathbf{A}^o=\mathbf{e}_i\left(a^i+\varepsilon\,a^{oi}\right)$.

$\mathbf{A}$ называется главной частью, вектором, а

$\mathbf{A}^o$ -моментной частью, моментом дуального вектора.

Дуальный вектор $\left(\mathbf{A},p\mathbf{A}\right)\Leftrightarrow \mathbf{A}+\varepsilon p\mathbf{A}$, у которого момент пропорционален вектору, называется винтом, p - параметр винта. Дуальные векторы типа $\left(0,\mathbf{A}^o\right)\Leftrightarrow\varepsilon\mathbf{A}^o$ также считаются винтами; параметр такого винта не определен, а сам винт называют особенным.

Винт с параметром, равным нулю, у которого модуль главной части равен единице, называется единичным винтом $\boldsymbol{E}\Leftrightarrow(\mathbf{e},0)\Leftrightarrow\mathbf{e}+\varepsilon 0$, то есть единичный винт $(\mathbf{e},0)$ – единичный скользящий вектор.

Момент единичного вектора относительно точки O обозначают символом $\mathbf{e}^o=\mathbf{m}^o(\mathbf{e})=\mathbf{r}\times\mathbf{e}$. Единичному винту можно сопоставить мотор. Мотором единичного винта относительно точки O называют дуальный вектор $\boldsymbol{E}\Leftrightarrow\left(\mathbf{e},\mathbf{e}^o\right)\Leftrightarrow\left(\mathbf{e}+\varepsilon\,\mathbf{e}^o\right)$, где $\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}=1$, $\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^o=0$ и $\boldsymbol{E}^2\Leftrightarrow\left(\mathbf{e}+\varepsilon\,\mathbf{e}^o\right)^2=\mathbf{e}^2+2\varepsilon\,\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^o=1$.

При умножении мотора единичного винта на вещественное число имеем $\mathbf{A}=\boldsymbol{E}a\Leftrightarrow\left(\mathbf{e}a,\mathbf{e}^o a\right)\Leftrightarrow\left(\mathbf{e}a+\varepsilon\,\mathbf{e}^o a\right)$. Момент относительно точек оси нового винта (3.4) также как момент относительно точек оси единичного винта равен нулю:

$$\left(\frac{\mathbf{e}^o a\times\mathbf{e}a}{\mathbf{e}a\cdot\mathbf{e}a}+\lambda\mathbf{e}a\right)\times\mathbf{e}a+\mathbf{e}^o a=\mathbf{e}a\frac{\mathbf{e}^o a\cdot\mathbf{e}a}{\mathbf{e}a\cdot\mathbf{e}a}-\mathbf{e}^o a\frac{\mathbf{e}a\cdot\mathbf{e}a}{\mathbf{e}a\cdot\mathbf{e}a}+\mathbf{e}^o a=0.$$

При умножении единичного винта на дуальное число получаем винт

$$\mathbf{E}A\Leftrightarrow\left(\mathbf{e}+\varepsilon 0\right)\left(a+\varepsilon a^o\right)=\mathbf{e}a+\varepsilon\mathbf{e}a^o\Leftrightarrow\mathbf{e}a\left(1+\varepsilon\frac{a^o}{a}\right)=\mathbf{e}a\exp\left(\varepsilon p\right)\Leftrightarrow\left(\mathbf{A},p\mathbf{A}\right).$$

В связи с этим винт, моментная часть которого не равна нулю, определяют как произведение единичного винта и дуального числа. Дуальное число $A=|\mathbf{A}|=|a|\exp\left(\varepsilon\frac{a^o}{a}\right)=|a|\exp\left(\varepsilon p\right)$ называют дуальным модулем винта $(\mathbf{A},p\mathbf{A})$.

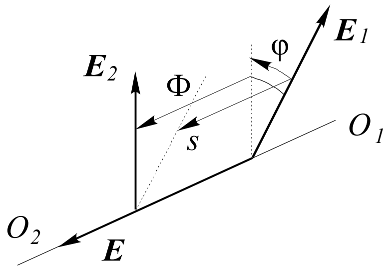
Умножение произвольного винта $\left(\mathbf{R},\mathbf{R}^o\right)$ на дуальное число A даёт $\left(\mathbf{R},\mathbf{R}^o\right)A\Leftrightarrow\left(\mathbf{e}r+\varepsilon\mathbf{e}r^o\right)\left(a+\varepsilon a^o\right)=\mathbf{e}ra+\varepsilon\left(\mathbf{e}r^o a+\mathbf{e}ra^o\right)=\mathbf{e}ra\left[1+\varepsilon\left(\frac{r^o}{r}+\frac{a^o}{a}\right)\right]$, то есть при умножении произвольного винта на дуальное число его ось остаётся неизменной.

Вектор $\mathbf{m}^o(\mathbf{A})=p\mathbf{A}+\mathbf{r}\times\mathbf{A}=\mathbf{A}^o$ называется моментом винта $(\mathbf{A},p\mathbf{A})$ относительно точки O. Винт $(\mathbf{A},p\mathbf{A})$ полностью определяет мотор $(\mathbf{A},p\mathbf{A}+\mathbf{r}\times\mathbf{A})$ для любой точки пространства; этот мотор в свою очередь единственным образом определяет параметр винта, и следовательно, сам винт $p=\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^o\right)/\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\right)=\mathbf{A}\cdot\left(p\mathbf{A}+\mathbf{r}\times\mathbf{A}\right)/\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\right)$. Моментная часть мотора винта имеет минимальное значение для точек $\mathbf{r}=\alpha\mathbf{A}$ оси винта $\min\mathbf{A}^o=p\mathbf{A}$. При переходе к какой-либо другой точке пространства момент винта увеличивается, получая приращение, перпендикулярное вектору винта $\mathbf{A}^o{}_{\perp\mathbf{A}}=\mathbf{r}\times\mathbf{A}$.

Компонента момента винта, параллельная вектору винта, остается неизменной $\mathbf{A}^o{}_{//\mathbf{A}} = p\mathbf{A} \quad \left(\mathbf{A}^o = \mathbf{A}^o{}_{//\mathbf{A}} + \mathbf{A}^o{}_{\perp\mathbf{A}}\right)$.

Таким образом, любой дуальный вектор $\left(\mathbf{A}, \mathbf{A}^o\right)$, заданный в некоторой точке O, можно рассматривать, как мотор винта $\left(\mathbf{A}, p\mathbf{A}\right)$ для этой точки O. Выбором точки приведения на оси винта компонента $\mathbf{A}^o{}_{\perp\mathbf{A}}$ моментной части дуального вектора может быть обращена в нуль. Полагая $\mathbf{r} = -\dfrac{\mathbf{A}\times\mathbf{A}^o}{A^2}$, получаем

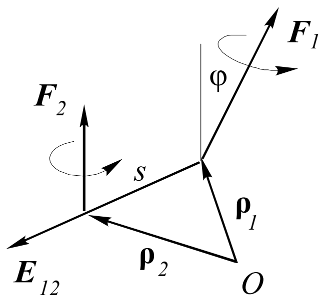
$$\mathbf{A}^c = \mathbf{A}^o + \mathbf{r}\times\mathbf{A} = \mathbf{A}^o - \frac{\mathbf{A}\times\mathbf{A}^o}{A^2}\times\mathbf{A} = \mathbf{A}\frac{\mathbf{A}^o\cdot\mathbf{A}}{A^2} = p\mathbf{A}.$$



Фигуру, образованную двумя скрещивающимися осями $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$ и отрезком прямой O_1O_2, пересекающей эти оси под прямым углом, называют дуальным углом. Направление прямой O_1O_2 задают также единичным вектором $\boldsymbol{E}$ и называют его осью дуального угла. Для приведения единичного вектора $\boldsymbol{E}_1$ к совпадению с единичным вектором $\boldsymbol{E}_2$ необходимо оси $\boldsymbol{E}_1$ сообщить винтовое движение, состоящее из смещения на расстояние $\varphi^o = O_1O_2 = s$ вдоль оси $\boldsymbol{E}$ и поворота на угол φ вокруг оси $\boldsymbol{E}$. Дуальное число $\Phi = \varphi + \varepsilon\varphi^\circ = \varphi + \varepsilon s$ принимают за меру дуального угла между осями $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$. Числа φ, φ° считаются положительными, если вращение происходит в положительную сторону, а смещение в положительном направлении $\boldsymbol{E}$. Можем, например, написать

$$\cos\Phi = \cos\varphi - \varepsilon\varphi^o\sin\varphi, \quad \sin\Phi = \sin\varphi + \varepsilon\varphi^o\cos\varphi,$$

$$tg\Phi = tg\varphi + \varepsilon\varphi^o\left(1 + tg^2\varphi\right). \qquad (3.7)$$



Под скалярным произведением двух винтов понимают дуальное число, равное скалярному произведению их моторов, отнесенных к какой-либо точке приведения. Пусть заданы два винта $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{E}_1 f_1 \exp(\varepsilon p_1)$ $\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{E}_2 f_2 \exp(\varepsilon p_2)$, оси $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$ которых образуют дуальный угол $\Phi = (\varphi + \varepsilon\, s)$.

Моторы этих винтов, отнесённые к какой-либо точке O, представим дуальными векторами $\boldsymbol{F}_1 = \mathbf{f}_1 + \varepsilon\mathbf{f}_1^o = \mathbf{f}_1 + \varepsilon\left(\, p_1\mathbf{f}_1 + \boldsymbol{\rho}_1\times\mathbf{f}_1\right)$,

$$\boldsymbol{F}_2 = \mathbf{f}_2 + \varepsilon\mathbf{f}_2^o = \mathbf{f}_2 + \varepsilon\left(\, p_2\mathbf{f}_2 + \boldsymbol{\rho}_2\times\mathbf{f}_2\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{F}_2 &= \left(\mathbf{f}_1 + \varepsilon\,\mathbf{f}_1^o\right)\cdot\left(\mathbf{f}_2 + \varepsilon\,\mathbf{f}_2^o\right) = \mathbf{f}_1\cdot\mathbf{f}_2 + \varepsilon\left(\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{f}_2^o + \mathbf{f}_1^o\cdot\mathbf{f}_2\right) = \\ &= \mathbf{f}_1\cdot\mathbf{f}_2 + \varepsilon\left[\left(p_1 + p_2\right)\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_1\left(\boldsymbol{\rho}_2\times\mathbf{f}_2\right) + \mathbf{f}_2\left(\boldsymbol{\rho}_1\times\mathbf{f}_1\right)\right] = \\ &= \mathbf{f}_1\cdot\mathbf{f}_2 + \varepsilon\left[\left(p_1 + p_2\right)\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{f}_2 - \left(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1\right)\left(\mathbf{f}_1\times\mathbf{f}_2\right)\right] = \\ &= f_1 f_2\cos\varphi + \varepsilon\left[\left(p_1 + p_2\right)f_1 f_2\cos\varphi - s f_1 f_2\sin\varphi\right] = \\ &= f_1\exp\left(\varepsilon\; p_1\right)f_2\exp\left(\varepsilon\; p_2\right)\left(\cos\varphi - \varepsilon\, s\sin\varphi\right) = F_1F_2\cos\Phi\end{aligned} \qquad (3.8)$$

то есть скалярное произведение двух винтов равно произведению их дуальных модулей на косинус дуального угла между ними. Скалярное произведение двух винтов равно нулю, если $\cos\Phi = 0$, то есть $\varphi = \pi/2$ и $s = 0$.

Если перемножаемые винты есть просто скользящие векторы, то

$$\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2 = f_1 f_2 (\cos\varphi - \varepsilon\, s \sin\varphi) = f_1 f_2 \cos\Phi \,.$$

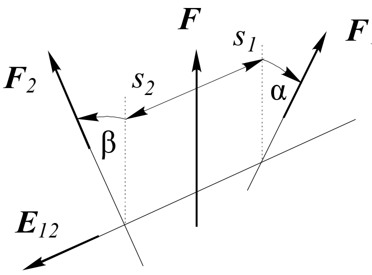
Величина $\varepsilon\left(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2{}^o + \mathbf{f}_1{}^o \cdot \mathbf{f}_2\right) = \varepsilon\, f_1 f_2 \left[(p_1 + p_2)\cos\varphi - s\sin\varphi\right]$, называемая относительным моментом винтов, не зависит от точки, к которой приведены моторы винтов и поэтому является их общим инвариантом.

Под винтовым произведением двух винтов понимают винт, мотор которого для произвольной точки пространства равен векторному произведению моторов заданных винтов для этой же точки. В качестве точки приведения выберем точку пересечения первого винта и оси дуального угла между винтами

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2 &= \left[\mathbf{f}_1 + \varepsilon\, p_1 \mathbf{f}_1\right] \times \left[\mathbf{f}_2 + \varepsilon\left(p_2 \mathbf{f}_2 + \boldsymbol{E}_{12} s \times \mathbf{f}_2\right)\right] = \\
&= \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 + \varepsilon\left[(p_1 + p_2)\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_1 \times \left(\boldsymbol{E}_{12} s \times \mathbf{f}_2\right)\right] = \\
&= \boldsymbol{E}_{12} f_1 f_2 \left\{\sin\varphi + \varepsilon\left[(p_1 + p_2)\sin\varphi + s\cos\varphi\right]\right\} = \\
&= \boldsymbol{E}_{12} f_1 \exp(\varepsilon\, p_1) f_2 \exp(\varepsilon\, p_2)(\sin\varphi + \varepsilon\, s\cos\varphi) = \boldsymbol{E}_{12} F_1 F_2 \sin\Phi
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Итак, винтовое произведение двух винтов есть винт, ось которого пересекает под прямым углом оси перемножаемых винтов; вектор оси имеет направление векторного произведения векторов этих винтов; дуальный модуль винтового произведения равен произведению дуальных модулей этих винтов на синус угла, образуемого их осями.

Очевидно, что $\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_2 \times \mathbf{F}_1$. Винт $\mathbf{F}_1 \times \varepsilon\, \mathbf{f}_2{}^o = \varepsilon\, \mathbf{F}_1 \times \mathbf{f}_2{}^o$ представляет собой пару. Осью этой пары служит любая прямая перпендикулярная параллельным плоскостям, в которых лежат перемножаемые винты.



Рассмотрим операцию сложения двух винтов $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$. Умножим винт $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ скалярно на единичный винт $\boldsymbol{E}_{12}$ оси угла, образуемого винтами $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$: $\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{E}_{12} = \mathbf{F}_1 \cdot \boldsymbol{E}_{12} + \mathbf{F}_2 \cdot \boldsymbol{E}_{12} = 0$. Таким образом, винт $\mathbf{F}$ пересекает ось $\boldsymbol{E}_{12}$ под прямым углом. Обозначим дуальные углы между винтами $\mathbf{F}, \mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}, \mathbf{F}_2$ соответственно $A = \alpha + \varepsilon a$ и $B = \beta + \varepsilon b$. Спроектируем равенство $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ сначала на ось винта $\mathbf{F}_1$, а затем на ось винта $\mathbf{F}_2$, умножив на соответствующие единичные векторы $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$:

$$F\cos A = F_1 + F_2 \cos(A+B), \quad F\cos B = F_1 \cos(A+B) + F_2 \,.$$

Поскольку $F = |\mathbf{F}|, \quad F_1 = |\mathbf{F}_1|, \quad F_2 = |\mathbf{F}_2|$ имеем $F\sin A = F_2 \sin(A+B), \quad F\sin B = F_1 \sin(A+B)$.

Объединяя эти два соотношения, получаем аналог теоремы синусов

$$\frac{F_1}{\sin B} = \frac{F}{\sin(A+B)} = \frac{F_2}{\sin A} \tag{3.10}$$

или

$$\frac{f_1 \exp(\varepsilon p_1)}{\sin\beta + \varepsilon b\cos\beta} = \frac{f\exp(\varepsilon p)}{\sin(\alpha+\beta) + \varepsilon(a+b)\cos(\alpha+\beta)} = \frac{f_2 \exp(\varepsilon p_2)}{\sin\alpha + \varepsilon a\cos\alpha}$$

Если $\mathbf{F}$ есть сумма двух винтов $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, то между дуальными модулями этих винтов и дуальными углами, образуемыми их осями, существует соотношение (3.10), аналогичное соотношению между сторонами и углами в треугольнике, но с заменой вещественных величин дуальными.

Модуль и параметр суммы двух винтов находим из равенства

$$\mathbf{F}^2 = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)^2 = \mathbf{F}_1{}^2 + 2\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_2{}^2 \quad \Leftrightarrow \quad F^2 = F_1{}^2 - 2F_1 F_2 \cos(A+B) + F_2{}^2 \tag{3.11}$$

или $$f^2\exp(2\varepsilon p)=f_1^2\exp(2\varepsilon p_1)+f_2^2\exp(2\varepsilon p_2)-$$
$$-2f_1f_2\exp\left[\varepsilon(p_1+p_2)\right]\left[\cos(\alpha+\beta)-\varepsilon(a+b)\sin(\alpha+\beta)\right].$$
По отделении главной и моментной частей в соотношениях (3.10) и (3.11) находим все величины.

Полученные выражения можно трактовать, как формулы для «раздвинутого» треугольника, то есть треугольника, у которого стороны смещены параллельно его плоскости.
Отметим, что разность двух винтов получается заменой в соответствующих выражениях $\mathbf{F}_2$ на $-\mathbf{F}_2$. Обобщением суммы двух векторов является линейная комбинация $\mathbf{F}=A\mathbf{F}_1+B\mathbf{F}_2$, где A,B – дуальные числа.

Наметившаяся аналогия между геометрией и дуальной геометрией может быть развита рассмотрением дуальных векторов в дуальном трёхмерном пространстве.

Пусть ось винта $\mathbf{R}=\boldsymbol{E}R=\boldsymbol{E}r\exp(\varepsilon\, p)$ образует с осями x,y,z прямоугольной системы координат соответственно дуальные углы
$$A=\alpha+\varepsilon\,\alpha^o,\quad B=\beta+\varepsilon\,\beta^o,\quad \Gamma=\gamma+\varepsilon\,\gamma^o.$$
Проекции винта на указанные оси будут
$$\begin{aligned}X&=x+\varepsilon\,x^o=R\cos A=r\left[\cos\alpha+\varepsilon\left(p\cos\alpha-\alpha^o\sin\alpha\right)\right],\\ Y&=y+\varepsilon\,y^o=R\cos B=r\left[\cos\beta+\varepsilon\left(p\cos\beta-\beta^o\sin\beta\right)\right],\\ Z&=z+\varepsilon\,z^o=R\cos\Gamma=r\left[\cos\gamma+\varepsilon\left(p\cos\gamma-\alpha^o\sin\gamma\right)\right].\end{aligned}\tag{3.12}$$
Главные части этих выражений суть прямоугольные координаты вектора $\mathbf{r}$, а моментные части суть прямоугольные координаты момента $\mathbf{r}^o$ винта относительно начала координат, или моменты винта относительно координатных осей. Итак, винт равен сумме своих ортогональных составляющих по осям прямоугольной системы координат $\mathbf{R}=\mathbf{i}X+\mathbf{j}Y+\mathbf{k}Z$. Квадрат дуального модуля винта распадается на квадрат длины вектора и скалярное произведение вектора на момент: $R^2=X^2+Y^2+Z^2=x^2+y^2+z^2+2\varepsilon\left(xx^o+yy^o+zz^o\right)$.

На основании (3.12) $R^2=R^2\left(\cos^2A+\cos^2B+\cos^2\Gamma\right)$ и
$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2\Gamma=1$$ или
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,\quad \alpha^o\cos\alpha\sin\alpha+\beta^o\cos\beta\sin\beta+\gamma^o\cos\gamma\sin\gamma=0.$$
Без труда получаются выражения скалярного и винтового произведения винтов через их дуальные прямоугольные координаты. С помощью дуальных прямоугольных координат легко получаются выражения для более сложных произведений винтов: $\mathbf{R}_1\cdot(\mathbf{R}_2\times\mathbf{R}_3)=\mathbf{R}_2\cdot(\mathbf{R}_3\times\mathbf{R}_1)=\mathbf{R}_3\cdot(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2)$,
$$\mathbf{R}_1\times(\mathbf{R}_2\times\mathbf{R}_3)=\mathbf{R}_2(\mathbf{R}_1\cdot\mathbf{R}_3)-\mathbf{R}_3(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2),$$
$$(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2)\cdot(\mathbf{R}_3\times\mathbf{R}_4)=(\mathbf{R}_1\cdot\mathbf{R}_3)(\mathbf{R}_2\cdot\mathbf{R}_4)-(\mathbf{R}_1\cdot\mathbf{R}_4)(\mathbf{R}_2\cdot\mathbf{R}_3),$$
$$(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2)\times(\mathbf{R}_3\times\mathbf{R}_4)=\mathbf{R}_2[\mathbf{R}_1\cdot(\mathbf{R}_3\times\mathbf{R}_4)]-\mathbf{R}_1[\mathbf{R}_2\cdot(\mathbf{R}_3\times\mathbf{R}_4)]=$$
$$=\mathbf{R}_3[\mathbf{R}_1\cdot(\mathbf{R}_2\times\mathbf{R}_4)]-\mathbf{R}_4[\mathbf{R}_1\cdot(\mathbf{R}_2\times\mathbf{R}_3)].$$

Преобразование дуальных компонент винта при переходе от одной прямоугольной системы координат $OXYZ$ к другой $oxyz$ определяется дуальной матрицей поворота, элементы которой суть косинусы дуальных углов между осями этих систем координат $S_{ij}=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{E}_j=\cos A_{ij}$. Свойства элементов этой дуальной матрицы аналогичны свойствам обычной матрицы поворота:
$$S_{i\alpha}S_{j\alpha}=\delta_{ij},\quad S_{\alpha i}S_{\alpha j}=\delta_{ij},\quad S_{11}=S_{22}S_{33}-S_{23}S_{32},\quad \ldots$$

В 1873 году У.Клиффорд дал оригинальное описание движения твердого тела с помощью бикватерниона, то есть кватерниона, у которого компонентами являются величины $a+\varepsilon a^{o}$, где a, a^{o} - вещественные или комплексные числа и $\varepsilon^{2}=0$.

Итак, дуальные кватернионы или бикватернионы $\boldsymbol{A}=A_{o}+A_{1}\mathbf{i}+A_{2}\mathbf{j}+A_{3}\mathbf{k}$ представляют собой систему гиперкомплексных чисел, составленных из четырёх единиц $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ различной природы и отличающиеся от общеизвестных кватернионов тем, что при их координатном выражении координаты $A_{\nu}=a_{\nu}+\varepsilon\, a_{\nu} -$ дуальные числа.

Число $A_{o}=a_{o}+\varepsilon\, a_{\nu}^{\circ} -$ дуальный скаляр,

$A_{1}\mathbf{i}+A_{2}\mathbf{j}+A_{3}\mathbf{k}=\mathbf{A}-$ дуальный вектор или винт бикватерниона,

$$|\mathbf{A}|=\sqrt{A_{o}^{2}+A_{1}^{2}+A_{2}^{2}+A_{3}^{2}}=\sqrt{\left(a_{o}^{2}+a_{1}^{2}+a_{2}^{2}+a_{3}^{2}\right)+2\varepsilon\left(a_{o}a_{o}^{\circ}+a_{1}a_{1}^{\circ}+a_{2}a_{2}^{\circ}+a_{3}a_{3}^{\circ}\right)}=$$

$$=\sqrt{a_{o}^{2}+a_{1}^{2}+a_{2}^{2}+a_{3}^{2}}+\varepsilon\frac{a_{o}a_{o}^{\circ}+a_{1}a_{1}^{\circ}+a_{2}a_{2}^{\circ}+a_{3}a_{3}^{\circ}}{\sqrt{a_{o}^{2}+a_{1}^{2}+a_{2}^{2}+a_{3}^{2}}} -$$ дуальный модуль бикватерниона.

Бикватернион может быть представлен в виде $\boldsymbol{A}=A_{o}+|\mathbf{A}|\boldsymbol{E}=$

$$=|\boldsymbol{A}|\left(\frac{A_{o}}{|\boldsymbol{A}|}+\frac{|\mathbf{A}|}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{E}\right)=|\boldsymbol{A}|(\cos\Phi+\boldsymbol{E}\sin\Phi),$$ где $\Phi=\varphi+\varepsilon\, s-$ дуальный аргумент бикватерниона.

$\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=A_{o}B_{o}+A_{o}\mathbf{B}+\mathbf{A}B_{o}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{B}-$ произведение двух бикватернионов.

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(\cos\Phi-\boldsymbol{E}\sin\Phi)=\frac{A_{o}-A_{1}\mathbf{i}-A_{2}\mathbf{j}-A_{3}\mathbf{k}}{A_{o}^{2}+A_{1}^{2}+A_{2}^{2}+A_{3}^{2}} -$$ обратное значение бикватерниона.

С помощью обратного значения бикватернионов осуществляется «деление» винтов. Полагая $A_{o}=0$ в выражении обратного бикватерниона, получаем обратное значение винта $$\mathbf{A}^{-1}=-\frac{A_{1}\mathbf{i}+A_{2}\mathbf{j}+A_{3}\mathbf{k}}{A_{1}^{2}+A_{2}^{2}+A_{3}^{2}}.$$

Далее равенства $\mathbf{A}\circ\boldsymbol{X}=\mathbf{B}, \quad \boldsymbol{Y}\circ\mathbf{A}=\mathbf{B}$ приводят к бикватернионам

$$\boldsymbol{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}=-\frac{\mathbf{A}\circ\mathbf{B}}{|\mathbf{A}|^{2}}=\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}-\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{|\mathbf{A}|^{2}}, \quad \boldsymbol{Y}=-\frac{\mathbf{B}\circ\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|^{2}}=\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{|\mathbf{A}|^{2}}.$$

Единичный бикватернион имеет вид $\mathbf{E}=(\cos\Phi+\boldsymbol{E}\sin\Phi)$.

Отметим параллелизм операций над винтами, с формулами обыкновенной векторной алгебры:

Вектор	Винт
Модуль вектора	Дуальный модуль винта
Угол между прямыми	Дуальный угол между прямыми
Скалярное произведение векторов	Скалярное произведение винтов
Векторное произведение векторов	Винтовое произведение винтов
Сумма векторов	Сумма винтов

Этот параллелизм есть следствие замены вектора мотором и формальным выражением последнего в виде дуального вектора с множителем ε, квадрат которого равен нулю, а также введением понятия дуального модуля вектора и понятия дуального угла между прямыми в пространстве. Отмеченное свойство приводит к общему положению, которое составляет принцип перенесения для дуальной векторной алгебры –алгебры винтов.

Если известна какая-либо теорема для одной геометрии, то она автоматически переносится на другую геометрию и эту вторую геометрию можно изучать средствами первой с той только поправкой, что во второй геометрии результаты интерпретируются с помощью иных геометрических понятий.

Принцип перенесения для дуальной векторной алгебры –алгебры винтов установили независимо друг от друга А.Котельников (1865-1944) и Э.Штуди. В 1895 году А.Котельникову удалось истолковать все формулы теории кватернионов, как «неразвернутые» формулы теории бикватернионов, то есть установить полную аналогию тех и других формул. Например, применительно к кинематике эта аналогия устанавливает соотношение между сферическими движениями (движениями тела с одной неподвижной точкой) и движениями произвольного вида.