ЛЕКЦИЯ 4.01

КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК; НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ СОВРЕМЕННОЙ АЛГЕБРЫ; ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ; ДВУМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО; АРИФМЕТИКИ ДЛЯ ЧИСЛА $a+ib$.

0. КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

Кватернионы встречаются в XVIII веке в работах Л.Эйлера, К.Ф.Гаусса по теории чисел. Б.О.Родригес при изучении сложения поворотов твёрдого тела в 1840 году пришёл к закону, эквивалентному правилу умножения кватернионов. Тем не менее создателем кватернионного исчисления принято считать В.Р.Гамильтона (1805-1865). В 1843 году он независимо открыл кватернионы в результате поиска алгебраических объектов, имеющих в трёхмерном пространстве ту же геометрическую интерпретацию, что и комплексные числа на плоскости.

В последующем развитии теории кватернионов и их приложений следует условно выделить три этапа.

К первому можно отнести чисто алгебраические работы А.Кэли, В.К.Клиффорда, Б.Пирса, К.С.Пирса, Г.Фробениуса, выполненные в период с 1850 по 1900 годы, в которых была установлена связь кватернионов с матрицами и определено место кватернионов в системе различных алгебр, доказаны положения, называемые теоремами Фробениуса и Гурвица.

Второе направление связано в основном с именами В.К.Клиффорда (1845-1878) и А.П.Котельникова (1865-1944).

В работах Пуансо, Мёбиуса и Шаля установлена эквивалентность произвольного и винтового перемещений тела, сформулировано понятие винта, развитое в работах Плюккера. Р.Болл дал всестороннее исследование винтов.

Клиффорд применил к теории винтов параболические (определённые над дуальными числами) и эллиптические (определённые над двойными числами) бикватернионы. Дуальные и двойные числа введены им как обобщение обычных комплексных чисел. С помощью дуальных чисел можно дать описание винтов в обычном трехмерном евклидовом пространстве, а с помощью двойных чисел - в пространстве постоянной положительной кривизны (эллиптическом пространстве Римана). Х.Кокс в 1883 году показал, что гиперболические (определённые над комплексными числами) бикватернионы могут быть использованы для описания винтов в трёхмерном пространстве постоянной отрицательной кривизны (гиперболическом пространстве Лобачевского).

Считается, что наиболее полно и последовательно винтовое ичисление развито в работах А.П.Котельникова по теории векторов неевклидовых пространств. Близкие к работам А.П.Котельнокова исследования были выполнены Э.Штуди.

В результате выяснилось, что статика и кинематика в трёхмерных пространствах Евклида, Лобачевского, Римана (постоянной кривизны) полностью определяются группой движения этих пространств.

Новую жизнь эти идеи получили в связи с позицией А.Пуанкаре о произвольности выбора геометрии для описания физических явлений. При этом выборе - соглашении, определяющими являются соображения математического удобства.

Третье направление развития кватернионного исчисления и его физических приложений можно условно характеризовать как аналитическое.

Для обозначения электрического и магнитного полей Дж.К.Максвелл использовал кватернионы. Развитие теории электромагнитизма в работах О.Хевисайда побудили его построить для трёхмерного евклидова пространства векторное исчисление фактически не связанное с кватернионами, в котором отдельно определены скалярное и векторное произведения векторов. Независимо от О.Хевисайда векторное исчисление было построено Д.В.Гиббсом. К концу позапрошлого – началу прошлого века точка зрения приверженцев векторного исчисления, независимого от кватернионов, восторжествовала.

Как известно, уравнения Дж.К.Максвелла явились исходным пунктом в создании специальной теории относительности. Четырёхмерная формулировка дана в 1908 году Г.Минковским. В 1911 году А.В.Конвей (1875-1950) и независимо в 1912 году Л.Зильберштейн построили кватернионный аналог специальной теории относительности. При этом выяснилось, что использование полных кватернионов, а не только их векторных частей, предоставляет естественную возможность записи уравнений Максвелла в виде явно ковариантном относительно преобразований Лоренца. Такая запись уравнений Максвелла полностью эквивалентна их тензорной формулировке.

Условия, подобные уравнениям Максвелла, легли в основу теории кватернионной аналитичности, построенной Р.Фюттером примерно в 30-е годы прошлого столетия.

Имеются попытки использования кватернионов в физике элементарных частиц и в общей теории относительности.

1. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ СОВРЕМЕННОЙ АЛГЕБРЫ

Группой называется множество G для любых элементов, которого определена бинарная ассоциативная операция $g_1 g_2 \in G$, $(g_1 g_2)g_3 = g_1(g_2 g_3) \in G$; существует единичный элемент $e \in G$ такой, что $eg = ge = g$ для любого $g \in G$; для каждого $g \in G$ существует один и только один обратный элемент $g^{-1} \in G$ такой, что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$, $\left(g^{-1}\right)^{-1} = g$.

Группа называется коммутативной (или абелевой), если $g_1 g_2 = g_2 g_1$ для всех $g_1, g_2 \in G$ и некоммутативной в противном случае. В случае коммутативной группы вместо $g_1 g_2 \in G$ пишут также $g_1 + g_2 \in G$ и тогда единичный элемент обозначают через 0 . При таком обозначении бинарной операции говорят, что группа задана в аддитивной записи.

Кольцом называется непустое множество K, для элементов которого определены две бинарные операции – сложение и умножение (обозначаемые соответственно $+$ и $*$).

Сложение коммутативно, ассоциативно и обратимо: $a + b = b + a$, $a + (b + c) = (a + b) + c \quad a,b,c \in K$, $\quad a + x = b \to x = b - a \in K$. Элементы кольца образуют абелеву группу относительно сложения; она называется аддитивной группой кольца. Нуль “0” этой группы относительно умножения является “поглощающим” элементом, то есть $a * 0 = 0 * a = 0$ для любого элемента $a \in K$ кольца.

Умножение дистрибутивно относительно сложения

$$a * (b + c) = a * b + a * c, \quad (b + c) * a = b * a + c * a .$$

Кольцо может содержать делители нуля, то есть такие ненулевые элементы $a, b \in K$, что $a * b = 0$. Единицей кольца называется такой элемент $e \in K$, что $a * e = e * a = a$ для всех $a \in K$. Кольцо не обязано обладать единицей, но если она есть, то только одна.

Тело - кольцо, в котором каждое из уравнений $a * x = b, \quad y * a = b$ при $a \neq 0$ имеет единственное решение. Коммутативное, ассоциативное тело называется ***полем*** .

Поле - особый подкласс колец, множество, содержащее не менее двух элементов, на котором заданы две бинарные алгебраические операции – сложение и умножение, обе ассоциативны и коммутативны, связаны между собой законом дистрибутивности, то есть для любых $a,b,c \in \mathit{\Pi}$

$$a+b=b+a, \qquad (a+b)+c=a+(b+c),$$

$$a*b=b*a, \qquad (a*b)*c=a*(b*c), \qquad (a+b)*c=a*c+b*c.$$

В поле требуется существование нулевого элемента $0 \in \mathit{\Pi}$, единичного элемента $e \in \mathit{\Pi}$, для каждого элемента $a \in \mathit{\Pi}$ существование противоположного элемента $-a \in \mathit{\Pi}$ и для каждого ненулевого элемента $a \in \mathit{\Pi}$ существование обратного элемента $a^{=1} \in \mathit{\Pi}$, то есть

$$0+a=a+0=0, \qquad a*e=e*a=a,$$

$$a+(-a)=0, \qquad a*a^{-1}=a^{-1}*a=e.$$

Отсюда следует, что в поле выполняется операция вычитания и операция деления на ненулевой элемент. Таким образом, все элементы поля образуют абелеву группу по сложению (аддитивная группа поля), а все ненулевые элементы – абелеву группу по умножению (мультипликативная группа поля)

Например, каждая из систем

комплексных чисел $\quad a+ib, \quad a,b \in R, \quad i^2=-1,$

двойных чисел $\quad a+ib, \quad a,b \in R, \quad i^2=1,$

дуальных чисел $\quad a+ib, \quad a,b \in R, \quad i^2=0$

с законом сложения $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$

и соответственно законом умножения

$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

$$(a+ib)(c+id)=(ac+bd)+i(ad+bc)$$

$$(a+ib)(c+id)=\quad ac \quad +i(ad+bc)$$

образует кольцо. Эти системы имеют $0+i0$ - нуль и $1+i0$ - единицу. Каждый элемент имеет противоположный. Любое комплексное число отличное от нуля имеет обратное. Двойное число имеет обратное, если $a^2-b^2 \neq 0$. Дуальное число с отличной от нуля первой компонентой $a \neq 0$ также имеет обратное. Итак, из рассмотренных систем только комплексные числа образуют поле.

Алгеброй A размерности n над полем $\mathit{\Pi}$ называется множество выражений вида $a_1\mathbf{i}_1+a_2\mathbf{i}_2+\ldots+a_n\mathbf{i}_n$, (где $a_1,a_2,\ldots,a_n \in \mathit{\Pi}$, а $\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_n$ - некоторые символы), снабженное операцией умножения на элементы поля $k \in \mathit{\Pi}$, выполняемой по формуле

$$k(a_1\mathbf{i}_1+a_2\mathbf{i}_2+\ldots+a_n\mathbf{i}_n)=ka_1\mathbf{i}_1+ka_2\mathbf{i}_2+\ldots+ka_n\mathbf{i}_n;$$

операцией сложения: $(a_1\mathbf{i}_1+a_2\mathbf{i}_2+\ldots+a_n\mathbf{i}_n)+(b_1\mathbf{i}_1+b_2\mathbf{i}_2+\ldots+b_n\mathbf{i}_n)=$

$$=(a_1+b_1)\mathbf{i}_1+(a_2+b_2)\mathbf{i}_2+\ldots+(a_n+b_n)\mathbf{i}_n;$$

и операцией умножения, задаваемой таблицей вида

$$\mathbf{i}_\alpha\mathbf{i}_\beta=p_{\alpha\beta,1}\mathbf{i}_1+p_{\alpha\beta,2}\mathbf{i}_2+\ldots+p_{\alpha\beta,n}\mathbf{i}_n, \qquad (*)$$

которая используется для нахождения произведений

$$(a_1\mathbf{i}_1+a_2\mathbf{i}_2+\ldots+a_n\mathbf{i}_n)\cdot(b_1\mathbf{i}_1+b_2\mathbf{i}_2+\ldots+b_n\mathbf{i}_n).$$

Алгебра полностью определяется своей «таблицей умножения» (*), то есть некоторым набором n^3 чисел $p_{\alpha\beta,\gamma}$. Эти числа не подчинены никаким условиям, любой набор их задает некоторую алгебру.

Если для любых двух элементов a,b алгебры A справедливо равенство $ab=ba$, то алгебра называется ***коммутативной***; если для любых трех элементов a,b,c справедливо равенство $(ab)c=a(bc)$, то алгебра называется ***ассоциативной***. Далее, если каждое из уравнений $ax=b, \quad ya=b \quad a,b\in A, \ a\neq 0$ имеет единственное решение, то говорят, что A есть ***алгебра с делением***. Элементы x,y, определяемые этими уравнениями, называются соответственно левым, правым частным от деления b на a. Если в алгебре A существует такой элемент e, что $ae=ea=a$ для любого $a\in A$, то этот элемент называется ***единицей алгебры*** A. В этом случае говорят, что A есть ***алгебра с единицей***. Алгебра называется ***нормированной***, если в ней можно так ввести скалярное произведение (a,b), что будет выполняться тождество $(ab,ab)=(a,a)(b,b)$.

Простейшим примером алгебры является одномерная алгебра с таблицей умножения $\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1=\mathbf{i}_1$. Закон умножения имеет вид $(a_1\mathbf{i}_1)(b_1\mathbf{i}_1)=a_1b_1\mathbf{i}_1$, то есть сводится к умножению действительных чисел. Такую алгебру называют алгеброй действительных чисел.

Частным случаем алгебры является система гиперкомплексных чисел $a_o\mathbf{i}_o+a_1\mathbf{i}_1+a_2\mathbf{i}_2+...+a_n\mathbf{i}_n$, где $\mathbf{i}_o\equiv 1$, $\mathbf{i}_o\mathbf{i}_\alpha=\mathbf{i}_\alpha\mathbf{i}_o=\mathbf{i}_\alpha$,

$$\mathbf{i}_\alpha\mathbf{i}_\beta=p_{\alpha\beta,o}+p_{\alpha\beta,1}\mathbf{i}_1+p_{\alpha\beta,2}\mathbf{i}_2+...+p_{\alpha\beta,n}\mathbf{i}_n, \qquad \alpha=\overline{1,n}.$$

При $n=1$ и таблице умножения

	1	i
1	1	i
i	i	$\mp 1,0$

имеем алгебру комплексных, двойных, дуальных чисел.

При $n=3$ и таблице умножения

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

имеем алгебру кватернионов. В 1878 г. Фробениус (1849-1917) доказал, что единственное некоммутативное тело конечной размерности над R - тело кватернионов.

При $n=7$ и таблице умножения

	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$
1	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	-1	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_6$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	-1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_5$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	-1	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_4$
$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_7$	-1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_1$	-1	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	-1	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	-1

имеем алгебру октав.
В отличии от комплексных чисел и кватернионов при умножении октав не выполняется ассоциативный закон. Например,

$$(\mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_2) * \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_3 * \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_7, \qquad \mathbf{e}_1 * (\mathbf{e}_2 * \mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_6 = -\mathbf{e}_7.$$

Для октав справедливы формулы $(ab)b = a(bb)$, $a(ab) = (aa)b$ - ослабленный вариант ассоциативности. Алгебры с таким свойством называют ***альтернативными***.

Таблица умножения $\mathbf{i}_{\alpha\lambda}\mathbf{i}_{\mu\beta} = \delta_{\lambda\mu}\mathbf{i}_{\alpha\beta}$, где $\delta_{\lambda\mu}$ - символ Кроникера для элементов

$$\begin{aligned} a = {} & a_{11}\mathbf{i}_{11} + a_{12}\mathbf{i}_{12} + \ldots + a_{1n}\mathbf{i}_{1n} + \\ & + a_{21}\mathbf{i}_{21} + a_{22}\mathbf{i}_{22} + \ldots + a_{2n}\mathbf{i}_{2n} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{n1}\mathbf{i}_{n1} + a_{n2}\mathbf{i}_{n2} + \ldots + a_{nn}\mathbf{i}_{nn} \end{aligned} \qquad \text{или} \qquad a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

определяет алгебру размерности n^2. Поскольку таблица умножения определяет также перемножение матриц, можно считать, что ***элементами алгебры являются квадратные матрицы порядка n.*** Итак, имеем ассоциативную алгебру квадратных матриц.

Множество выражений вида $a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_n i_n$, $b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + \ldots + b_n i_n$ с операцией сложения

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_n i_n) \pm (b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + \ldots + b_n i_n) = \\ & = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) i_1 + (a_2 \pm b_2) i_2 + \ldots + (a_n \pm b_n), \end{aligned}$$

операцией умножения на элемент поля $k \in \Pi$

$$k(a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_n i_n) = k a_0 + k a_1 i_1 + k a_2 i_2 + \ldots + k a_n i_n$$

и таблицей умножения $i_\alpha i_\beta = p_o + p_1 i_1 + p_2 i_2 + \ldots + p_n i_n$, где $a_\alpha, b_\beta, p_\gamma \in R$ образуют алгебру ***гиперкомплексных чисел размерности*** $n+1$.

В определении алгебры наиболее сложным моментом является наличие операции умножения. Опуская закон умножения, получаем объекты $a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + \ldots + a_n\mathbf{i}_n$, называемые $n-$***мерными векторами***, а соответствующая алгебра называется линейным, векторным пространством над полем Π. Линейное, векторное пространство - математическое понятие, обобщающее понятие совокупности всех (свободных) векторов обычного трехмерного пространства.

Линейным, векторным пространством над полем Π называется множество $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots \in L$ элементов любой природы, называемых векторами, в котором определены операции сложения векторов и умножения векторов на элементы поля $\alpha, \beta, \ldots \in \Pi$. Два вектора $\mathbf{x} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + \ldots + x_n\mathbf{i}_n$ и $\mathbf{y} = y_1\mathbf{i}_1 + y_2\mathbf{i}_2 + \ldots + y_n\mathbf{i}_n$ считаются равными $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда $x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad \ldots \quad x_n = y_n$.

Сложение коммутативно и ассоциативно: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$, $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$. Имеется нуль-вектор $\mathbf{0}$ $(\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x})$, и для любого вектора $\mathbf{x}$ существует противоположный ему вектор $\mathbf{y}$ $(\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0})$.

Умножение на элементы поля ассоциативно и дистрибутивно $\alpha(\beta\,\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$, $(\alpha+\beta)\mathbf{x} = \alpha\,\mathbf{x} + \beta\,\mathbf{x}$. Существует единица $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$. Умножение на векторы дистрибутивно $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha\,\mathbf{x} + \alpha\,\mathbf{y}$.

Система векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_k$ называется ***линейно независимой***, если линейная их комбинация равна нулевому вектору: $s_1\mathbf{x}_1 + s_2\mathbf{x}_2 + \ldots + s_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ только тогда, когда все коэффициенты $s_1, s_2, \ldots, s_k$ равны нулю. Если хотя бы один из коэффициентов $s_1, s_2, \ldots, s_k$ отличен от нуля, система называется ***линейно зависимой***. Линейно зависимая система состоит из одного вектора и тогда это $\mathbf{0}$, либо один из векторов системы линейно выражается через остальные векторы.

Для линейного, векторного пространства A_n имеет место понятие ***базиса***, как конечного количества таких независимых векторов $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_n$, что любой вектор $\mathbf{x} \in L$ допускает единственное разложение $\mathbf{x} = \mathbf{i}_1 x_1 + \mathbf{i}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{i}_n x_n$. Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \Pi$ называют координатами вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_n$.

Говорят, что в $n-$мерном векторном пространстве, задано ***скалярное произведение*** $(\mathbf{x},\mathbf{y})$, если каждым двум элементам базиса сопоставлен некоторый элемент $(\mathbf{i}_\alpha, \mathbf{i}_\beta) = g_{\alpha\beta}$ так, что $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum\limits_{\alpha\,\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \in \Pi$ и $(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0$ только при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Имеют место равенства $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{y},\mathbf{x})$, $\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\lambda\,\mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{x}(\lambda\,\mathbf{y})$, $(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z}) = (\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{x},\mathbf{z})$.

После того как введено определение скалярного произведения, такие понятия, как длина вектора и перпендикулярность двух векторов, вводятся по аналогии с двумерным и трёхмерным случаями: $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$, $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$. Понятие скалярного произведения позволяет сделать базис ортонормированным.

В векторном пространстве A_n обязательно существует ненулевой вектор $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, ортогональный каждому из векторов $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_k$, количество $k < n$ которых меньше размерности пространства, то есть ортогональный подпространству A_k. Справедливость этого утверждения следует их факта наличия ненулевого решения линейной, однородной системы уравнений в количестве меньшем количества неизвестных:

$$\begin{aligned} y_{11}x_1 + y_{12}x_2 + \ldots + y_{1n}x_n &= 0, \\ y_{21}x_1 + y_{22}x_2 + \ldots + y_{2n}x_n &= 0, \\ \ldots \\ y_{k1}x_1 + y_{k2}x_2 + \ldots + y_{kn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Элементарными ортопреобразованиями называют

1. Умножение любого из элементов ортонормированного базиса на -1.
2. Замена каких-либо двух элементов $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j$ $(i \neq j)$ новыми $\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j$ по формулам

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i \cos\varphi - \mathbf{e}_j \sin\varphi, \quad \mathbf{e}'_j = \mathbf{e} + \mathbf{e}_j \cos\varphi, \quad \text{где } \varphi - \text{действительное число.}$$

От любого ортонормированного базиса к любому другому также ортонормированному базису можно перейти с помощью конечного числа элементарных ортопреобразований.

Ортопреобразования являются линейными и сохраняют скалярное произведение: $F(\mathbf{x}+\mathbf{y})=F(\mathbf{x})+F(\mathbf{y})$, $F(k\mathbf{x})=kF(\mathbf{x})$, $(F(\mathbf{x}),F(\mathbf{y}))=(\mathbf{x},\mathbf{y})$, то есть являются отрогональными.

Понятие линейного, векторного пространства позволяет рассматривать ***Алгебру*** как линейное, векторное пространство, в котором введена дополнительно операция умножения:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{y},\mathbf{x}),\ \lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\lambda\,\mathbf{x})\mathbf{y}=\mathbf{x}(\lambda\,\mathbf{y}),\ (\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{x},\mathbf{z}).$$

Произведение базисных элементов $\mathbf{i}_\alpha,\mathbf{i}_\beta$ единственным образом записывается в виде $\mathbf{i}_\alpha\mathbf{i}_\beta=p_{\alpha\beta,1}\mathbf{i}_1+p_{\alpha\beta,2}\mathbf{i}_2+\ldots+p_{\alpha\beta,n}\mathbf{i}_n$.

Поскольку любая алгебра размерности $n-$ это векторное пространство, то принято называть две алгебры одной и той же размерности ***подобными*** друг другу или ***изоморфными***, если в них можно выбрать базисы с одинаковыми таблицами умножения. Изоморфные множества в математическом отношении не считаются различными.

Любая гиперкомплексная система может рассматриваться как алгебра, в которой первый из базисных элементов является единицей алгебры : $\mathbf{i}_1\mathbf{i}_\alpha=\mathbf{i}_\alpha\mathbf{i}_1=\mathbf{i}_\alpha$ для всех α. Таким образом, любая алгебра с единицей изоморфна некоторой гиперкомплексной системе.

2. ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

К исключительным алгебрам относятся алгебры вещественных, комплексных чисел и кватернионов.

2.1. ДВУМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Комплексными числами называются выражения вида $z=a+ib$, где $i-$некоторый символ, удовлетворяющий соотношению $i^2=-1$ и коммутирующий с вещественными числами a и b. Символ i для обозначения $\sqrt{-1}$ ввёл Л.Эйлер в XVIII веке. Число a называется действительной частью комплексного числа z, $b-$ его мнимой частью. Для комплексных чисел z и z' вводятся операции сложения и умножения:

$$z+z'=(a+a')+i(b+b')$$

$$z\cdot z'=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$$

Если в этих выражениях положить $b=b'=0$, то получим правила сложения и умножения вещественных чисел. Правила сложения и умножения комплексных чисел обладают свойствами коммутативности (переместительности) и ассоциативности (сочетательности). Для этих действий справедлив дистрибутивный (распределительный) закон $z\cdot(z'+z'')=z\cdot z'+z\cdot z''$.

Уравнения $z+w=z'$, где $w-$неизвестное комплексное число, разрешимы: $w=z'-z$.

Для комплексных чисел вводится операция $(^*)-$комплексного сопряжения, то есть числу z ставится в соответствие число $z^*=a-ib$. Произведение комплексного числа z на число, ему комплексно сопряжённое, даёт вещественное положительное число: $z\cdot z^*=a^2+b^2$. Число $|z|=\sqrt{z\cdot z^*}=\sqrt{a^2+b^2}$ называется модулем комплексного числа. Для модуля произведения двух комплексных чисел z и z^* имеет место тождество $|z\cdot z'|=|z|\cdot|z'|$ либо

$\left|z \cdot z'\right|^2 = \left|z\right|^2 \cdot \left|z'\right|^2$. Произведение суммы двух квадратов на сумму двух квадратов снова есть сумма двух квадратов

Комплексные числа образуют двумерное вещественное линейное пространство. Комплексному числу $z = a + ib$ можно сопоставить двумерный вектор (a,b). Сложение двумерных векторов определяется равенством $(a,b) + (a',b') = (a+b, a'+b')$. Для сложения двумерных векторов, выполняется переместительный и сочетательный законы. Определена операция умножения на вещественное число $\lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b)$, для которой имеют место сочетательный и распределительный законы: $\lambda(\mu a, \mu b) = (\lambda\mu)(a,b)$,

$$\lambda[(a,b) + (a',b')] = \lambda(a,b) + \lambda(a',b'), \qquad (\lambda + \mu)(a,b) = \lambda(a,b) + \mu(a,b).$$

Геометрическая интерпретация комплексных чисел - двумерных векторов состоит в сопоставлении им точки евклидовой плоскости: $a = \rho\cos\varphi, \quad b = \rho\sin\varphi$,

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}, \qquad \rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad tg\varphi = b/a.$$

Комплексным числам можно сопоставить 2×2 матрицы. Вид матриц следует из покомпонентной записи произведения комплексных чисел

$$z = x \cdot y = y \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} z_1 = x_1 y_1 - x_2 y_2 \\ z_2 = x_2 y_1 + x_1 y_2 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$a + ib \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{i}_1 a + \mathbf{i}_2 b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} b$$

Матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 \\ \mathbf{i}_1 \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} i \\ \mathbf{i}_2 \end{cases} \qquad i^2 = -1$$

перемножаются как $1, i$, или как векторы $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$.

Алгебры этих множеств изоморфны.

Все свойства комплексных чисел можно сформулировать на языке матриц. Например, определитель матрицы совпадает с квадратом модуля комплексного числа $z \cdot z^\bullet = a^2 + b^2$. Комплексно-сопряженному числу $z^* = a - ib$ соответствует матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, получаемая транспонированием матрицы $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Комплексному числу $z^{-1} = \dfrac{z^\bullet}{z \cdot z^\bullet}$, удовлетворяющему условию $z \cdot z^{-1} = 1$, соответствует матрица $\dfrac{1}{a^2 + b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ обратная матрице $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Матрица, соответствующая комплексному числу в координатах $\rho\varphi$, имеет вид $\rho\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$ и представляет собой произведение модуля комплексного числа на матрицу поворота на угол φ в евклидовой плоскости.

Следовательно, геометрический смысл произведения двух комплексных чисел $z' \cdot z$ сводится к повороту, например, вектора $z' \Leftrightarrow (a', b')$ на угол φ и увеличении его длины в ρ раз.

Отметим разницу между двумерным векторным пространством, которое ставится в соответствие комплексным числам, и двумерными векторами вообще. Самое общее линейное преобразование для комплексного числа z' состоит в умножение его на другое число z с последующим прибавлением комплексного числа t: $\quad z'' = z' \cdot z + t$.

Двумерные векторы представляют собой элементы линейного пространства, которое является более широким понятием, нежели алгебра.

Самым общим неоднородным линейным преобразованием двумерного вещественного линейного пространства будет преобразование вида

$$x' = \alpha x + \beta y + c, \quad y' = \gamma x + \delta y + d \quad \text{либо} \quad X' = AX + B, \quad \text{где}$$

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0, \quad B = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Сравнивая эти преобразования, отмечаем, что первое определяется четырьмя произвольными параметрами, а второе пятью.

Следует также иметь в виду, что в комплексном пространстве базис может иметь также комплексную природу. Комплексное число $a = a_1 + ia_2$ может быть записано в виде

$$a = \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} \frac{(a_1 - a_2)}{\sqrt{2}} + \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \frac{(a_1 + a_2)}{\sqrt{2}} = j^* \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{2}} + j \frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}},$$

где $\quad j = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad j^* = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad j^2 = i, \quad j^{*2} = -i, \quad 1 = \dfrac{j + j^*}{\sqrt{2}}, \quad i = \dfrac{j - j^*}{\sqrt{2}}$.

Сопоставляя комплексному числу $a = a_1 + ia_2$ вектор $\bar{a} = \mathbf{e}_1 a_1 + i\mathbf{e}_2 a_2 \ (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij})$, аналогичным образом получаем $\bar{a} = \boldsymbol{\varepsilon}^* \dfrac{a_1 - a_2}{\sqrt{2}} + \boldsymbol{\varepsilon} \dfrac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}}$, где

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \frac{\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* = 1, \quad \mathbf{e}_1 = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^* + \boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{e}_2 = i \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{2}}.$$

Векторы, принадлежащие изотропным прямым $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, имеют нулевую длину.

При рассмотрении трехмерного пространства может быть выбран базис, состоящий из изотропных векторов $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}^*$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}$ и ортогонального к ним единичного вектора $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = -i\boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \boldsymbol{\varepsilon}_2$ ($\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ – внешнее умножение, $\boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\varepsilon}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2 = 1, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \cdot \mathbf{e}_3 \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \vee \mathbf{e}_3$ – внутреннее умножение).

Матрицы $\quad \pi_o = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \pi_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \mathbf{e}_1, \quad \pi_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow i\mathbf{e}_2, \quad \pi_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \mathbf{e}_3$

называемые матрицами Паули, позволяют для любых вещественных или комплексных величин a, b, c, d тождественно выразить матрицу 2×2 в виде линейной комбинации

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(a+d)\pi_o + \frac{1}{2}(b+c)\pi_1 + \frac{1}{2}i(b-c)\pi_2 + \frac{1}{2}(a-d)\pi_3 =$$

$$= \frac{1}{2}(a+d)\pi_o + \frac{c}{\sqrt{2}}\varepsilon_1 + \frac{b}{\sqrt{2}}\varepsilon_2 + \frac{1}{2}(a-d)\pi_3$$

Это тождество связывает матрицы Паули с трехмерной геометрией равенством

$$\begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix} = x\pi_1 + y\pi_2 + z\pi_3 = \frac{x+iy}{\sqrt{2}}\varepsilon_1 + \frac{x-iy}{\sqrt{2}}\varepsilon_2 + z\pi_3$$

2.2. ДРУГИЕ АРИФМЕТИКИ ДЛЯ ЧИСЛА $a+ib$

Выше была рассмотрена алгебра комплексных чисел, для которой $i^2=-1$. Однако, это не единственная возможность. Произведения мнимых единиц должно принадлежность рассматриваемой системе чисел, то есть должно быть числом вида $p+iq$ $\quad (a+ib)(a'+ib')=(aa'+bb'p)+i(ab'+ba'+bb'q)$.

Можно убедиться в справедливости равенств $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$, $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$. Из равенства $i^2=p+iq$ следует

$$i^2-iq=p \qquad \text{или} \qquad \left(i-\frac{q}{2}\right)^2=p+\frac{q^2}{4}.$$

Возможны три случая :

1. $p+\dfrac{q^2}{4}=-k^2$, где $k-$отличное от нуля действительное число. Тогда $\left(-\dfrac{q}{2k}+\dfrac{i}{k}\right)^2=J^2=-1 \;\to\; i=\dfrac{q}{2}+kJ$ и любое комплексное число может быть записано в виде $a+bi=\left(a+b\dfrac{q}{2}\right)+bkJ=a'+b'J$, где $J^2=-1$. Таким образом, фактически мы имеем дело с комплексными числами.

2. $p+\dfrac{q^2}{4}=k^2$, где $k-$отличное от нуля действительное число. Тогда $\left(-\dfrac{q}{2k}+\dfrac{i}{k}\right)^2=E^2=1 \;\to\; i=\dfrac{q}{2}+kE$ и любое комплексное число может быть записано в виде $a+bi=\left(a+b\dfrac{q}{2}\right)+bkE=a'+b'E$, где $E^2=1$. Таким образом, имеем дело с числами, для которых закон умножения имеет вид

$$(a'+Eb')\cdot(c'+Ed')=(a'c'+b'd')+E(a'd'+b'c').$$

Такие числа называются двойными.

3. $p+\dfrac{q^2}{4}=0$. В этом случае, введя обозначение $\left(-\dfrac{q}{2}+i\right)^2=\Omega^2=0 \;\to\; i=\dfrac{q}{2}+\Omega$ для любого комплексного числа, получаем представление $a+bi=\left(a+b\dfrac{q}{2}\right)+b\Omega=\tilde{a}+\tilde{b}\Omega$, где $\Omega^2=0$. Это – система дуальных чисел с правилом умножения $\left(\tilde{a}+\Omega\tilde{b}\right)\cdot\left(\tilde{c}+\Omega\tilde{d}\right)=\tilde{a}\tilde{c}+\Omega\left(\tilde{a}\tilde{d}+\tilde{b}\tilde{c}\right)$.

Для двойных и дуальных чисел возникают проблемы с делением, то есть с решением уравнений вида $z_2x=z_1$. Например, в системе двойных чисел невозможно разделить $z_1=1+0E$ на $z_2=1+E$. Действительно, умножая обе части уравнения $(1+E)x=1+0E$ на $1-E$, получаем неверное равенство

$$(1-E^2)x=1-E \quad\to\quad 0=1-E.$$

Точно так же в системе дуальных чисел нельзя, например, разделить $z_1 = 1$ на $z_2 = \Omega$. Для любого $x = a + b\Omega$ имеем неверное равенство $\Omega x = \Omega a = 1$.

Невозможность деления ставит под сомнение правильность именовать двойные и дуальные числа «числами». Однако, системы, для которых определены лишь действия сложения, вычитания и умножения также значимы.

Двойным и дуальным числам также можно сопоставить 2×2 матрицы. Вид матриц следует из покомпонентной записи произведения. Для двойных чисел $a + ib \Leftrightarrow \mathbf{i}_1 a + \mathbf{i}_2 b, \quad i^2 = 1$ имеем

$$z = x \cdot y = y \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} z_1 = x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ z_2 = x_2 y_1 + x_1 y_2 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$a + ib \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{i}_1 a + \mathbf{i}_2 b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} b;$$

матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \\ \mathbf{i}_1 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} i \\ \mathbf{i}_2 \end{cases} \quad i^2 = 1$$

перемножаются как $1, i,$ или как векторы $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$.

Алгебры этих множеств изоморфны.

Наконец, для дуальных чисел $a_1 + i\, a_2 \Leftrightarrow \mathbf{i}_1 a_1 + \mathbf{i}_2 a_2, \quad i^2 = 0$ имеем

$$z = x \cdot y = y \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} z_1 = x_1 y_1 \\ z_2 = x_2 y_1 + x_1 y_2 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$a + ib \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{i}_1 a + \mathbf{i}_2 b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} b;$$

матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \\ \mathbf{i}_1 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} i \\ \mathbf{i}_2 \end{cases} \quad i^2 = 0$$

перемножаются как $1, i,$ или как векторы $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$.

Алгебры этих множеств также изоморфны.