ЛЕКЦИЯ 4.09

ОПЕРАТОР НАБЛА-КВАТЕРНИОН. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ФОРМИНВАРИАНТНОСТЬ ПОЛЕЙ КВАТЕРНИОНОВ. ПОЛЯ КВАТЕРНИОНОВ КАК ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА. ГИПОТЕЗЫ. ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ.

9. В 1911 году А.В.Конвей [1] и независимо в 1912 году Л.Зильберштейн [2] построили кватернионный аналог специальной теории относительности. При этом выяснилось, что использование полных кватернионов, а не только их векторных частей, предоставляет естественную возможность записи уравнений Максвелла в виде явно ковариантном относительно преобразований Лоренца. Такая запись уравнений Максвелла полностью эквивалентна их тензорной формулировке.

На необходимость анализа уравнений указывают и экспериментальные данные. В некоторых случаях электромеханические установки возбуждают поля, которые не могут быть интерпретированы как электрическое или магнитное поле, то есть, имеют место экспериментальные факты, которые, как того хотелось бы, не могут быть объяснены уравнениями Максвелла [3].

- Например, требует объяснения термин “радиантная” энергия, введённый Н.Тесла. Требует также объяснения работа всевозможных устройств, повторяющих в том или ином виде патенты Н.Тесла [4].
- В.И.Коробейников [5] отмечает необычные свойства антенны, представляющей собой контур, состоящий из ёмкости и двух катушек, расположенных соосно на некотором расстоянии друг от друга. Катушки включены так, что их магнитные поля направлены друг против друга (противофазное включение индуктивностей). Контур, настроен на частоту принимаемого сигнала. Катушки помещены в медный экран, улучшающий работу антенны. Необычное силовое взаимодействие контуров с током отмечает также Г.В.Николаев [7].
- Излучатель А.А.Шпильмана [6] представляет собой тор из ферромагнитного материала с клиновидными вставками, постоянными магнитами. Магнитное поле ориентировано по оси тора. Тор вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью несколько тысяч оборотов в минуту. Возникающее излучение направлено вдоль оси вращения. Обычными приборами поле не фиксируется. Однако при определённой освещённости оно наблюдается невооружённым взглядом. Поле обладает большой проникающей способностью (свинец, железобетонные стены препятствиями не являются).
- Г.В.Николаев [7] описывает эксперименты, в которых имеет место движение элементов различных электромеханических систем. Для объяснения наблюдаемых эффектов вводится дополнительное скалярное магнитное поле, возбуждаемое движущимися зарядами, и дополнительная сила взаимодействия скалярного магнитного поля с током. Силы не противоречат третьему закону механики.

Если считать, что уравнения Д.Максвелла есть истина в последней инстанции, то все экспериментальные факты должны находить объяснение. Если же имеются необъяснимые факты, то нужно либо уточнять уравнения электродинамики, либо вводить новые поля.

9.1. В четырехмерном пространстве с псевдоевклидовой метрикой

$$G_{oo} = G^{oo} = 1,\ G_{o\alpha} = G^{o\alpha} = 0,\ G_{\alpha\alpha} = G^{\alpha\alpha} = -1,\ G_{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta} = 0,\ \alpha, \beta = 1,2,3$$

введем в рассмотрение изоморфный гиперкомплексному числу-кватерниону $V = V^o + E_\alpha V^\alpha$, $V^o, V^\alpha \in C$ вектор-кватернион $\mathbf{V} = \mathbf{E}_o V^o + \mathbf{E}_\alpha V^\alpha$. Для элементов базиса $\mathbf{E}_\alpha$, $\alpha = 0,1,2,3$ будем рассматривать следующие правила скалярного и кватернионного умножения

$$\begin{gathered}\mathbf{E}_o \cdot \mathbf{E}_o = 1,\ \mathbf{E}_o \cdot \mathbf{E}_\alpha = 0,\ \mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{E}_\beta = -\delta_{\alpha\beta}, \\ \mathbf{E}_o \circ \mathbf{E}_o = \mathbf{E}_o,\ \mathbf{E}_o \circ \mathbf{E}_\alpha = \mathbf{E}_\alpha \circ \mathbf{E}_o = \mathbf{E}_\alpha, \\ \mathbf{E}_\alpha \circ \mathbf{E}_\alpha = -\mathbf{E}_o,\ \mathbf{E}_\alpha \circ \mathbf{E}_\beta = \delta_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{E}_\gamma,\ \alpha,\beta = 1,2,3.\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символы Кронекера, $\delta_{\alpha\beta\gamma}$ – дискриминантный тензор кососимметричный по любым двум индексам.

Кватернионному сопряжению соответствует инверсия базиса: $\tilde{\mathbf{E}}_\alpha = -\mathbf{E}_\alpha$, $\alpha = 1,2,3$; а комплексному сопряжению – замена i на $-i$: $i^* = -i$.

Любому кватерниону можно сопоставить матрицу, которую в свою очередь можно трактовать, как тензор-кватернион, например, ${}_L\mathbf{W} = \mathbf{E}_\alpha \mathbf{E}_\beta \ {}_L W^{\alpha\beta}$ или ${}_R\mathbf{W} = \mathbf{E}_\alpha \mathbf{E}_\beta \ {}_R W^{\alpha\beta}$, где

$${}_L W^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} W^o & -W^1 & -W^2 & -W^3 \\ W^1 & W^o & -W^3 & W^2 \\ W^2 & W^3 & W^o & -W^1 \\ W^3 & -W^2 & W^1 & W^o \end{pmatrix},\ {}_R W^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} W^o & W^1 & W^2 & W^3 \\ -W^1 & W^o & -W^3 & W^2 \\ -W^2 & W^3 & W^o & -W^1 \\ -W^3 & -W^2 & W^1 & W^o \end{pmatrix}.$$

Кватернионному произведению двух вектор-кватернионов соответствует скалярное произведение соответствующих тензор-кватернионов: $\mathbf{V}_A \circ \mathbf{V}_B \Leftrightarrow \mathbf{W}_A \cdot \mathbf{W}_B$. Двум кватернионам можно сопоставить коммутатор $\left[\mathbf{A} \circ \mathbf{B}\right] = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} - \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$ и антикоммутатор $\left\{\mathbf{A} \circ \mathbf{B}\right\} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} + \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$.

Произвольной точке пространства сопоставим вектор-кватернион $\mathbf{X} = \mathbf{E}_o i X^o + \mathbf{E}_\alpha X^\alpha$, $X^o, X^\alpha \in R$, $X^o \equiv cT$, изоморфный ему тензор-кватернион ${}_L\mathbf{X} = \mathbf{E}_\alpha \mathbf{E}_\beta {}_L X^{\alpha\beta} = \mathbf{E}_\alpha \mathbf{E}_\beta \ {}_R X^{\alpha\beta} = {}_R\mathbf{X}$ и операторы набла [9]

$$\begin{gathered}\nabla = -\mathbf{E}_o \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial T} + \mathbf{E}_\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha},\ \nabla^* = \mathbf{E}_o \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial T} + \mathbf{E}_\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha}, \\ \tilde{\nabla} = -\mathbf{E}_o \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial T} - \mathbf{E}_\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha},\ \tilde{\nabla}^* = \mathbf{E}_o \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial T} - \mathbf{E}_\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha}.\end{gathered} \tag{1.2}$$

При преобразовании Лоренца сохраняется интервал $d\mathbf{X} d\mathbf{X}^* = c^2 dT^2 - d\bar{X}^2 = c^2 d\tau^2$, устанавливающий связь между наблюдаемым ходом движущихся часов и ходом покоящихся часов: $\sqrt{1-\left(\bar{U}/c\right)^2}\,dT = d\tau$, где $\bar{U} = \dfrac{d\,\bar{X}}{dT}$ – трёхмерная скорость.

Введём 4-скорости $\mathbf{U}_T = \dfrac{d\mathbf{X}}{dT} = ic + \bar{U}$, $\mathbf{U}_\tau = \dfrac{d\mathbf{X}}{d\tau} = \left(ic + \bar{U}\right)\dfrac{dT}{d\tau} = \mathbf{U}_T \Big/ \sqrt{1-\left(\bar{U}/c\right)^2}$

и операторы $\dfrac{d^*}{dt} = \mathbf{U}_T \circ \nabla^*$, $\dfrac{d}{dt} = \mathbf{U}_T \circ \nabla$, $\dfrac{\tilde{d}}{dt} = \mathbf{U}_T \circ \tilde{\nabla}$, $\dfrac{\tilde{d}^*}{dt} = \mathbf{U}_T \circ \tilde{\nabla}^*$.

Можно рассматривать операции $\nabla\cdot\mathbf{V}$, $\nabla\circ\mathbf{V}$, $\dfrac{d\mathbf{V}}{dT}$, $\nabla\mathbf{V}$, ${}_{L,R}\nabla\cdot\mathbf{W}$, ${}_{L,R}\nabla\circ\mathbf{W}$, $\dfrac{d\mathbf{W}}{dt}$ и т.д., где $\mathbf{V}$ – вектор-кватернион и $\mathbf{W}$ – тензор-кватернион. Например, $\nabla\cdot\mathbf{V}=-\dfrac{i}{c}\dfrac{\partial V^o}{\partial T}-div\overline{V}$, $\tilde{\nabla}^*\cdot\mathbf{V}=\dfrac{i}{c}\dfrac{\partial V^o}{\partial T}+div\overline{V}$

и далее
$$\nabla\circ\mathbf{V}=\left(-\frac{i}{c}\frac{\partial V^o}{\partial T}-div\overline{V}\right)+\left(-\frac{i}{c}\frac{\partial\overline{V}}{\partial T}+gradV^o+rot\overline{V}\right),$$

$$\nabla^*\circ\mathbf{V}=\left(\frac{i}{c}\frac{\partial V^o}{\partial T}-div\overline{V}\right)+\left(\frac{i}{c}\frac{\partial\overline{V}}{\partial T}+gradV^o+rot\overline{V}\right),$$

$$\tilde{\nabla}\circ\mathbf{V}=\left(-\frac{i}{c}\frac{\partial V^o}{\partial T}+div\overline{V}\right)+\left(-\frac{i}{c}\frac{\partial\overline{V}}{\partial T}-gradV^o-rot\overline{V}^o\right),$$

$$\tilde{\nabla}^*\circ\mathbf{V}=\left(\frac{i}{c}\frac{\partial V^o}{\partial T}+div\overline{V}\right)+\left(\frac{i}{c}\frac{\partial\overline{V}}{\partial T}-gradV^o-rot\overline{V}\right),$$

$$\frac{d^*\mathbf{V}}{dt}=-ic\left(div\overline{V}+\overline{U}\cdot\frac{1}{c^2}\frac{\partial\overline{V}}{\partial T}\right)-\left(\frac{\partial V^o}{\partial T}-\overline{U}\cdot gradV^o-\overline{U}\cdot rot\overline{V}\right)+$$
$$+ic\left(gradV^o+rot\overline{V}+\overline{U}\frac{1}{c^2}\frac{\partial V^o}{\partial T}+\overline{U}\times\frac{1}{c^2}\frac{\partial\overline{V}}{\partial T}\right)+\left(-\frac{\partial\overline{V}}{\partial T}-\overline{U}div\overline{V}+\overline{U}\times gradV^o+\overline{U}\times rot\overline{V}\right),$$

$$\nabla\circ\left(\nabla^*\circ\mathbf{V}\right)=-\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{i}{c}\frac{\partial V^o}{\partial T}-div\overline{V}\right)-div\left(\frac{i}{c}\frac{\partial\overline{V}}{\partial T}+gradV^o+rot\overline{V}\right)-$$
$$-\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{i}{c}\frac{\partial\overline{V}}{\partial T}+gradV^o+rot\overline{V}\right)+grad\left(\frac{i}{c}\frac{\partial V^o}{\partial T}-div\overline{V}\right)+rot\left(\frac{i}{c}\frac{\partial\overline{V}}{\partial T}+gradV^o+rot\overline{V}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2V^o}{\partial T^2}-divgradV^o\right)+\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{V}}{\partial T^2}-graddiv\overline{V}+rotrot\overline{V}\right)=\nabla^*\circ\left(\nabla\circ\mathbf{V}\right),$$

Декартовым координатам можно сопоставить криволинейные координаты $X^s=X^s(x^1,x^2,x^3),\quad \det\left(\dfrac{\partial X^s}{\partial x^k}\right)\neq 0,\quad s,k=1,2,3$, а вектору $\mathbf{X}=\mathbf{E}_o iX^o+\mathbf{E}_\alpha X^\alpha$ - вектор $\mathbf{x}=\mathbf{e}_o ix^o+\mathbf{e}_s x^s,\quad x^o,x^s\in R,\quad x^o\equiv ct\equiv cT\equiv X^o$. Базис криволинейной системы координат определяется равенствами

$$\mathbf{e}_S=\mathbf{E}_k\frac{\partial X^k}{\partial x^S}=\sqrt{g_{sk}}\mathbf{E}_k,\qquad \text{где}\qquad g_{sk}=\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^s}\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^k}.\tag{1.3}$$

Тогда
$$\mathbf{E}_\alpha=\mathbf{e}_s\frac{\partial x^s}{\partial X^\alpha}=\sqrt{g^{\alpha s}}\mathbf{e}_s,\qquad g^{\alpha\beta}=\frac{\partial x^s}{\partial X^\alpha}\frac{\partial x^s}{\partial X^\beta},\quad g_{s\alpha}g^{\alpha k}=\delta_s^k.\tag{1.4}$$

Криволинейные координаты с базисом $\mathbf{e}_o,\mathbf{e}_\alpha$, $\alpha=1,2,3$ допускают отличный от исходного взаимный базис $\mathbf{e}^o,\mathbf{e}^\alpha$, $\alpha=1,2,3$, ($\mathbf{e}_o=\mathbf{e}^o$). Таким образом, имеем два представления вектор-кватерниона и четыре представления тензор–кватерниона.

Для ортогональных криволинейных координат правила перемножения элементов базиса $\mathbf{e}_s,\mathbf{e}_k$ повторяют правила перемножения элементов $\mathbf{E}_s,\mathbf{E}_k$.

9.2. Преобразование Х.Лоренца есть кватернионное преобразование [10] и все требования релятивистской форминвариантности для полей кватернионов выполняются автоматически: $\mathbf{F}=\tilde{\mathbf{L}}\circ\mathbf{f}\circ\tilde{\mathbf{L}}\to F=S^T f$, $\mathbf{x}=\mathbf{L}\circ\mathbf{X}\circ\mathbf{L}\to x=SX$, $\frac{\partial x}{\partial X}=S\to\frac{\partial F}{\partial X}=\frac{\partial S^T f}{\partial X}=\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial S^T f}{\partial x}=SS^T\frac{\partial f}{\partial x}$, где $SS^T=1$. Если разные области движущейся системы отсчета имеют различные скорости, то есть движущаяся система отсчета не инерциальная, то преобразование Х.Лоренца является локальным.

Далее отметим несколько положений, характеризующих уравнения Максвелла:

- релятивистская форминвариантность уравнений электромагнитного поля обеспечивается введением тензоров $\mathbf{F}=\nabla\mathbf{A}-\left(\nabla\mathbf{A}\right)^T=\mu\mathbf{G}$ [8], которые формально могут быть получены из вектор-кватернион-потенциала

$$\mathbf{A}=\mathbf{E}_o\frac{i}{c}A^o+\mathbf{E}_\alpha A^\alpha,\quad c=1\big/\sqrt{\varepsilon\mu},\quad A^o,A^\alpha\in R:$$

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}0 & iE_1/c & iE_2/c & iE_3/c\\ -iE_1/c & 0 & B_3 & -B_2\\ -iE_2/c & -B_3 & 0 & B_1\\ -iE_3/c & B_2 & -B_1 & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{G}=\begin{pmatrix}0 & icD_1 & icD_2 & icD_3\\ -icD_1 & 0 & H_3 & -H_2\\ -icD_2 & -H_3 & 0 & H_1\\ -icD_3 & H_2 & -H_1 & 0\end{pmatrix},$$

где $\overline{B}=rot\overline{A},\quad \overline{E}=-gradA^o-\frac{\partial\overline{A}}{\partial t}$; компоненты тензоров F^{pq},G^{pq} удовлетворяют равенствам $\frac{\partial F^{ij}}{\partial X^k}+\frac{\partial F^{jk}}{\partial X^i}+\frac{\partial F^{ki}}{\partial X^j}=0,\quad \sum_{k=o}^{3}\frac{\partial G^{jk}}{\partial X^k}=J^j\quad i,j,k=\overline{0,3}$, которые эквивалентны уравнениям Максвелла

$$rot\overline{E}+\frac{\partial\overline{B}}{\partial t}=0,\quad div\overline{B}=0,\quad rot\overline{H}-\frac{\partial\overline{D}}{\partial T}=\overline{J},\quad div\overline{D}=\rho;$$

- рассматривая уравнения Максвелла, как описание экспериментального факта, в связи с релятивистской форминвариантностью, естественно трактовать их как уравнения поля кватернионов;
- такая трактовка уравнений Максвелла позволяет опустить приведённые выше специальные построения Г.Минковского, связанные с введением тензоров F^{pq},G^{pq}.

Введем кватернион
$$\mathbf{P}=-i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(E+\overline{E}\right)+\left(H+\overline{H}\right),\tag{2.1}$$

$$\mu\mathbf{P}=-i\sqrt{\varepsilon\mu}\left(E+\overline{E}\right)+\left(B+\overline{B}\right)=-i\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(D+\overline{D}\right)+\left(B+\overline{B}\right)$$

где $\overline{E},\overline{H}\in R$ электрическая и магнитная напряженности, ε,μ $\left(c=1\big/\sqrt{\varepsilon\mu}\right)$ соответствующие проницаемости, а $E,H\in R-$ скалярные поля. Получаем уравнения по форме, совпадающие с уравнениями Максвелла, полагая

$$\begin{gathered}\nabla\circ\mathbf{P}=-i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(-div\overline{E}+\frac{\partial B}{\partial T}\right)-\left(div\overline{H}+\frac{\partial D}{\partial T}\right)-\\ -i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(rot\overline{E}+gradE+\frac{\partial\overline{B}}{\partial T}\right)+\left(rot\overline{H}+gradH-\frac{\partial\overline{D}}{\partial T}\right)=\mathbf{J},\end{gathered}\tag{2.2}$$

где $\mathbf{J} = \frac{i}{\sqrt{\varepsilon\mu}} q + \overline{J}$ – четыре ток, либо

$$rot\overline{E} + gradE + \frac{\partial\overline{B}}{\partial t} = 0, \qquad div\overline{D} - \varepsilon\frac{\partial B}{\partial t} = q,$$
$$rot\overline{H} + gradH - \frac{\partial\overline{D}}{\partial t} = \overline{J}, \qquad div\overline{B} + \mu\frac{\partial D}{\partial t} = 0. \tag{2.3}$$

Обычно скалярные поля $E, H, D = \varepsilon E, B = \mu H$ полагают равными нулю. Соотношение $\nabla^* \circ \mathbf{J} = -\left(\frac{\partial q}{\partial T} + div\overline{J}\right) + \frac{i}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(\varepsilon\mu\frac{\partial\overline{J}}{\partial T} + gradq\right) + rot\overline{J} = rot\overline{J}$,

эквивалентное

$$\frac{\partial q}{\partial t} + div\overline{J} = 0, \quad \varepsilon\mu\frac{\partial\overline{J}}{\partial t} + gradq = 0 \tag{2.4}$$

отражает непрерывность тока. Все компоненты поля удовлетворяют уравнениям Лапласа: $divgradF - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0, \quad graddiv\overline{F} - rotrot\overline{F} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial t^2} = 0$.

Кватернион $\mathbf{P}$ может быть получен из аналогичного кватерниона

$$\mathbf{Q} = -i\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(M + \overline{M}\right) + \left(A + \overline{A}\right),$$
$$\varepsilon\mathbf{Q} = -i\sqrt{\varepsilon\mu}\left(M + \overline{M}\right) + \left(L + \overline{L}\right) = -i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(N + \overline{N}\right) + \left(L + \overline{L}\right), \tag{2.5}$$

где $M, \overline{M}, A, \overline{A} \in R$ – напряженности и $N = \mu M$, $\overline{N} = \mu\overline{M}$, $L = \varepsilon A$, $\overline{L} = \varepsilon\overline{A}$ – соответствующие индукции:

$$\nabla^* \circ \mathbf{Q} = i\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\frac{\partial L}{\partial T} + div\overline{M}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial T} - div\overline{A}\right) -$$
$$-i\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(rot\overline{M} + gradM - \frac{\partial\overline{L}}{\partial T}\right) + \left(rot\overline{A} + gradA + \frac{\partial\overline{N}}{\partial T}\right) = \mu\mathbf{P}, \tag{2.6}$$

либо

$$rot\overline{M} + gradM - \frac{\partial\overline{L}}{\partial t} = \overline{D}, \qquad div\overline{M} + \frac{\partial L}{\partial t} = -D,$$
$$rot\overline{A} + gradA + \frac{\partial\overline{N}}{\partial t} = \overline{B}, \qquad div\overline{A} - \frac{\partial\overline{N}}{\partial t} = -B, \tag{2.7}$$

Итак, имеем $\nabla \circ \mathbf{P} = \mathbf{J}, \quad \nabla^* \circ \mathbf{J} = rot\overline{J}, \quad \nabla^* \circ \mathbf{Q} = \mu\mathbf{P}$

или

$$\nabla^* \circ \nabla \circ \mathbf{P} = rot\overline{J}, \quad \nabla \circ \nabla^* \circ \mathbf{Q} = \mu\mathbf{J}. \tag{2.8}$$

Кватернион $\mathbf{Q}$ представляет собой интегральную характеристику кватерниона $\mathbf{P}$.

Обращают на себя внимание два момента:

- несимметричность этих уравнений;
- поля, описываемые уравнениями (2.8), имеют место только при наличии тока.

Уравнения (2.2) и (2.6) становятся симметричными, если записать их, например, в виде

$$\nabla \circ \mathbf{P} = -\varepsilon\mathbf{Q} + \mathbf{J}, \quad \nabla^* \circ \mathbf{Q} = \mu\mathbf{P} + \mathbf{I}, \tag{2.9}$$

где $\mathbf{I} = \frac{i}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\rho + \overline{I}$ – четыре ток и $\nabla \circ \mathbf{I} = rot\overline{I}$.

Тогда уравнения (2.3) и (2.7) примут вид

$$rot\overline{E}+gradE+\frac{\partial\overline{B}}{\partial t}=-\overline{N},\qquad div\overline{D}-\varepsilon\frac{\partial B}{\partial t}=\varepsilon N+q,$$
$$rot\overline{H}+gradH-\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}=-\overline{L}+\overline{J},\quad div\overline{H}+\frac{\partial D}{\partial t}=L, \tag{2.10}$$
$$rot\overline{M}+gradM-\frac{\partial\overline{L}}{\partial t}=\overline{D},\qquad div\overline{N}+\mu\frac{\partial L}{\partial t}=-\mu D+\rho,$$
$$rot\overline{A}+gradA+\frac{\partial\overline{N}}{\partial t}=\overline{B}+\overline{I},\quad div\overline{A}-\frac{\partial N}{\partial t}=-B. \tag{2.11}$$

Каждое из полей удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\nabla^*\circ\left(\nabla\circ\mathbf{P}\right)+\varepsilon\mu\mathbf{P}=-\varepsilon\mathbf{I}+rot\overline{J},\quad \nabla\circ\left(\nabla^*\circ\mathbf{Q}\right)+\varepsilon\mu\mathbf{Q}=\mu\mathbf{J}+rot\overline{I}\ . \tag{2.12}$$

Уравнения разделились, поэтому комплексным кватернионам $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ соответствуют различные сущности.

При отсутствии рассеивания поля существуют независимо от зарядов и токов, которые ответственны только за изменение полей (факт, экспериментально обнаруженный Н.Тесла). Возникает некая аналогия с трактовкой динамики. По Г.Галилею и И.Ньютону движение имеет место без сил. Силы ответственны за изменение количества движения.

Вопрос о природе образований, являющихся носителями двух типов четыре-токов $\mathbf{J}$ и $\mathbf{I}$, открыт. Возможны разные варианты:

- имеет место обычный четыре-ток $\mathbf{J}$, порождаемый электронами, а четыре-ток $\mathbf{I}$ отсутствует;
- имеет место два типа образований, каждое из которых ответственно за один тип тока;
- образования, называемые электронами, обладают двумя типами зарядов и порождают два типа четыре-тока $\mathbf{J}$ и $\mathbf{I}$;
- заманчива возможность отождествления заряда ρ с массой электрона, а диэлектрической проницаемости вакуума ε с гравитационной постоянной γ $(\varepsilon=\gamma)$, поскольку масса и электрический заряд электрона являются единственными его макроскопическими характеристиками.

При тождественности заряда ρ массе имеем динамические уравнения гравитации. Отметим несколько моментов в подтверждение истинности такого отождествления:

- идентичность по форме закона Кулона и закона всемирного тяготения И.Ньютона;
- отсутствие разумного физического смысла для диэлектрической проницаемости вакуума ε;
- данное отождествление снимает статичность закона всемирного тяготения и устраняет его обособленность;
- экспериментальные факты, свидетельствующие о наличии дополнительных сил при гравитационных взаимодействиях [11];
- невозможность рассчитать реальное состояние Солнечной системы на достаточно большой промежуток времени, используя только закон всемирного тяготения;
- наконец, многочисленные попытки объединения гравитационного и электромагнитного полей, начиная с Хевисайда [12]; из современных авторов отметим В.Л.Дятлова [13].

9.3. По поводу проявления этих полей следует отметить тот факт, что функционирование большинства измерительных приборов обеспечивается силовым воздействием поля на заряды и токи, а массы, несущие эти заряды и токи, изменяют своё состояние движения в соответствии с уравнениями динамики.

Определим силу соотношением

$$\mathbf{F}_q = \mathrm{Re}\left[\frac{d^*}{dT}q\mathbf{Q}\right] = \mathrm{Re}\left[\left(q\mathbf{U}_T \circ \nabla^*\right)\circ \mathbf{Q}\right] = \mathrm{Re}\left[\left(\frac{iq}{\sqrt{\varepsilon\mu}} + \overline{J}\right)\circ \mu\mathbf{P}\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[i\left(\frac{q\cdot B}{\sqrt{\varepsilon\mu}} + \sqrt{\varepsilon\mu}\left(\overline{J}\cdot\overline{E}\right)\right) + \left(q\cdot E + \overline{J}\cdot\overline{B}\right) + \right.$$

$$\left. + i\left(\frac{q\cdot\overline{B}}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - \sqrt{\varepsilon\mu}\left(\overline{J}\cdot E + \overline{J}\times\overline{E}\right)\right) + \left(q\cdot\overline{E} + \overline{J}\cdot B + \overline{J}\times\overline{B}\right)\right] =$$

$$= \left(q\cdot E + \overline{J}\cdot\overline{B}\right) + \left(q\cdot\overline{E} + \overline{J}\cdot B + \overline{J}\times\overline{B}\right).$$

Отметим наличие силы $\overline{J}\cdot B$, экспериментально обнаруженной В.Г.Николаевым [7].

По аналогии имеем силу, действующую на массу ρ,

$$\mathbf{F}_\rho = \mathrm{Re}\left[\frac{d}{dT}\rho\mathbf{P}\right] = \mathrm{Re}\left[\left(\rho\mathbf{U}_T \circ \nabla\right)\circ \mathbf{P}\right] = \mathrm{Re}\left[-\left(\frac{i\rho}{\sqrt{\varepsilon\mu}} + \overline{I}\right)\circ \varepsilon\mathbf{Q}\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[-i\left(\frac{\rho\cdot L}{\sqrt{\varepsilon\mu}} + \sqrt{\varepsilon\mu}\left(\overline{I}\cdot\overline{M}\right)\right) + \left(-\rho\cdot M + \overline{I}\cdot\overline{L}\right) + \right.$$

$$\left. + i\left(-\frac{\rho\cdot\overline{L}}{\sqrt{\varepsilon\mu}} + \sqrt{\varepsilon\mu}\left(\overline{I}\cdot M + \overline{I}\times\overline{M}\right)\right) + \left(-\rho\cdot\overline{M} + \overline{I}\cdot L + \overline{I}\times\overline{L}\right)\right] =$$

$$= \left(-\rho\cdot M + \overline{I}\cdot\overline{L}\right) + \left(-\rho\cdot\overline{M} + \overline{I}\cdot L + \overline{I}\times\overline{L}\right).$$

Помимо статической силы $\mathbf{F}_\rho = -\rho\cdot\overline{M}$ имеем слагаемые $\overline{I}\cdot L + \overline{I}\times\overline{L}$, зависящие от движения массы $\overline{I} = \overline{V}\rho$ ($\overline{V}$ – скорость массы) и поля $L + \overline{L}$, которое может быть обусловлено движением источника поля $\overline{M}$.

Остро стоит вопрос об измерении не силового проявлении поля:

- какой смысл имеют мнимые компоненты полей $\mathrm{Im}\,\mathbf{F}_q$, $\mathrm{Im}\,\mathbf{F}_\rho$;
- какой смысл имеют скалярные компоненты введённых сил.

9.4. Подведём некий итог. Кватернионная трактовка электромагнитного поля, изначально объявленная Д.Максвеллом, более адекватна реальности, так как уравнения поля, естественно, форминвариантны по отношению к преобразованию Х.Лоренца, не требуют калибровки и объясняют экспериментально обнаруженное дополнительно к силе Х.Лоренца силовое воздействие.

При отсутствии рассеивания симметризация уравнений приводит к факту существования полей сколь угодно долго. Заряды и токи вызывают только изменение поля. Для обеих полей электрические проницаемости $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и магнитные проницаемости μ_1, μ_2 для простоты приняты одинаковыми, что, возможно, не так.

Математические факты, связанные с исключительными алгебрами, ставят задачу о представлении электромагнитного поля в виде полей октав. Любые другие поля, включая и гравитационное поле, связанные с вакуумом, должны иметь также кватернионную трактовку.

Все эти гипотезы требуют экспериментальной проверки и осмысления.

Литература.

1. A.W.Conway, On the application of quaternions to some recent developments of electrical theory. Proc. Roy. Irish Acad. A29(1911), 80.
2. L. Silberstein Quaternionic Form of Relativity *Phil Mag* S. 6 vol 23 No. 137 (May 1912) 790-809
3. Никола Тесла. Статьи. Самара: Изд-во «АГНИ», 2008. стр.160-163.
4. Никола Тесла. METHOD OF UTILIZING RADIANT ENERGY, Patent No.685,958,dated November 5,1901 APPARATUS FOR THE UTILIZATION OF RADIANT ENERGY Patent No.685,957,dated November 5,1901
5. Коробейников В.И. www.qrz.ru/schemes/contribute/antenns/eh/
6. Сью М. Предположительное открытие Аксионов через последовательно добытые радиографические сведения после открытия генератора Шпильмана (Торсионные поля и их использование) www.spinfields.hut2.ru/ALMANACH/2n02/BenfordAxionR.htm
7. Николаев Г.В. Современная электродинамика и причины её парадоксальности. Перспективы построения непротиворечивой электродинамики. Томск: Изд-во «Твердыня», 2003. 149 стр.
8. Г.Минковский. Две статьи об основных уравнениях электродинамики. Москва Ижевск Институт компьютерных исследований 2003.
9. Andre Waser. Quaternions in Electrodynamics. AW-Verlag; www.aw-verlag.ch
10. Ю.И.Ханукаев. О кватернионах I. Конечные перемещения твердого тела и точки. Исследовано в России. http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/033/pdf
11. Г.А.Никольский. Вихревые эффекты проникающей компоненты солнечного излучения. Журнал Санкт-Петербургского университета, № 24-25, 28.11.2005 www.spbumag.nw.ru/2005/24/14.shtml
12. Heaviside O.A. Gravitational and Electromagnetic Analogy // The Electrician. 1893.V.31.P.281-282,359.
13. Дятлов В.Л. Поляризационная модель дипольного физического вакуума. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1998. 183 с.