ЛЕКЦИЯ 4.06

ВИНТОВОЙ АНАЛИЗ. ВИНТ КАК ФУНКЦИЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА. ДУАЛЬНЫЕ СКАЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ И ВИНТ-ФУНКЦИИ ВИНТОВОГО АРГУМЕНТА. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ВИНТА.

4. ВИНТОВОЙ АНАЛИЗ.

4.1. ВИНТ КАК ФУНКЦИЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА.

Компоненты винта, отнесённого к какой-либо системе координат можно рассматривать как функции скалярного аргумента, например, времени. Тогда $\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\mathbf{R}(t+\Delta t)-\mathbf{R}(t)}{\Delta t}$, $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2)=\dfrac{d\mathbf{R}_1}{dt}+\dfrac{d\mathbf{R}_2}{dt}$, $\dfrac{d}{dt}(C\mathbf{R})=C\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}$, $C=const$,
$\dfrac{d}{dt}(\mathbf{R}_1\cdot\mathbf{R}_2)=\dfrac{d\mathbf{R}_1}{dt}\cdot\mathbf{R}_2+\mathbf{R}_1\cdot\dfrac{d\mathbf{R}_2}{dt}$, $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2)=\dfrac{d\mathbf{R}_1}{dt}\times\mathbf{R}_2+\mathbf{R}_1\times\dfrac{d\mathbf{R}_2}{dt}$ и т.д.

При дифференцировании винта могут иметь место частные случаи:

- ось винта сохраняет неизменное положение, а меняется только дуальный модуль, тогда
$$\frac{d\mathbf{R}}{dt}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{E}R)=\boldsymbol{E}\frac{dR}{dt}=\boldsymbol{E}\frac{d[r\exp(\varepsilon\, p)]}{dt}=\boldsymbol{E}(\dot r+\varepsilon\,\dot p r)\exp(\varepsilon\, p)=\boldsymbol{E}r\exp(\varepsilon\, p)\left(\frac{\dot r}{r}+\varepsilon\,\dot p\right),$$
то есть производная есть винт, соосный с дифференцируемым винтом;
- ось винта изменяет положение в пространстве, а дуальный модуль-величина постоянная, тогда $R^2=const,\quad \dfrac{dR^2}{dt}=2\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{R}}=0$ и винты $\mathbf{R}$ и $\dot{\mathbf{R}}$ пересекаются под прямым углом.

Неопределённым интегралом от функции $\mathbf{R}(t)$ называют функцию $\mathbf{S}(t)=\int\mathbf{R}(t)dt+\mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ – постоянный винт, если $\dfrac{d\mathbf{S}(t)}{dt}=\mathbf{R}(t)$.

Определённым интегралом называется винт $\displaystyle\int_A^B\mathbf{R}(t)dt=\mathbf{S}(B)-\mathbf{S}(A)$.

Если винт задан как функция дуального скалярного параметра $T=t+\varepsilon\, t^o$, то будем иметь $\mathbf{R}(T)=\mathbf{R}(t+\varepsilon\, t^o)=\mathbf{R}(t)+\varepsilon\left[t^o\dot{\mathbf{R}}(t)+\mathbf{R}^o(t)\right]$.

В винтовом исчислении имеют место общеизвестные свойства как и в обыкновенном векторном анализе.

4.2. ДУАЛЬНЫЕ СКАЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ И ВИНТ-ФУНКЦИИ ВИНТОВОГО АРГУМЕНТА. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ.

Винты $\mathbf{R}_i\Leftrightarrow(r_i,r_i^o)\Leftrightarrow r_i+\varepsilon\, r_i^o$ будем задавать их моторами, отнесёнными к одной общей точке приведения O. Пусть каждому винту по некоторому закону отнесено некоторое дуальное скалярное число. Это отнесение $F(\mathbf{R})=F(\mathbf{r}+\varepsilon\,\mathbf{r}^o)=F(X,Y,Z)=F(x+\varepsilon\, x^o,y+\varepsilon\, y^o,z+\varepsilon\, z^o)$ называют дуальной скалярной функцией винта $\mathbf{R}$. Для простоты будем считать $F(r)=F(x,y,z)$ вещественной функцией, тогда
$$F(X,Y,Z)=F(x,y,z)+\varepsilon\left(x^o\frac{\partial F}{\partial x}+y^o\frac{\partial F}{\partial y}+z^o\frac{\partial F}{\partial z}\right)=F(x,y,z)+\varepsilon\,\delta F(x,y,z)$$
или
$$F(\mathbf{R})=F(\mathbf{r})+\varepsilon\,\mathbf{r}^o\cdot\nabla F(\mathbf{r})=F(\mathbf{r})+\varepsilon\,\mathbf{r}^o\cdot gradF(\mathbf{r})=F(\mathbf{r})+\varepsilon\,\delta F(\mathbf{r}),\qquad(4.1)$$
где $\nabla=\mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ и $\delta=x^o\dfrac{\partial}{\partial x}+y^o\dfrac{\partial}{\partial y}+z^o\dfrac{\partial}{\partial z}=\mathbf{r}^o\cdot\nabla$.

Если каждому винту сопоставлен другой винт, тогда это отнесение называют винт-функцией $\mathbf{F}(\mathbf{R}) = F(\mathbf{r} + \varepsilon\, \mathbf{r}^o)$ винта $\mathbf{R}$. В координатном виде имеем $\mathbf{F}(\mathbf{R}) = \mathbf{i}F_x(X,Y,Z) + \mathbf{j}F_y(X,Y,Z) + \mathbf{k}F_z(X,Y,Z) =$

$$= \mathbf{i}F_x(x,y,z) + \mathbf{j}F_y(x,y,z) + \mathbf{k}F_z(x,y,z) + \varepsilon\left[\mathbf{i}\left(x^o \frac{\partial F_x}{\partial x} + y^o \frac{\partial F_x}{\partial y} + z^o \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) + \right.$$

$$\left. + \mathbf{j}\left(x^o \frac{\partial F_y}{\partial x} + y^o \frac{\partial F_y}{\partial y} + z^o \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \mathbf{k}\left(x^o \frac{\partial F_z}{\partial x} + y^o \frac{\partial F_z}{\partial y} + z^o \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)\right]$$

Как и ранее принято, что $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}F_x(x,y,z) + \mathbf{j}F_y(x,y,z) + \mathbf{k}F_z(x,y,z)$. Выражение в квадратных скобках можно представить в виде

$$\left[(\mathbf{i}x^o + \mathbf{j}y^o + \mathbf{k}z^o)\cdot\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](\mathbf{i}F_x + \mathbf{j}F_y + \mathbf{k}F_z)$$ и

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \varepsilon\,(\mathbf{r}^o \cdot \nabla)\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \varepsilon\,\delta\mathbf{F}(\mathbf{r}). \qquad (4.2)$$

Отмечаем, что функции винта полностью определяются функцией его главной части. Из этого факта следует, что равенства типа $F(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r})$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{G}(\mathbf{r})$ не нарушаются при замене $\mathbf{r} \to \mathbf{R}$. Имеем также

$$F(\mathbf{R}_1,...,\mathbf{R}_n) = F(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_n) + \varepsilon\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i^o \cdot \nabla_i F = F(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_n) + \varepsilon\sum_{i=1}^{n} \delta_i F,$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}_1,...,\mathbf{R}_n) = \mathbf{F}(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_n) + \varepsilon\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i^o \cdot \nabla_i \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_n) + \varepsilon\sum_{i=1}^{n} \delta_i \mathbf{F},$$

то есть функции нескольких винтов полностью определяются функцией от векторов этих винтов.

Рассмотрим оператор $\nabla^* = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial X} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial Y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial Z}$, где $\partial X = \partial x + \varepsilon\partial x^o$, $\partial Y = \partial y + \varepsilon\partial y^o$, $\partial Z = \partial z + \varepsilon\partial z^o$. Считая постоянными Y, Z, а следовательно, и y^o, z^o, имеем

$$\frac{\partial F(X,Y,Z)}{\partial X} = \frac{\partial F(x,y,z) + \varepsilon\ \partial\left(x^o \frac{\partial F}{\partial x} + y^o \frac{\partial F}{\partial y} + z^o \frac{\partial F}{\partial z}\right)}{\partial x + \varepsilon\ \partial x^o} =$$

$$= \frac{\partial F(x,y,z)\partial x}{\partial x^2} + \varepsilon\ \frac{\partial x \partial\left(x^o \frac{\partial F}{\partial x} + y^o \frac{\partial F}{\partial y} + z^o \frac{\partial F}{\partial z}\right) - \partial x^o \partial F(x,y,z)}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} + \varepsilon\ \left[-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x^o}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(x^o \frac{\partial F}{\partial x} + y^o \frac{\partial F}{\partial y} + z^o \frac{\partial F}{\partial z}\right)\right] =$$

$$= \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} + \varepsilon\ \left(x^o \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + y^o \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + z^o \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\right),$$

$$\frac{\partial F(X,Y,Z)}{\partial Y} = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} + \varepsilon\left(x^o \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + y^o \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + z^o \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\right),$$

$$\frac{\partial F(X,Y,Z)}{\partial Z} = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} + \varepsilon\left(x^o \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} + y^o \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} + z^o \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right).$$

Итак, $gradF(\mathbf{R}) = \nabla F(\mathbf{R}) = \nabla F(\mathbf{r}) + \varepsilon\,\nabla[\mathbf{r}^o \cdot \nabla F(\mathbf{r})] = \nabla F(\mathbf{r}) + \varepsilon\,\nabla\delta F(\mathbf{r}) =$

$$= \nabla F(\mathbf{r}) + \varepsilon\,\delta\nabla F(\mathbf{r}) = \nabla F(\mathbf{r}) + \varepsilon\,\mathbf{r}^o \cdot \nabla\nabla F(\mathbf{r}).$$

Для винт-функции винтового аргумента получим

$$div\mathbf{F}(\mathbf{R}) = \nabla\cdot\mathbf{F}(\mathbf{R}) = \nabla\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \varepsilon\,\nabla\cdot\left[\left(\mathbf{r}^o\cdot\nabla\right)\mathbf{F}(\mathbf{r})\right] = \nabla\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \varepsilon\,\nabla\cdot\delta\mathbf{F}(\mathbf{r}) =$$

$$= \nabla\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \varepsilon\;\;\delta\nabla\cdot F(\mathbf{r}) = \nabla\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \varepsilon\;\left(\mathbf{r}^o\cdot\nabla\right)\nabla\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}),$$

$$rot\mathbf{F}(\mathbf{R}) = \nabla\times\mathbf{F}(\mathbf{R}) = \nabla\times\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \varepsilon\,\nabla\times\left[\left(\mathbf{r}^o\cdot\nabla\right)\mathbf{F}(\mathbf{r})\right] = \nabla\times\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \varepsilon\,\nabla\times\delta\mathbf{F}(\mathbf{r}) =$$

$$= \nabla\times\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \varepsilon\,\delta\nabla\times F(\mathbf{r}) = \nabla\times\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \varepsilon\left(\mathbf{r}^o\cdot\nabla\right)\nabla\times\mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

Всё свелось к применению оператора ∇ к главной части рассматриваемой функции, то есть вещественной функции.

Легко убедиться в справедливости тождеств $rotgradV = 0, \quad divrot\mathbf{V} = 0$. Наконец, для градиента одного винта по другому винту имеем

$$\left[\mathbf{F}(\mathbf{R})\cdot\nabla\right]\mathbf{V}(\mathbf{R}) = \left\{\left[\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \varepsilon\left(\mathbf{r}^o\cdot\nabla\right)\mathbf{F}(\mathbf{r})\right]\cdot\nabla\right\}\left[\mathbf{V}(\mathbf{r}) + \varepsilon\left(\mathbf{r}^o\cdot\nabla\right)\mathbf{V}(\mathbf{r})\right] =$$

$$= \left[\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\nabla\right]\mathbf{V}(\mathbf{r}) + \varepsilon\left\{\left[\left(\mathbf{r}^o\cdot\nabla\right)\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\nabla\right]\mathbf{V}(\mathbf{r}) + \left[\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\nabla\right]\left(\mathbf{r}^o\cdot\nabla\right)\mathbf{V}(\mathbf{r})\right\}.$$

4.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ВИНТА.

Поскольку интегрирование по дуальной переменной сводится к интегрированию по соответствующей вещественной переменной, мы избавлены от необходимости вводить новые понятия, связанные с мерами длины, площади, объёма в дуальном пространстве.

Интегралом от винт-функции $\mathbf{F}(\mathbf{R}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \varepsilon\left(\mathbf{r}^o\cdot\nabla\right)\mathbf{F}(\mathbf{r})$ вдоль кривой L будем называть интеграл $\int\limits_L \mathbf{F}(\mathbf{R})\cdot d\mathbf{r} = \int\limits_L \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} + \varepsilon\int\limits_L \left[\left(\mathbf{r}^o\cdot\nabla\right)\mathbf{F}(\mathbf{r})\right]\cdot d\mathbf{r}$. В прямоугольной системе координат имеем

$$\int\limits_L F_x(X,Y,Z)dx + \int\limits_L F_y(X,Y,Z)dy + \int\limits_L F_z(X,Y,Z)dz =$$

$$= \int\limits_L F_x(x,y,z)dx + \int\limits_L F_y(x,y,z)dy + \int\limits_L F_z(x,y,z)dz + \varepsilon\int\limits_L\left(x^o\frac{\partial F_x}{\partial x} + y^o\frac{\partial F_x}{\partial y} + z^o\frac{\partial F_x}{\partial z}\right)dx$$

$$+\varepsilon\int\limits_L\left(x^o\frac{\partial F_y}{\partial x} + y^o\frac{\partial F_y}{\partial y} + z^o\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)dy + \varepsilon\int\limits_L\left(x^o\frac{\partial F_z}{\partial x} + y^o\frac{\partial F_z}{\partial y} + z^o\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)dz.$$

Отметим, что при интегрировании необходимо задать функции $x^o(x,y,z), \quad y^o(x,y,z), \quad z^o(x,y,z)$.

Потоком винта $\mathbf{F}(\mathbf{R}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \varepsilon\left(\mathbf{r}^o\cdot\nabla\right)\mathbf{F}(\mathbf{r})$ через поверхность S с внешней нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$ называют интеграл

$$\int\limits_S \mathbf{F}(\mathbf{R})\cdot\mathbf{n}dS = \int\limits_S \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}dS + \varepsilon\int\limits_S\left[\left(\mathbf{r}^o\cdot\nabla\right)\mathbf{F}(\mathbf{r})\right]\cdot\mathbf{n}dS\,.$$

Левая часть этого равенства имеет вид $\int\limits_S \mathbf{F}(\mathbf{R})\cdot\mathbf{n}dS =$

$$= \int\limits_S F_x(X,Y,Z)\cos\alpha dS + \int\limits_S F_y(X,Y,Z)\cos\beta dS + \int\limits_S F_z(X,Y,Z)\cos\gamma dS =$$

$$= \int\limits_S F_x(X,Y,Z)dydz + \int\limits_S F_y(X,Y,Z)dzdx + \int\limits_S F_z(X,Y,Z)dxdy.$$

Отделяя главную часть от моментной части, получим

$$\int\limits_S \mathbf{F}(\mathbf{R})\cdot\mathbf{n}dS = \int\limits_S F_x(x,y,z)\,dydz + \int\limits_S F_y(x,y,z)\,dzdx + \int\limits_S F_z(x,y,z)\,dxdy +$$

$$+\varepsilon\int\limits_S\left(x^o\frac{\partial F_x}{\partial x} + y^o\frac{\partial F_x}{\partial y} + z^o\frac{\partial F_x}{\partial z}\right)dydz + \varepsilon\int\limits_S\left(x^o\frac{\partial F_y}{\partial x} + y^o\frac{\partial F_y}{\partial y} + z^o\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)dzdx +$$

$$+\varepsilon\int_S \left(x^o \frac{\partial F_z}{\partial x} + y^o \frac{\partial F_z}{\partial y} + z^o \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dxdy.$$

Аналогично предыдущему получаем обобщение интеграла по объёму для винт-функции $\int_V \mathbf{F}(\mathbf{R})dV = \iiint \mathbf{F}(\mathbf{r})dV + \varepsilon \iiint [\mathbf{r}^o(\mathbf{r}) \cdot \nabla]\mathbf{F}(\mathbf{r})dV$. Например, интеграл от дивергенции винт функции $\mathbf{F}(\mathbf{R}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \varepsilon\,(\mathbf{r}^o \cdot \nabla)\mathbf{F}(\mathbf{r})$ по объёму V:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{R})dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})dV + \varepsilon \int_V \nabla \cdot [(\mathbf{r}^o \cdot \nabla)\mathbf{F}(\mathbf{r})]dV =$$

$$= \int_V \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dxdydz + \varepsilon \int_V \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \left[\mathbf{i} \cdot \left(x^o \frac{\partial F_x}{\partial x} + y^o \frac{\partial F_x}{\partial y} + z^o \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) + \right.$$

$$\left. + \mathbf{j} \cdot \left(x^o \frac{\partial F_y}{\partial x} + y^o \frac{\partial F_y}{\partial y} + z^o \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \cdot \left(x^o \frac{\partial F_z}{\partial x} + y^o \frac{\partial F_z}{\partial y} + z^o \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \right] dxdydz\,.$$

Из рассмотренных интегралов вытекает справедливость известных теорем Гаусса-Остроградского и Стокса в применении к винт-функциям.

Составим разность $D = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{R})dV - \int_S \mathbf{F}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{n}dS$, где $\mathbf{R} \Leftrightarrow \mathbf{r} + \varepsilon\,\mathbf{r}^o$.

Раскрывая интегралы, получаем

$$D = d + \varepsilon\,d^o = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})dV - \int_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}dS + \varepsilon \int_V \nabla \cdot [(\mathbf{r}^o \cdot \nabla)\mathbf{F}(\mathbf{r})]dV - \varepsilon \int_S [(\mathbf{r}^o \cdot \nabla)\mathbf{F}(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{n}dS\,.$$

В силу теоремы Гаусса-Остроградкого для вектор-функций имеем $D = 0$, то есть имеем обобщение: ***Интеграл от дивергенции винт-функции, взятый по объёму, определяемому областью изменения вектора винта-аргумента, равен интегралу от этой винт-функции, взятому по замкнутой поверхности, ограничивающей данный объём.***

Составим теперь разность $E = \int_S [\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{R})] \cdot \mathbf{n}dS - \int_L \mathbf{F}(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{r}$, $\mathbf{R} \Leftrightarrow \mathbf{r} + \varepsilon\,\mathbf{r}^o$.

Аналогичным образом, раскрывая интегралы , получаем

$$E = e + \varepsilon\,e^o = \int_S [\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{n}dS - \int_L \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \varepsilon \int_S \{\nabla \times [(\mathbf{r}^o \cdot \nabla)\mathbf{F}(\mathbf{r})]\} \cdot \mathbf{n}dS - \varepsilon \int_L [(\mathbf{r}^o \cdot \nabla)\mathbf{F}(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{r}$$

Обе разности e и e^o равны нулю в силу теоремы Стокса для вектор-функций и следовательно $\int_S [\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{R})] \cdot \mathbf{n}dS = \int_L \mathbf{F}(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{r}$, то есть имеем теорему: ***Интеграл от ротора винт-функции, взятый по некоторой ограниченной поверхности, равен интегралу от этой винт-функции, вычисленному по замкнутой кривой, ограничивающей данную поверхность.***

Выражения всех рассмотренных интегралов содержат дуальные функции вещественных переменных, поэтому сами интегралы полностью определяются главными частями этих выражений и перенесение свойств вещественных интегралов на дуальные получается непосредственно.

Итак, ***для аналитических функций все теоремы и все тождества векторного анализа сохраняют силу при замене векторов винтами.***

Выполнение выражений (4.1), (4.2) означает аналитичность функций. В случае не аналитичности функций не всякая операция с винтами имеет аналог в области векторов и не может возникнуть как обобщение векторной операции. Отсюда можно заключить, что ***принцип перенесения имеет силу только в области аналитических функций***.