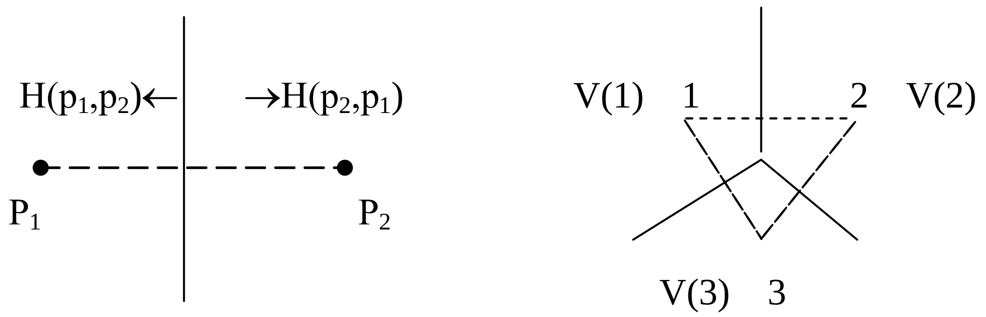
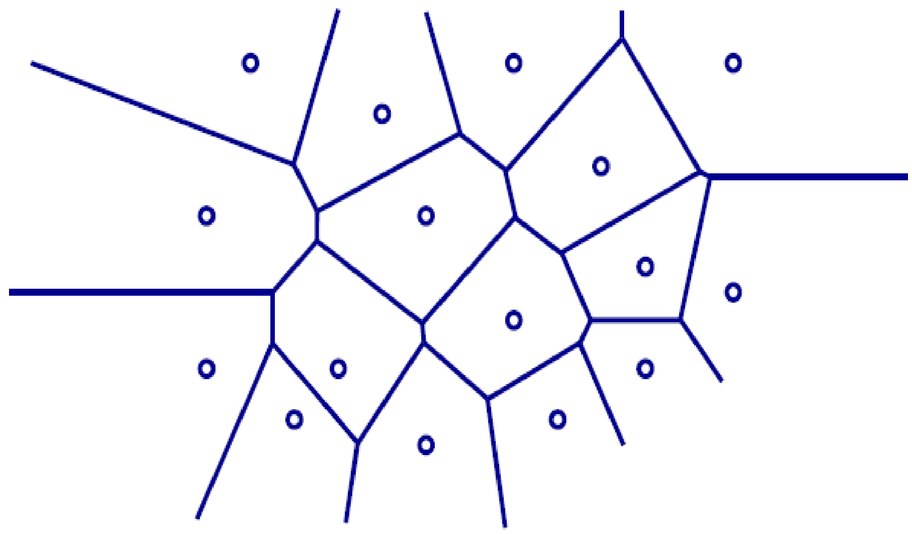
ЛЕКЦІЯ 9
5.4.Діаграма Вороного. Властивості.

Задача Б.8 (ОБЛАСТІ БЛИЬКОСТІ). *На площині задана множина S, яка містить N точок. Необхідно для кожної точки p_i множини S визначити локус точок (x, y) на площині, для яких відстань до p_i менша, ніж до будь - якої іншої точки множини S.*

Якщо є дві точки p_i та p_j, то множина точок, більш близьких до p_i ніж до p_j, є півплощина, що визначається прямою, яка перпендикулярна до відрізка p_ip_j та ділить його навпіл. Позначимо цю півплощину через H(p_i, p_j). Множину точок, більш близьких до p_i ніж до довільної іншої точки, будемо позначати через V_i. Вона одержується в результаті перетину N - 1 півплощин. Ця множина є опуклим многокутником, який має не більш ніж N - 1 сторін.

$$V_i = \bigcap_{i \neq j} H(p_i, p_j)$$





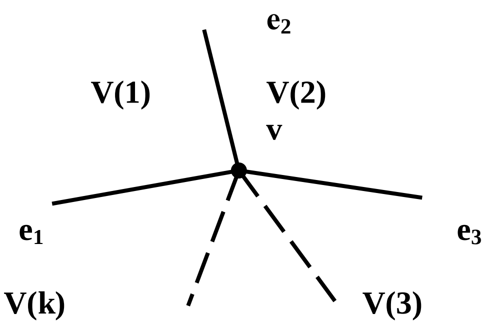
Означення. ***Область*** V_i *називається* ***многокутником Вороного****, яка відповідає точці* p_i*. Отримані таким чином N областей утворюють розбиття площини, яке називається діаграмою Вороного. Діаграму Вороного множини точок S будемо позначати через Vor (S).*

Кожна з N вихідних точок множини належить лише одному многокутнику Вороного. Тому якщо (x, y) $\in V_i$, то p_i є найближчим сусідом точки (x, y).

Властивості Діаграми Ворного

1. Припущення. Жодні чотири точки вихідної множини S не лежать на одному колі.

2. Теорема 9.1. *Кожна вершина діаграми Вороного є точкою перетину трьох ребер діаграми.*

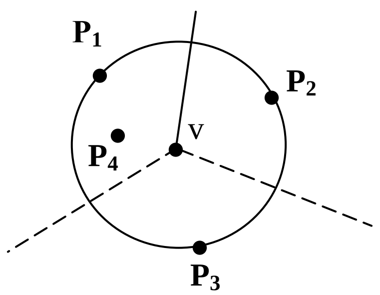


Мал. 9.2. Вершина діаграми Вороного з інциндентними їй вершинами.

Доведення. Нехай *v* є точкою перетину ребер e_1, e_2, ..., e_k. Ребро e_i є спільним для многокутників V(i - 1) та V(i), i = 2, ..., k, а ребро є спільним для V(k) та V(1). Оскільки *v* належить ребру e_i, то вона однаково віддалена від точок p_{i-1} та p_i. Таким чином *v* рівновіддалена від точок p_1, p_2, ..., p_k. Це означає, що точки p_1, p_2, ..., p_k лежать на одному колі, що суперечить припущенню.

3. Вершини діаграми Вороного є центрами кіл, кожне з яких визначається трьома точками вихідної множини, а сама діаграма Вороного є регулярною (всі вершини мають однаковий ступінь) зі ступенем вершин, рівним трьом. Позначимо через C(*v*) коло, що відповідає вершині *v*.

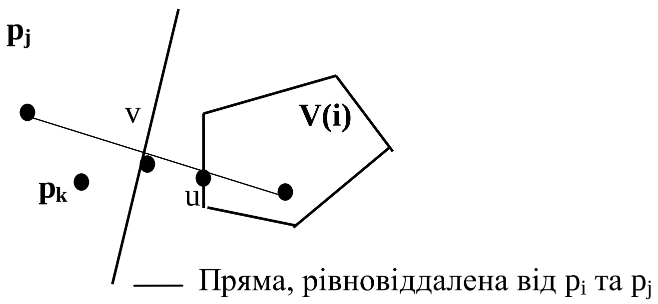
Теорема 9.2. *Для будь-якої вершини v діаграми Вороного множини S коло C(v) не містить жодних інших вершин множини S.*



Мал. 9.3. Коло C(v) не містить жодної точки множини S.

Доведення. Нехай p_1, p_2, p_3 – три точки множини S, які визначають коло C(*v*). Якщо коло містить ще деяку точку p_4 множини S, то вершина *v* знаходиться ближче до p_4 ніж до інших точок. Тоді вершина v повинна знаходитися у V(4), що суперечить тому що v належить одночасно V(1), V(2) та V(3).

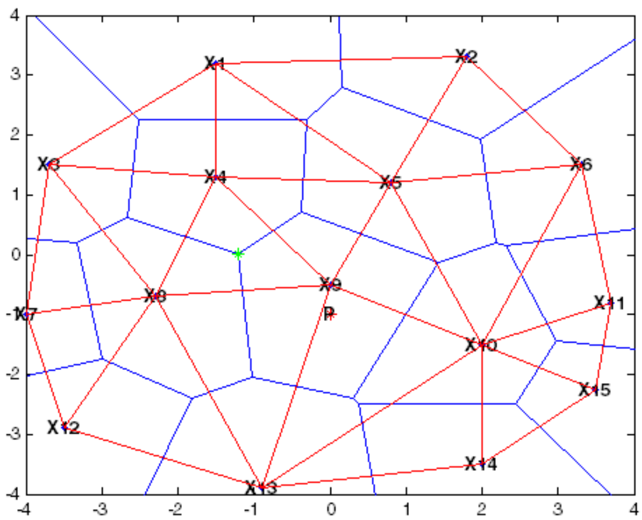
Теорема 9.3. *Кожний найближчий сусід точки p_i множини S визначає ребро у многокутнику Вороного Vi.*



Мал.9.4. Кожен найближчий сусід точки p_i визначає ребро многокутника V_i.

Доведення.Нехай p_i є найближчим сусідом p_j, а v – середина з'єднуючого їх відрізка. Припустимо, що v не лежить на границі V_i. Тоді відрізок перетинає деяке ребро многокутника V_i (наприклад рівновіддалене від p_i та p_k) в деякій точці u. Тоді $|p_i u| < |p_i v|$ і тому $|p_i p_k| \leq 2\ |p_i u| < 2\ |p_i v| = |p_i p_j|$, звідки випливає що p_k ближче до p_i ніж p_j, що суперечить умові теореми.

Теорема 9.4. *Многокутник V_i є необмеженим тоді і тільки тоді, коли точка p_i лежить на границі опуклої оболонки множини S.*



Мал. 9.5. Прямолінійний граф, двоїстий діаграмі Воронного.

Теорема 9.5. *Граф, двоїстий діаграмі Вороного, є триангуляцією множини S.*

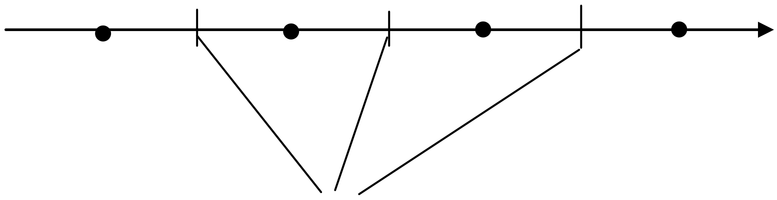
Теорема 9.6. *Діаграма Вороного множини з N точок має не більш 2N - 5 вершин та 3N - 6 ребер.*

Доведення. Кожному ребру графа, двоїстого діаграмі Вороного, відповідає єдине ребро діаграми. Двоїстий граф є триангуляцією, а отже є планарним з N вершинами. За формулою Ейлера він має не більш ніж 3N - 6 ребер та 2N - 4 граней. Лише обмежені грані (їх не більш ніж 2N - 5) відповідають вершинам діаграми Вороного при відображенні двоїстості.

5.5. ПОБУДОВА ДІАГРАМИ ВОРОНОГО

Діаграма Вороного планарний граф. Результат- РСПЗ.

Теорема 9.7. *Для побудови діаграми Вороного множини N точок необхідно $\Omega(N\log N)$ операцій в гіршому випадку.*



Вершини Діаграми Вороного в E^1.

Наслідок. *СОРТУВАННЯ $\propto_N$ ДІАГРАМИ ВОРОНОГО*

<u>Діаграма Вороного(схема “розподіляй та володарюй”).</u>

Крок 1. Розділити множину S на дві приблизно рівні підмножини S_1 та S_2.
Крок 2. Рекурсивно побудувати Vor(S_1) та Vor(S_2).
Крок 3. Об’єднати Vor(S_1) та Vor(S_2) і таким чином отримати Vor(S).

Означення. *Нехай для заданого розбиття $\{S_1, S_2\}$множини S $\sigma(S_1, S_2)$ означає множину ребер діаграми Вороного, спільних для пар многокутників V(i) та V(j) діаграми Vor(S), де $p_i \in S_1$ та $p_j \in S_2$.*

Теорема 9.7. *Сукупніс*ть $\sigma(S_1, S_2)$ є множина ребер деякого під графа діаграми Vor(S) і має такі властивості:

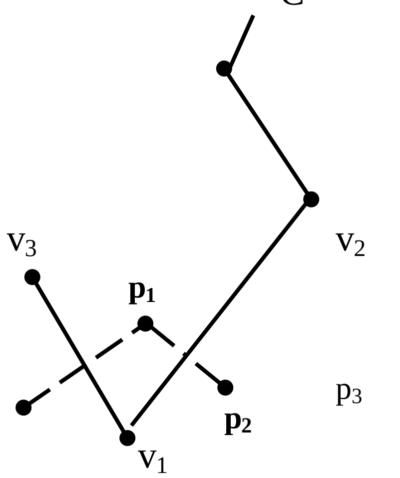
1. $\sigma(S_1, S_2)$ складається із циклів та ланцюгів, що не мають спільних ребер. Якщо деякий ланцюг містить єдине ребро, то це ребро є прямою лінією; інакше два крайні ребра ланцюга є промінями.

2. Якщо множини S_1 та S_2 є лінійно роздільними, то $\sigma(S_1, S_2)$ складається з єдиного монотонного ланцюга.

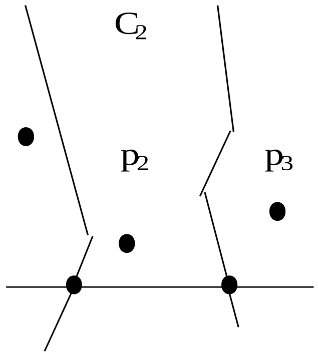
Доведення.

1.Якщо уявити, що кожний із многокутників $\{V(i): p_i \in S_1\}$ розфарбований у червоний колір, а кожний із многокутників $\{V(j): p_j \in S_2\}$- у зелений колір, то Vor(S) перетвориться у двоколірну карту. Відомо, що границі між многокутниками різних кольорів представляють цикли та ланцюги, які не мають спільних ребер. Кожна компонента множини $\sigma(S_1, S_2)$ розбиває площину на дві частини. Таким чином, ланцюг містить єдине ребро, яке представляє пряму лінію, чи її перше та останнє ребра є промені.

2.Якщо множини S_1 і S_2 лінійно роздільні, то єдиний ланцюг, який міститься у $\sigma(S_1, S_2)$, позначатимемо σ. Якщо розділяючи пряма m вертикальна, то σ розділяє площину на ліву π_L та праву π_R частини.



Мал.9.6(а).Монотонність$x(p_3) < x(p_1) < x(p_2)$, $(p_3, p_2) \in S_1$, $p_1 \in S_2 \Rightarrow v_1$ не існує.



Мал.9.6 (б) Монотонність: $x(p_1) < x(p_2) < x(p_3)$, $(p_3, p_1) \in S_1$, $p_2 \in S_2 \Rightarrow v_1$ протиріччя.

Теорема 9.8. *Якщо множини* S_1 *і* S_2 *лінійно роздільні вертикальною прямою і при цьому* S_1 *міститься ліворуч від* S_2, *то діаграма Вороного* Vor(S) *являє собою об'єднання* $\mathrm{Vor}(S_1) \cap \pi_L$ і $\mathrm{Vor}(S_2) \cap \pi_R$.

procedure ДІАГРАМА ВОРОНОГО

Крок 1. Розділити множину S на дві приблизно рівні підмножини S_1 та S_2, використавши для цього медіану по x координаті.

Крок 2. Рекурсивно побудувати $\mathrm{Vor}(S_1)$ та $\mathrm{Vor}(S_2)$.

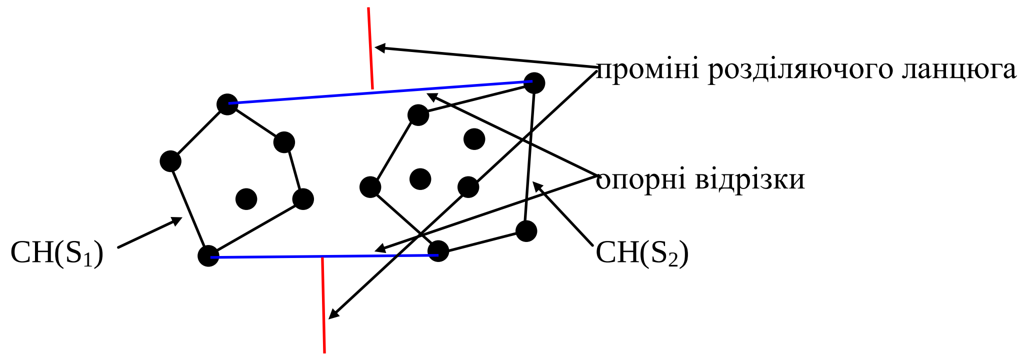
Крок 3'. Побудувати ламану σ, що розділяє S_1 та S_2.

Крок 3''. Вилучити усі ребра діаграми $\mathrm{Vor}(S_2)$, розташовані зліва від σ та всі ребра $\mathrm{Vor}(S_1)$, розташовані справа від σ. Отримаємо Vor(S) – діаграму Вороного для всієї множини.

5.6.ПОБУДОВА РОЗДІЛЯЮЧОГО ЛАНЦЮГА.

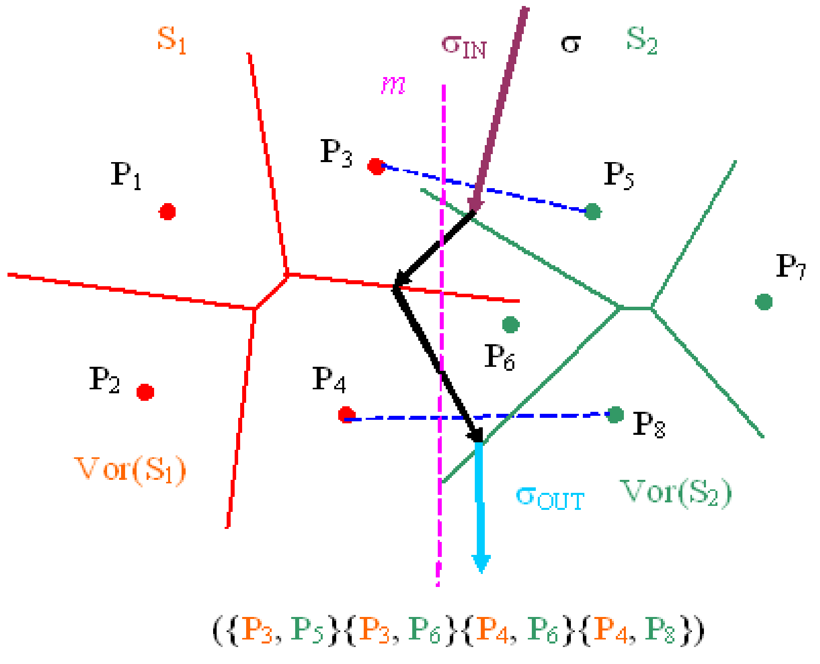
Кожний промінь ланцюга σ перпендикулярний опорному відрізку до $CH(S_1)$ та $CH(S_2)$ і ділить його навпіл. Оскільки S_1 та S_2 за припущенням лінійно роздільні, то існує рівно два опорних відрізки до $CH(S_1)$ та $CH(S_2)$.

Знайдемо верхній та нижній опорні відрізки для точок діаграм **Vor(S_1)** та **Vor(S_2)**, (**{P_3,P_5},{P_4,P_8}**, відповідно, мал.9.8). Побудуємо вхідний $\boldsymbol{\sigma_{IN}}$ та вихідний $\boldsymbol{\sigma_{OUT}}$ промені розділяючого ланцюгу $\boldsymbol{\sigma}$ (серединні перпендикуляри до вхідного та вихідного опорних відрізків).



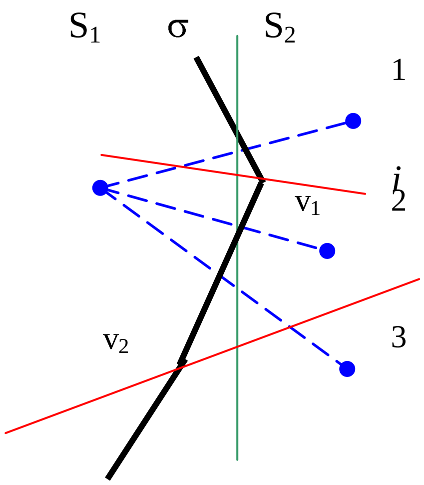
Мал.9.7. Визначення променів ланцюгу σ.

Рухаємось по вхідному променю $\boldsymbol{\sigma_{IN}}$ доки не перетнемо ребро однієї із діаграм **Vor(S_1)** чи **Vor(S_2).** В залежності від того ребро якої діаграми перетнеться, із тієї множини зміниться точка в наступній парі до якої із точки перетину будується серединний перпендикуляр. Процес побудови ребер ланцюга $\boldsymbol{\sigma}$ продовжується до тих пір, доки буде досягнуто вихідного променя $\boldsymbol{\sigma_{OUT}}$. Відсікаються зайві промені, після побудови розділяючого ланцюга.



({P_3, P_5}{P_3, P_6}{P_4, P_6}{P_4, P_8})

Мал.. 9.8. Побудова розділяючого ланцюгу.



Мал.. 9.10. Перетин ланцюгу σ з V(i) у Vor(S_1).

Для визначення точок перетину ланцюгу σ з V(i) у Vor(S_1) необхідно переглядати ребра за годинниковою стрілкою. Для σ з V(j) у Vor(S_2) – навпаки.

Позначення: I(e, e’) – перетин відрізків e і e’, а I(e, e’) = Λ означає, що e і e’ не перетинаються; t_1 і t_2 - два опорних відрізки, при цьому t_1 = [p,q].

Розглянемо реалізацію кроку 3’ процедури ДІАГРАМА ВОРОНОГО.

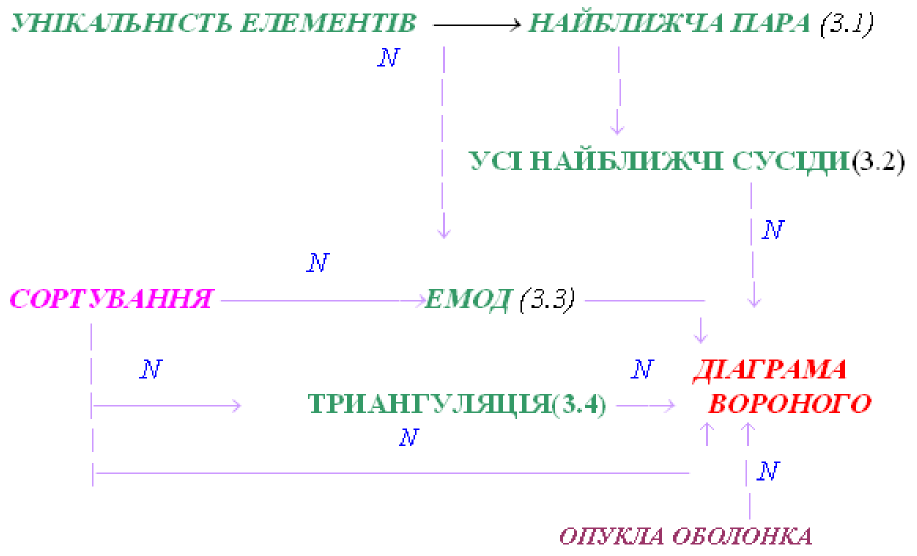
1. **begin** p_L : = p; p_R : = q; e : = e*; v : = v*;
   e_L : = перше ребро (відкритої) границі V(p_L);
   e_R : = перше ребро (відкритої) границі V(p_R);
2. **repeat**
3. **while**(I(e, e_L) = Λ) **do** e_L : = H_1[e_L] (* подивитись границю V(p_L)*);
4. **while**(I(e, e_R) = Λ) **do** e_R : = H_2[e_R] (* подивитись границю V(p_R)*);
5. **if**(v ближче до I(e, e_L), ніж до I(e, e_R)) **then**
6. **begin** v: = I(e, e_L);
7. p_L : = точка S, яка міститься по іншу сторону від e_L (сусід (p_L);
8. e: = пряма, перпендикулярна [p_L, p_R] і, яка ділить його навпіл;
9. e_L : = обернене до e_L (*нове e_L є ребром V(p_L)*);
   end
10. **else begin** v: = I(e, e_R);
11. p_R : = точка S, яка міститься по іншу сторону від e_R (сусід (p_R);

12. e: = пряма, перпендикулярна [p_L, p_R] і, яка ділить його навпіл;
13. e_R : = обернене до e_R
end
14. **until** ([p_L, p_R] = t_2)
end

Після ініціалізації (рядок 1) відбувається рух по ланцюгу σ (2-14).

Теорема 9.9. *Діаграму Вороного на множині із N точок площини можна побудувати з оптимальним часом $\theta(N\log N)$.*

5.7. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО БЛИЗКІСТЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ДІАГРАМИ ВОРОНОГО.



Мал. 9.11. Діаграма звідності задач близькості

Теорема 9.10. *Задача УСІ НАЙБЛИЖЧІ СУСІДИ зводима за лінійний час до задачі ДІАГРАМА ВОРОНОГО і тому її можна розв'язати за оптимальний час $\theta(N\log N)$.*

Доведення. Згідно теореми 9.3, кожний найближчий сусід точки p_i визначає ребро многокутника V(i). Щоб знайти найближчого сусіда точки p_i, достатньо переглянути кожне ребро многокутника V(i). Так, як кожне ребро належить двом многокутникам Вороного, ребра не переглядатимуться більше двох разів.

Теорема 9.11. *Задача НАЙБЛИЖЧА ПАРА зводима за лінійний час до задачі ДІАГРАМА ВОРОНОГО і тому її можна розв'язати за оптимальний час $\theta(N\log N)$.*

Доведення зводиться до використання зводимості задачі *НАЙБЛИЖЧА ПАРА* до задачі *УСІ НАЙБЛИЖЧІ СУСІДИ.*

Теорема 9.12. *Пошук найближчого сусіда можна виконати за оптимальний час O(logN), використовуючи пам'ять об'ємом O(N) з витратами на попередню обробку O(NlogN).*

Доведення: Побудова ДВ - *O(NlogN),* тоді застосовуються теореми про локалізацію точки .

Теорема 9.13. *Тріангуляцію, я якій коло, описане навколо любого трикутника, не містить інших точок, можна побудувати за оптимальний час θ(NlogN).*

Теорема 9.14. *Якщо для множини т очок побудована ДВ то опуклу оболонку можна побудувати за лінійний час.*