

Контрольная работа 5

Алгебраические тензоры и операции с ними

Задача 1

Компоненты тензоров $\tau_1 \in T_0^2(L)$ и $\tau_2 \in T_1^1(L)$ заданы в некотором базисе пространства L матрицами A_1 и A_2 . Найти в том же базисе матрицу A компонент их тензорного произведения $\tau_1 \otimes \tau_2$, если:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 2

Компоненты тензора $\tau \in T_2^2(L)$ заданы в некотором базисе пространства L матрицей A . Вычислить свертки a_{il}^{ij} , a_{kj}^{ij} , a_{ji}^{ij} если

$$A = \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ \hline -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \right\|.$$

Задача 3

Компоненты тензора $\tau \in T_3^0(L)$ заданы в некотором базисе пространства L матрицей A . Вычислить матрицу компонент транспонированного тензора $\tau_{ijk} \rightarrow \tau_{jki}$, а также матрицы симметризованного $\tau_{(ijk)}$ и антисимметризованного $\tau_{[ijk]}$ тензоров, если:

$$A_\tau = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 & 5 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 4 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right\|$$

Задача 4

Вычислить внешнее произведение $f \wedge g \wedge h$ трех линейных форм $f, g, h \in L^*$, заданных строками коэффициентов:

$$f = [1, 2, 3, 1], \quad g = [2, 3, 1, 0], \quad h = [0, 0, 0, 1].$$

Задача 5

Методом рекуррентных соотношений вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix}$$