Теоретические задачи

1. (a) Нам нужно найти максимум по p на отрезке $[0, 1]$, он достигается либо на концах отрезка, либо в нуле производной.
$\frac{d}{dp}\left(Np(1-p)^{N-1}\right) = N(1-p)^{N-1} - N(N-1)p(1-p)^{N-2} = N \cdot (1-p)^{N-2} \cdot (1-p-(N-1)p)$
Тогда производная равна нулю в точках $p = 1$ и $p = \frac{1}{N}$. При $p = 0$ и $p = 1$ получаем, что $Np(1-p)^{N-1} = 0$, а при $p = \frac{1}{N}$ получаем $Np(1-p)^{N-1} = \left(1-\frac{1}{N}\right)^{N-1} > 0$, тогда максимум достигается в точке $p = \frac{1}{N}$

   (b) $\lim\limits_{N\to+\infty}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N-1} = \lim\limits_{N\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N}}{1-\frac{1}{N}} = e^{-1}$

2. (a) Узлу A удастся с первого раза передать информацию на пятом кванте времени если и только если он не пытался передавать информацию до этого (вероятность этого $(1-p)^4$), пытается передать информацию на пятом кванте времени (вероятность этого p), а также ни один другой узел не пытается передать информацию на пятом кванте времени (вероятность этого $(1-p)^3$). Таким образом, вероятность этого события равна $p \cdot (1-p)^7$

   (b) По аналогии с пунктом a вероятность того, что какому-то фиксированному узлу удастся передать информацию с первого раза на четвёртом кванте времени равна $p \cdot (1-p)^6$, тогда вероятность того, что какому-то из трёх узлов удастся это сделать равна $3p \cdot (1-p)^6$ (так как эти события не пересекаются)

   (c) Вероятность успешной передачи на каком-то фиксированном кванте времени равна $4p(1-p)^3$, тогда вероятность неуспешной передачи равна $1-4p(1-p)^3$. Для того, чтобы первая успешная передача произошла на третьем кванте времени нужно, чтобы на первых двух квантах передать информацию не получилось, а на третьем получилось, вероятность этого равна $(1-4p(1-p)^3)^2 \cdot 4p(1-p)^3$

   (d) Опять же, вероятность успешной передачи на фиксированном кванте времени равна $4p(1-p)^3$. Из первой задачи знаем, что максимальная эффективность достигается в точке $p = \frac{1}{N} = \frac{1}{4}$. Таким образом, максимальная эффективность будет равна $4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (1-\frac{1}{4})^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$