

**Отрезок прямой и дуга кривой в цифровых
изображениях**
Математические и нейрофизиологические аспекты

Владимир Калмыков

Виталий Вишневский

Институт математических машин систем

vl.kalmykov@gmail.com

Цель: привлечь внимание к задачам обработки изображений, представленных в цифровой форме

Содержание

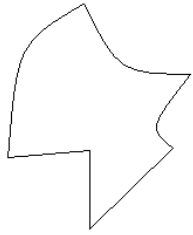
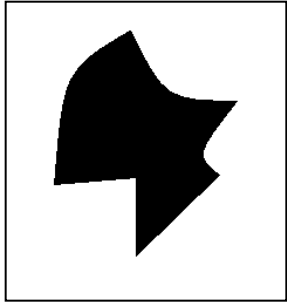
1. Введение.

Цифровое изображение; Зрительная система;

2.Отрезок цифровой прямой: прямая задача — построение — и обратная задача — распознавание.

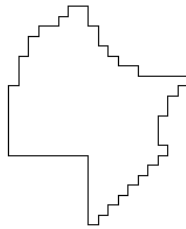
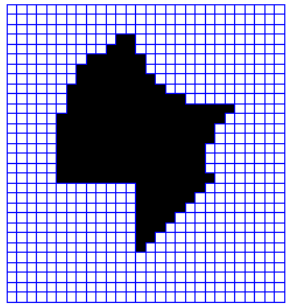
3. Дуга цифровой кривой — определение.

Цифровое изображение



Исходное изображение V определяется функцией яркости $f: X \times Y \rightarrow R_+$; $\rho \in R_+$; $\rho \leq \rho_{\max}$

Для бинарного изображения $\rho = 0, 1$



Изображение после дискретизации определяется функцией яркости

$f: L \times M \rightarrow N_+$; $r \in N_+$; $r \leq r_{\max}$

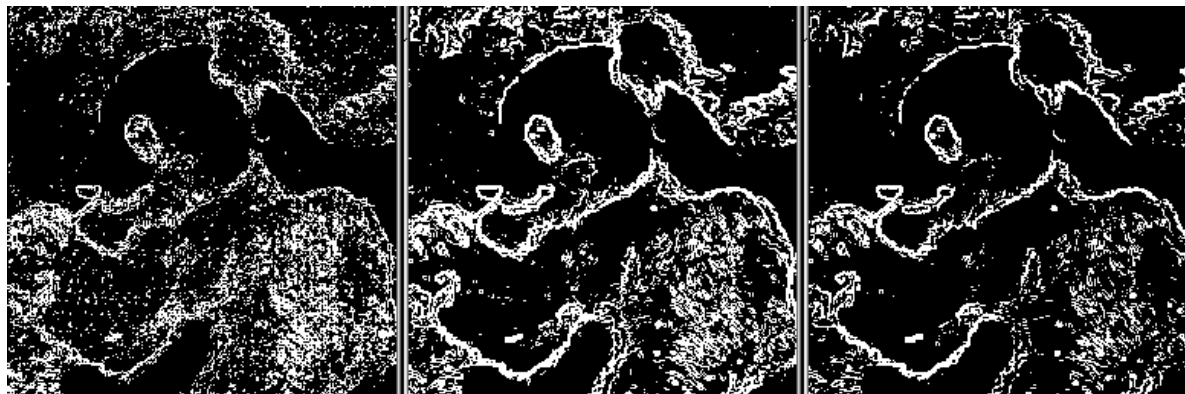
Для бинарного изображения $r = 0, 1$

Векторное описание контура изображения – это замкнутая последовательность представленных аналитически отрезков прямых и дуг кривых. В отличие от растрового – поточечного описания является инвариантным относительно аффинных преобразований: перемещения в поле зрения, изменения масштаба, поворота, что необходимо при использовании в системах искусственного интеллекта



1. Что такое линия (граница)?
2. Что такое прямая (отрезок прямой)?
3. Что такое кривая (дуга цифровой кривой)?

Выделение границ – фильтры Робертса, Собела, Превитта



Тип фильтра	Напр	Маска 3x3		
Превитт		-1	0	1
		-1	0	1
		-1	0	1
Превитт	—	1	1	1
		0	0	0
		-1	-1	-1
Собел		-1	0	1
		-2	0	2
		-1	0	1
Собел	—	1	2	1
		0	0	0
		-1	-2	-1

Метод Канни

Исходное изображение $V = \{v(m,n) / m=1,M; n=1,N\}$

$$g(m,n) = G\sigma * v(m,n),$$

где $G\sigma$ – фильтр Гаусса для значения дисперсии σ , $g(m,n)$ – элемент "размытого" изображения Vg .

$$L(m,n) = \sqrt{g_m^2(m,n) + g_n^2(m,n)}$$

$$\theta(m,n) = \arctg(g_n(m,n) / g_m(m,n))$$

где $g_m(m,n)$ и $g_n(m,n)$ – частные значения градиентов для горизонтального и вертикального направлений на размытом изображении $g(m,n)$, используя, например, оператор Собела,

$$L_T(m,n) = \begin{cases} L(m,n), & \text{если } L(m,n) > T \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

где T – специально подобранный порог

Выделение границ – метод Канни

$\sigma = 0$



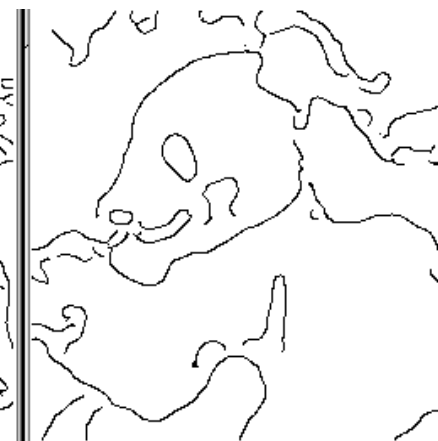
$\sigma = 1$



$\sigma = 2$



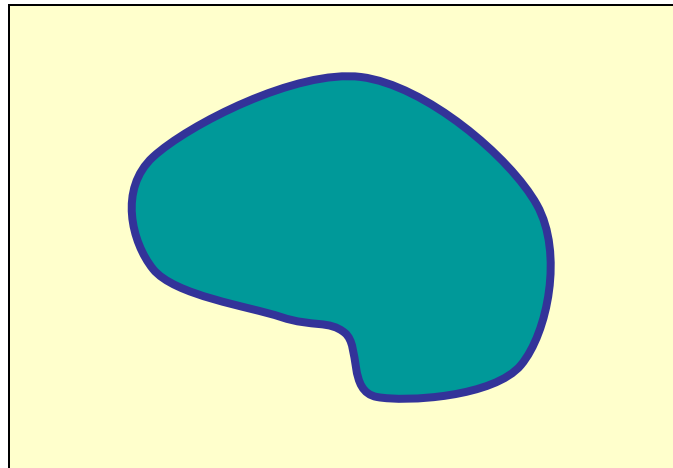
$\sigma = 3$



Почему односвязную последовательность
пикселов нельзя считать линией на
плоскости?

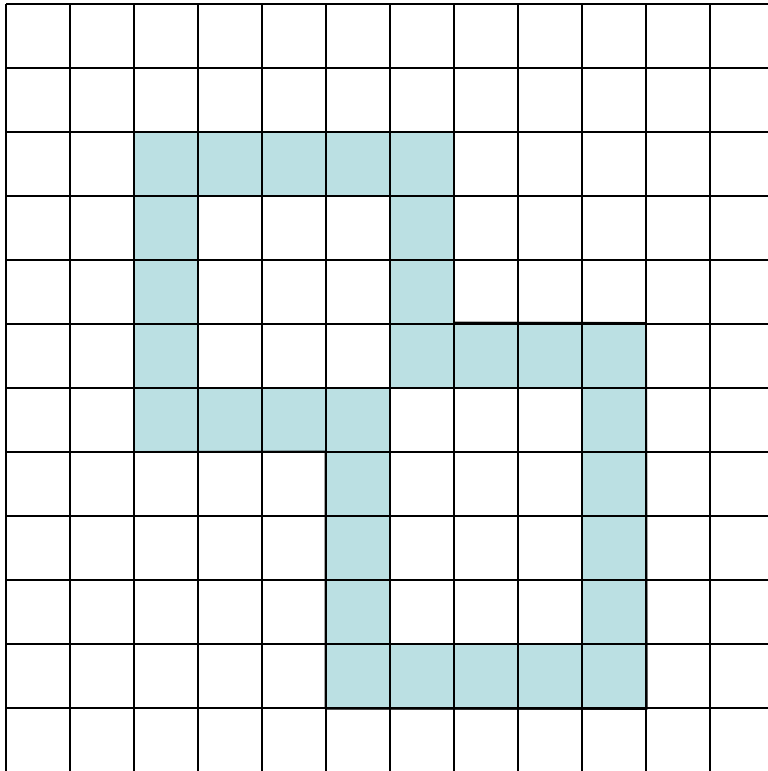
Теорема Жордана:

Простая замкнутая линия разделяет
плоскость на две компоненты.

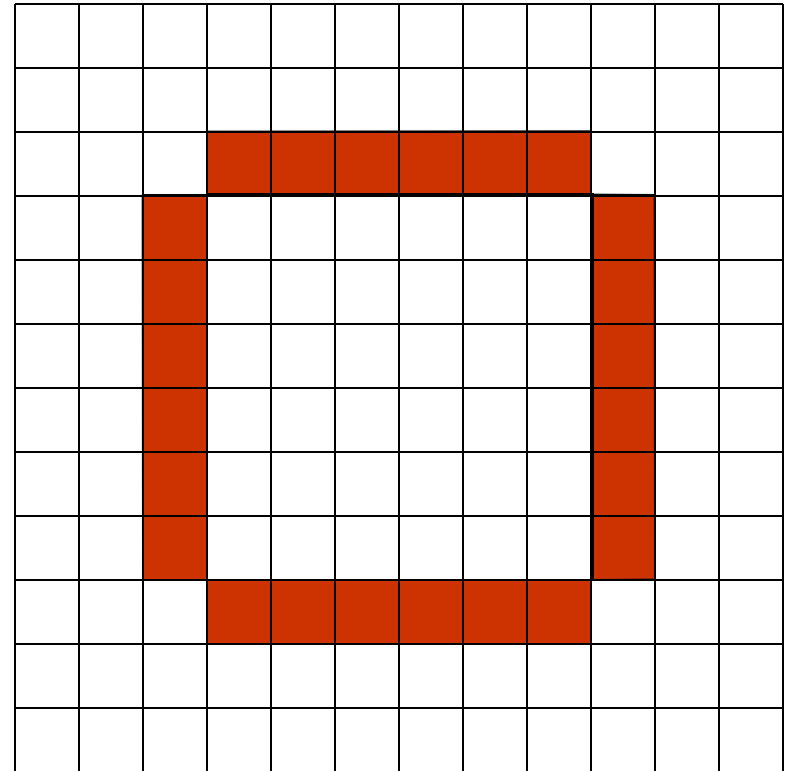


Парадоксы связности

4-соседство - 3 компонента

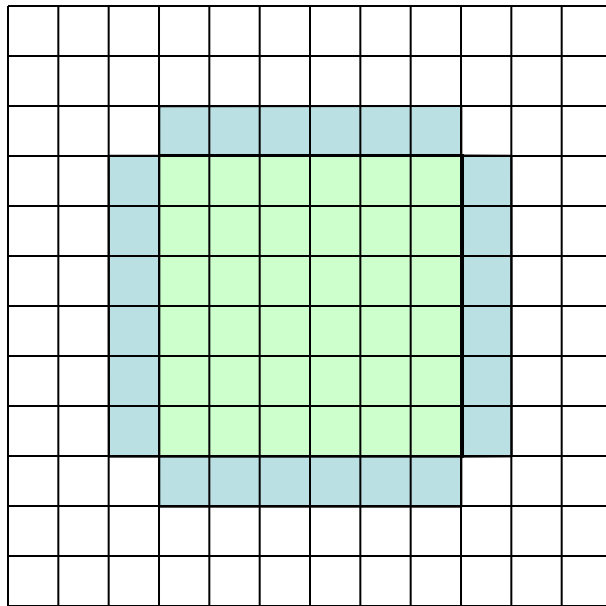


8-соседство - 1 компонента

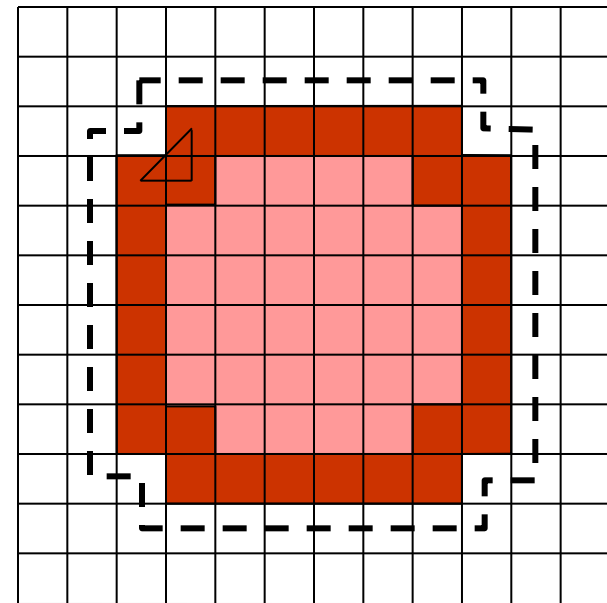


Парадоксы границы

Граница S : множество элементов S , которые имеют соседей в \bar{S} .



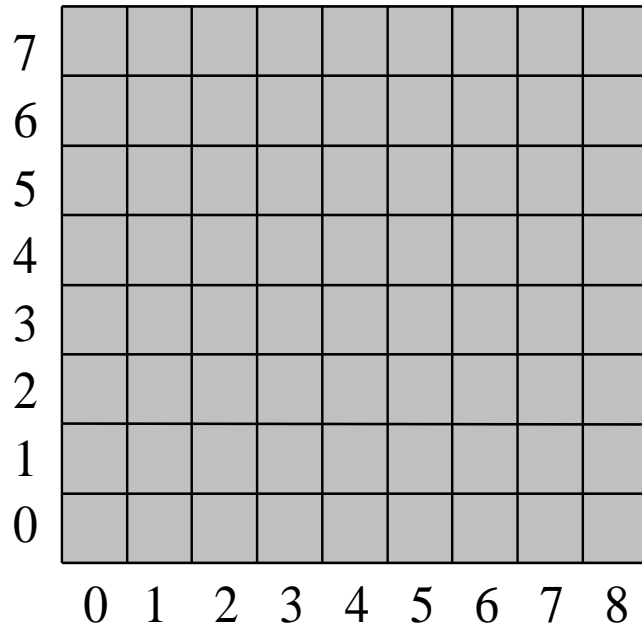
4-соседство -
граница не связна



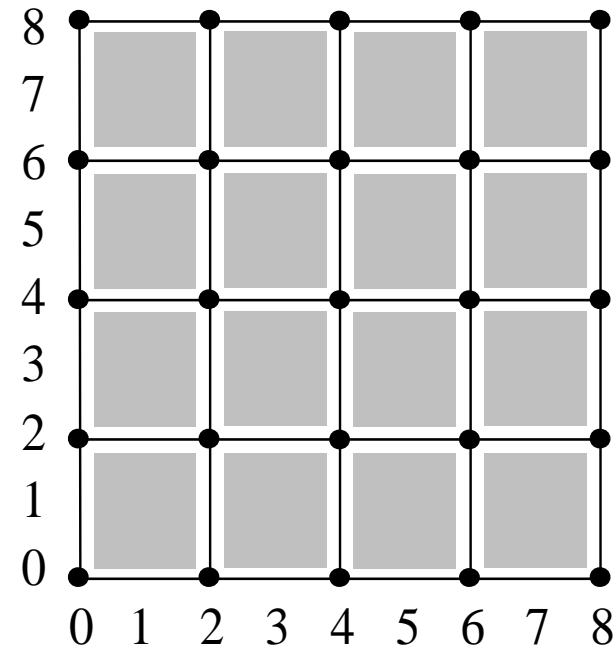
8-соседство -
граница не простая

Граница объекта не совпадает с границей фона!

Структуры данных



a

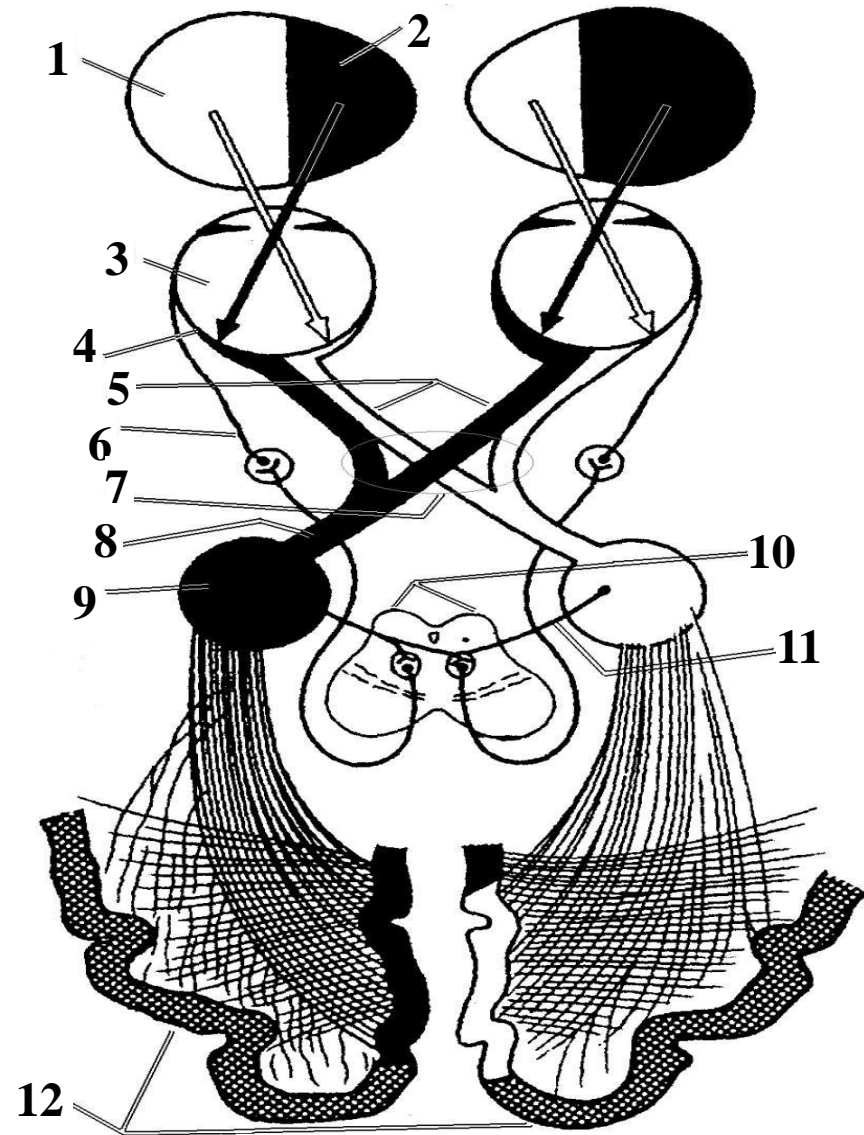


b

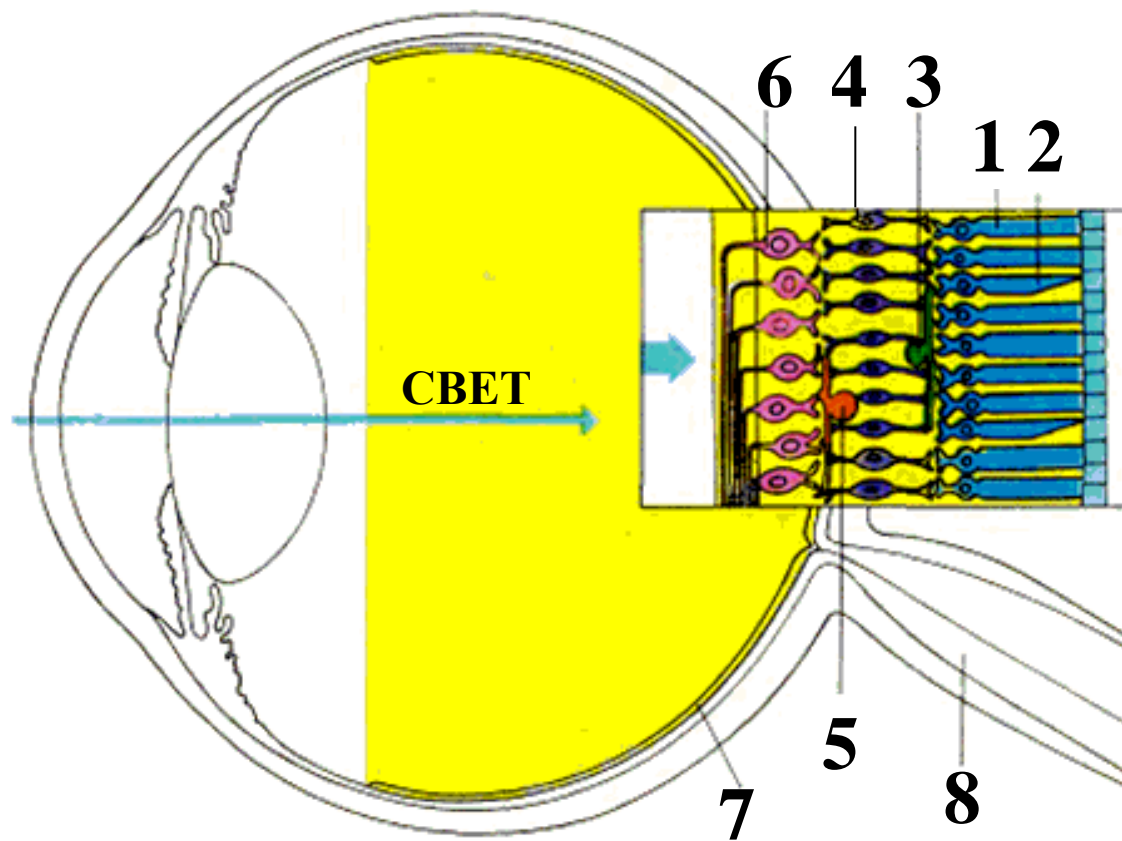
Стандартный (a) и топологический растр (b)
(клеточный комплекс)

ЗРИТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА

1 – левые, 2 – правые
половины зрительных полей,
3 – глаза, 4 – сетчатки,
5 – зрительные нервы,
6 – глазодвигательные нервы,
7 – хиазма, 8 – зрительный
тракт, 9 – латеральное
коленчатое тело,
10 – верхние бугры
четверохолмия,
11 – неспецифический
зрительный путь,
12 – зрительная кора
головного мозга.



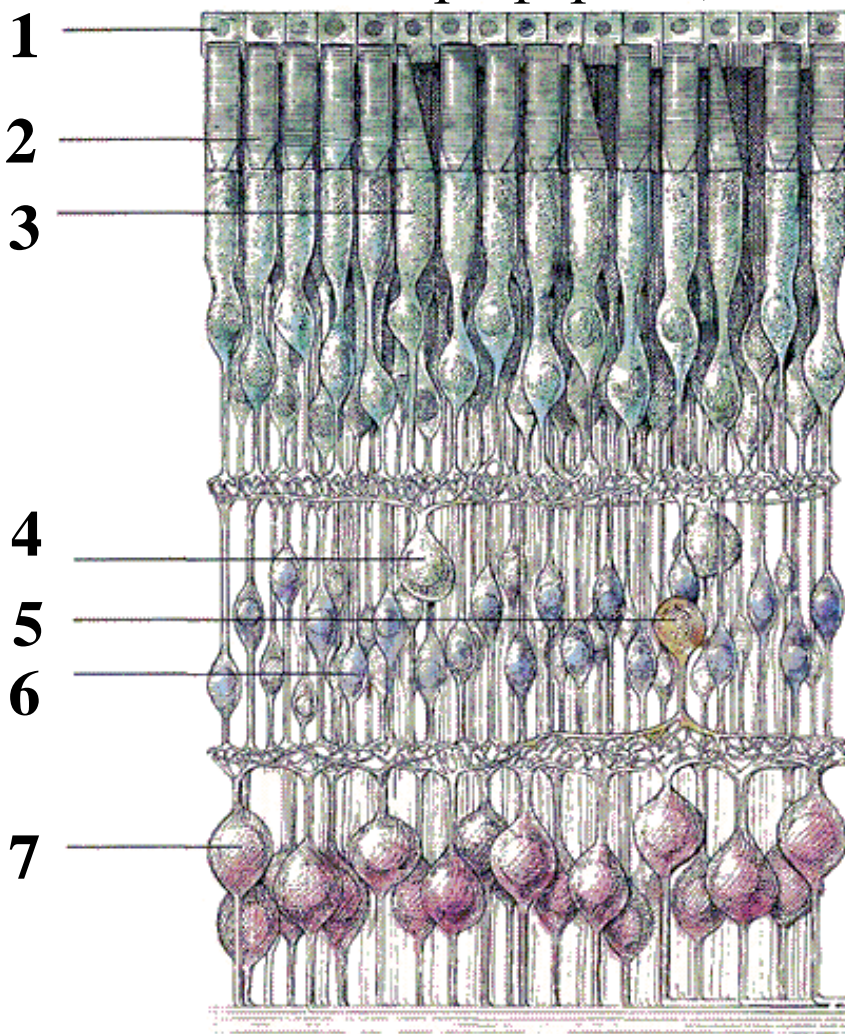
ГЛАЗ, СЕТЧАТКА – схематическое представление



- 1 – палочки,
- 2 – колбочки,
- 3 – горизонталь-
ные,
- 4 – биполярные,
- 5 – амакриновые,
- 6 – ганглиозные
клетки,
- 7 – сетчатка,
- 8 – глазной нерв.

ПОПЕРЕЧНЫЙ РАЗРЕЗ СЕТЧАТКИ

посредине между центральной ямкой и дальней периферией, где палочек больше, чем колбочек.



**Высота рисунка в натуре
≈ 0.25 мм**

**1 – пигментные клетки
меланина**

2 – палочки

3 – колбочки

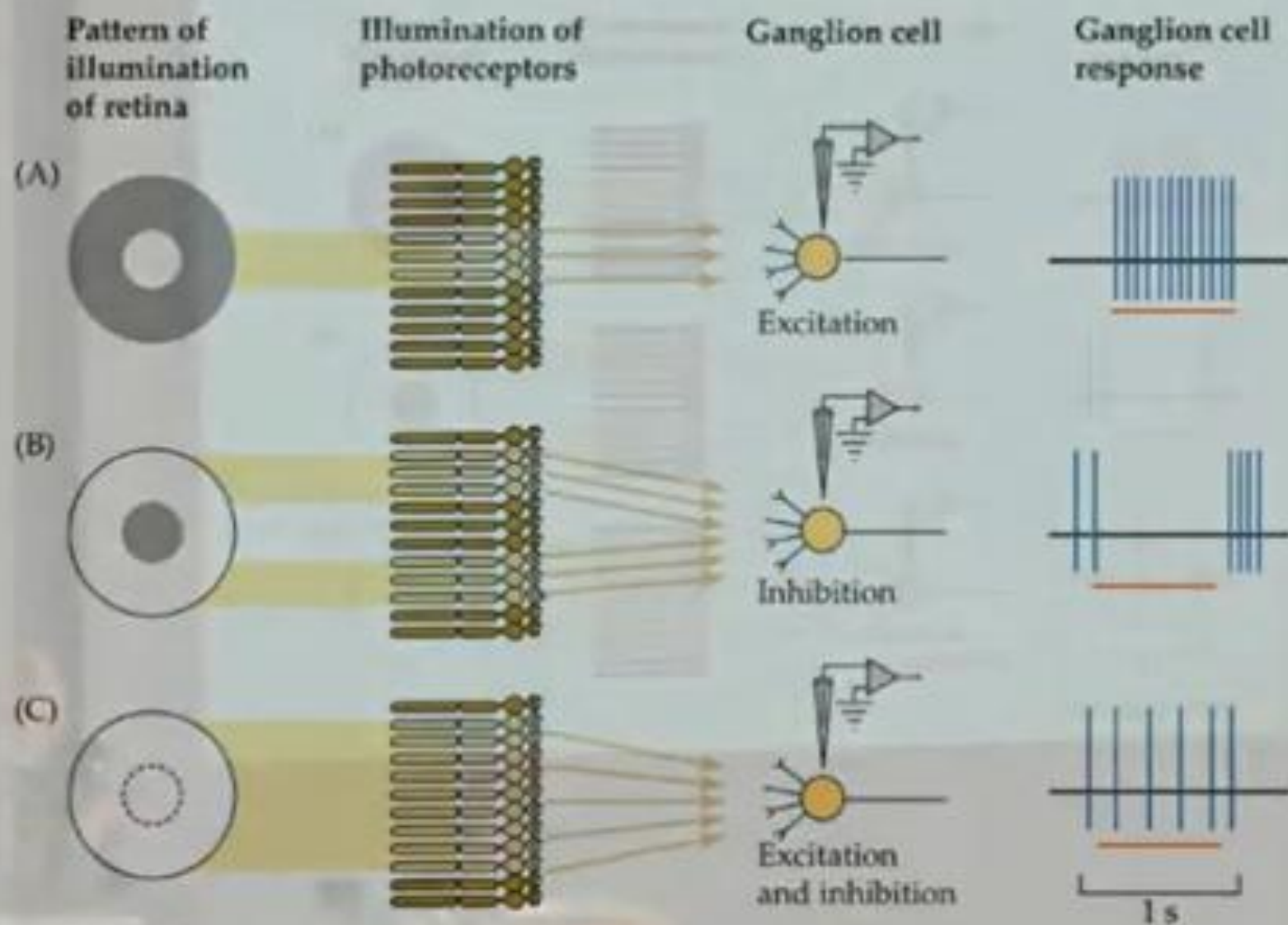
4 – горизонтальные клетки

5 – биполярные клетки

6 – амакриновые клетки

7 – ганглиозные клетки

Ответы ганглиозных клеток сетчатки



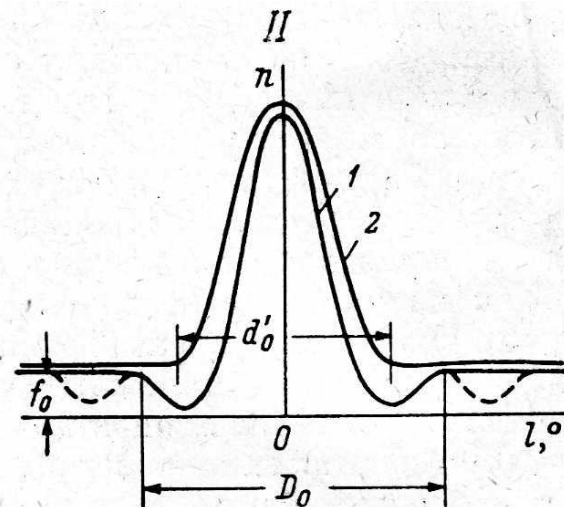
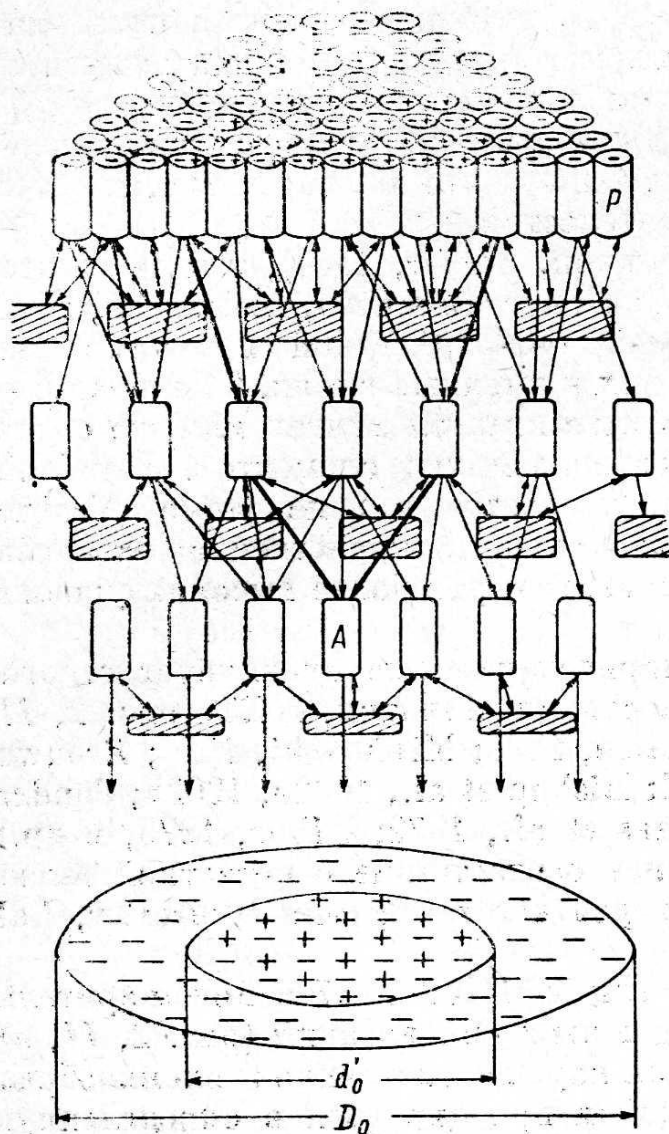


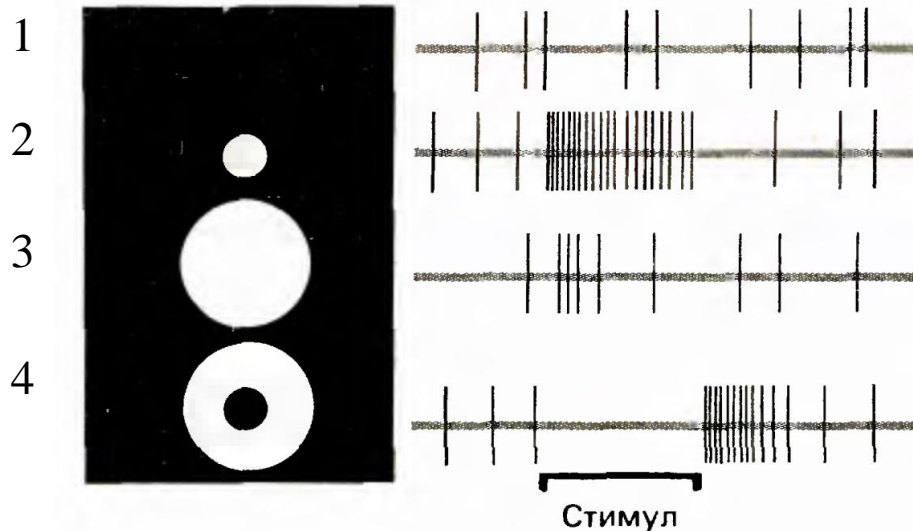
Рис. 3. Строение рецептивного поля.

I — схема нейронной структуры, состоящей из рецепторов (P) и пяти клеточных слоев. Жирными стрелками ограничены возбуждающие пути, конвертирующие на выходной нейрон (A) рецептивного поля; двусторонние стрелки — возбуждающие и возвратные тормозные связи. Заштрихованные овалы — нейроны, выполняющие тормозные функции. Знаки «+» — зона возбуждения (d'_0); знаки «-» — зона торможения (D_0) рецептивного поля нейрона. A. II — зависимость величины ответа нейрона от положения тестового пятна в его круглом осесимметричном рецептивном поле. По оси ординат — число импульсов в ответе (n); по оси абсцисс — расстояние (l) от центра поля до центра тестового пятна, f_0 — частота фоновой импульсации нейрона. 1, 2 — кривые для рецептивных полей, в которых выявляется (1) или не выявляется (2) периферическое торможение.

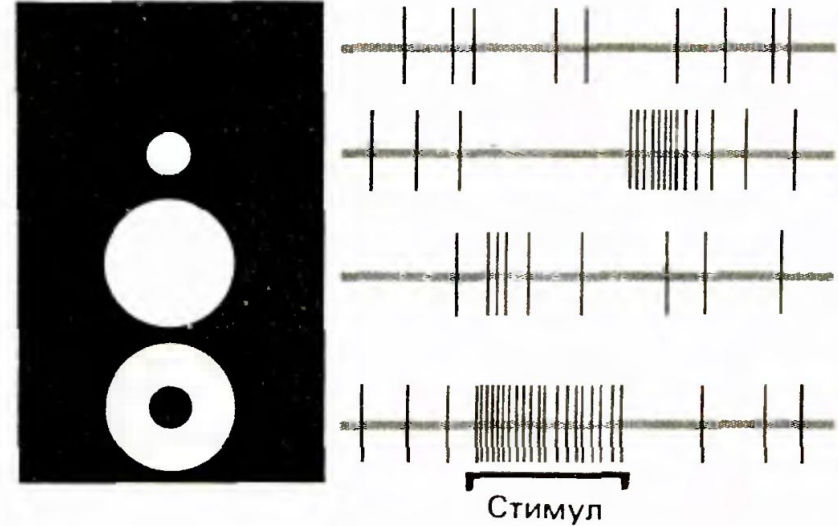
Функционирование нейрона

на примере ганглиозной клетки – ответы нейронов на световые стимулы, покрывающие рецептивные поля

клетка с on-центром



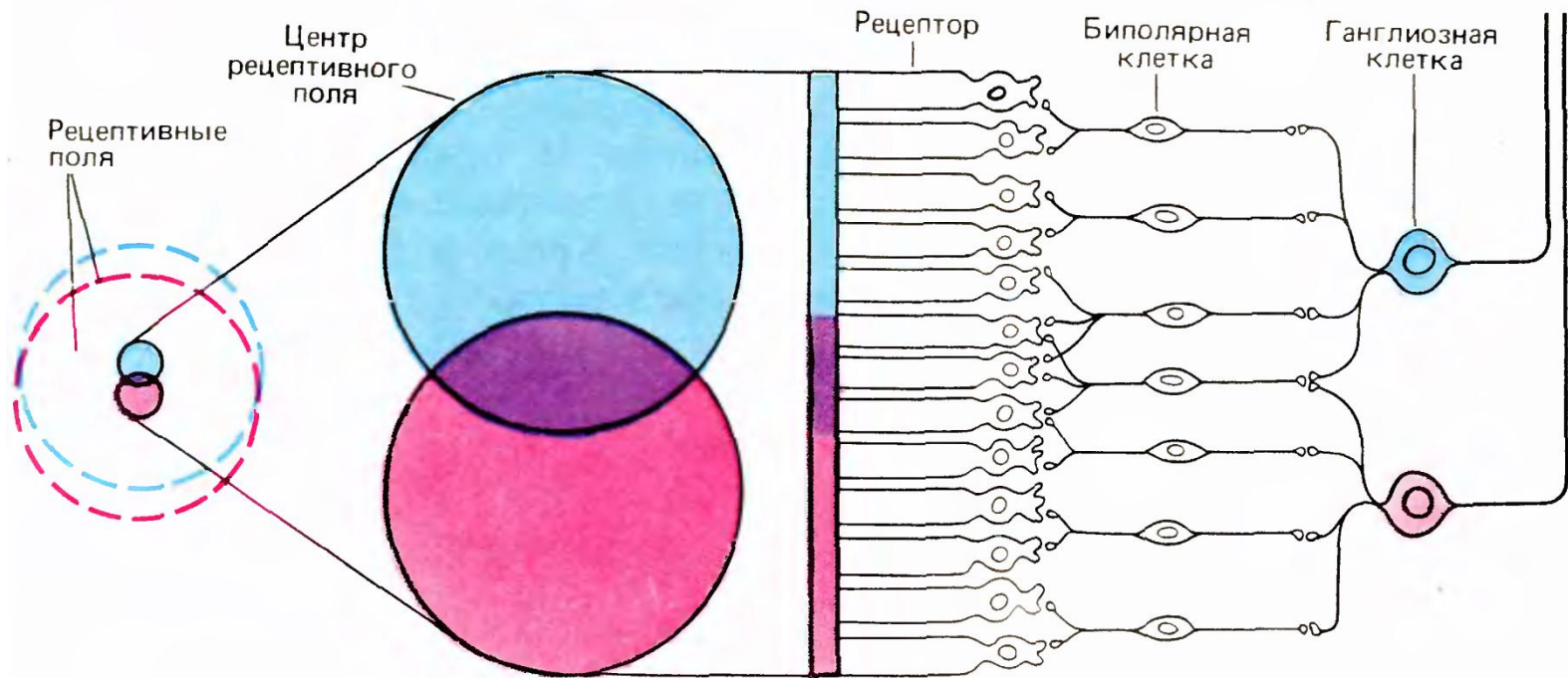
клетка с off-центром



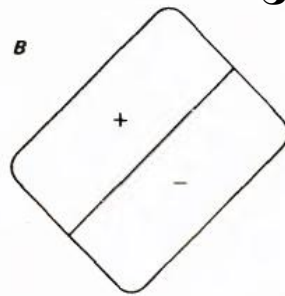
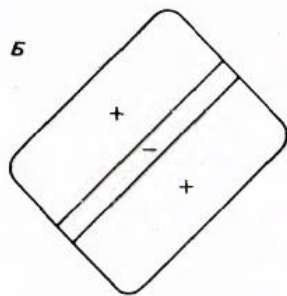
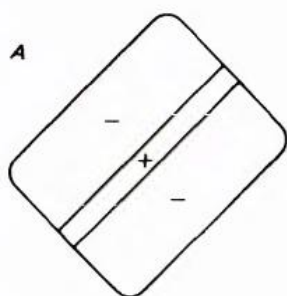
1. Отсутствие стимула – случайные помехи
2. Наличие стимула в зоне возбуждения – активная реакция клетки с on-центром во время стимула, клетки с off-центром после стимула
3. Стимул покрывает зоны торможения и возбуждения – случайные помехи
4. Наличие стимула в зоне торможения, отсутствие стимула в зоне возбуждения – активная реакция клетки с off-центром во время стимула, клетки с on-центром после стимула

РЕЦЕПТИВНЫЕ ПОЛЯ

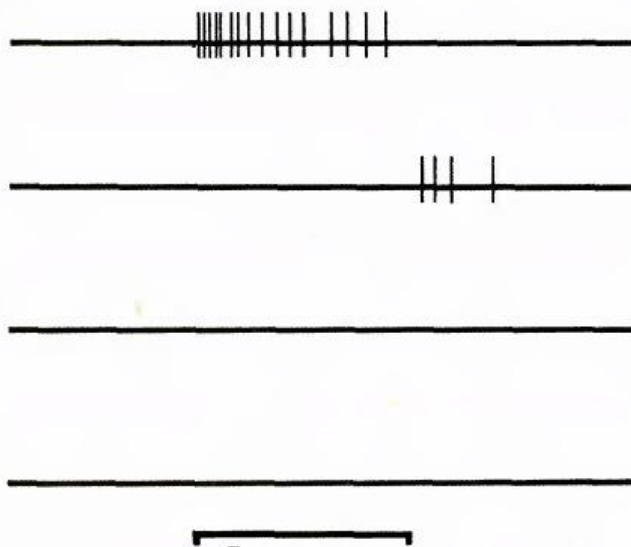
соседних нейронов перекрываются



Типичные рецептивные поля нейронов стриарной коры и их реакции



Зона возбуждения обозначена +, зона торможения –; А – белая линия на черном фоне; Б – черная линия на белом фоне; В – граница черного и белого – контур.

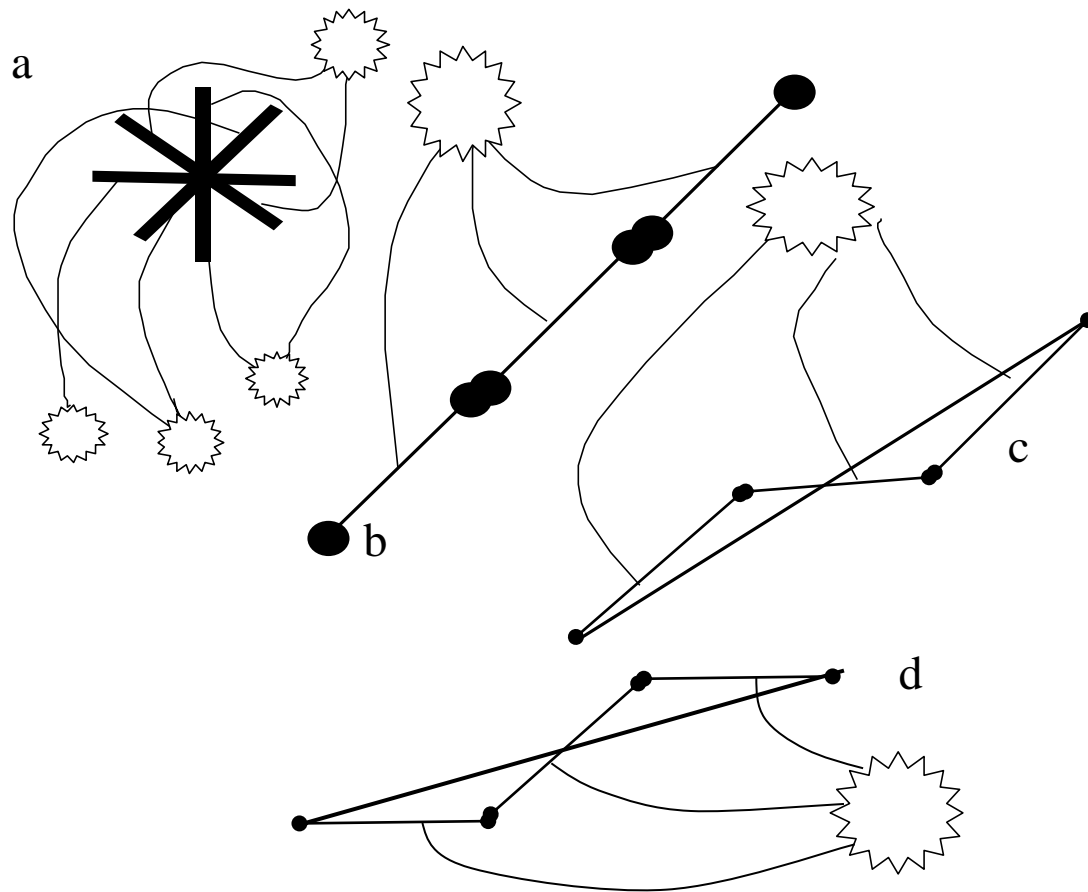


стимул

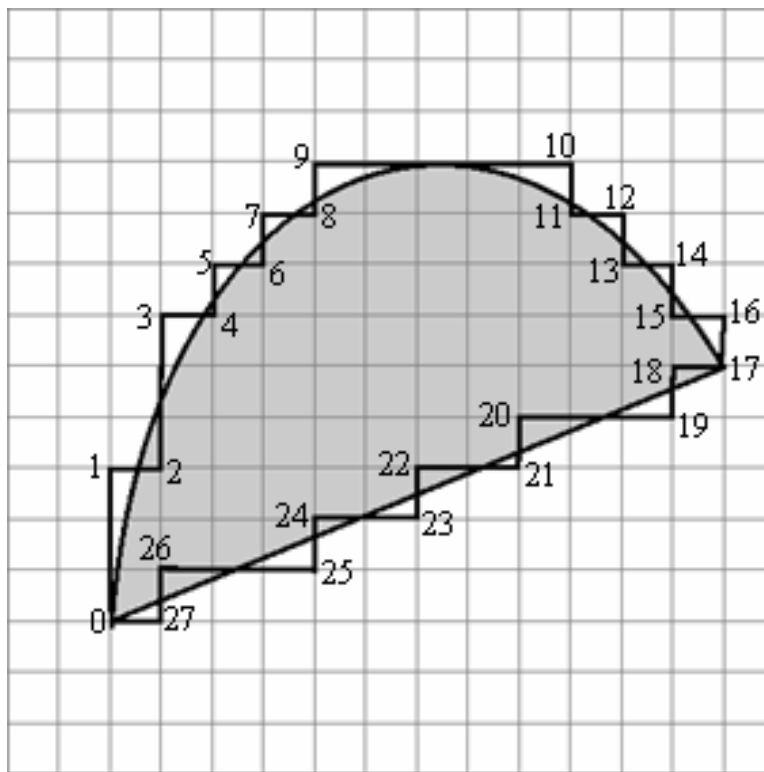
Реакция нейрона с рецептивным полем типа А предъявление стимулов сверху вниз:

- 1 – оптимальный стимул;
- 2 – стимул совпал с зоной торможения – слабый ответ после прекращения действия стимула
- 3 – несовпадение направления – воздействие на зоны возбуждения и торможения одинаковое – импульсов нет;
- 4 – отсутствие стимула – импульсов нет

Отображение отрезков прямых произвольного направления (b,c,d) посредством нейронов, возбуждающихся отрезками фиксированных направлений и длины (a).

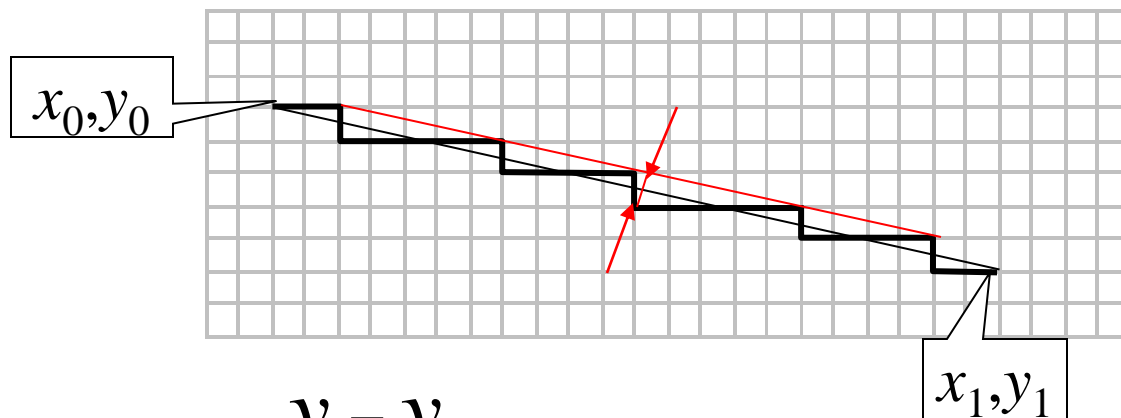


Элементарные отрезки разных направлений в цифровых изображениях



Под L-элементом будем понимать связную последовательность креков вертикальной (горизонтальной) ориентации, которая содержит не более одного крека горизонтальной (вертикальной) ориентации.

Прямая задача – построение цифрового отрезка прямой – алгоритм Брезенхема



$$ОЦ(y_n) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x_n - x_0) + y_0 + Ост(y_{n-1})$$

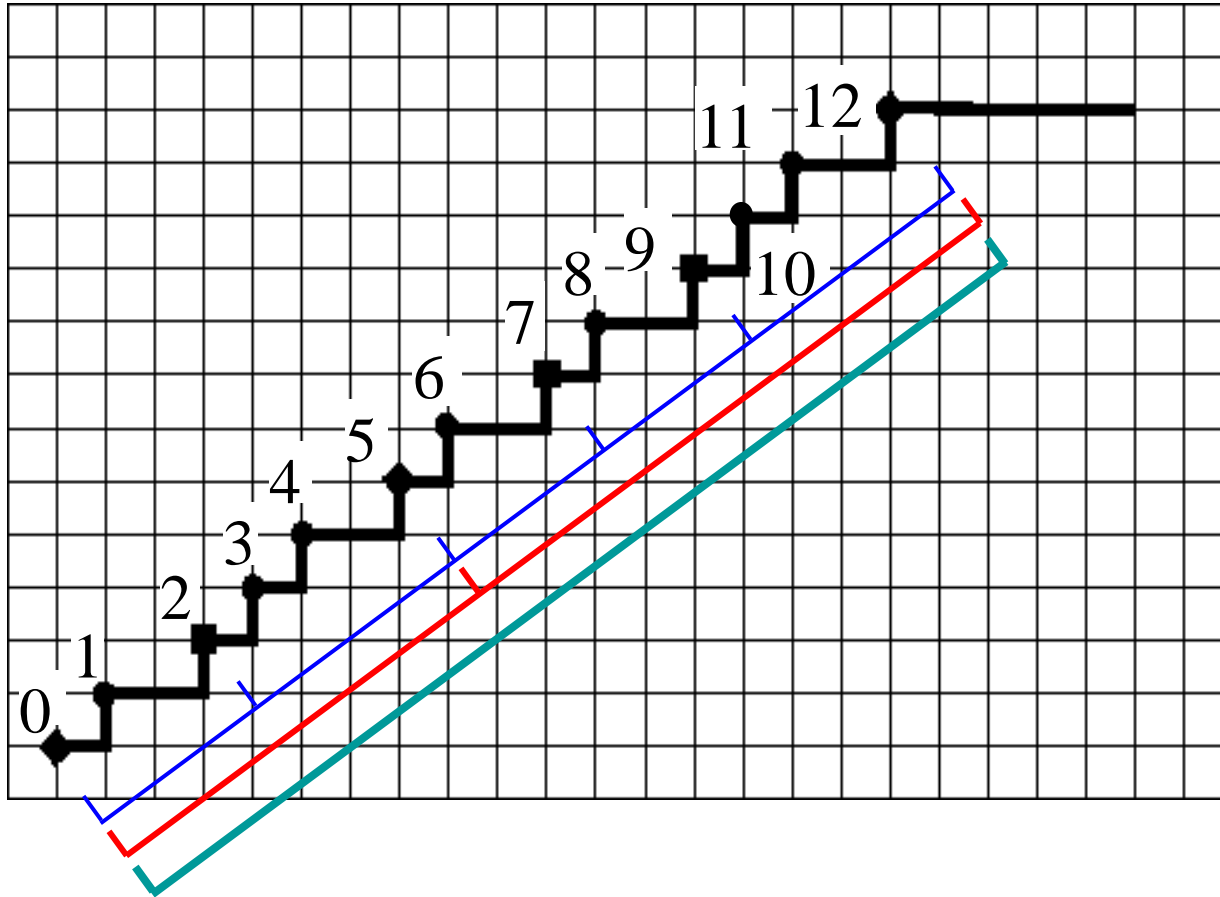
$ОЦ(y_n)$ – округление до целого y_n ;

$Ост(y_{n-1})$ – остаток от округления y_{n-1}

Обратная задача – распознавание отрезка по его цифровому представлению

Максимальное отклонение отдельных точек отрезка цифровой прямой от осевой линии составляет $0,5d$, где d - дискретность решетки.
Максимальное отклонение точек линии друг от друга – d .

$$\frac{n}{m} = l + \frac{r}{m} = l + \frac{1}{\frac{m}{r}} = l + \frac{1}{k_1 + \frac{r_1}{r}} = l + \frac{1}{k_1 + r} = \dots = l + \frac{1}{k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_t}$$



***k1* подряд идущих L-элементов длины *l* и один L-элемент длины *l+1*, образуют K1-элемент**

Формування образу відрізка цифрової прямої



Теория опознавания и памяти –

З.Л. Рабинович

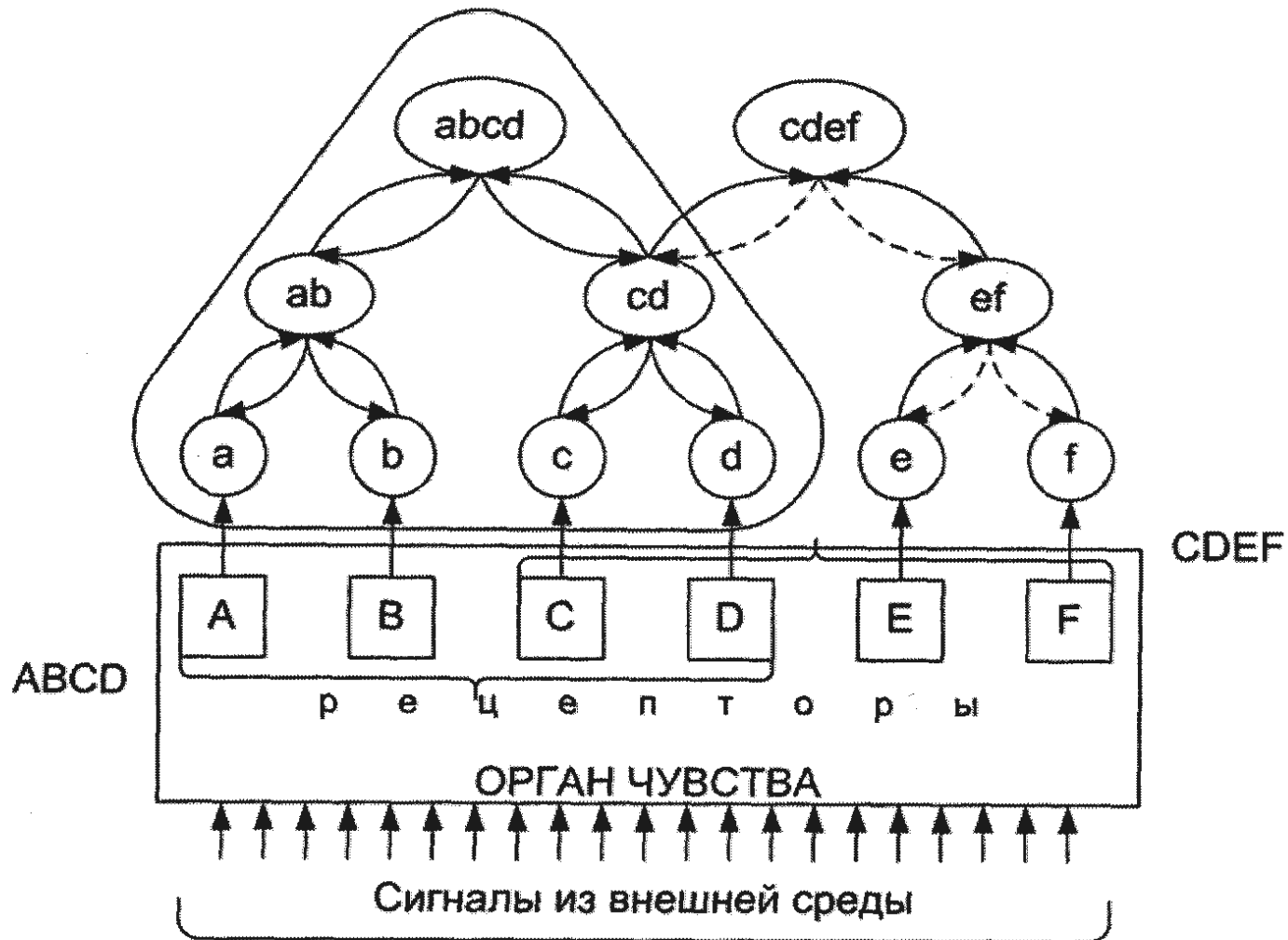


Рис. 1. Элементарные структуры восприятия образа, запоминания и распознавания.

“Понятие непрерывной кривой на плоскости (в пространстве) является одним из понятий, интуитивно кажущихся простыми, но фактически очень сложно определяемых. В разные периоды развития математики крупнейшие представители этой области человеческих знаний по-разному определяли непрерывную кривую. Каждое новое определение исходило из потребностей практической деятельности человека, а также уровня знаний соответствующей эпохи”.

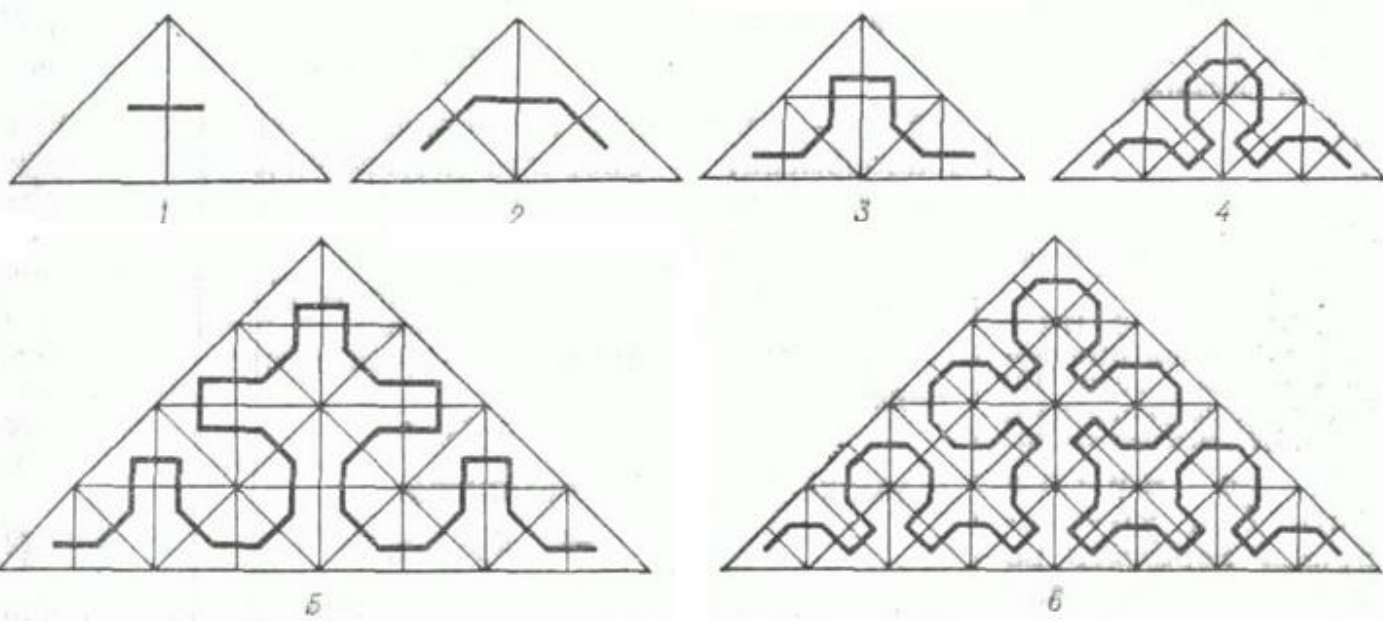
Дополнительные главы математического анализа И.П. Макаров

Определение кривой Жордана

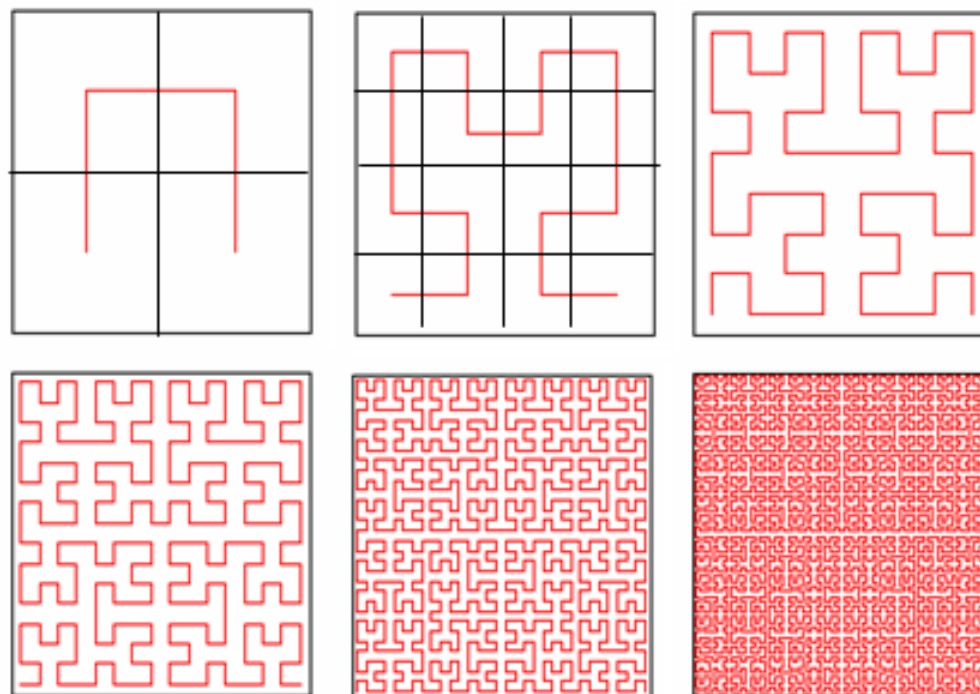
Плоская кривая есть множество точек плоскости, координаты которых определяются двумя уравнениями

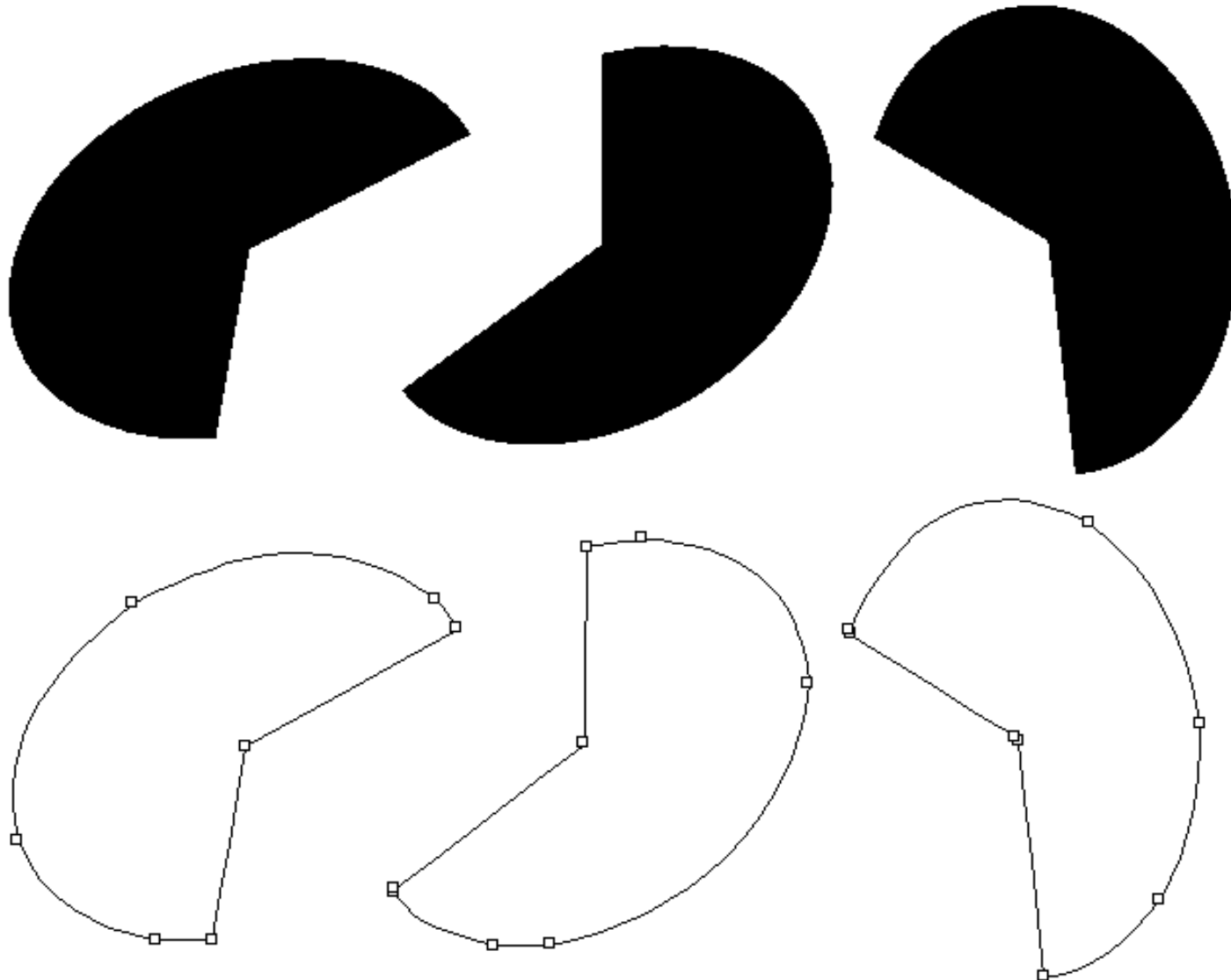
$$\begin{aligned}x &= \varphi(t), \\ y &= \phi(t),\end{aligned}$$

где φ и ϕ – две какие-нибудь непрерывные функции переменного t , определенные на сегменте $[0,1]$. Под простыми дугами обычно понимают кривые Жордана без кратных точек или простые дуги, то есть такие, что для любых двух разных значений t' и t'' соответствующие им точки на плоскости $M' [\varphi(t'), \phi(t')]$ и $M'' [\varphi(t''), \phi(t'')]$ – разные. Поскольку множество точек замкнутой кривой, например, всей окружности или всего эллипса, не является простой дугой, при необходимости замкнутые кривые всегда можно представить как замкнутые последовательности простых дуг, например дуг окружностей, эллипсов и т.д.



**Кривая Пеано
соответствует
условиям
Жордана**





Сектора эллипса, отличающиеся положением в поле зрения,
и их контура, определенные программой CorelTrace

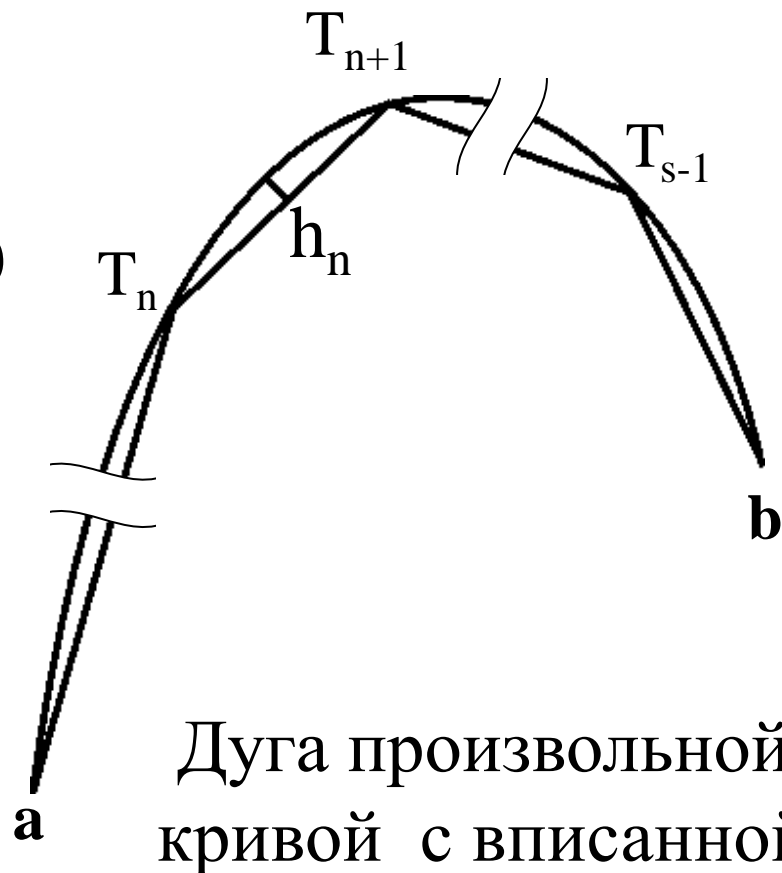
$$x = \varphi(t), y = \phi(t), a \leq t \leq b.$$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{s-1} < t_s = b, \quad (1)$$

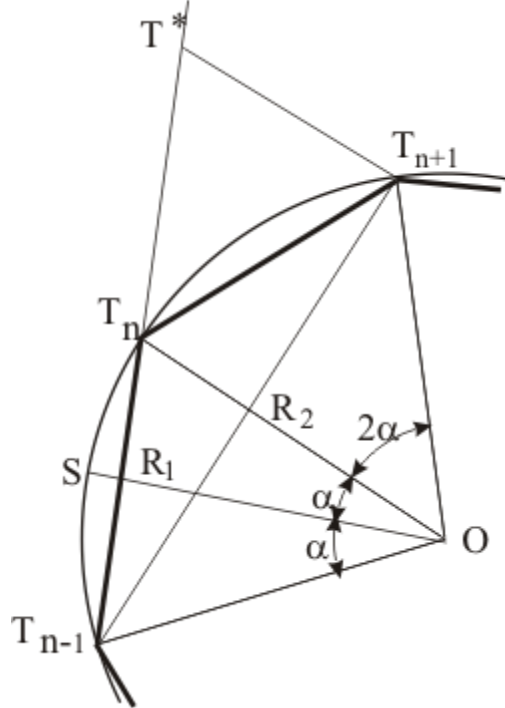
$$\beta = \max_{n=0,1,\dots,s-1} l(T_n - T_{n+1})$$

$$\text{При } \beta \rightarrow 0, s \rightarrow \infty \quad h_n \rightarrow 0$$

**в дискретном пространстве
дискретности d при $h_n < d/2$
дискретные отображения
звеньев дуги совпадут с
соответствующими отрез-
ками цифровых прямых
вписанной ломаной линии**



Дуга произвольной
кривой с вписанной
ломаной линией



$$SR_1 = OT_{n-1} - OT_{n-1} \times \cos \alpha = r - r \cos \alpha = r(1 - \cos \alpha) \leq d/2;$$

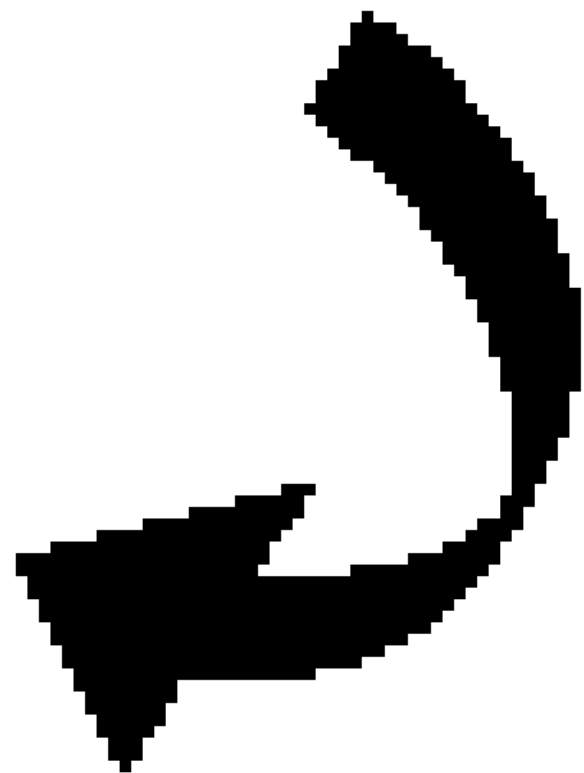
$$T_n R_2 = OT_n - OT_n \times \cos 2\alpha = r - r \cos 2\alpha = r(1 - \cos 2\alpha) = 2r(1 - \cos^2 \alpha)$$

$$T_n R_2 / SR_1 = 2(1 + \cos \alpha); T_n R_2 = 2(1 + \cos \alpha) \times SR_1.$$

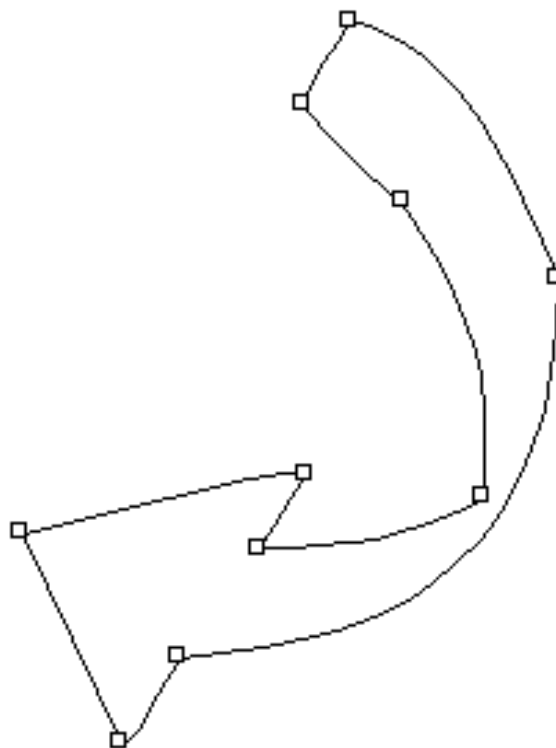
Для $SR_1 \approx d/2$ и $\alpha \approx 0^\circ$, $T_n R_2 \leq 2d$.

Под дугой цифровой кривой в дискретном пространстве дискретности d будем понимать такую последовательность отрезков цифровых прямых, что через конечные три точки каждой пары соседних отрезков можно провести такую окружность, что высота сегментов этой окружности, соответствующих соседним отрезкам, не превышает $d/2$.

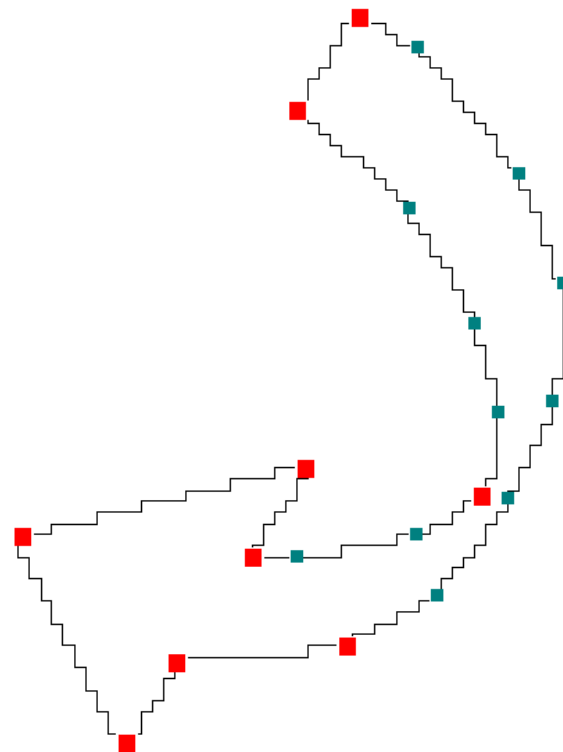
Восстановление контура объекта



Объект



Программа
Coral Trace

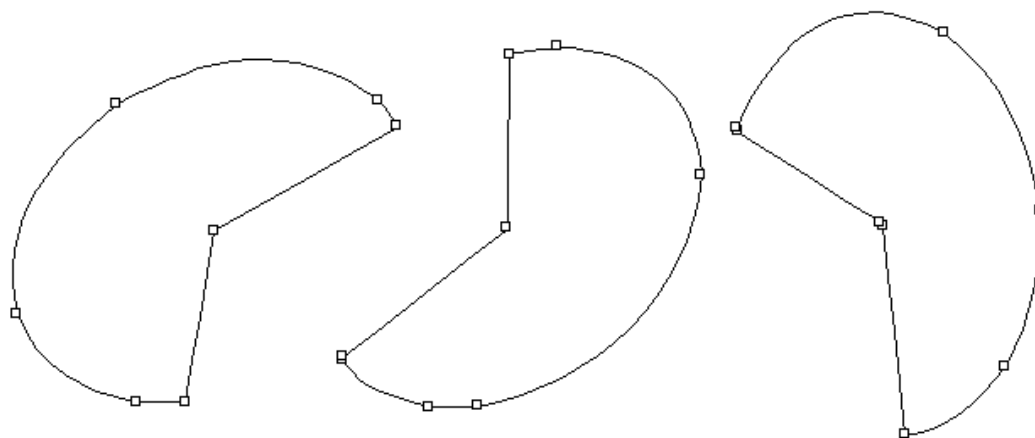


Программа по
предлагаемому методу

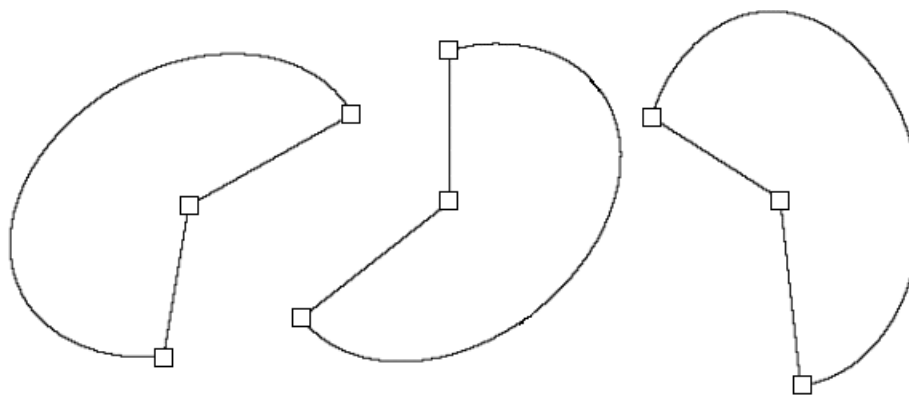
Объекты



Контура по
CorelTrace



Контура по
предлагаемому
методу



Выводы

- 1. Отклонение точки отрезка цифровой прямой от осевой линии отрезка не превышает d – дискретности решетки.**
- 2. Отклонение точки сопряжения двух соседних отрезков, образующих дугу цифровой кривой, от линии, соединяющей их концы, не превышает $2d$.**
- 3. Если отклонение точки сопряжения двух соседних отрезков, от линии, соединяющей их концы, превышает $2d$, то эти отрезки – сегменты ломаной линии.**

Спасибо за внимание !

**Отрезок прямой и дуга кривой в цифровых изображениях
Математические и нейрофизиологические аспекты**

Владимир Калмыков

Виталий Вишневский

Институт математических машин систем

vl.kalmykov@gmail.com