

МАТЕМАТИЧНІ ПДХОДИ ДО ПРИКЛАДНОЇ ГЕМОДИНАМІКИ

Доповідачі:

*Уляна Богданівна Лущик,
доктор медичних наук.*

Клінічна лікарня “Феофанія”
Державного управління справами,
завідувач відділу науки

*Віктор Володимирович Новицький,
доктор фізико-математичних наук.*

Інститут математики НАН України,
завідувач відділу аналітичної механіки

Київ, 11 березня 2011 року

Іноді фізичні принципи деяких технологій, які використовуються дуже ефективно людиною, настільки заплутані та туманні, що багато років мине, коли люди почнуть чудово розуміти закони і правила, на яких ці технології були засновані.

М.Х.Мексон, М. Альберт, Ф. Хедоурі

Гемодинаміка

(від грецького *һaima* - кров, *dynamis* - сила)

це наука, яка з'явилася і розвивається на перетині гідромеханіки та біології.

Вона вивчає рух крові в замкненій серцево-судинній системі (ССС) організму людини з урахуванням морфологічного складу крові, її фізико-хімічних характеристик, особливостей судинної стінки, динаміки живої системи з точки зору прикладних (зокрема, медичних) застосувань відповідних математичних моделей та гідродинамічних постулатів.

ГІДРОМЕХАНІКА

Теоретична
гідромеханіка

Гідродинаміка
Гідростатика

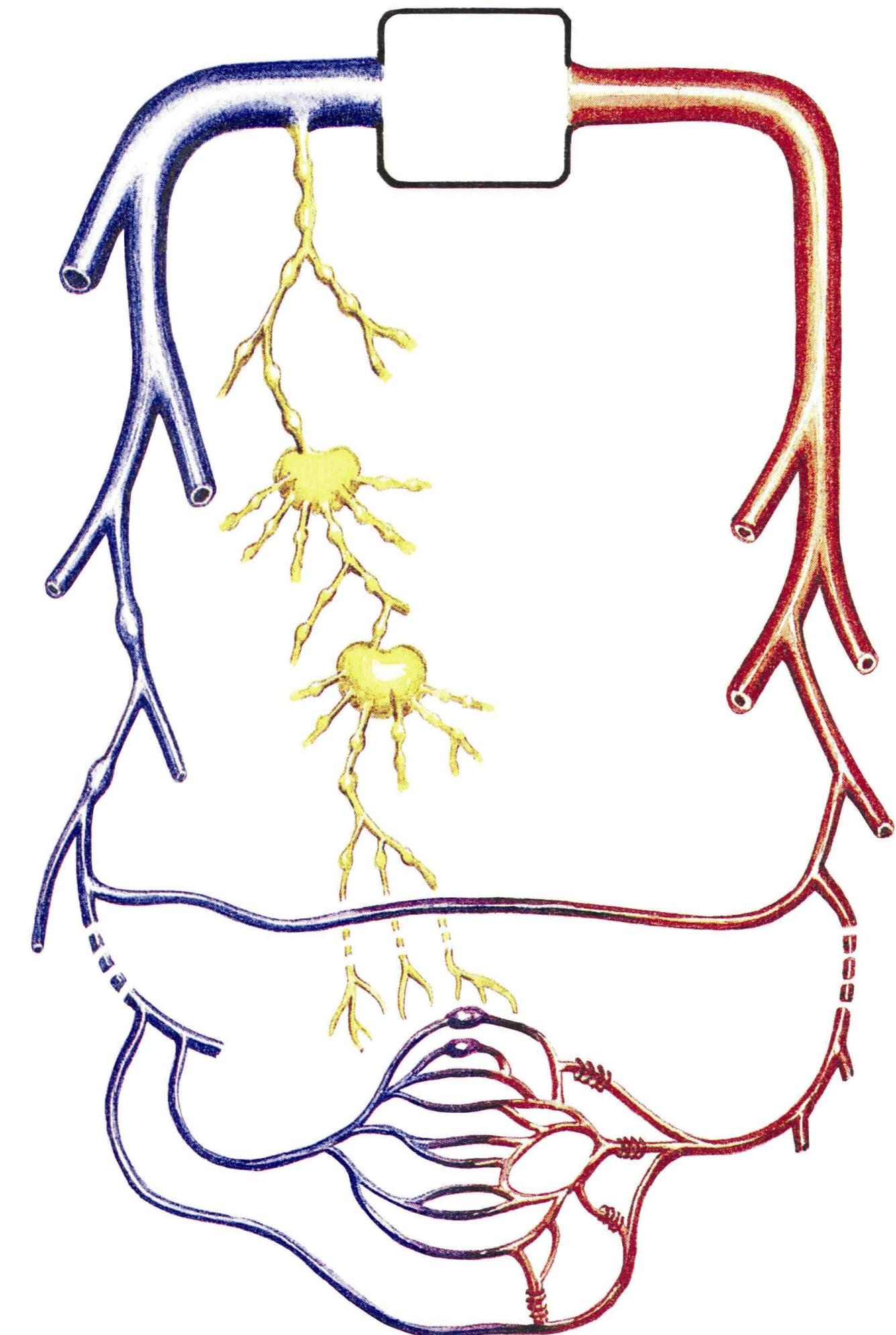
Технічна
гідромеханіка
(гіdraulіка)

Гемодинаміка

Реологія

Схематичний образ серцево-судинної + лімфатичної системи.

Найбільшу площину має
переріз який
відповідає капілярній
мережі



Серцево-судинна система (ССС) – складне поєднання різноманітних судин, зібраних у замкнену систему, яка характеризується постійними та змінними параметрами життєдіяльності з високою адаптогенністю в нормі до внутрішніх змін та зовнішніх перебудов довкілля.

Головна мета серцево-судинної системи (ССС) – забезпечення безперебійного кровопостачання органів та систем людського організму. Із позицій структури це повністю замкнена система сполучених судин із чіткою ієрархією їх за калібром. Важливу роль в організмі людини відіграють «привідні» та «відвідні» судини, що відіграють роль, схожу на роль аналогічних труб у водопроводі, але з тією відмінністю, що існує нова проміжна ланка – підсистема мікроциркуляції.

Особливість ССС, на відміну від водопроводу, полягає в наявності змінних параметрів у роботі цієї системи залежно від внутрішніх умов та зміни умов довкілля. Саме тому ССС тривалий час була недоступною для прижиттєвої об'єктивізації.

Навіть у теорії, не кажучи вже про практику, лікарі сьогодні не мають єдиного комплексного погляду на судинну систему.

Змога визначати атеросклеротичні бляшки та тромбоемболи за допомогою новітніх методів дослідження породила нову галузь медицини – ангіохіургію та кардіохіургію з нібито радикальним підходом: знайшли причину й оперативно усунули стан судинної декомпенсації. Усе начебто правильно. Але чому ж тоді в прооперованих пацієнтів лише тимчасово поліпшується якість життя й часто трапляється рецидив захворювання в післяопераційний період тривалістю до року?

Саме такий катамнез перебігу серцево-судинних захворювань (ССЗ) свідчить про глибину ураження всієї ССС як складної системи взаємопов'язаних різномасштабних трубок зі специфічними властивостями їхніх стінок та не менш специфічними біофізичними властивостями крові, яку тільки умовно можна вважати рідиною.

Час висуває вимогу створення єдиного технологічного комплексу для цілісної приживленої (*in vivo*) динамічної діагностики ССС пацієнта одномоментно на різних регіональних і системному рівні з виведенням аналітично оброблених результатів дослідження для клінічної інтерпретації та оцінювання лікарем ходу перебудови ССС в нормі й при різних патологічних станах.

Прикладні
(медичні) методи прижиттєвого дослідження
судинної системи можна умовно розподілити за
такими напрямами:

- 1. оцінка структури серця та судин;
- 2. оцінка функціональної активності серця як помпи;
- 3. оцінка функції судин;
- 4. оцінка перфузії в органах і тканинах;
- 5. оцінка тиску в судинній системі;
- 6. оцінка

Деякі важливі у прикладному сенсі математичні моделі гемодинаміки.

1. Реологічні моделі.

Оскільки кров є неньютонівською рідиною, яка при підвищенні температури збільшує свою в'язкість, то потрібно ретельно спостерігати за хворими при гіпертермії та у спеку.

2. Закон Хагена-Пуазейля

Витрати рідини пропорційні зменшенню тиску на одиницю довжини трубки і її радіусу в четвертому ступені.

Інакше: **Величина об'ємної швидкості потоку рідини Q залежить від радіуса судини r і пропорційна r^4 за умови відносної стабільності різниці між тисками і довжиною судини.**

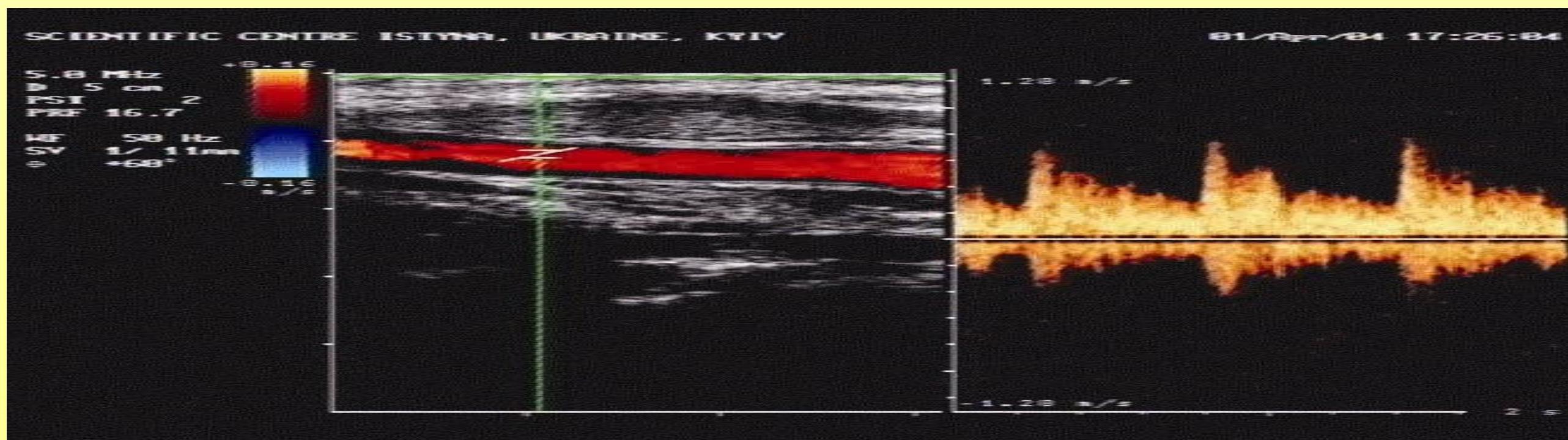
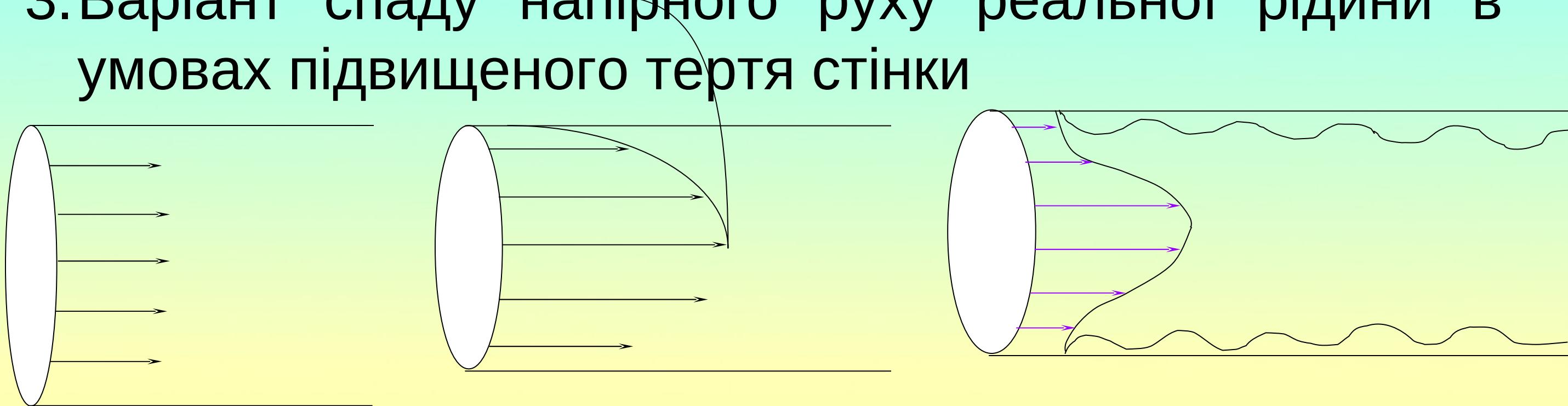
Прикладна складова, яку можна контролювати за допомогою сучасної (зокрема, ультразвукової) апаратури в процесі діагностики пацієнта, є такою:

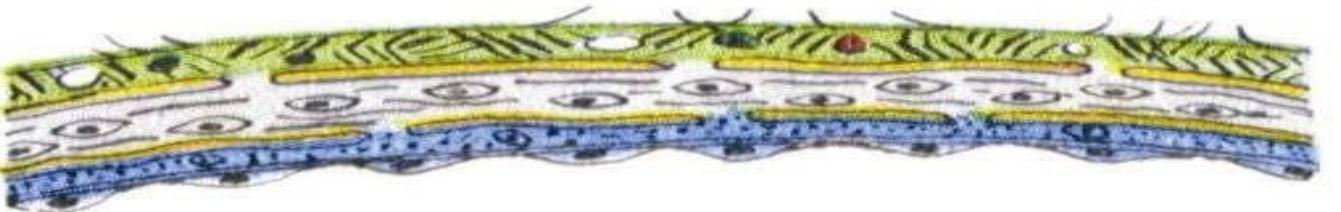
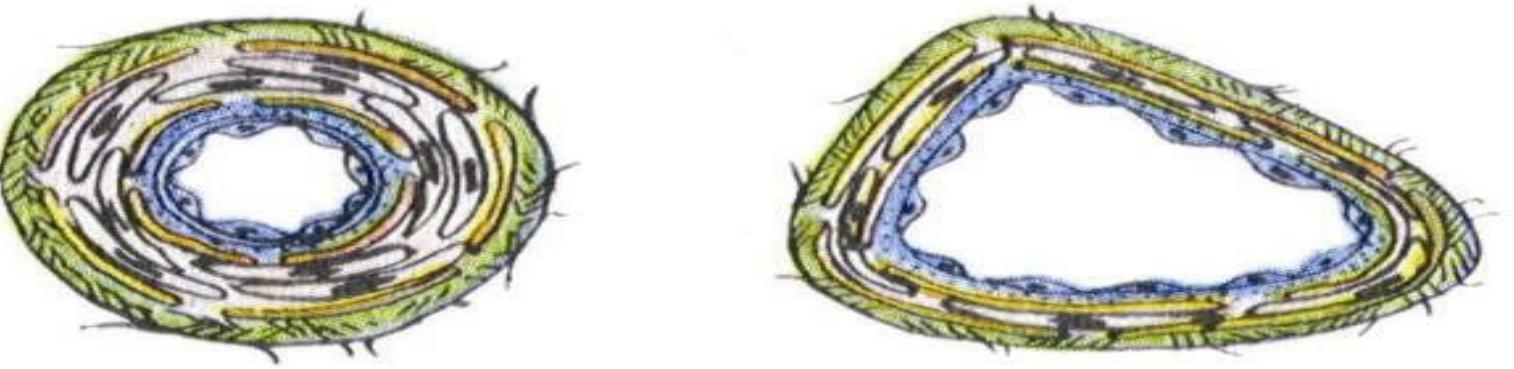
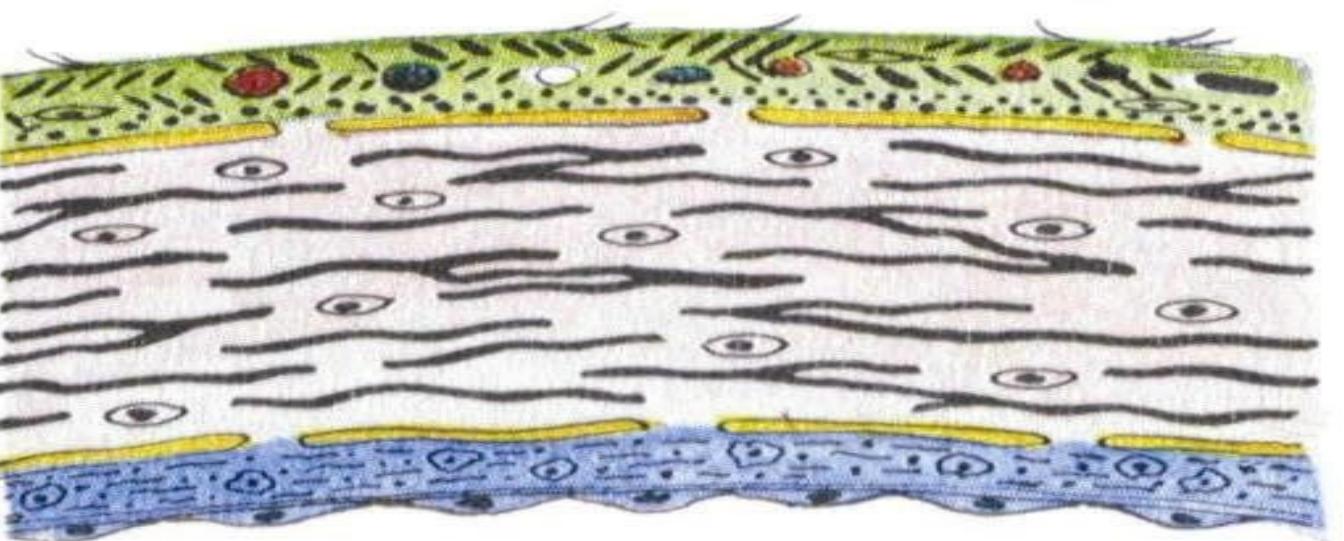
Закон виконується при практично досяжних швидкостях руху рідини у широких (магістральні артерії) та не зовсім вузьких (середні артерії) трубках.

Він не виконується для неньютонівських рідин, для яких при зменшенні швидкості руху рідини збільшується в'язкість крові.

3. МОДЕЛІ ГІДРОДИНАМІЧНОГО ОПОРУ ПРИ НАПІРНОМУ РУХІ СІРЕАЛЬНИХ РІДИН

1. Варіант напірного руху ідеальної рідини
2. Варіант напірного руху реальної рідини
3. Варіант спаду напірного руху реальної рідини в умовах підвищеного тертя стінки

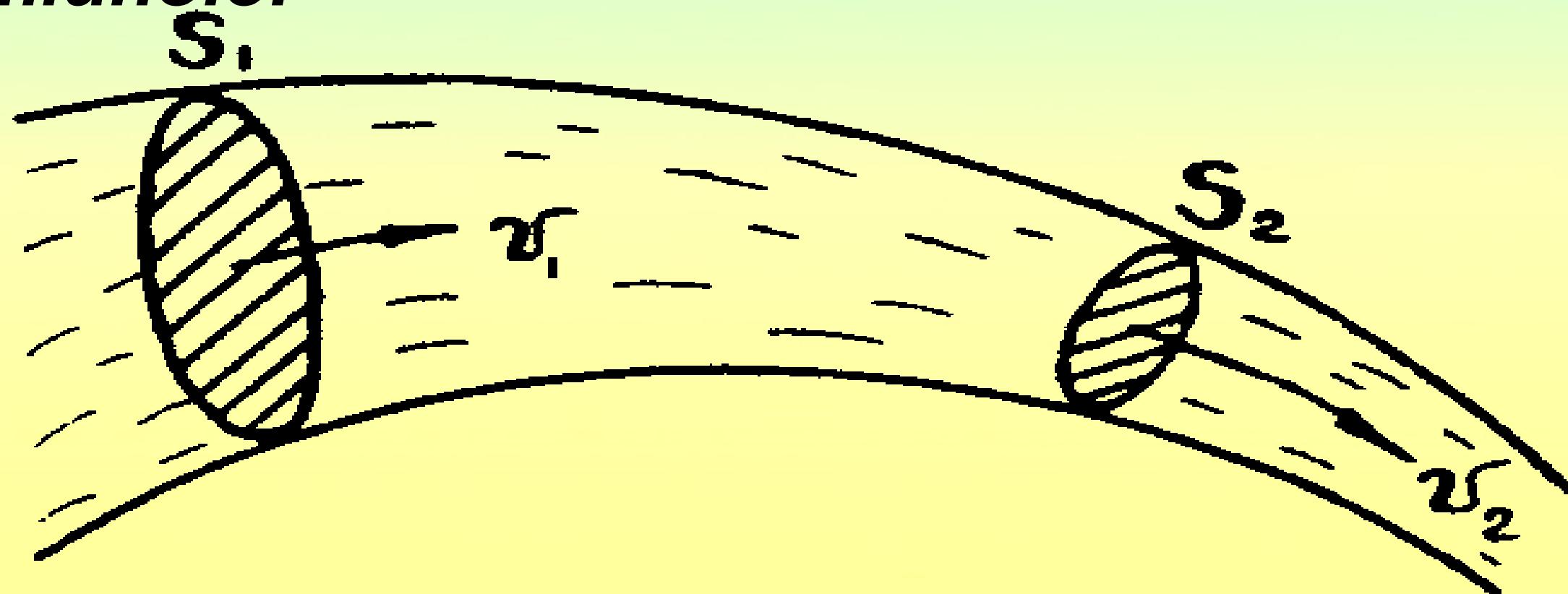




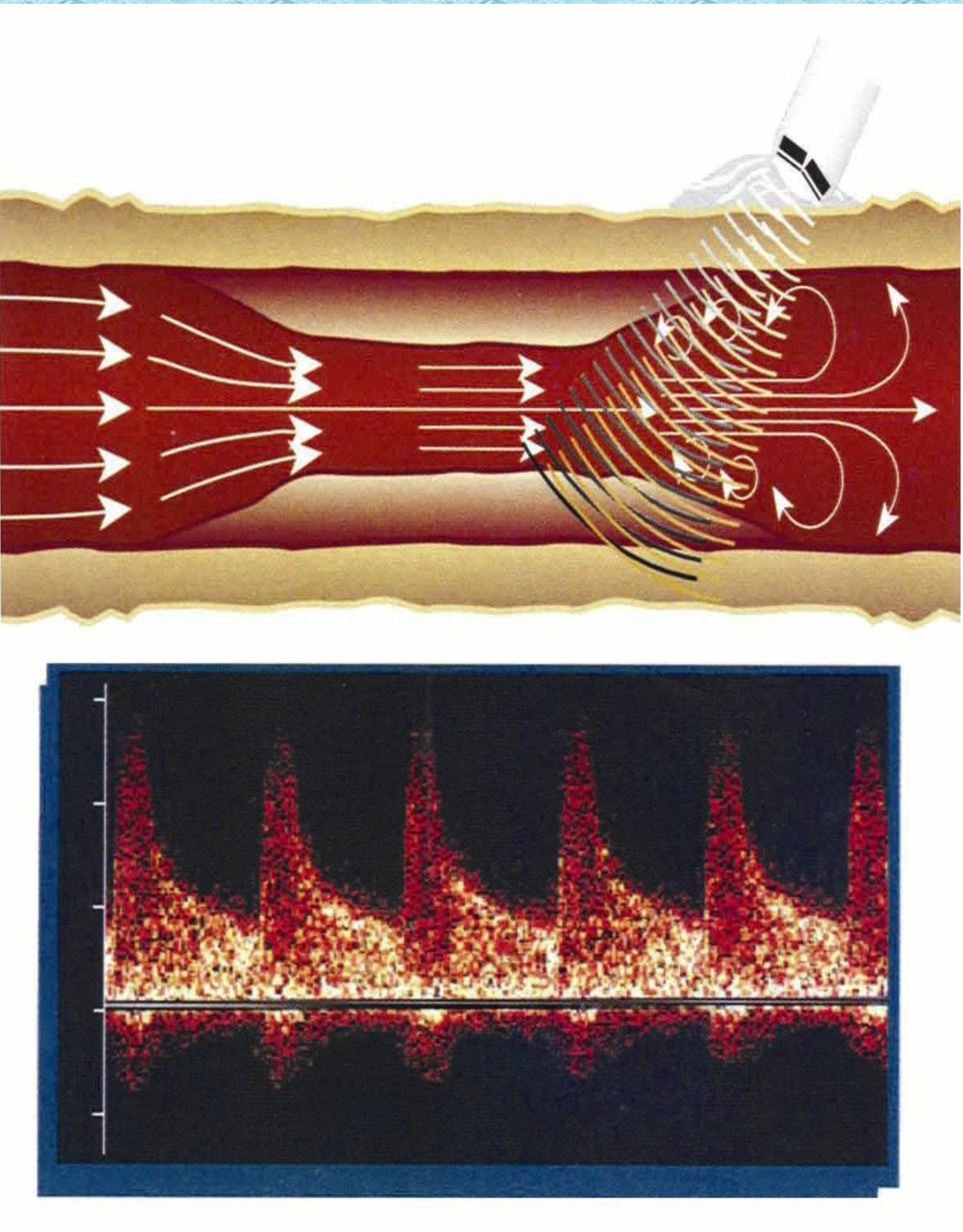
4. Закон нерозривності руху.

Потік рідини може бути безперервним при умові ламінарності потоку та сталості об'ємної швидкості (добуток площини перерізу трубки на швидкість потоку в цьому перерізі є величина стала) $Sv = \text{const}$.

У будь-якому перерізі серцево-судинної системи об'ємна швидкість кровоплину повинна бути постійною.



Згідно з умовою нерозривності потоків, у разі збільшення площі поперечного перерізу судинної системи швидкість кровотоку зменшується у відповідних областях



5. Рівняння Бернуллі (1738).

Для ламінарної течії ідеальної (нестисненої) рідини рівняння Бернуллі має такий “енергетичний” вигляд:

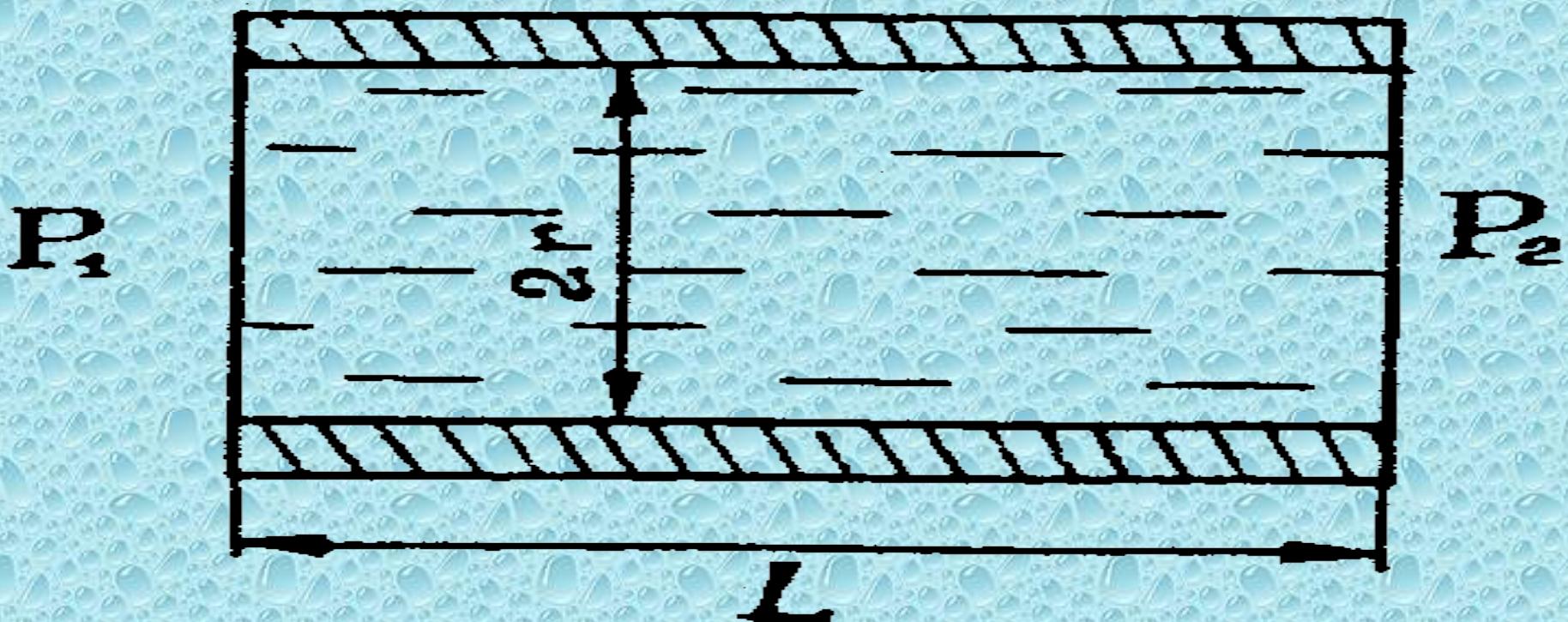
$$h\rho g + p + \rho v^2/2 = \text{const},$$

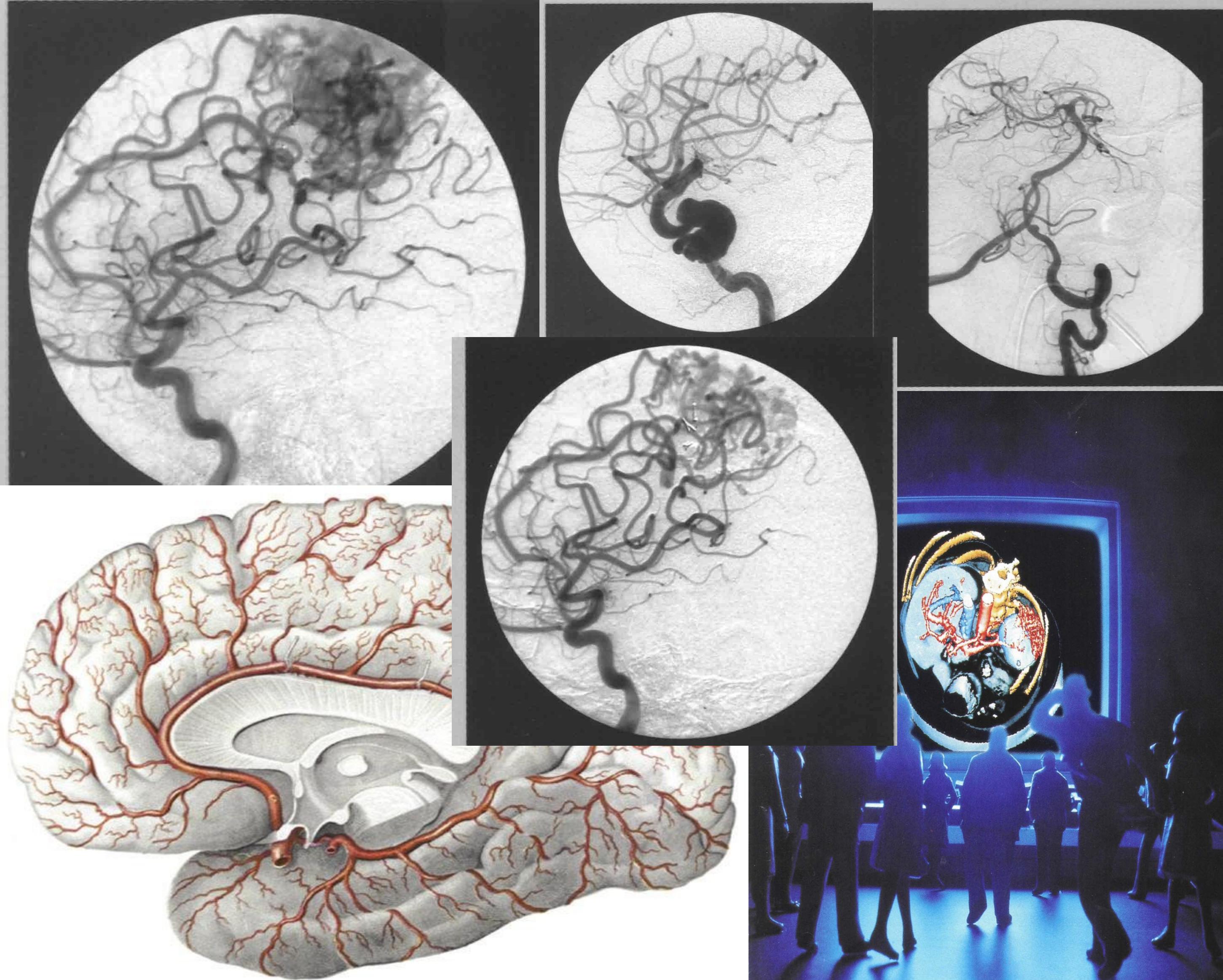
$h\rho g$ - гідравлічний напір (ваговий тиск), p - статичний напір (тиск), ρ - густина рідини, g – прискорення вільного падіння, $\rho v^2/2$ – швидкісний (кінетичний) напір (динамічний тиск) або кінетична енергія одиниці маси рухомої рідини.

Прикладна складова: зменшення лінійної швидкості крові V в судині призводить до збільшення тиску p .

Кількість крові, яка протікає через кровеносне русло за одиницю часу залежить від наявності двох факторів:

- 1) градієнта тиску в системі кровообігу;**
- 2) опору кровоносного русла, який залежить від зміни просвіту судин і характеру їх розгалуження.**



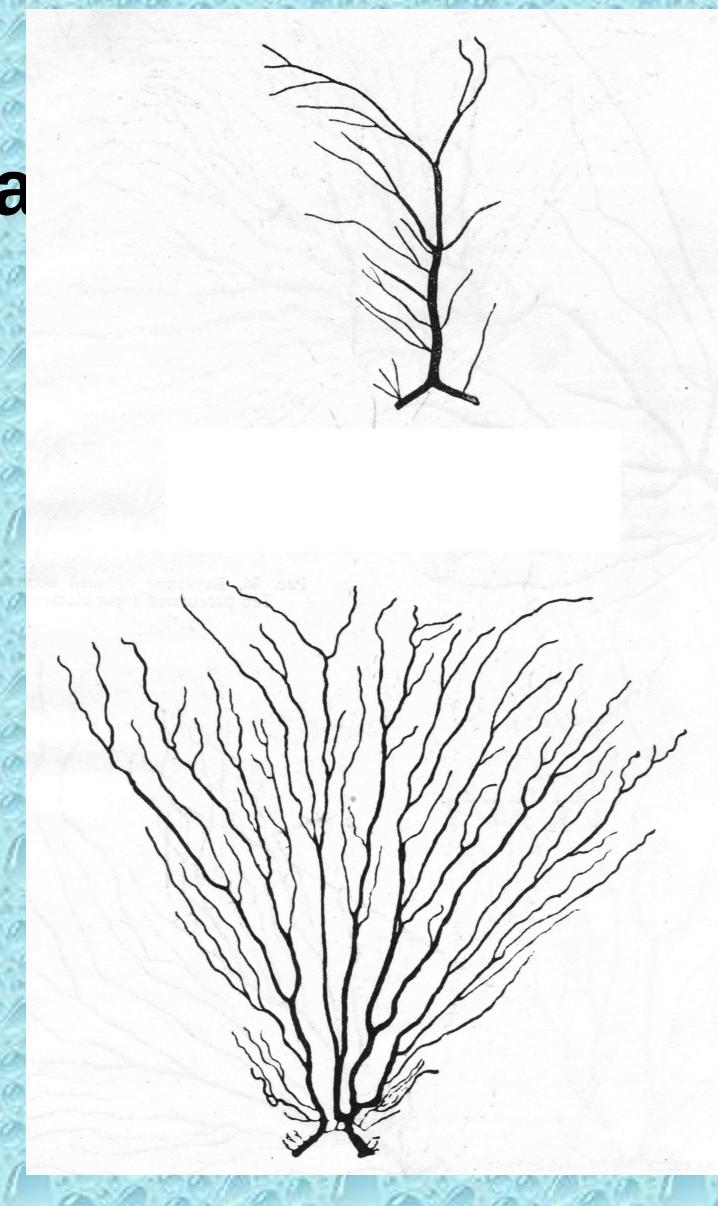
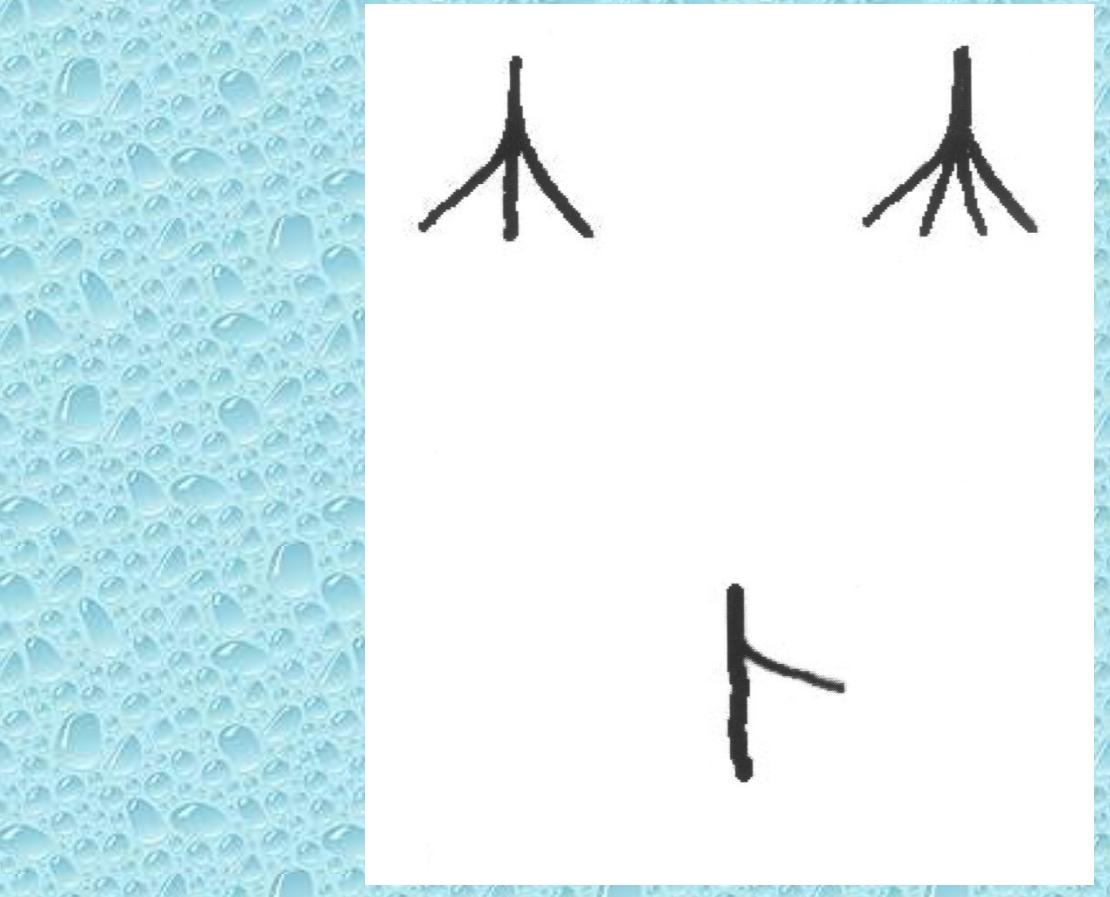


6.Математичні моделі можливих шляхів реваскуляризації

З урахуванням ангіоархітектонічної будови судин пацієнта, ці моделі

дозволяють провести:

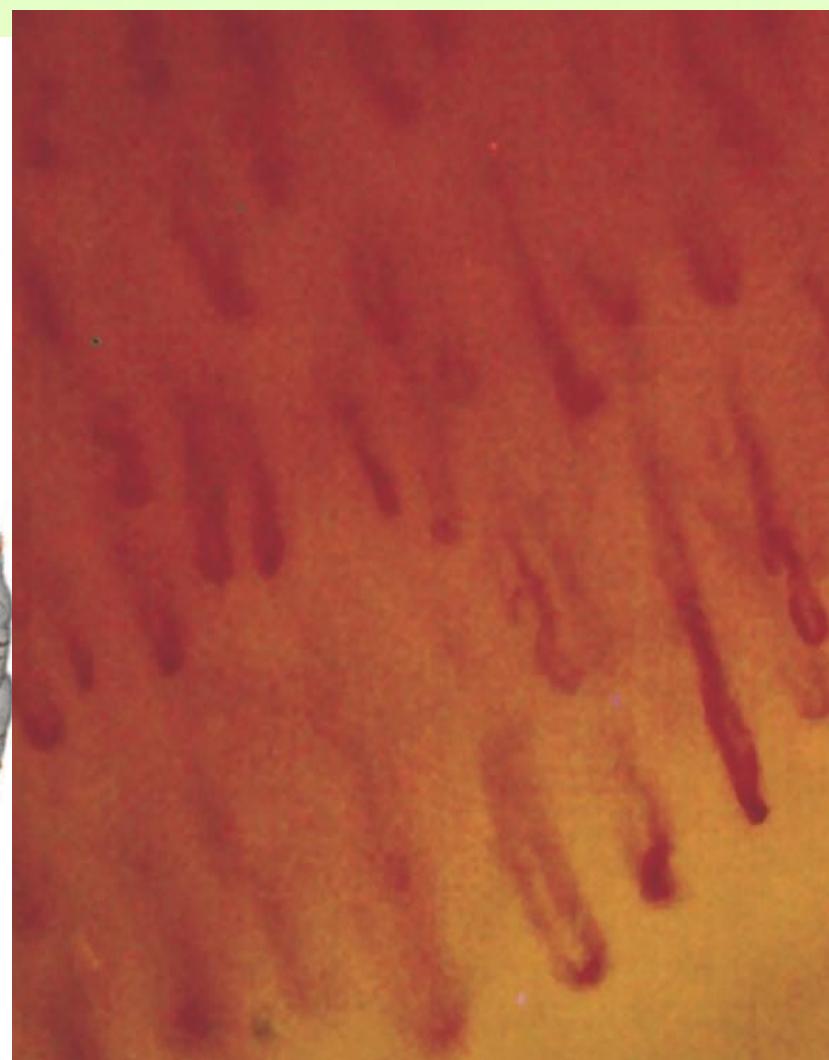
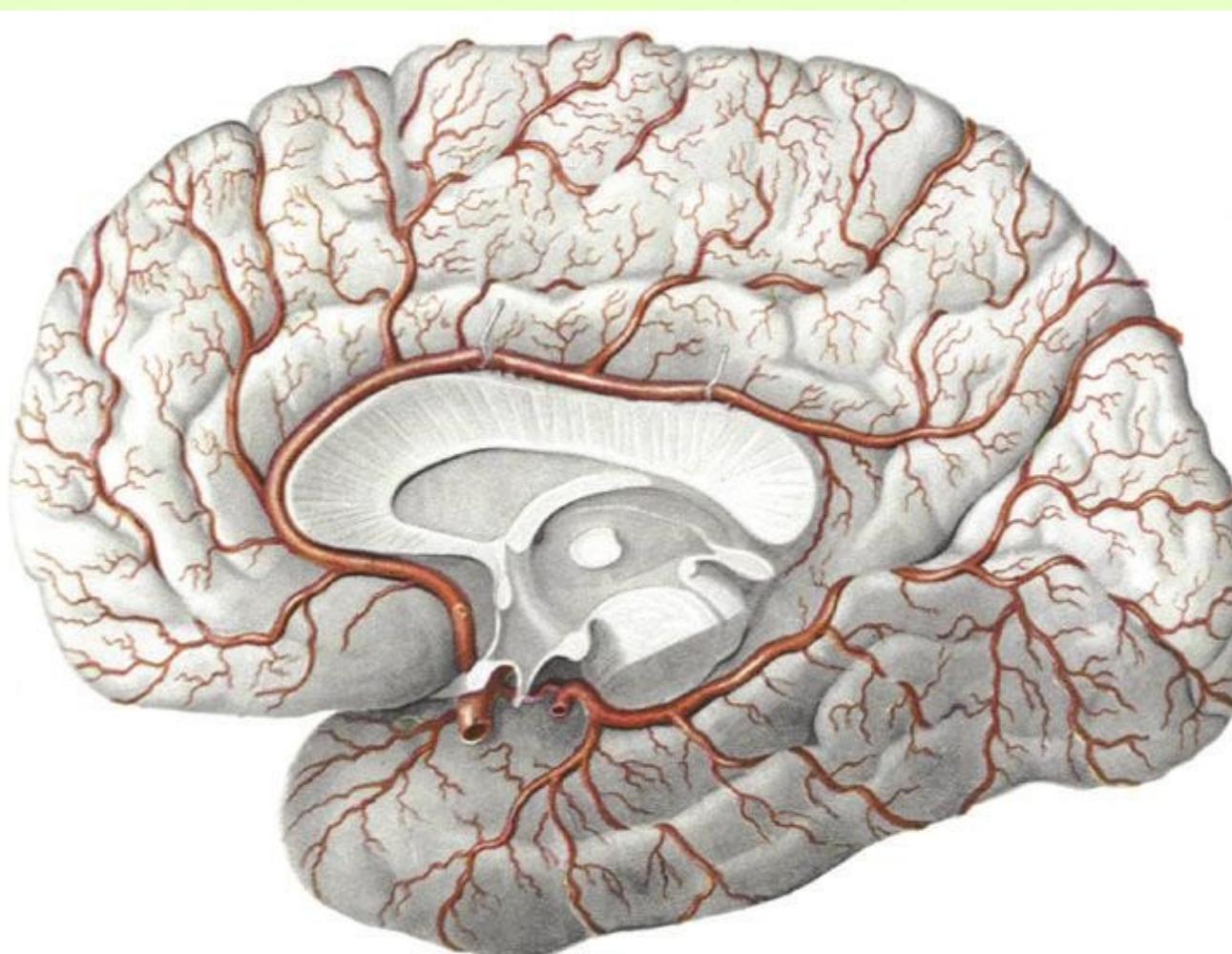
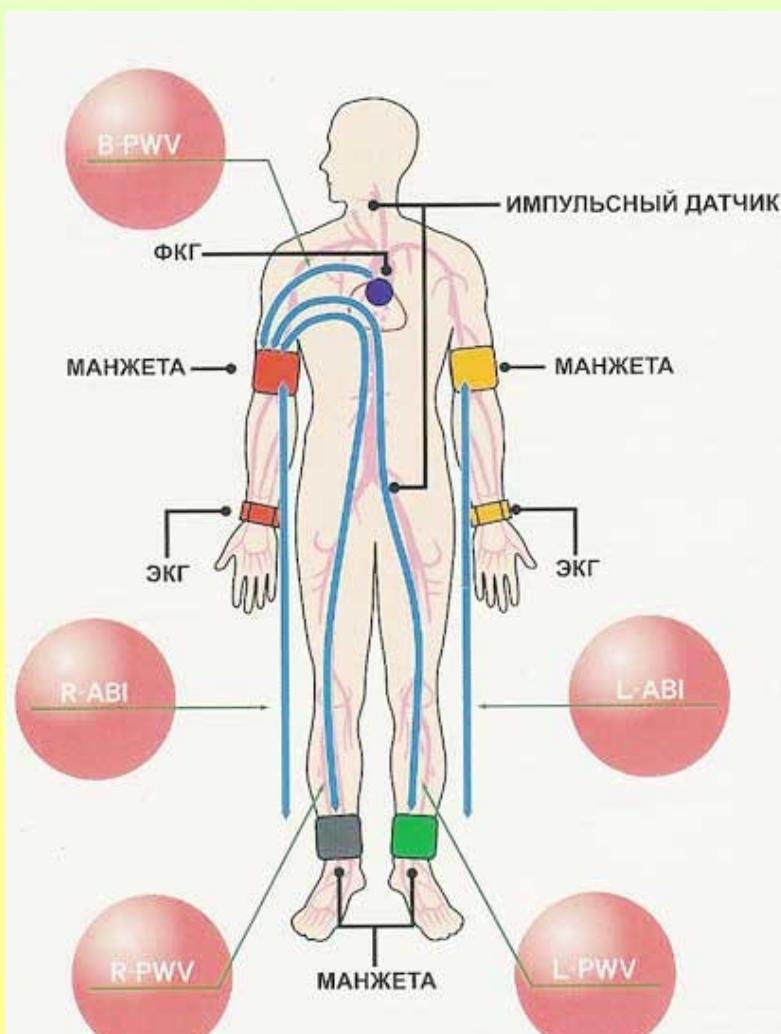
- ♣ **Розрахунок розміру гідрравлічного удару**
- ♣ **Розрахунок необхідного калібру судини**
- ♣ **Корекцію артеріовенозного балансу**
- ♣ **Дослідження кута нахилу артерії при біфуркації**



Нинішній рівень неінвазивного дослідження судинного русла вимагає глибоких знань основ гемодинаміки і можливостей ультразвукових приладів не тільки від лікарів УЗД, функціональної діагностики, а також від судинних хірургів і нейрохірургів.

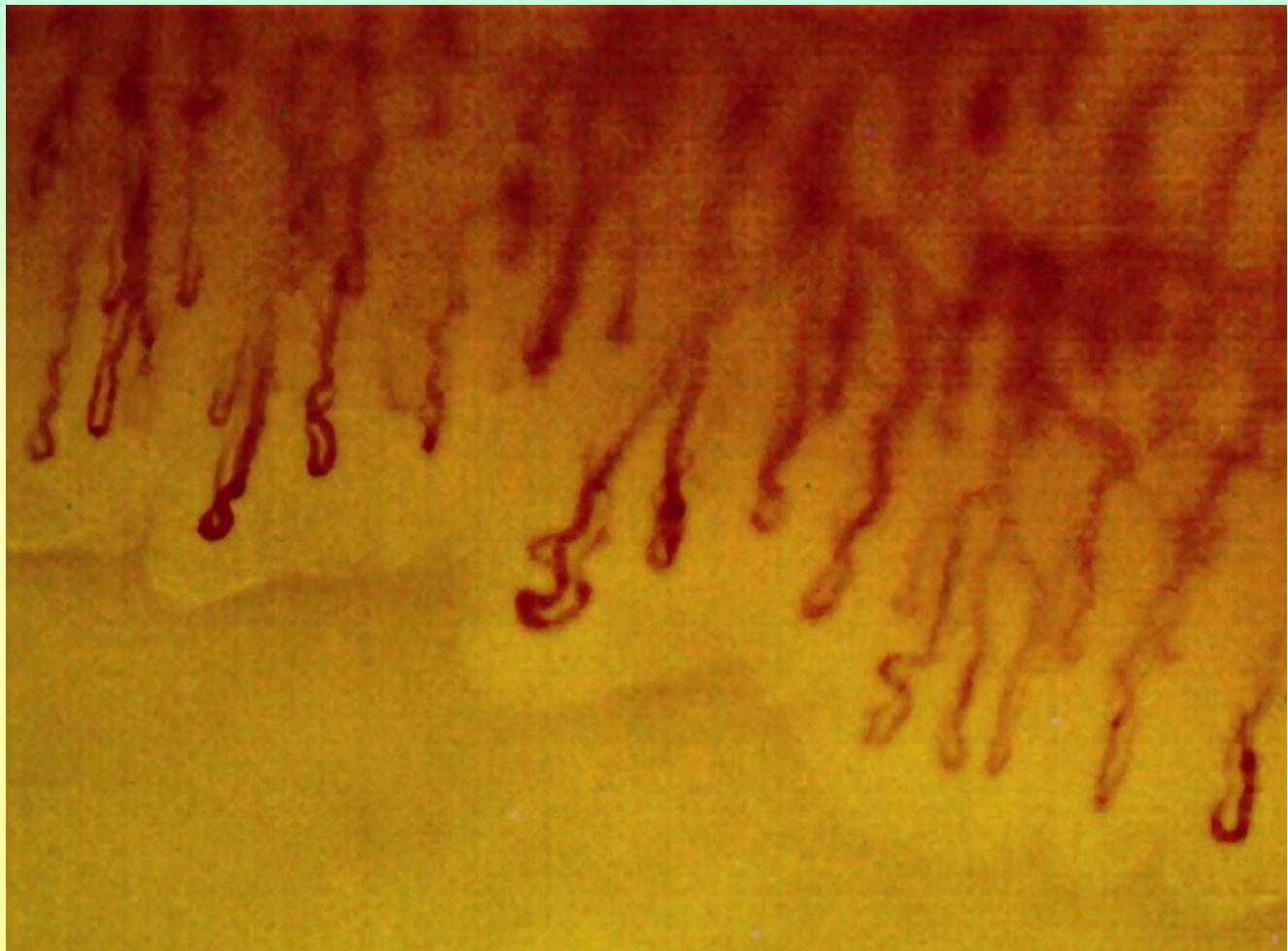
7. Макро- та мікрорівень організації процесів у живому організмі

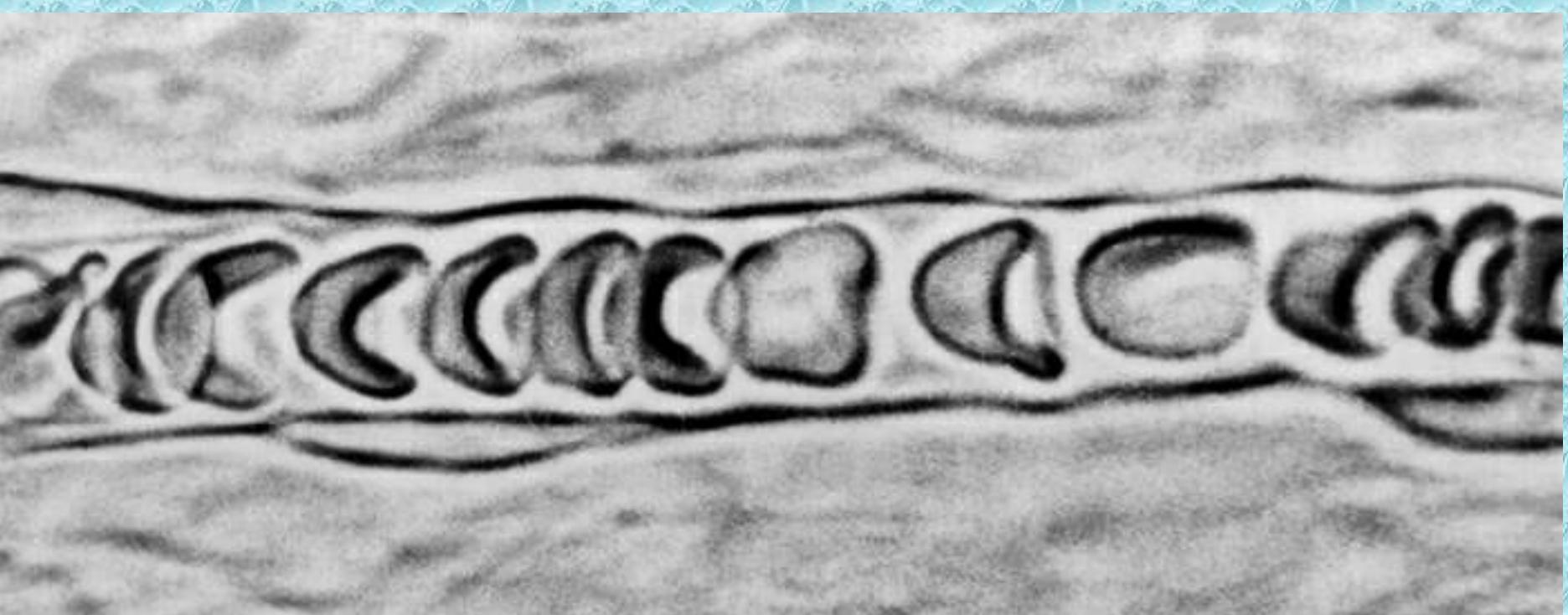
Важливість дослідження макро- та мікрорівнів кровозабезпечення для вивчення макро- та мікрорівнів функціонування нервової системи, висхідних та нисхідних провідних шляхів та клітинних коркових полів вищих коркових функцій.

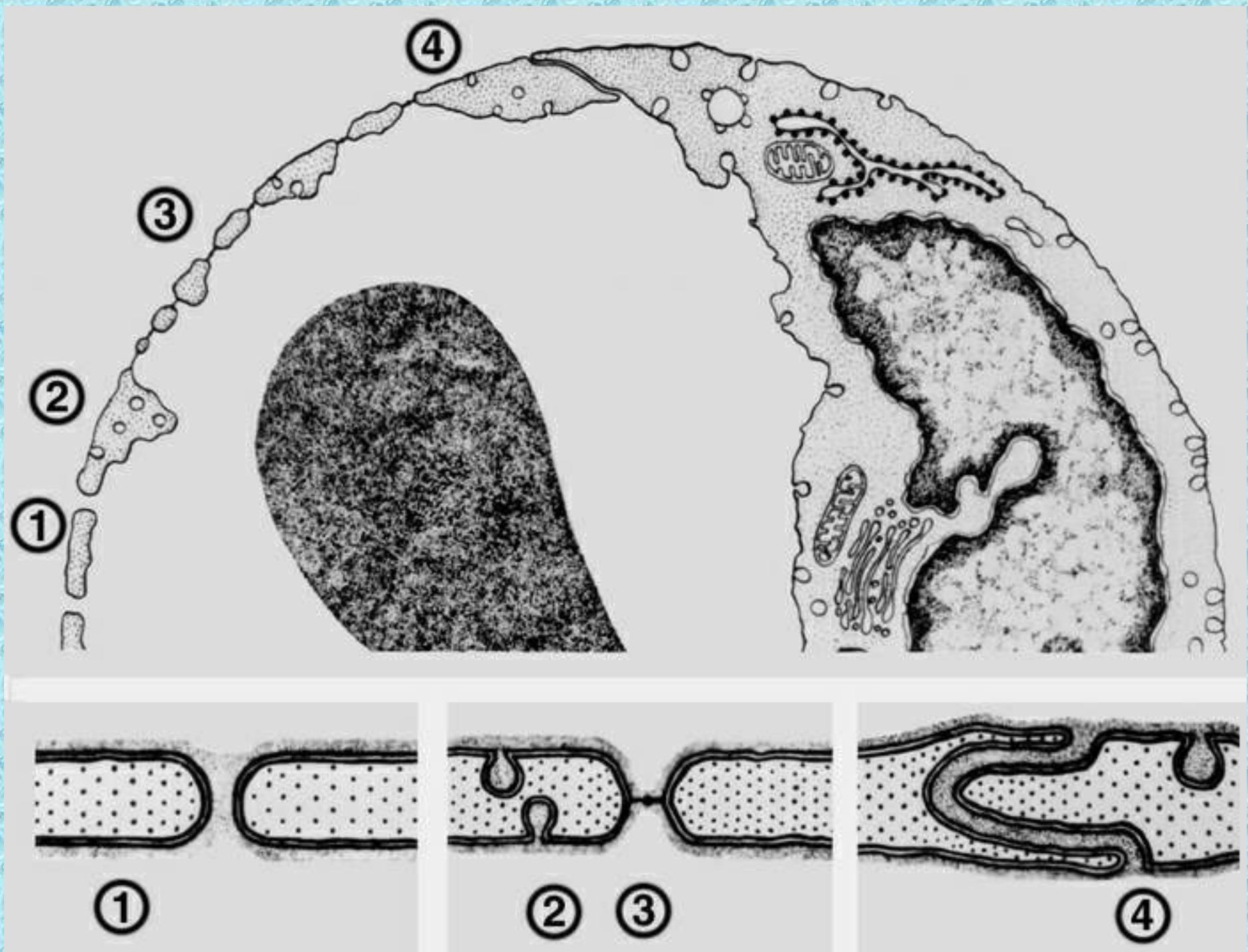


8. Моделі функціонування судинної системи на мікрорівні.

Капілярний кровообіг в артеріолах та венулах.
Периферичний внутрішньоклітинний та
позаклітинний набряк.







Схематичне зображення шляхів транспорту речовин через ендотелій: 1- недіафрагмовані фенестри (пори); 2 - плазмолемальні везікули; 3 – діафрагмовані фенестри; 4 - міжклітинні контакти.



1. Модель судинної стінки. Часто медичні методики (зокрема, описана вище) вимагають інформацію про стан судини локально, тобто в певній обмеженій області, яка цікавить дослідника - діагноста. Відомо, що за певних умов можна вважати судинну стінку вени (а в деяких випадках і артерії) складеною з одного шару, зі своїми механічними характеристиками, зокрема коефіцієнтом жорсткості, опору та узагальненою масою, які, зокрема, вважають змінними в залежності від вибору моделі. Тоді при певних умовах можна подати локальну модель стінки судини у вигляді, якому відповідають такі рівняння:

$$\ddot{x} + p(x, t)\dot{x} + q(x, t)x = -f(\varphi(t)), \quad (1)$$

де $p(x, t) = \lambda(x, t)/Q(x, t)$, $q(x, t) = k(x, t)/Q(x, t)$, $f(\varphi(t)) = -(k(x, t)\varphi(t) + \lambda(x, t)\dot{\varphi}(t))/Q(x, t)$, $k(x, t)$ – узагальнений коефіцієнт жорсткості локальної частини судини, $\lambda(x, t)$ – узагальнений коефіцієнт опору цієї ж частини судини при дії тиску струменя крові, $Q(x, t)$ – узагальнена характеристика ваги

досліджуваної локальної ділянки судини, $\varphi(t)$ – деяка періодична сила (тиск), що виникає внаслідок руху крові по досліджуваній судині.

2. Модель руху крові по судині. Розглядається судина як циліндрична оболонка з ортотропного нелінійно-пружного стисливого матеріалу. Стінка оболонки складається з внутрішнього (інтима) та зовнішнього (адвентиція) еластичних шарів та середнього (мелія) м'язевого шару [1-3].

Матеріали ортотропних шарів мають різні пружні властивості та зв'язані загальними поверхнями, де переміщення та дотичні напруження рівні у плошинах, перпендикулярних до цих поверхонь, а також відсутні взаємні тиски шарів. Тоді для осесиметричної оболонки при осесиметричному поширенні пульсової хвилі рівняння руху оболонки матимуть вигляд [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + p_x - \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \sum_{i=1}^3 \rho_i h_i &= 0, \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) - \frac{N_y}{R} + p_z - \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \sum_{i=1}^3 \rho_i h_i &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут N_x, N_y, M_x – відповідні зусилля, які розвиваються в оболонці, ρ_i – щільність матеріалу i -го шару, p_x, p_z – складові гідродинамічних сил, u_z – складова переміщення поверхні зведення оболонки (судини) з радіусом R , h_i – товщина відповідного шару.

Приймемо певні спрощення також і щодо руху крові в судині, а саме ламінарність та осесиметричність течії, тоді, вважаючи кров ньютонівською рідиною, щільність якої ρ є лінійною функцією тиску, можна записати математичну модель руху крові по судині у вигляді системи рівнянь Нав'є - Стокса в циліндричних координатах та рівняння нерозривності таким чином [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} - \frac{v_r}{r} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{v_r}{r} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

де μ – кінематична в'язкість крові, $\rho = \rho_0 + (p - p_0)/K$, ρ_0 – початкова щільність, p_0 – початковий тиск, K – модуль об'ємної пружності крові при стискуванні.

Співвідношення для складових гідродинамічних сил, що діють на судину, матимуть вигляд

$$p_x = \rho\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right), \quad (4)$$

$$p_z = p - 2\rho\mu \frac{\partial v_z}{\partial r}.$$

Щодо граничних умов, то їх можна записати у вигляді

$$v_r = \frac{\partial u_z}{\partial t}, \quad v_x = \frac{\partial u_x}{\partial t}, \quad (5)$$

які виконуються на внутрішній поверхні судини і відображають той факт, що на поверхні контакту оболонки та рідини швидкості руху стінки судини та прилеглих до неї формених елементів крові рівні між собою [2].

Рівняння (2)-(5) є моделлю, яка описує поведінку кровоносної судини в динаміці. Очевидно, що для конкретної судини певні параметри цієї моделі (наприклад, щільність) можуть бути знайдені лише експериментально, що є характерним для моделей гемодинаміки.

3. Моделі "садова гусінь" та "дощовий черв'як".

Опинемо коротко механізм поширення крові по судині [10]. Серце, скорочуючись, за невеликий проміжок часу подає порцію крові в частину судини, завдяки чому тиск тут зростає. Через інерцію крові це викличе не рух її по судині, а розширення судини та вхід у неї крові. Потім пружні сили стінок судини виштовхнуть надлишок крові в сусідню частину, де усі описані події повторяться. Завдяки такому механізму по судині поширюється імпульс тиску, швидкості кровоплину та деформації судинної стінки. Швидкість поширення цього імпульсу (тобто пульсу) набагато вища, ніж середня швидкість кровопліну.

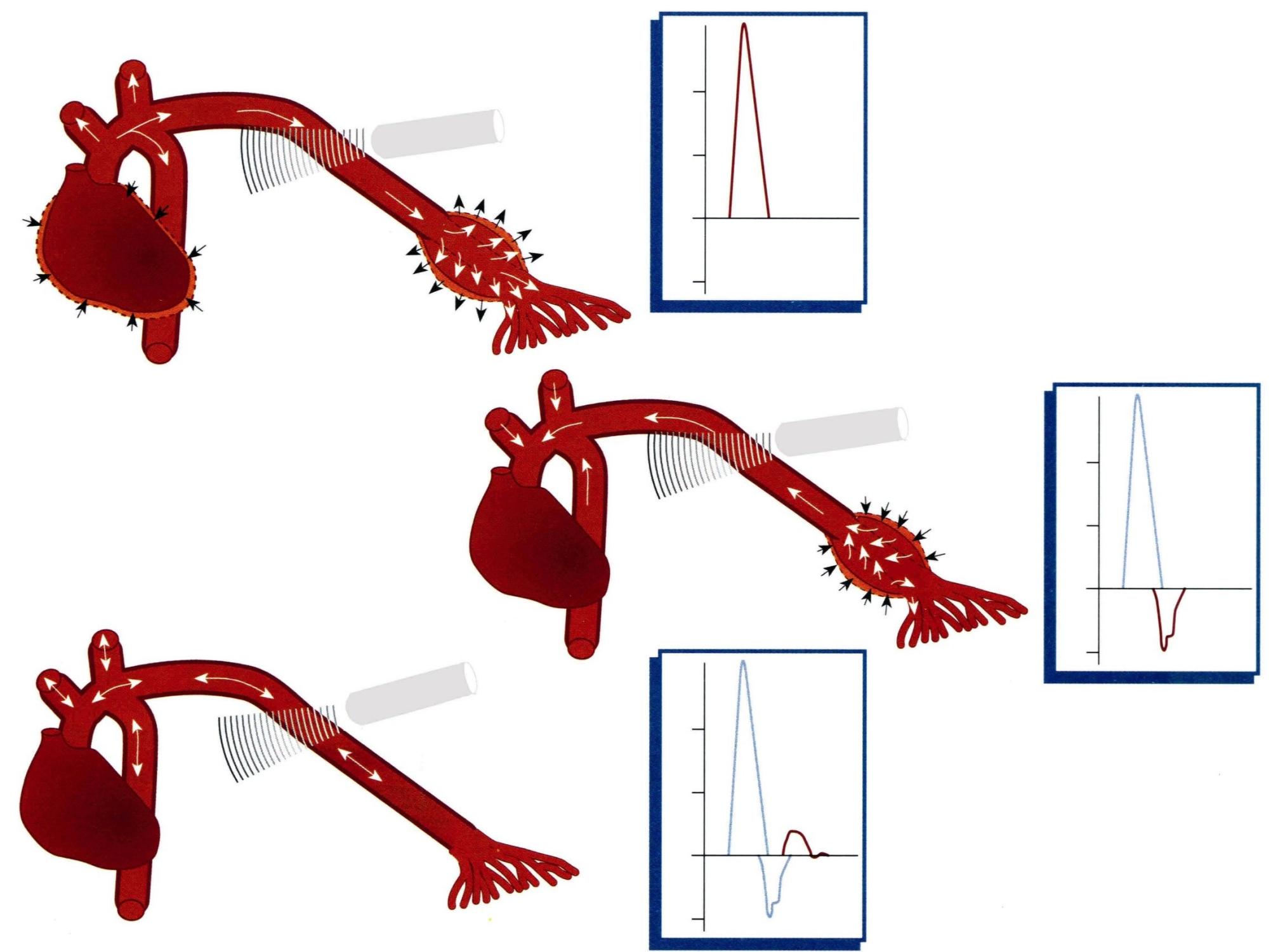
Розглянемо механічну модель руху садової гусені [11, 12]. Останню можна уявити як продовгувате деформівне тіло, що лежить на жорсткій поверхні. Спосіб переміщення садової гусені можна пояснити таким чином. На одному (наприклад, лівому) кінці тіла силою мускулатури гусениці утворюється невелика вигнута (випукла) частина ("хвиля"), яка потім також силою мускулатури переміщується до іншого (правого) кінця тіла, де, зникаючи, переміщує тіло гусені на невелику відстань. Отже,

у результаті описаного пробігу хвилі, тіло гусені зміщується відносно поверхні на відстань dx у напрямку руху хвилі. При повторній такій хвилі тіло гусені знову переміститься у тому ж напрямі і т.д. У розглянутому випадку хвиля переносить масу. Ця модель може певною мірою пояснювати рух крові по судині, а також виникнення патологічних станів звивистості судин. При певних умовах такі хвилі можуть не переносити масу.

Розглянемо модель руху донцового черв'яка [11, 12]. Він, як і садова гусінь, пересувається по жорсткій поверхні шляхом періодичної деформації свого тіла, однак характер деформації тіла черв'яка принципово відрізняється від деформаційних рухів гусені. Якщо тіло гусені деформується поперечною хвилею, то тіло черв'яка - поздовжньою. Спосіб переміщення донцового черв'яка зобразимо таким чином. На одному (наприклад, правому) кінці тіла утворюється невелика розтягнута (видовжена) частина (поздовжня хвиля), яка потім зміщується до іншого (лівого) кінця, де і пропадає, а початкова видовжена тонка частина тіла набуває початкової нормальної форми і є зміщеною праворуч щодо свого початкового положення. Отже, в результаті такого перебігу хвилі по тілу черв'яка, саме тіло виявляється зміщеним щодо поверхні на деяку невелику відстань dx у напрямку, протилежному до напрямку руху хвилі. Описана модель може пояснювати певною мірою патологічні процеси, пов'язані зі спазмом судин головного мозку. Зокрема, той момент, що спазм може бути динамічним, тобто поширюватися вдовж судин з урахуванням ангіоархітектоніки [13] у вигляді поздовжньої хвилі деформації.

**Треба спостерігати, аби зрозуміти,
і намагатися зрозуміти, аби діяти.**

Ромен Роллан



**Дякую
заувагу!**