

Моделі аналітичної механіки у дослідженні судинної системи

В.В. Новицький, У.Б. Луцик

Інститут математики НАН України, Клінічна лікарня "Феофанія"

Київ — 2012

Зміст

Вступ

Майже консервативні моделі коливних процесів судинної системи

Математична модель коливних процесів у поперечному перерізі судин

Моделювання за допомогою механічних аналогій

Список літератури

Вступ

Аналітична механіка — розділ класичної механіки в якому динаміка механічної системи розглядається в термінах узагальнених координат, імпульсів та сил. Ефективно застосовується ,зокрема, у випадку розгляду механічних систем із накладеними в'язями. Аналітична механіка опирається на формулювання класичної механіки у формі лагранжевої механіки

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F(\dot{q}_i, q_i, t), i = \overline{1, n}, L = T - \Pi$$

і гамільтової механіки

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, H = \sum p_i \dot{q}_i - L, i = \overline{1, n}.$$



МЕДИЧНА ТЕХНОЛОГІЯ

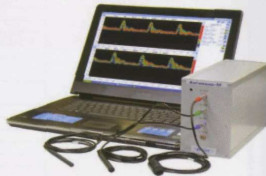
Клінічна ультразвукова доплерографія артеріо-венозної рівноваги

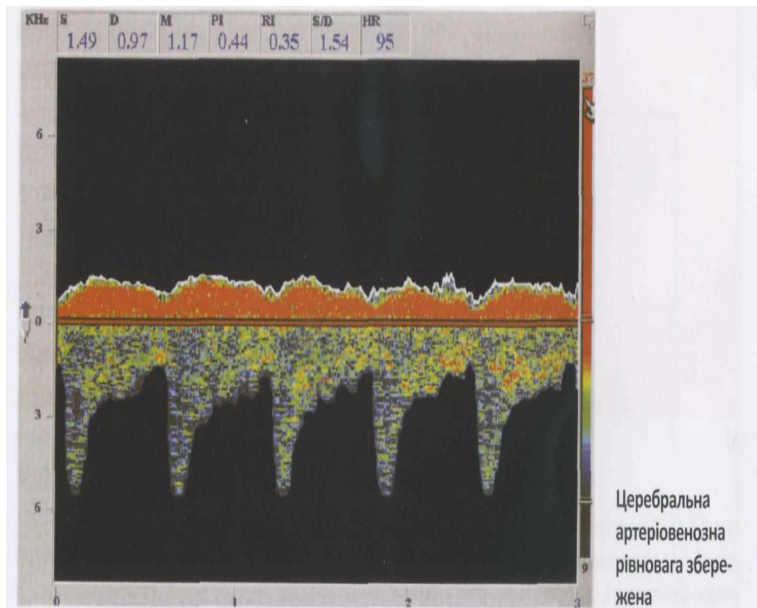
Для успішного застосування методики УЗДГ лікар повинен мати глибокі знання з анатомії та фізіології судинної системи організму, знання основ гідро- та гемодинаміки, фізики ультразвуку, особливостей плину крові як неньютонівської рідини.

Суть методології полягає в комплексному погляді на кровоносну систему як цілісну систему замкнутого артеріовенозно-капілярного трубопроводу – її опір, еластичність судинної стінки, тонус судин, гідрофільність навколишніх тканин. Сучасна високочутлива апаратура дає змогу працювати як з артеріальним, так і з венозним сегментами водночас, а спеціально розроблене програмне забезпечення обраховує, наскільки істотні в пацієнта відхилення від стану артеріовенозної рівноваги в бік невиправданої артеріальної гіперемії чи венозного застою того чи іншого ступеня вираженості.

Сьогодні ця методика є доконечне потрібною не лише для лікарів функціональної та УЗ-діагностики, вона є актуальною для багатьох напрямів медицини, таких як педіатрія, неонатологія, неврологія, психіатрія, урологія, гінекологія й акушерство, онкологія, кардіологія, хірургія.

Лише недосвідчений лікар дозволяє собі нехтувати результатами доплерографічного дослідження магістральних та периферичних судин.

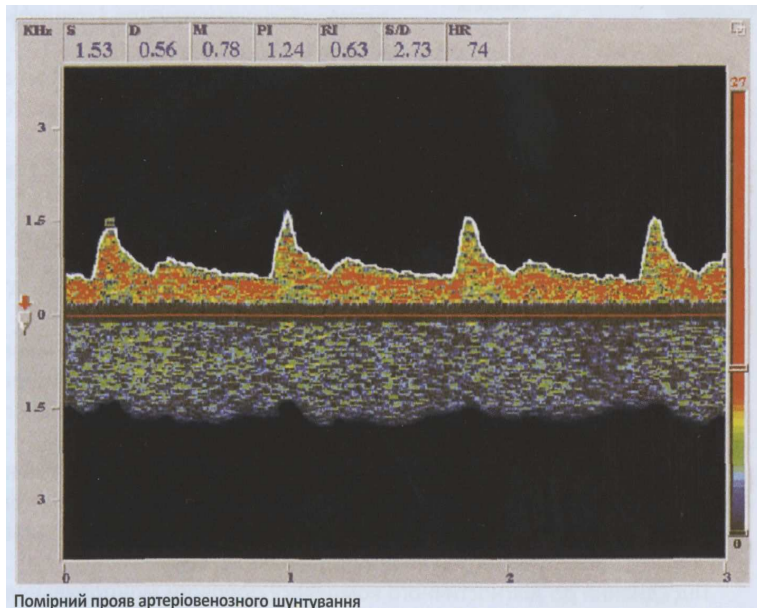




Тільки доплерографія при її фаховому застосуванні може відобразити функціонування судин не лише в артеріальному, але й у венозному руслі в різних регіональних басейнах.

Тому важливим та інформативним методом дослідження серцево.судинної системи на рівні конкретного сегмента, а також виявлення розбалансування артеріовенозної рівноваги, ознак патологічного артеріовенозного шунтування, порушення венозного відтоку є ультразвукова доплерографія, заснована на авторській методиці д.мед.н. Лущик У.Б.

Таким чином, саме завдяки розробленій нами методології дослідження та клінічної інтерпретації гемодинамічних перебудов метод УЗДГ піднісся до рівня сучасної інноваційної медичної технології, яка дає змогу значно поліпшити стан функціонування серцево-судинної системи та розумно його підкоригувати з огляду на виявлені патології.



Майже консервативні моделі коливних процесів судинної системи

Останнім часом привертають увагу дослідників так звані майже консервативні системи, які є збуреннями відомих консервативних систем та можуть грати роль моделей коливних процесів у складних динамічних системах, зокрема у судинній системі.

Розглянемо лінійну стаціонарну майже консервативну систему

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x, \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

де t_0 – початковий момент часу, ε – малий параметр, $x(t) \in \mathbb{R}_{2n}$ – вектор стану, $A_0 = -A_0^T \in \mathbb{R}_{2n \times 2n}$ – кососиметрична невиврождена, $A_1 \in \mathbb{R}_{2n \times 2n}$ – матриця-збурення, завдяки якій система рівнянь збуреного руху (1) може бути асимптотично стійкою, стійкою або нестійкою.

Вигляд матриці, яка характеризує послідовний вплив коливань з попереднього рівня судинної системи на коливання наступного, буде такий:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_{23} & 0 & \omega_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_{34} & 0 & \omega_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_{45} & 0 & \omega_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_{56} & 0 \end{bmatrix}.$$

Дуже спрощена модель коливань у судинній системі, коли на кожному рівні коливання не залежать від коливань на інших рівнях, описується такою матрицею коефіцієнтів:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_{56} & 0 \end{bmatrix}.$$

Щодо вигляду матриці збурень A_1 , то слід відмітити, що у загальному випадку нічого не відомо про її структуру чи властивості.

Будемо вважати, що A_1 надає системі (1) властивості асимптотичної стійкості, тоді існує додатно визначена симетрична матриця-розв'язок $P \in \mathbb{R}_{2n \times 2n}$ матричного рівняння Ляпунова

$$(A_0 + \varepsilon A_1)^T P + P(A_0 + \varepsilon A_1) = -2Q, \text{ де } Q \in \mathbb{R}_{2n \times 2n} \quad (2)$$

— деяка невід'ємно визначена симетрична матриця.

Шукатимемо матрицю-розв'язок P у вигляді розкладу за малим параметром

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i. \quad (3)$$

Розкладемо також і матрицю Q

$$Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_i. \quad (4)$$

Підставивши (3) та (4) в (2), отримаємо

$$\begin{aligned} (-A_0 + \varepsilon A_1^T)(P_0 + \varepsilon P_1 + \dots) + (P_0 + \varepsilon P_1 + \dots)(A_0 + \varepsilon A_1) = \\ = -2(Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \dots). \end{aligned} \quad (5)$$

Звідси матимемо таку нескінченну систему рівнянь

$$\begin{aligned}
 A_0 P_0 - P_0 A_0 &= 2Q_0, \\
 A_0 P_1 - P_1 A_0 &= P_0 A_1 + A_1^T P_0 + 2Q_1, \\
 &\dots\dots\dots \\
 A_0 P_i - P_i A_0 &= P_{i-1} A_1 + A_1^T P_{i-1} + 2Q_i, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Розглянемо перше рівняння системи (6)

$$A_0 P_0 - P_0 A_0 = 2Q_0.$$

Відомо , що ліва частина має нульовий слід. Дійсно

$$tr(A_0 P_1 - P_1 A_0) = tr(A_0 P_1) - tr(A_0 P_1) = 0.$$

Звідси та з невід'ємної означеності Q випливає, що $Q_0 \equiv 0$. Отже, матриця Q розкладається таким чином

$$Q = \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \dots, \quad (7)$$

а нескінченна матрична система рівнянь Ляпунова (6) набуде вигляду

$$A_0 P_0 - P_0 A_0 = 0, \quad (8)$$

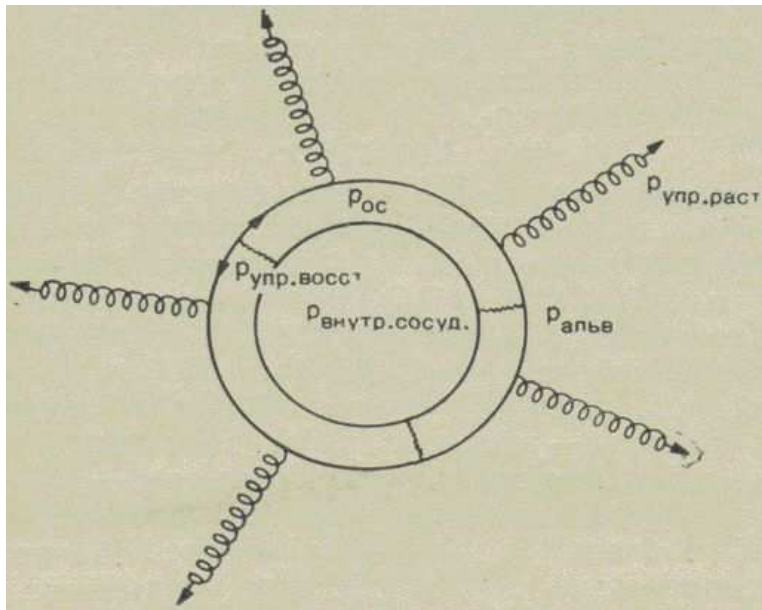
$$\begin{aligned} A_0 P_1 - P_1 A_0 &= P_0 A_1 + A_1^T P_0 + 2Q_1, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} A_0 P_i - P_i A_0 &= P_{i-1} A_1 + A_1^T P_{i-1} + 2Q_i, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Отже, нульове наближення матриці-розв'язку P_0 матричного рівняння Ляпунова (2) знаходиться з (8) як симетрична додатно визначена матриця, перестановна з кососиметричною A_0 . Насправді P_0 з (8) є множиною симетричних матриць з невідомими параметрами. З цієї множини за допомогою першого рівняння (9) необхідно знайти саме додатно визначену матрицю, яка дозволяє розв'язати нескінченну систему (9). Ситуація для майже консервативних систем принципово відмінна від відомої класичної, коли система (1) є асимптотично стійкою при $\varepsilon = 0$ і перше матричне рівняння системи (6) є розв'язним щодо P_0 , як і усі наступні щодо $P_i, i = \overline{1, \infty}$.

Моделі аналітичної механіки у дослідженні судинної системи

└ Майже консервативні моделі коливних процесів судинної системи



Математична модель коливних процесів у поперечному перерізі судинної стінки

Для діагностики стану кровообігу в серцево-судинній системі широко застосовуються доплерівські діагностичні прилади. За їхньою допомогою вимірюються, зокрема, швидкість кровообігу та параметри еластичності судинної стінки. Акустичний промінь доплерографа дозволяє отримати інформацію з утворюваного ним поперечного перерізу судини. У зв'язку з цим є актуальним дослідження саме цього перерізу. Виберемо динамічну модель поперечного перерізу судини з суцільним м'язовим шаром у вигляді шестимасової ($2m_i$, $i = \overline{1, 6}$) системи (рис. 1).

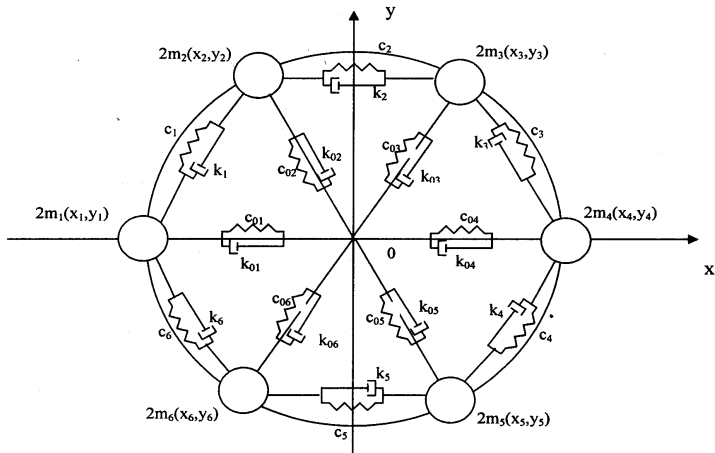


Рис.1 Динамічна модель поперечного перерізу судинної стінки

Між масами встановлюємо 6 пружин з різними жорсткостями ($c_i, i = \overline{1,6}$). Аналогічно з'єднуємо всі описані маси з центром кола (тут встановлюємо відповідно 6 пружин з жорсткостями ($c_{0i}, i = \overline{1,6}$)).

Дана система має 12 ступенів вільності, оскільки положення кожної маси ($2m_i, i = \overline{1,6}$) в системі координат Oxy характеризується двома незалежними координатами відповідно $((x_i, y_i), i = \overline{1,6})$. Тому узагальнені координати системи будуть такими: $q_1 = x_1, q_2 = y_1,$
 $q_3 = x_2, q_4 = y_2, q_5 = x_3, q_6 = y_3, q_7 = x_4, q_8 = y_4, q_9 = x_5,$
 $q_{10} = y_5, q_{11} = x_6, q_{12} = y_6.$

Розглянемо власні коливання системи з 12 ступенями вільності без урахування в'язкого тертя. Для отримання відповідних диференціальних рівнянь руху скористаємося рівняннями Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

де q_i – узагальнені координати, T – кінетична енергія системи, Π – потенціальна енергія.

В положенні рівноваги цю систему можна описати таким чином: коло вибраного радіусу R ділимо на 6 рівносторонніх трикутників, на колі розміщуємо 6 мас (при цьому маси $2m_1$ та $2m_4$ знаходяться на вісі Ox). В положенні рівноваги початкова довжина всіх пружин системи буде R , а початкова швидкість руху мас — V .

Запишемо кінетичну та потенціальну енергії досліджуваної моделі у вигляді (вважаємо, що

$$c_0 = c_6, y_0 = y_6, x_0 = x_6, y_7 = y_1, x_7 = x_1)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 2m_i \dot{y}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 2m_i \dot{x}_i^2, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} (\sum_{i=1}^6 2c_i (\sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2} - R)^2 + \\ + \sum_{i=1}^6 2c_{0i} (\sqrt{y_i^2 + x_i^2} - R)^2), \end{aligned} \quad (3)$$

де $2m_i$ — маси, (x_i, y_i) — відповідні координати мас $2m_i$, c_i , c_{0i} , R — початкова довжина пружин системи, V — початкова швидкість руху мас, $i = \overline{1, 6}$.

З рівнянь Лагранжа II роду, після відповідних обчислень та перетворень матимемо рівняння руху

$$\begin{aligned}
 & m_i \ddot{x}_i - c_{i-1} R \frac{x_i - x_{i-1}}{\sqrt{(y_i - y_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2}} + \\
 & + c_i R \frac{x_{i+1} - x_i}{\sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}} - c_{0i} R \frac{x_i}{\sqrt{y_i^2 + x_i^2}} + \\
 & + c_{i-1}(x_i - x_{i-1}) - c_i(x_{i+1} - x_i) + c_{0i}x_i = 0, \quad i = \overline{1, 6}, \\
 & m_i \ddot{y}_i - c_{i-1} R \frac{y_i - y_{i-1}}{\sqrt{(y_i - y_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2}} + \\
 & + c_i R \frac{y_{i+1} - y_i}{\sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}} - c_{0i} R \frac{y_i}{\sqrt{y_i^2 + x_i^2}} + \\
 & + c_{i-1}(y_i - y_{i-1}) - c_i(y_{i+1} - y_i) + c_{0i}y_i = 0, \quad i = \overline{1, 6}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Введемо позначення

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_6 \end{bmatrix},$$

і запишемо рівняння (1) у матричній формі

$$A\ddot{q} + Cq + N(q) = 0, \quad (5)$$

де $A = \text{diag}\{A, A\}$, $A = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_6\}$.

$C = \text{diag}\{C, C\}$, де

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{23} & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{34} & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & 0 & 0 & 0 & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix},$$

$$C_{ij} = \begin{cases} c_{i-1} + c_i + c_{0i}, & i = j, & j = \overline{1, 6}, \\ -c_{i-1}, & 1 \leq i < j \leq 6, & j = i + 1, \\ -c_{i-1}, & i = 1, & j = 6. \end{cases} \quad \text{Нелінійну}$$

частину (5) запишемо у такому вигляді:

$$N(q) = \begin{bmatrix} N^x \\ N^y \end{bmatrix},$$

де

$$N^x = -c_{i-1}R \frac{x_i - x_{i-1}}{\sqrt{(y_i - y_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2}} + c_iR \frac{x_{i+1} - x_i}{\sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}} - \\ - c_{0i}R \frac{x_i}{\sqrt{y_i^2 + x_i^2}},$$

$$N^y = -c_{i-1}R \frac{y_i - y_{i-1}}{\sqrt{(y_i - y_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2}} + c_iR \frac{y_{i+1} - y_i}{\sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}} - \\ - c_{0i}R \frac{y_i}{\sqrt{y_i^2 + x_i^2}}, \quad i = \overline{1, 6}.$$

(2)

Розглянемо випадок, коли стінка судини є однорідною та ізотропною і серцево-судинна система людини функціонує в нормі, зокрема коливання судинної стінки є ідеальними, тобто такими, які відповідають рухові мас у напрямку відповідних променів (рис. 1). У цьому випадку

$m_i = m, c_i = c, c_{0i} = c_0, i = \overline{1,6}$, і матимемо такі геометричні в'язі

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, & y_2 &= -\sqrt{3}x_2, & y_3 &= \sqrt{3}x_3, \\ y_4 &= 0, & y_5 &= -\sqrt{3}x_5, & y_6 &= \sqrt{3}x_6, \\ \dot{y}_1 &= 0, & \dot{y}_2 &= -\sqrt{3}\dot{x}_2, & \dot{y}_3 &= \sqrt{3}\dot{x}_3, \\ \dot{y}_4 &= 0, & \dot{y}_5 &= -\sqrt{3}\dot{x}_5, & \dot{y}_6 &= \sqrt{3}\dot{x}_6. \end{aligned} \tag{6}$$

Оскільки в початковий момент часу всі маси знаходяться на колі радіуса R_0 , швидкості всіх мас в початковий момент часу V_0 і закони коливань всіх мас будуть однаковими по

відношенню до центра (рис. 1), то

$$\begin{aligned}x_1(t) &= -x(t), \quad x_2(t) = x_6(t) = -\frac{1}{2}x(t), \\x_3(t) &= x_5(t) = \frac{1}{2}x(t), \quad x_4(t) = x(t), \\ \dot{x}_1(t) &= -\dot{x}(t), \quad \dot{x}_2(t) = \dot{x}_6(t) = -\frac{1}{2}\dot{x}(t), \\ \dot{x}_3(t) &= \dot{x}_5(t) = \frac{1}{2}\dot{x}(t), \quad \dot{x}_4(t) = \dot{x}(t).\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}x_1(0) &= -R_0, \quad x_2(0) = x_6(0) = -\frac{1}{2}R_0, \\x_3(0) &= x_5(0) = \frac{1}{2}R_0, \quad x_4(0) = R_0, \\ \dot{x}_1(0) &= -V_0, \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_6(0) = -\frac{1}{2}V_0, \\ \dot{x}_3(0) &= \dot{x}_5(0) = \frac{1}{2}V_0, \quad \dot{x}_4(0) = V_0.\end{aligned}\tag{8}$$

Підставивши (6) та (7) в систему рівнянь (4), отримаємо дванадцять однакових лінійних диференціальних рівнянь другого порядку, а саме:

$$m\ddot{x} + (c + c_0)x - (c + c_0)R = 0.\tag{9}$$

Розв'язок такого рівняння матиме вигляд:

$$\begin{aligned} x(t) &= R + C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t = \\ &= R + D \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$\omega = \sqrt{\frac{c + c_0}{m}},$$

$$C_1 = \frac{V}{\omega},$$

$$C_2 = R_0 - R,$$

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{C_2}{C_1}$, $D = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, тому що з початкових умов при $t = t_0$ всі маси знаходяться на колі радіуса R_0 , і початкова швидкість при $t = t_0$ всіх мас буде V_0 .

Одержимо систему рівнянь збуреного руху для описаної моделі, враховуючи що незбурений рух $x^*(t)$ має вигляд

$$x^*(t) = R + D \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\begin{aligned}x_1^*(t) &= -x^*(t), & x_2^*(t) &= x_6^*(t) = -\frac{1}{2}x^*(t), \\x_3^*(t) &= x_5^*(t) = \frac{1}{2}x^*(t), & x_4^*(t) &= x^*(t),\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1^*(t) &= -\dot{x}^*(t), & \dot{x}_2^*(t) &= \dot{x}_6^*(t) = -\frac{1}{2}\dot{x}^*(t), \\ \dot{x}_3^*(t) &= \dot{x}_5^*(t) = \frac{1}{2}\dot{x}^*(t), & \dot{x}_4^*(t) &= \dot{x}^*(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_1^*(t) &= y_4^*(t) = 0, & y_2^*(t) &= y_3^*(t) = y_5^*(t) = y_6^*(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^*(t), \\ \dot{y}_1^*(t) &= \dot{y}_4^*(t) = 0, & \dot{y}_2^*(t) &= \dot{y}_3^*(t) = \dot{y}_5^*(t) = \dot{y}_6^*(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{x}^*(t).\end{aligned}$$

Тоді узагальнені координати у збуреному русі запишуться таким чином

$$\begin{aligned}x_i(t) &= x_i^*(t) + \xi_i(t), \\ y_i(t) &= y_i^*(t) + \eta_i(t), \quad i = \overline{1,6},\end{aligned}\quad (12)$$

де x_i^* та y_i^* — відповідні координати в незбуреному русі (11), а ξ_i та η_i — збурення.

Підставивши (12) в систему (4), отримаємо такі рівняння збуреного руху у вигляді лінійної нестационарної системи:

$$\begin{aligned} & m_i \ddot{\xi}_i - c_{i-1}(\xi_i - \xi_{i-1})(Rf_{1i}(t) - 1) + \\ & + c_i(\xi_{i+1} - \xi_i)(Rf_{3i}(t) - 1) - c_{0i}\xi_i(Rf_{5i}(t) - 1) + c_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})Rf_{2i}(t) - \\ & - c_i(\eta_{i+1} - \eta_i)Rf_{4i}(t) + c_{0i}\eta_i Rf_{6i}(t) = 0, \quad i = \overline{1, 6}, \quad (13) \\ & m_i \ddot{\eta}_i - c_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})(Rh_{1i}(t) - 1) + \\ & + c_i(\eta_{i+1} - \eta_i)(Rh_{3i}(t) - 1) - c_{0i}\eta_i(Rh_{5i}(t) - 1) + c_{i-1}(\xi_i - \xi_{i-1})Rf_{2i}(t) - \\ & - c_i(\xi_{i+1} - \xi_i)Rf_{4i}(t) + c_{0i}\xi_i Rf_{6i}(t) = 0, \quad i = \overline{1, 6}, \end{aligned}$$

де

$$f_{1i}(t) = \frac{(y_i^* - y_{i-1}^*)^2}{\sqrt{((y_i^* - y_{i-1}^*)^2 + (x_i^* - x_{i-1}^*)^2)^3}},$$

$$f_{2i}(t) = \frac{(x_i^* - x_{i-1}^*)(y_i^* - y_{i-1}^*)}{\sqrt{((y_i^* - y_{i-1}^*)^2 + (x_i^* - x_{i-1}^*)^2)^3}},$$

$$f_{3i}(t) = \frac{(y_{i+1}^* - y_i^*)^2}{\sqrt{((y_{i+1}^* - y_i^*)^2 + (x_{i+1}^* - x_i^*)^2)^3}},$$

$$f_{4i}(t) = \frac{(x_{i+1}^* - x_i^*)(y_{i+1}^* - y_i^*)}{\sqrt{((y_{i+1}^* - y_i^*)^2 + (x_{i+1}^* - x_i^*)^2)^3}},$$

$$f_{5i}(t) = \frac{y_i^{*2}}{\sqrt{(y_i^{*2} + x_i^{*2})^3}}, f_{6i}(t) = \frac{x_i^* y_i^*}{\sqrt{(y_i^{*2} + x_i^{*2})^3}},$$

$$h_{1i}(t) = \frac{(x_i^* - x_{i-1}^*)^2}{\sqrt{((y_i^* - y_{i-1}^*)^2 + (x_i^* - x_{i-1}^*)^2)^3}},$$

$$h_{3i}(t) = \frac{(x_{i+1}^* - x_i^*)^2}{\sqrt{((y_{i+1}^* - y_i^*)^2 + (x_{i+1}^* - x_i^*)^2)^3}},$$

$$h_{5i}(t) = \frac{x_i^{*2}}{\sqrt{(y_i^{*2} + x_i^{*2})^3}}, \quad i = \overline{1, 6}$$

Запишемо (13) у матричному вигляді

$$A\ddot{g} + (C + C_1(t))g = 0, \quad (14)$$

$$\text{де } g = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_6 \end{bmatrix}, \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_6 \end{bmatrix}.$$

Тут матриці A , і C описані в (5).

$$C_1(t) = \begin{bmatrix} C^\xi & C^* \\ C^* & C^\eta \end{bmatrix},$$

де

$$C^{\xi} = \begin{bmatrix} C_{11}^{\xi} & C_{12}^{\xi} & 0 & 0 & 0 & C_{16}^{\xi} \\ C_{12}^{\xi} & C_{22}^{\xi} & C_{23}^{\xi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{23}^{\xi} & C_{33}^{\xi} & C_{34}^{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{34}^{\xi} & C_{44}^{\xi} & C_{45}^{\xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45}^{\xi} & C_{55}^{\xi} & C_{56}^{\xi} \\ C_{16}^{\xi} & 0 & 0 & 0 & C_{56}^{\xi} & C_{66}^{\xi} \end{bmatrix},$$

(C^{η} та C^* записуються аналогічно)

$$C_{ij}^{\xi} = \begin{cases} -c_{i-1}Rf_{1i}(t) - c_iRf_{3i}(t) - \\ \quad - c_{0i}Rf_{5i}(t), & i = j, \quad j = \overline{1, 6}, \\ c_iRf_{3i}(t), & 1 \leq i < j \leq 6, \quad j = i + 1, \\ c_iRf_{3i}(t), & i = 1, \quad j = 6. \end{cases}$$

$$C_{ij}^{\eta} = \begin{cases} -c_{i-1}Rh_{1i}(t) - c_iRh_{3i}(t) - \\ \quad -c_{0i}Rh_{5i}(t), & i = j, \quad j = \overline{1, 6}, \\ c_iRh_{3i}(t), & 1 \leq i < j \leq 6, \quad j = i + 1, \\ c_iRh_{3i}(t), & i = 1, \quad j = 6. \end{cases}$$

$$C_{ij}^{*} = \begin{cases} c_{i-1}Rf_{2i}(t) + c_iRf_{4i}(t) + \\ \quad + c_{0i}Rf_{6i}(t), & i = j, \quad j = \overline{1, 6}, \\ -c_iRf_{4i}(t), & 1 \leq i < j \leq 6, \quad j = i + 1, \\ -c_iRf_{4i}(t), & i = 1, \quad j = 6. \end{cases}$$

Використовуючи (11), запишемо всі функції $f_{ji}(t)$ та $h_{ji}(t), j, i = \overline{1, 6}$, вважаючи, що $X(t) = |x^{*}(t)|^{-1}$.

$$f_{1i}(t) = \frac{3}{4}X(t), \quad i = 1, 2, 4, 5, \quad f_{1i}(t) = 0, \quad i = 3, 6$$

$$f_{2i}(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}X(t), \quad i = 1, 2, \quad f_{2i}(t) = 0, \quad i = 3, 6, \quad f_{2i}(t) = -\frac{\sqrt{3}}{4}X(t),$$

$$i = 4, 5$$

$$f_{3i}(t) = \frac{3}{4}X(t), \quad i = 1, 3, 4, 6, \quad f_{3i}(t) = 0, \quad i = 2, 5$$

$$f_{4i}(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}X(t), \quad i = 1, 6, \quad f_{4i}(t) = 0, \quad i = 2, 5, \quad f_{4i}(t) = -\frac{\sqrt{3}}{4}X(t),$$

$$i = 3, 4$$

$$f_{5i}(t) = \frac{3}{4}X(t), \quad i = 2, 3, 5, 6, \quad f_{5i}(t) = 0, \quad i = 1, 4 \quad (15)$$

$$f_{6i}(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}X(t), \quad i = 3, 5, \quad f_{6i}(t) = 0, \quad i = 1, 4, \quad f_{6i}(t) = -\frac{\sqrt{3}}{4}X(t),$$

$$i = 2, 6$$

$$h_{1i}(t) = \frac{1}{4}X(t), \quad i = 1, 2, 4, 5, \quad h_{1i}(t) = X(t), \quad i = 3, 6$$

$$h_{3i}(t) = \frac{1}{4}X(t), \quad i = 1, 3, 4, 6, \quad h_{3i}(t) = X(t), \quad i = 2, 5$$

$$h_{5i}(t) = \frac{1}{4}X(t), \quad i = 2, 3, 5, 6, \quad h_{5i}(t) = X(t), \quad i = 1, 4$$

де $X(t) = |R + D \sin(\omega t + \varphi)|^{-1}$.

Перевіримо правильність описаної моделі, враховуючи трьохкомпонентну модель м'яза.

Для всіх спрощених моделей Хілла системи на рисунку 1, запишемо відповідні напруги σ_{0i} та $\sigma_i, i = \overline{1, 6}$ (вважаємо, що стінка судини є однорідною та ізотропною), а саме:

$$\sigma_{0i} = c_0 x_i(t) + k_0 \dot{x}_i(t), \quad i = 1, 4, \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{0i}^x = c_0 \frac{x_i^2(t)}{\sqrt{y_i^2(t) + x_i^2(t)}} + k_0 \frac{\dot{x}_i^2(t)}{\sqrt{\dot{y}_i^2(t) + \dot{x}_i^2(t)}}, \\ \\ \sigma_{0i}^y = c_0 \frac{y_i^2(t)}{\sqrt{y_i^2(t) + x_i^2(t)}} + k_0 \frac{\dot{y}_i^2(t)}{\sqrt{\dot{y}_i^2(t) + \dot{x}_i^2(t)}}, \end{array} \right. \quad i = 2, 3, 5, 6 \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_i^x = c \frac{(x_{i+1}(t) - x_i(t))^2}{\sqrt{(y_{i+1}(t) - y_i(t))^2 + (x_{i+1}(t) - x_i(t))^2}} + \\ + k \frac{(\dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t))^2}{\sqrt{(\dot{y}_{i+1}(t) - \dot{y}_i(t))^2 + (\dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t))^2}}, \\ i = \overline{1, 6}, \\ \sigma_i^y = c \frac{(y_{i+1}(t) - y_i(t))^2}{\sqrt{(y_{i+1}(t) - y_i(t))^2 + (x_{i+1}(t) - x_i(t))^2}} + \\ + k \frac{(\dot{y}_{i+1}(t) - \dot{y}_i(t))^2}{\sqrt{(\dot{y}_{i+1}(t) - \dot{y}_i(t))^2 + (\dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t))^2}}, \end{array} \right. \quad (18)$$

де $\sigma_{0i}^x, \sigma_{0i}^y, \sigma_i^x$, та $\sigma_i^y, i = \overline{1, 6}$, — проекції напруг σ_{0i} та σ_i , $i = \overline{1, 6}$, на осі Ox та Oy відповідно.

Підставимо (6) та (7) у вирази (16),(17) та (18) (тут вважаємо, що $c_0 = c$, $\kappa_0 = \kappa$), тоді отримаємо однакові диференціальні рівняння, а саме:

$$\sigma = cx(t) + k\dot{x}(t). \quad (19)$$

Знайдемо залежність $x(t)$, розв'язуючи диференційне рівняння (19), причому вважаємо, що в початковий момент часу $t = 0$ деформація $x = 0$.

В результаті отримаємо:

$$x(t) = \frac{\sigma}{c}(1 - \exp^{-\frac{t}{\tau}}), \quad (20)$$

де $\tau = \kappa/c$ — час запізнення.

Відомо , що швидкість наростання деформації максимальна при $t = 0$:

$$\max \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\sigma}{\kappa}.$$

Звідси випливає, що при збільшенні величини компоненти в'язкості κ , зменшується кут нахилу кривої $x(t)$.

Деформація $x(t)$ зростає зі зменшенням швидкості і асимптотично наближається до стаціонарного значення x_{st} :

$$x_{st} = \frac{\sigma}{c}.$$

Таким чином, залежність (20) досить вдало описує процес наростання деформації $x(t)$, який отримано з експерименту. Слід відмітити, що в самій динамічній моделі (рис.1) пружні елементи c_{0i} та $c_i, i = \overline{1,6}$, визначають механічні властивості зовнішніх мембран клітин і внутрішніх структур стінки судини (м'яза). Елементи в'язкості κ_{0i} та $\kappa_i, i = \overline{1,6}$ обумовлені ковзанням ниток актину відносно міозину, які входять в структуру м'яза. Ці величини різко зростають при пасивному режимі м'яза.

Тому можна зробити висновок, що за допомогою побудованої динамічної моделі можна дослідити коливання поперечного перерізу судинної стінки (м'яза) та показати, що в саму структуру м'язової тканини входять компоненти пружності та в'язкості. Подібні моделі дають можливість більш точно дослідити нелінійні коливання судинної стінки, що, в свою чергу, допоможе лікарю-діагносту при вивченні ряду патологічних процесів в судинній системі.

Моделювання за допомогою механічних аналогій

Розглядатимемо лінійну стаціонарну систему диференціальних рівнянь порядку $2n$ у формі Коші вигляду

$$\dot{x} = Ax, x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

$x \in \mathbb{R}_{2n}$, $A \in \mathbb{R}_{2n \times 2n}$, t_0 – початковий момент часу.

Запишемо цю систему в блочній формі

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

де $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_n$, $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} \in \mathbb{R}_{n \times n}$.

Виникає задача про побудову для динамічної системи у формі Коші (2) певної системи другого порядку, яка описує рух деякої механічної системи. Зокрема, у такій задачі бажано отримати відповіді на питання про однозначність її розв'язку та про те, матрицям яких сил відповідають матриці A_{11} , A_{12} , A_{21} та A_{22} чи їх певні комбінації.

Якщо розв'язок такої задачі не буде однозначним, то системі (2) відповідатиме множина рівнянь другого порядку, наприклад, вигляду

$$\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0, \quad (3)$$

де $q \in \mathbb{R}_n$, а матриці $B, C \in \mathbb{R}_{n \times n}$ мають певні вільні параметри.

За відомою класифікацією квадратну матрицю B однозначно можна подати у вигляді симетричної $(B + B^T)/2$ та косиметричної $(B - B^T)/2$ матриць, які, відповідно, є матрицями дисипативних та гіроскопічних сил. Матриця C теж

є сумою симетричної $(C + C^T)/2$ та кососиметричної $(C - C^T)/2$ матриць, які, відповідно, є матрицями консервативних та неконсервативних сил.

Систему (3) легко записати у вигляді

$$\dot{y} = Fy, \quad (4)$$

де

$$F = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C & -B \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Цього можна досягнути за допомогою лінійного перетворення вектора стану

$$y = Tx, T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}, \det T \neq 0. \quad (6)$$

Тоді

$$\begin{bmatrix} C & B \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \end{bmatrix} A^2 T^{-1}, \quad (7)$$

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{11}A_{11} + T_{12}A_{21} & T_{11}A_{12} + T_{12}A_{22} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Отже, за допомогою матриці A коефіцієнтів початкової системи у формі Коші та підматриць T_{11} , T_{12} матриці T перетворення, знайдено явні вирази для матриць C , B , які характеризують відповідні уявні сили у механічній аналогії (3).

Список літератури I



Новицький В.В. *Декомпозиція та керування в лінійних системах*. – Інститут математики НАН України, Київ, 1995. – 150 с.



Новицький В.В., Ясінський В.В. *Прикладні задачі декомпозиції та керування в динамічних системах*: Навч. посібник. – К.: НТУУ КПІ, 1995. – 124 с.



Новицький В.В., Петришина Л.В. *Декомпозиція та механічні аналогії. I. Лінійні стаціонарні системи*. // Вопросы аналитической механики и ее применений: Праці Інституту математики НАН України. – К.: Інститут математики НАН України, 1999. – 26. – С. 251–256.



Новицький В.В., Петришина Л.В. *Декомпозиція та механічні аналогії. I. Лінійні нестаціонарні системи*. Праці Інституту математики НАН України. Т.44: Вопросы механики и ее приложений – К.: Інститут математики НАН України, 2002. – С. 215–224.

Список літератури II



Новицький В.В. *Рівняння Ляпунова для майже консервативних асимптотично стійких систем.* // Вопросы механики и ее приложений: Праці Інституту математики НАН України. – К.: Інститут математики НАН України, 2002. – 44. – С. 215–224.



Новицький В.В. *Про асимптотичний розклад розв'язку рівняння Ляпунова для майже консервативних асимптотично стійких систем.* // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Праці Інституту математики НАН України. – К.: Інститут математики НАН України, 2003.— 47. — С. 202–206.



Новицький В.В. *Рівняння Ляпунова для майже консервативних систем.* – Київ, 2004. – 33 с. – (Препр./ НАН України. Ін-т математики; 2004.7).

Список літератури III



Лущик У.Б., Новицкий В.В. *Некоторые вопросы практического применения математических моделей гемодинамики* / Материалы VI Международного симпозиума "Ишемия мозга" по транскраниальной доплерографии и электрофизиологическому мониторингованию. Санкт-Петербург, 1997. (0,05)



Novyc'kyi V.V., Lushchik U.B. *Ultrasound microscope - the new field in ultrasound diagnostics. Ультразвуковий мікроскоп - новий напрямок в ультразвуковій діагностиці* / Selected papers from the International Conference on optoelectronic Information Technologies, Proceedings of SPIE, vol. 4425, 2001. (0,5)



Лущик У.Б., Новицкий В.В., Алексеева Т.С., Браницька Н.С., Францевич К.А. *Деякі сучасні математичні моделі гемодинаміки* / В кн.: Праці Інституту математики НАН України. Том 44: Вопросы механики и ее приложений. - Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. (0,44)

Список літератури IV



Лущик У.Б., Новицкий В.В., Алексеева Т.С., Браницька Н.С., Францевич К.А. *Моделі гемодинаміки в різних ангиоархитектонічних системах* / Там же, 2002. (0,44)



Лущик У.Б., Новицкий В.В., Браницкая Н.С., Алексеева Т.С., Францевич К.А. *Функциональная ангиоархитектоника церебральных артерий и математические модели гемодинамических перестроек кровоснабжения* / В кн.: Современное состояние методов неинвазивной диагностики в медицине. X Международная научная конференция "АНГИОДОП - 2003". - Сочи, 2003. (0,05)



Лущик У.Б., Новицкий В.В., Алексеева Т.С., Браницька Н.С., Францевич К.А., Цвигун С.Г. *Прикладные аспекты применения типов ангиоархитектоники в оценке сосудистой патологии мозга у больных дискуркуляторной энцефалопатией* / Лікарська справа № 5-6. - 2004. - С.44-49.

Список літератури V



Лущик У.Б., Новицкий В.В., Алексеева Т.С. *Гемодинамически контролируемые аспекты эффективного применения вазоактивных средств в ангионеврологии* / Ліки України. - № 6(83). - 2004. - С.68.



Лущик У.Б., Новицький В.В. *Деякі аспекти прикладної гемодинаміки в епоху прижиттєвих візуалізуючих технологій.* - К., 2005. - 136 с.



Лущик У.Б., Протасов А.Г., Новицький В.В. *Сучасні технології дослідження серцево-судинної системи: чому не зменшуються показники захворюваності та смертності від серцево-судинних захворювань // Винахідник і раціоналізатор.* - 2009. - 10 (95). - С. 14-19.



Лущик У.Б., Новицький В.В. *Сучасні медичні технології в аналітичній ангіології. Навчальний посібник.* - К., 2011.- 135с.