Семінар "Математика і медицина"

Інститут математики НАН України, 2011

В.І. Герасименко (Інститут математики НАН України, Київ)

ГІДРОДИНАМІЧНА ГРАНИЦЯ НЕЛІНІЙНИХ КІНЕТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Доповідь присвячена огляду строгих результатів та сучасного стану проблеми обґрунтування і класифікації рівнянь гідродинаміки на основі кінетичних рівнянь. Буде також розглянуто питання існування гемодинамічної границі кінетичних рівнянь та математичні проблеми еволюційних рівнянь гемокінетики.

1. Класифікація гідродинамічних рівнянь

1.1. Рівняння Ейлера (1755р.)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\varrho = -\frac{\partial}{\partial \xi^i}\varrho u^i,\\
&\frac{\partial}{\partial t}\varrho u^j = -\frac{\partial}{\partial \xi^i}(\varrho u^j u^i + p\delta_{ji}),\\
&\frac{\partial}{\partial t}\varrho e = -\frac{\partial}{\partial \xi^i}(\varrho e u^i + p u^i),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p = \frac{2}{3}\varrho e = \varrho \beta^{-1},\\
&e(t,\xi) = \frac{3}{2}\beta^{-1}(t,\xi).
\end{aligned}
$$

1.2. Рівняння Нав'є-Стокса (1822р.)

Рівняння Нав'є-Стокса-Фур'є

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho = -\frac{\partial}{\partial \xi^i}\varrho u^i,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho u^j = -\frac{\partial}{\partial \xi^i}(\varrho u^j u^i + p_{ji}),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho e = -\frac{\partial}{\partial \xi^i}(\varrho e u^i + p_{ji}u^i) + \frac{\partial}{\partial \xi^i}q_i,$$

$$p = \frac{2}{3}\varrho e\delta_{ji} - \lambda_1(\frac{\partial u^j}{\partial \xi^i} + \frac{\partial u^i}{\partial \xi^j}) - \frac{2}{3}\lambda_2\frac{\partial u^j}{\partial \xi^j},$$
$$q_i = \frac{3}{2}\kappa\frac{\partial}{\partial \xi^i}\beta^{-1} = \kappa\frac{\partial e}{\partial \xi^i}.$$

Рівняння Барнетта (1935р.)

D. Burnett, **Proc. London Math. Soc. 40 (1935), 382.**

1.3. Зауваження: Millennium Prize Problem

Довести або спростувати існування глобального гладкого розв'язку задачі Коші рівняннь Нав'є-Стокса

www.claymath.org/millennium/Navier − Stokes − Equations/

Точні розв'язки:

1. Стаціонарні розв'язки в простих областях (течії Пуазейля, Тейлора — Куетта, ...).
2. Солітонні розв'язки (рівняння Кортевега-де Фріза).
3. Blow-up розв'язки (Ж. Лере, 1933р. - турбулентність).
4. Акустичні коливання.

2. Історична довідка

In Hilbert's own words: "***Boltzmann's work on the principles of mechanics suggests the problem of developing mathematically the limiting processes which lead from the atomistic view to the laws of motion of continua***".
D. Hilbert. In Int. Congress of Math., Paris, 1900; (transl. and repr. in Bull. Amer. Math. Soc. 37 (2000), pp. 407-436).

D. Hilbert. Begründung der kinetischen Gastheorie, Math. Ann. 72 (1912), pp. 562–577.

Н.Н. Боголюбов. Проблемы динамической теории в статистической физике, Гостехиздат, 1946; 119 с. (***Підписана до друку 12.07.1946, звіт за 1945р. IM, зареєстровано 7.02.1046***).

T. Nishida. Fluid dynamical limit of the nonlinear Boltzmann equation to the level of the compressible Euler equation, Comm. Math. Phys. 61 (1978), 119–148.

R.E. Caflisch. The fluid dynamic limit of the nonlinear Boltzmann equation, Comm. on Pure and Appl. Math. 33 (1980), 651–666.

M. Lachowicz. On the initial layer and the existence theorem for the nonlinear Boltzmann equation, Math. Methods Appl. Sci. 9 (1987), no. 3, 342–366.

A. DeMasi, R. Esposito, J. Lebowitz. Incompressible Navier-Stokes and Euler Limits of the Boltzmann Equation; Commun. Pure Appl. Math. 42 (1990), 1189–1214.

C. Bardos, F. Golse, C.D. Levermore. Fluid dynamic limits of kinetic equations. I. Formal derivations, J. Stat. Phys. 63 (1991), 323–344.

C. Bardos, F. Golse, C.D. Levermore. Fluid Dynamic Limits of Kinetic Equations II: Convergence Proofs for the Boltzmann Equation, Comm. Pure Appl. Math. 46 (1993), 667–753.

C. Bardos, S. Ukai. The classical incompressible Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation, Math. Models and Methods in the Appl. Sci. 1 (1991), 235–257.

S. Olla, S.R.S. Varadhan, H.-T. Yau. Hydrodynamical limit for a Hamilton system with weak noise, Comm. Math. Phys. 155 (1993), 523–560.

P.-L. Lions, N. Masmoudi. From Boltzmann Equations to the Navier-Stokes and Euler Equations, Archive Rat. Mech. Anal. 158 (2001), 173–211.

F. Golse, L. Saint-Raymond. The Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for bounded collision kernels, Invent. Math. 155 (2004), no. 1, 81–161.

C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvirenti. The Mathematical Theory of Dilute Gases, Springer-Verlag, 1994.

C. Villani. A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. In: Handbook of mathematical fluid dynamics, North-Holland, 2002.

B. Perthame. Kinetic formulation of conservation laws, Oxford Univ. Press, 2002.

Y. Sone. Kinetic theory and fluid dynamics, Birkhäuser, 2002.

V. Capasso, M. Lachowicz (Eds.), Multiscale Problems in the Life Sciences. From Microscopic to Macroscopic, in: Lecture Notes in Mathematics, Springer, 2008.

L. Saint-Raymond. Hydrodynamic Limits of the Boltzmann Equation, Lecture Notes in Mathematics, 1971, Springer-Verlag, 2009.

3. Еволюційні рівняння багаточастинкових систем

3.1. Ієрархія рівнянь ББГКІ (1945р.)

$$x_i \equiv (q_i, p_i) \in \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu, \quad \nu \geq 1,$$
$$F(t) = \big(1, F_1(t, x_1), \ldots, F_s(t, x_1, \ldots, x_s), \ldots\big).$$

$$\frac{\partial}{\partial t} F_s(t, x_1, \ldots, x_s) = \big\{H_s, F_s(t, x_1, \ldots, x_s)\big\} +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu} dx_{s+1} \sum_{i=1}^{s} \big\langle \frac{\partial}{\partial q_i} \Phi(q_i - q_{s+1}), \frac{\partial}{\partial p_i} \big\rangle F_{s+1}(t, x_1, \ldots, x_{s+1}),$$
$$F_s(t, x_1, \ldots, x_s)\big|_{t=0} = F_s(0, x_1, ..., x_s), \quad s \geq 1.$$

Приклад: ієрархія ББГКІ системи пружних куль

$$\frac{d}{dt}F(t) = -\mathcal{L}F(t) + \mathcal{B}F(t),$$

$t > 0:$

$$(\mathcal{L}F(t))_s(x_1,\ldots,x_s) \doteq \sum_{i=1}^{s} \langle p_i, \frac{\partial}{\partial q_i}\rangle_{|\partial W_s} F_s(t,x_1,\ldots,x_s),$$

$$(\mathcal{B}F(t))_s(x_1,\ldots,x_s) \doteq \sigma^2 \sum_{i=1}^{s} \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_+} dp_{s+1}d\eta\langle\eta,(p_i - p_{s+1})\rangle \times$$

$$\Big(F_{s+1}(t,x_1,\ldots,q_i,p_i^*,\ldots,x_s,q_i-\sigma\eta,p^*_{s+1}) - F_{s+1}(t,x_1,\ldots,x_s,q_i+\sigma\eta,p_{s+1})\Big),$$

$$p_i^* = p_i - \eta\ \langle\eta,(p_i - p_{s+1})\rangle\,,$$
$$p^*_{s+1} = p_{s+1} + \eta\ \langle\eta,(p_i - p_{s+1})\rangle$$

$$\mathbb{S}^2_+ \doteq \{\eta\in\mathbb{R}^3 \big|\ |\eta| = 1, \langle\eta,(p_i - p_{s+1})\rangle > 0\}.$$

3.2. Кінетичне рівняння Больцмана

Кінетична границя Больцмана-Греда (scaling limit)(1985р.)

Ієрархія рівнянь Больцмана

$$\frac{d}{dt}f(t) = -\mathcal{L}^0 f(t) + \mathcal{B}^0 f(t),$$
$$f(0) = \big(1, f_1(0,x_1), \dots, \prod\nolimits_{i=1}^{s} f_1(0,x_i), \dots\big).$$

$$(\mathcal{L}^0 f)_s(t) \doteq \sum_{i=1}^{s} \langle p_i, \frac{\partial}{\partial q_i}\rangle f_s(t, x_1, \dots, x_s),$$

$$(\mathcal{B}^0 f(t))_s(x_1, \dots, x_s) \doteq \sum_{i=1}^{s} \int\limits_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2_+} dp_{s+1} d\eta \langle \eta, (p_i - p_{s+1})\rangle \times$$
$$\big(f_{s+1}(t, x_1, \dots, q_i, p_i^*, \dots, x_s, q_i, p_{s+1}^*) - f_{s+1}(t, x_1, \dots, x_s, q_i, p_{s+1})\big)$$

"поширення хаосу"

$$f(t) = (1, f_1(t, x_1), \dots, \prod_{i=1}^{s} f_1(t, x_i), \dots).$$

Рівняння Больцмана (1872р.)

$$\frac{d}{dt} f_1(t) = -\langle p_1, \frac{\partial}{\partial q_1} \rangle f_1(t, x_1) +$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2_+} dp_2 d\eta \langle \eta, (p_1 - p_2) \rangle \big(f_1(t, q_1, p_1^*) f_1(t, q_1, p_2^*) - f_1(t, x_1) f_1(t, q_1, p_2) \big).$$

3.3. Рівняння збереження та гідродинамічна границя

Приклад: $\Phi = 0.$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle B^{(1)}\rangle(t,\xi) = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial \xi^i}\langle J\rangle^i(t,\xi),$$

$$B^{(1)}(\xi) = \big(0, b_1(q_1,p_1;\xi), 0, \ldots, \big), \qquad J^i(\xi) = \big(0, p_1^i b_1(q_1,p_1;\xi), 0, \ldots, \big),$$

$$b_1(q_1,p_1;\xi) = \left(\begin{array}{c} \delta(q_1 - \varepsilon^{-1}\xi) \\ p_1\delta(q_1 - \varepsilon^{-1}\xi) \\ \frac{1}{2}(p_1 - \langle u\rangle)^2\delta(q_1 - \varepsilon^{-1}\xi) \end{array}\right).$$

$$\langle B\rangle(t) = \langle B(0)|F(t)\rangle = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\int dx_1\ldots dx_s\, B_s(0,x_1,\ldots,x_s)\, F_s(t,x_1,\ldots,x_s)$$

$$\langle B^{(1)}\rangle(t,\xi) \doteq \begin{pmatrix} \langle\varrho\rangle \\ \langle\varrho\rangle\langle u\rangle^i \\ (\frac{1}{2}\langle\varrho\rangle\langle u\rangle^2 + \langle\varrho\rangle\langle e\rangle) \end{pmatrix},$$

$$\langle J\rangle^i(t,\xi) = \langle J_c\rangle^i(t,\xi) + \langle J_s\rangle^i(t,\xi),$$

$$\langle J_c\rangle^i(t,\xi) \doteq \begin{pmatrix} \langle\varrho\rangle\langle u\rangle^i \\ \langle\varrho\rangle\langle u\rangle\langle u\rangle^i \\ (\frac{1}{2}\langle\varrho\rangle\langle u\rangle^2 + \langle\varrho\rangle\langle e\rangle)\langle u\rangle^i \end{pmatrix}, \qquad \langle J_s\rangle^i(t,\xi) \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ p_{ij} \\ p_{ij}\langle u\rangle^j + q_i \end{pmatrix}.$$

$$p_{ij}(t,\xi) \doteq \int dp_1(p_1^i - \langle u\rangle^i)(p_1^j - \langle u\rangle^j)F_1(t,q_1,p_1),$$

$$q_i(t,\xi) \doteq \frac{1}{2}\int dp_1(p_1^i - \langle u\rangle^i)(p_1 - \langle u\rangle)^2 F_1(t,q_1,p_1),$$

локальнорівноважний стан

$$F^{l.eq} \doteq \Big(1, e^{-\beta(\epsilon q_1)\left(\frac{1}{2}(p_1-p^0(\epsilon q_1))^2-\mu(\epsilon q_1)\right)}, \ldots\Big),$$

$$\langle\varrho\rangle(t,\xi) = e^{\beta\mu}(\frac{2\pi}{\beta})^{\frac{3}{2}}, \quad \langle u\rangle^i(t,\xi) = p^0(t,\xi), \quad \langle e\rangle(t,\xi) = \frac{3}{2}\beta^{-1}(t,\xi).$$

$$p_{ij}(t,\xi) = p(t,\xi)\delta_{ij}, \quad p = \frac{2}{3}\langle\varrho\rangle\langle e\rangle = \langle\varrho\rangle\beta^{-1},$$
$$q_i(t,\xi) = 0.$$

$$p = \varrho\beta^{-1} - \frac{\varrho}{6}\int dq\frac{\partial\Phi}{\partial|q|}g_2(|q|,\varrho),$$
$$e = \frac{3}{2}\beta^{-1} + \varrho\int dq\Phi(|q|)g_2(|q|,\varrho).$$

4. Існування гідродинамічної границі рівняння Больцмана

4.1. Асимптотичні розклади Гільберта

$$\mathrm{Sh}\frac{\partial}{\partial t}f(t,x_1) = -\langle p_1, \frac{\partial}{\partial q_1}\rangle f(t,x_1) +$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Kn}}\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_+} dp_2 d\eta \langle \eta, (p_1 - p_2)\rangle \big(f(t,q_1,p_1^*)f(t,q_1,p_2^*) - f(t,x_1)f(t,q_1,p_2)\big).$$

$\mathrm{Kn} = \varepsilon, \quad \mathrm{Sh} = 1 \quad (\mathrm{ShM},\ \mathrm{M} = \mathrm{KnRe}).$

$$f(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f^{(n)}(t,x),$$

$$f^{(0)}(t,p) = \frac{\varrho}{(2\pi\beta^{-1})^{3/2}} e^{-\beta\frac{(p-u)^2}{2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho = -\frac{\partial}{\partial \xi^i}\varrho u^i,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho u^j = -\frac{\partial}{\partial \xi^i}(\varrho u^j u^i + \varrho\beta^{-1}\delta_{ji}),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho\beta^{-1} = -\frac{\partial}{\partial \xi^i}(\varrho\beta^{-1}u^i + \frac{2}{3}\varrho\beta^{-1}u^i),$$

4.2. Строгі результати

Theorem (Caflisch, 1980). ***Suppose the incompressible Euler equations have a smooth solution*** u ***in*** $[0, t_0]$***. Then there exists a sequence*** (f_ε) ***of Boltzmann solutions which is close to the Maxwellian***

$$f^{(0)}(t,p) = \frac{\varrho}{(2\pi\beta^{-1})^{3/2}} e^{-\beta\frac{(p-u)^2}{2}},$$

in some appropriate functional space.

Акустичні рівняння: $\mathrm{M} = \delta_\varepsilon \ll \sqrt{\varepsilon}, \quad \mathrm{Sh} = 1,$
Стокса-Фур'є рівняння: $\mathrm{M} = \delta_\varepsilon \ll \varepsilon, \quad \mathrm{Sh} = \varepsilon,$
Нестисливі рівняння Ейлера: $\mathrm{M} = \delta_\varepsilon = \varepsilon^\alpha, 0 < \alpha < 1, \quad \mathrm{Sh} = \delta_\varepsilon,$
Нестисливі рівняння Нав'є-Стокса: $\mathrm{M} = \varepsilon, \quad \mathrm{Sh} = \varepsilon.$

5. Висновки: еволюційні рівняння гемодинаміки та гемокінетики

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

АКАДЕМИИ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

ФОНД №

ОПИСЬ № 2

ЕД.ХРАН. № ~~12~~ Н 12

Научный отчет по теме:

Проблемы динамической теории в статистической физике

Исп. – Боголюбов Н.Н.

1946 г.

На . . . 126 . . . . . листах

ХРАНИТЬ ПОСТОЯННО

Н.Н.БОГОЛЮБОВ.

" ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ".

Н. Н. БОГОЛЮБОВ

ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

ОГИЗ • ГОСТЕХИЗДАТ • 1946