



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ  
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»



**НГТУ  
НЭТИ** | **Факультет прикладной  
математики и информатики**

Кафедра теоретической и прикладной информатики

Лабораторная работа № 2

по дисциплине «Методы принятия оптимальных решений»

**МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИ-  
РОВАНИЯ**

Бригада 7

ПОБЕДИНСКИЙ СЕРГЕЙ

Группа ПМ-84

ФАДЕЙКИН ЛЕОНИД

Преподаватель

ЛЕМЕШКО БОРИС ЮРЬЕВИЧ

Новосибирск, 2021

## Вариант 4

### 1. Цель работы

Исследование многокритериальных задачи линейного и нелинейного программирования при различных компромиссных критериях

### 2. Задание

Полуфабрикаты поступают на предприятие в виде листов фанеры. Всего имеется две партии материала, причем первая партия содержит 400 листов, а вторая – 250 листов. Из поступающих листов фанеры необходимо изготовить комплекты двух видов. Комплект первого вида включает 4 детали 1 типа, 3 детали 2 типа, и 2 детали 3 типа. Комплект второго вида включает 2 детали 1 типа, 4 детали 2 типа и 3 детали 3 типа. Лист фанеры каждой партии может раскраиваться различными способами.

Количество деталей каждого типа, которое получается при раскрое одного листа соответствующей партии по тому или иному способу раскроя, представлено в таблице.

Стоимость одного листа первой партии составляем 1000 руб., а стоимость одного листа второй партии 1200 руб. Цена комплекта первого вида составляет 150 руб., цена комплекта второго вида - 200 руб.

Исходные данные

Детали	Способ раскроя (1 п)			Детали	Способ раскроя (2 п)	
	1	2	3		1	2
1	0	6	9	1	6	5
2	4	3	4	2	5	4
3	10	16	0	3	8	0

Необходимо решить многокритериальную задачу

Критерий 1. Максимизация прибыли от продажи всех комплектов деталей.

Критерий 2. Максимизация количества комплектов первого вида.

Критерий 3. Максимизация количества комплектов второго вида.

Примечание: для построения Парето-оптимального множества рассмотреть только критерии 2, 3.

### 3. Математическая модель

Для формирования модели введем обозначения:

$s$  – номер партии материала (материал может быть из 1ой или из 2ой партии [ $s = 1, 2$ ])

$S$  – общее количество партий (всего 2 партии [ $S = 2$ ])

$K$  – общее количество комплектов (всего 2 комплекта [ $K = 2$ ])

$i$  – вид детали (деталь 1-го вида, или 2-го вида, или 3-го вида [ $i = \overline{1, 3}$ ])

$j$  – номер способа раскроя (способов раскроя 3 [ $j = \overline{1, 3}$ ])

$N_s$  – общее число способов раскроя для партии (для первой партии 3 способа раскроя, для второй – 2 [ $N_1 = 3, N_2 = 2$ ])

$a_{sij}$  – число деталей  $i$ -го вида, получаемых из  $s$ -ой партии по  $j$ -ому способу (например, для изготовления детали 3 вида из 1ой партии 2 способом раскроя  $a_{132} = 16$ )

$l_{ik}$  – число деталей  $i$ -го вида, необходимых для единицы  $k$ -го вида комплекта (для полного 1-го вида комплекта необходимо 4 детали 1-го вида и 3 детали 2-го вида и 2 детали 3-го вида [ $l_1 = 4, l_2 = 3, l_3 = 2$ ])

$x_{sj}$  – искомое количество единиц материала  $s$ -ой партии, раскраиваемых согласно  $j$ -ому способу

$y_k$  – количество комплектов  $k$ -го вида

$\beta_s$  – количество листов в  $s$ -ой партии [ $\beta_1 = 400, \beta_2 = 250$ ]

$C_s$  – стоимость листов в  $s$ -ой партии [ $C_1 = 1000, C_2 = 1200$ ]

$V_k$  – стоимость  $k$ -го вида комплекта [ $V_1 = 150, V_2 = 200$ ]

При раскрое всех партий будет получено деталей для  $i$ -го вида

$$\sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^{N_s} a_{sij} x_{sj} = B_i$$

Требуемое количество деталей  $i$ -го вида для изготовления

$$\sum_{k=1}^K l_{ik} y_k = A_i, \quad i = \overline{1, N_s}, \quad s = \overline{1, S}$$

При условии выполнения плана раскроя деталей:

$$\sum_{j=1}^{N_s} x_{sj} = \beta_s, \quad s = \overline{1, S},$$

Тогда ограничение на количество деталей будет составлять:

$$A_i = B_i, \quad i = \overline{1, 3},$$

А также неотрицательности компонент

$$x_{sj} \geq 0, \quad s = \overline{1, S}, \quad j = \overline{1, N_s},$$

Общая стоимость листов будет составлять

$$\sum_{s=1}^S \beta_s C_s$$

Критерий 1. Максимизация прибыли от продажи всех комплектов деталей.

$$F_1 = \sum_{k=1}^K y_k V_k - \sum_{s=1}^S \beta_s C_s \rightarrow \max$$

Критерий 2. Максимизация количества комплектов первого вида.

$$F_2 = y_1 \rightarrow \max$$

Критерий 3. Максимизация количества комплектов второго вида.

$$F_3 = y_2 \rightarrow \max$$

С ограничениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_i = B_i, \quad i = \overline{1,3}, \\ \sum_{j=1}^{N_s} x_{sj} = \beta_s, \quad s = \overline{1,S}, \\ x_{sj} \geq 0, \quad s = \overline{1,S}, \quad j = \overline{1,N_s} \end{array} \right.$$

#### 4. Постановка задачи

Общая стоимость листов:  $400 * 1000 + 250 * 1200 = 700000$

$$F_1 = 150y_1 + 200y_2 - 700000 \rightarrow \max$$

$$F_2 = y_1 \rightarrow \max$$

$$F_3 = y_2 \rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4y_1 + 2y_2 = 6x_{12} + 9x_{13} + 6x_{21} + 5x_{22}, \\ 3y_1 + 4y_2 = 4x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 5x_{21} + 4x_{22}, \\ 2y_1 + 3y_2 = 10x_{11} + 16x_{12} + 8x_{21} \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 400 \\ x_{21} + x_{22} = 250 \\ x_{sj} \geq 0, \quad s = \overline{1,2}, \quad j = \overline{1,3} \end{array} \right.$$

Или:

$$F_1 = 150y_1 + 200y_2 - 700000 \rightarrow \max$$

$$F_2 = y_1 \rightarrow \max$$

$$F_3 = y_2 \rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6x_{12} + 9x_{13} + 6x_{21} + 5x_{22} - 4y_1 - 2y_2 = 0, \\ 4x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 5x_{21} + 4x_{22} - 3y_1 - 4y_2 = 0, \\ 10x_{11} + 16x_{12} + 8x_{21} - 2y_1 - 3y_2 = 0 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 400 \\ x_{21} + x_{22} = 250 \\ x_{sj} \geq 0, \quad s = \overline{1,2}, \quad j = \overline{1,3} \end{array} \right.$$

#### 5. Решение

Решим задачу в Экселе:

$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{21}$	$x_{22}$	$y_1$	$y_2$	C		
175,275	0	224,725	0	250	789,011	58,2418			
0	6	9	6	5	-4	-2	1,71E-13	=	0
4	3	4	5	4	-3	-4	-1,1E-13	=	0
10	16	0	8	0	-2	-3	2,84E-14	=	0
1	1	1	0	0	0	0	400	=	400
0	0	0	1	1	0	0	250	=	250

Целевая функция

$F_1 =$	0	0	0	0	0	150	200	-700000	=	-570000
$F_2 =$	0	0	0	0	0	1	0	0	=	789,011
$F_3 =$	0	0	0	0	0	0	1	0	=	58,2418

Так как целевые функции исследуются по различным (в рублях и в количествах комплектов) шкалам, то компромиссный критерий будет иметь вид:

$$\min_{x \in X} F_0(\bar{x}) = \min_{x \in X} \sum_i^3 w_i \frac{F_i^{\max} - F_i(\bar{x})}{|F_i^{\max}|}$$

$$F_0(\bar{x}) = w_1 * \frac{-570000 - (150y_1 + 200y_2 - 700000)}{|-570000|} + w_2 * \frac{789.011 - y_1}{|789.011|} + w_3 * \frac{58.2418 - y_2}{|58.2418|}$$

$$F_0(\bar{x}) = w_1 * \frac{130000 - 150y_1 - 200y_2}{570000} + w_2 * \frac{789.011 - y_1}{789.011} + w_3 * \frac{58.2418 - y_2}{58.2418}$$

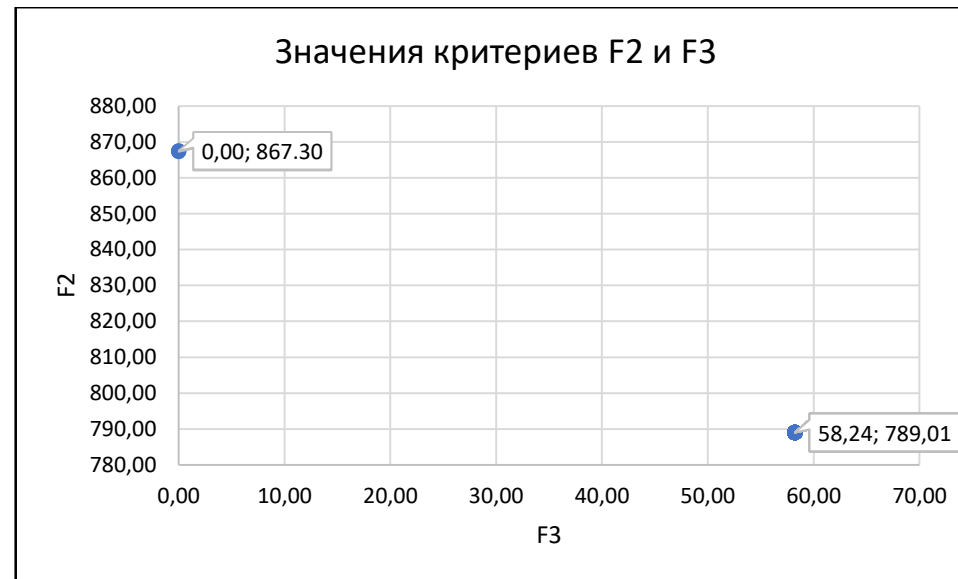
При тех же ограничениях:

$$\begin{cases} 6x_{12} + 9x_{13} + 6x_{21} + 5x_{22} - 4y_1 - 2y_2 = 0, \\ 4x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 5x_{21} + 4x_{22} - 3y_1 - 4y_2 = 0, \\ 10x_{11} + 16x_{12} + 8x_{21} - 2y_1 - 3y_2 = 0 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 400 \\ x_{21} + x_{22} = 250 \\ x_{sj} \geq 0, \quad s = \overline{1,2}, \quad j = \overline{1,3} \end{cases}$$

w1	w2	w3	x0	x1	x2	x3	x4	x5	x6	F1	F2	F3	F0
0.0	0.0	1.0	175.2747253	2.60E-09	224.7252747	9.92E-10	250	789.010989	58.24175823	-570000	789.01	58.24	7.17E-07
0.0	0.1	0.9	175.2747253	3.92E-09	224.7252747	1.50E-09	250	789.010989	58.24175822	-570000	789.01	58.24	6.47E-07
0.0	0.2	0.8	175.2747253	0.00E+00	224.7252747	0.00E+00	250	789.010989	58.24175824	-570000	789.01	58.24	5.76E-07
0.0	0.3	0.7	175.2747253	3.38E-10	224.7252747	1.36E-10	250	789.010989	58.24175824	-570000	789.01	58.24	5.06E-07
0.0	0.4	0.6	175.2747253	2.88E-09	224.7252747	1.11E-09	250	789.010989	58.24175823	-570000	789.01	58.24	4.36E-07
0.0	0.5	0.5	175.2747253	2.67E-09	224.7252747	1.02E-09	250	789.010989	58.24175823	-570000	789.01	58.24	3.66E-07
0.0	0.6	0.4	175.2747253	1.12E-09	224.7252747	4.32E-10	250	789.010989	58.24175824	-570000	789.01	58.24	2.95E-07
0.0	0.7	0.3	175.2747253	0.00E+00	224.7252747	0.00E+00	250	789.010989	58.24175826	-570000	789.01	58.24	2.25E-07
0.0	0.8	0.2	175.2747253	6.84E-09	224.7252747	2.61E-09	250	789.0109891	58.24175821	-570000	789.01	58.24	1.55E-07
0.0	0.9	0.1	175.2747253	3.34E-10	224.7252747	1.29E-10	250	789.010989	58.24175824	-570000	789.01	58.24	8.42E-08
0.0	1.0	0.0	151.76553	8.40E+00	239.8304519	1.03E+01	239.69	867.3021939	7.11E-15	-569904.67	867.30	0.00	-9.92E-02
0.1	0.0	0.9	175.2747253	0.00E+00	224.7252747	0.00E+00	250	789.010989	58.24175826	-570000	789.01	58.24	6.45E-07
0.1	0.1	0.8	175.2747253	3.91E-09	224.7252747	1.48E-09	250	789.010989	58.24175822	-570000	789.01	58.24	5.75E-07
0.1	0.2	0.7	175.2747253	0.00E+00	224.7252747	0.00E+00	250	789.010989	58.24175825	-570000	789.01	58.24	5.05E-07
0.1	0.3	0.6	175.2747253	5.93E-09	224.7252747	2.26E-09	250	789.0109891	58.24175821	-570000	789.01	58.24	4.35E-07
0.1	0.4	0.5	175.2747253	4.02E-09	224.7252747	1.54E-09	250	789.010989	58.24175822	-570000	789.01	58.24	3.64E-07
0.1	0.5	0.4	175.2747253	0.00E+00	224.7252747	0.00E+00	250	789.010989	58.24175825	-570000	789.01	58.24	2.94E-07
0.1	0.6	0.3	175.2747253	5.25E-09	224.7252747	2.00E-09	250	789.010989	58.24175821	-570000	789.01	58.24	2.24E-07
0.1	0.7	0.2	175.2747253	0.00E+00	224.7252747	0.00E+00	250	789.010989	58.24175825	-570000	789.01	58.24	1.53E-07
0.1	0.8	0.1	175.2747253	0.00E+00	224.7252747	0.00E+00	250	789.010989	58.24175825	-570000	789.01	58.24	8.28E-08
0.1	0.9	0.0	151.7888087	8.19E+00	240.0259931	1.08E+01	239.22	867.5303252	0	-569870.45	867.53	0.00	-0.08958724
0.2	0.0	0.8	175.2747253	4.01E-09	224.7252747	1.54E-09	250	789.010989	58.24175822	-570000	789.01	58.24	5.74E-07
0.2	0.1	0.7	175.2747253	0.00E+00	224.7252747	0.00E+00	250	789.010989	58.24175825	-570000	789.01	58.24	5.03E-07
0.2	0.2	0.6	175.2747253	9.31E-10	224.7252747	3.48E-10	250	789.010989	58.24175824	-570000	789.01	58.24	4.33E-07
0.2	0.3	0.5	175.2747253	0.00E+00	224.7252747	0.00E+00	250	789.010989	58.24175827	-570000	789.01	58.24	3.62E-07
0.2	0.4	0.4	175.2747253	0.00E+00	224.7252747	0.00E+00	250	789.010989	58.24175827	-570000	789.01	58.24	2.92E-07
0.2	0.5	0.3	175.2747253	3.73E-09	224.7252747	1.42E-09	250	789.010989	58.24175822	-570000	789.01	58.24	2.22E-07
0.2	0.6	0.2	175.2747253	2.55E-09	224.7252747	9.76E-10	250	789.010989	58.24175823	-570000	789.01	58.24	1.52E-07
0.2	0.7	0.1	175.2747253	0.00E+00	224.7252747	0.00E+00	250	789.010989	58.24175825	-570000	789.01	58.24	8.14E-08
0.2	0.8	0.0	175.2747253	7.76E-10	224.7252747	2.86E-10	250	789.010989	58.24175824	-570000	789.01	58.24	1.11E-08

0.3	0.0	0.7	175.2747253	4.17E-09	224.7252747	1.59E-09	250	789.010989	58.24175822	-570000	789.01	58.24	5.02E-07
0.3	0.1	0.6	175.2747253	3.70E-09	224.7252747	1.41E-09	250	789.010989	58.24175822	-570000	789.01	58.24	4.32E-07
0.3	0.2	0.5	175.2747253	1.83E-09	224.7252747	6.83E-10	250	789.010989	58.24175823	-570000	789.01	58.24	3.61E-07
0.3	0.3	0.4	175.2747253	1.14E-09	224.7252747	4.28E-10	250	789.010989	58.24175824	-570000	789.01	58.24	2.91E-07
0.3	0.4	0.3	175.2747253	0.00E+00	224.7252747	0.00E+00	250	789.010989	58.24175826	-570000	789.01	58.24	2.21E-07
0.3	0.5	0.2	175.2747253	0.00E+00	224.7252747	0.00E+00	250	789.010989	58.24175827	-570000	789.01	58.24	1.50E-07
0.3	0.6	0.1	175.2747253	4.96E-09	224.7252747	1.89E-09	250	789.010989	58.24175822	-570000	789.01	58.24	8.01E-08
0.3	0.7	0.0	175.2747253	2.74E-09	224.7252747	1.05E-09	250	789.010989	58.24175823	-570000	789.01	58.24	9.73E-09
0.4	0.0	0.6	175.2747253	2.61E-09	224.7252747	9.88E-10	250	789.010989	58.24175823	-570000	789.01	58.24	4.30E-07
0.4	0.1	0.5	175.2747253	0.00E+00	224.7252747	0.00E+00	250	789.010989	58.24175824	-570000	789.01	58.24	3.60E-07
0.4	0.2	0.4	175.2747253	2.96E-09	224.7252747	1.12E-09	250	789.010989	58.24175823	-570000	789.01	58.24	2.90E-07
0.4	0.3	0.3	175.2747253	1.97E-09	224.7252747	7.56E-10	250	789.010989	58.24175823	-570000	789.01	58.24	2.19E-07
0.4	0.4	0.2	175.2747253	0.00E+00	224.7252747	0.00E+00	250	789.010989	58.24175825	-570000	789.01	58.24	1.49E-07
0.4	0.5	0.1	175.2747253	3.49E-09	224.7252747	1.33E-09	250	789.010989	58.24175822	-570000	789.01	58.24	7.87E-08
0.4	0.6	0.0	175.2747253	0.00E+00	224.7252747	0.00E+00	250	789.010989	58.24175827	-570000	789.01	58.24	8.38E-09
0.5	0.0	0.5	175.2747253	7.41E-09	224.7252747	2.85E-09	250	789.0109891	58.2417582	-570000	789.01	58.24	3.59E-07
0.5	0.1	0.4	175.2747253	0.00E+00	224.7252747	0.00E+00	250	789.010989	58.24175827	-570000	789.01	58.24	2.88E-07
0.5	0.2	0.3	175.2747253	0.00E+00	224.7252747	0.00E+00	250	789.010989	58.24175825	-570000	789.01	58.24	2.18E-07
0.5	0.3	0.2	175.2747253	1.83E-09	224.7252747	7.13E-10	250	789.010989	58.24175823	-570000	789.01	58.24	1.48E-07
0.5	0.4	0.1	175.2747253	1.74E-09	224.7252747	6.71E-10	250	789.010989	58.24175823	-570000	789.01	58.24	7.73E-08
0.5	0.5	0.0	175.2747253	0.00E+00	224.7252747	0.00E+00	250	789.010989	58.24175827	-570000	789.01	58.24	6.99E-09
0.6	0.0	0.4	175.2747253	2.69E-10	224.7252747	1.08E-10	250	789.010989	58.24175824	-570000	789.01	58.24	2.87E-07
0.6	0.1	0.3	175.2747253	9.55E-10	224.7252747	3.71E-10	250	789.010989	58.24175824	-570000	789.01	58.24	2.17E-07
0.6	0.2	0.2	175.2747253	5.07E-09	224.7252747	1.93E-09	250	789.010989	58.24175822	-570000	789.01	58.24	1.46E-07
0.6	0.3	0.1	175.2747253	3.88E-09	224.7252747	1.48E-09	250	789.010989	58.24175822	-570000	789.01	58.24	7.59E-08
0.6	0.4	0.0	175.2747253	5.14E-09	224.7252747	1.95E-09	250	789.010989	58.24175822	-570000	789.01	58.24	5.55E-09
0.7	0.0	0.3	175.2747253	0.00E+00	224.7252747	0.00E+00	250	789.010989	58.24175824	-570000	789.01	58.24	2.15E-07
0.7	0.1	0.2	175.2747253	3.47E-09	224.7252747	1.33E-09	250	789.010989	58.24175822	-570000	789.01	58.24	1.45E-07
0.7	0.2	0.1	175.2747253	1.18E-09	224.7252747	4.46E-10	250	789.010989	58.24175824	-570000	789.01	58.24	7.45E-08
0.7	0.3	0.0	175.2747253	6.04E-09	224.7252747	2.30E-09	250	789.0109891	58.24175821	-570000	789.01	58.24	4.16E-09
0.8	0.0	0.2	175.2747253	0.00E+00	224.7252747	0.00E+00	250	789.010989	58.24175824	-570000	789.01	58.24	1.43E-07

0.8	0.1	0.1	175.2747253	5.28E-09	224.7252747	2.01E-09	250	789.010989	58.24175821	-570000	789.01	58.24	7.31E-08
0.8	0.2	0.0	175.2747253	4.62E-10	224.7252747	1.50E-10	250	789.010989	58.24175824	-570000	789.01	58.24	2.78E-09
0.9	0.0	0.1	175.2747253	1.29E-09	224.7252747	4.92E-10	250	789.010989	58.24175824	-570000	789.01	58.24	7.17E-08
0.9	0.1	0.0	175.2747253	6.52E-09	224.7252747	2.49E-09	250	789.0109891	58.24175821	-570000	789.01	58.24	1.39E-09
1.0	0.0	0.0	175.2747253	0.00E+00	224.7252747	0.00E+00	250	789.010989	58.24175826	-570000	789.01	58.24	-1.93E-13



Здесь всего 2 точки, которые неоднократно появляются в решениях: (0; 867) и (58.24; 789)

Эти две точки и составляют Парето-оптимальное множество решений.

## 6. Вывод