|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | | |
| Федеральное государственное бюджетное  образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» | | |
|  | | |
| Кафедра теоретической и прикладной информатики | | |
| Лабораторная работа № 3 | | |
| по дисциплине «Методы принятия оптимальных решений» | | |
| **Решение матричных игр** | | |
|  | | |
|  | Бригада 7 | Побединский Сергей |
| Группа ПМ-84 | фадейкин леонид |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| Преподаватель | Лемешко борис юрьевич |
|  |  |
| Новосибирск, 2021 | | |

**Вариант 3**

1. **Цель работы**

Ознакомиться с методами решения задач игр методами линейного программирования.

1. **Задание**

Упрощенный покер

Первый игрок получает одну из карт Ст и Мл с равными вероятностями, а затем может или «сделать ставку» или «спасовать». Если первый делает ставку, то второй может «спасовать» и потерять α или «уравнять игру», и выиграть или потерять β в зависимости от того, имеется ли на руках у первого игрока карта Мл или Ст. Если первый игрок пасует, то второй может также пасовать, что даёт выигрыш 0, или сделать ставку, выигрывая α, если у первого игрока карта Мл, и теряя β, если у первого игрока Ст.

1. **Математическая модель**

Построим дерево игры для нашего условия:

получает карту

делает ход

делает ход

Где

- Начало игры

Ст – Старшая карта

Мл – Младшая карта

Став – Игрок делает ставку

Пас – Игрок пассует

– Выигрыш. - выигрыш первого игрока и проигрыш второго.

Составим платёжную матрицу игры:

У первого игрока будет 4 стратегии, а у второго – 2.

Величина выигрыша первого игрока при выборе i-ой стратегии и величина проигрыша второго игрока при выборе j-ой стратегии записывается в элемент матрицы.

Пусть – выигрыш первого игрока, который нужно максимизировать, тогда:

При условиях:

Пусть – проигрыш второго игрока, который нужно минимизировать, тогда,

При условиях:

1. **Решение**

(В конце будет приведена программа решения данной двойственной задачи для проверки найденного аналитического решения)

Решим задачу максимизации, используя симплекс-метод искусственного базиса.

1. Означим

Для каждого ограничения с неравенством добавляем дополнительные переменные x6 и x7.

В целевую функцию добавляем искусственные переменные с коэффициентом -M, где M — очень большое число.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -M | -M | -M | 0 |
| базис | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | u1 | u2 | u3 | b |
| u1 | b | b | -b | -a | -1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| u2 | a | 0 | a | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| u3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Условия задачи с учётом добавленных искусственных переменных:

Вычислим дельты по формуле

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -M | -M | -M | 0 |
| базис | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | u1 | u2 | u3 | b |
| u1 | b | b | -b | -a | -1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| u2 | a | 0 | a | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| u3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
|  | -M(a+b+1) | -M(b+1) | -M(1+a-b) | -M(1-a) | -1+2M | M | M | 0 | 0 | 0 | -M |

План не оптимален, так как

1. Выберем разрешающим элементом

Делим разрешающую строку на разрешающий элемент. Из остальных строк вычитаем значения первой строки, умноженной на соответствующий элемент в разрешающем столбце.

И вычисляем новые дельты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -M | -M | -M | 0 |
| базис | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | u1 | u2 | u3 | b |
| x1 | 1 | 1 | -1 | -a/b | -1/b | -1/b | 0 | 1/b | 0 | 0 | 0 |
| u2 | 0 | -a | 2a | a^2 / b | (a-b)/b | a/b | -1 | -a/b | 1 | 0 | 0 |
| u3 | 0 | 0 | 2 | (a+b)/b | 1/b | 1/b | 0 | -1/b | 1 | 1 | 1 |
|  | 0 | aM | -M(2a+2) | -M(a^2+a+b) | -1-M((a-b+1)/b) | -M((a+b)/b) | M | M((a+b)/b) | 0 | 0 | -M |

План не оптимален, так как

1. Выберем разрешающим элементом

Делим разрешающую строку на разрешающий элемент. Из остальных строк вычитаем значения первой строки, умноженной на соответствующий элемент в разрешающем столбце.

И вычисляем новые дельты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -M | -M | -M | 0 |
| базис | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | u1 | u2 | u3 | b |
| x1 | 1 | 1/2 | 0 | -a/2b | -(a+b)/2ab | -1/2b | -1/2a | 1/2b | 1/2a | 0 | 0 |
| x3 | 0 | -1/2 | 1 | a/2b | (a-b)/2ab | 1/2b | -1/2a | -1/2b | 1/2a | 0 | 0 |
| u3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1/a | 0 | 1/a | 0 | -1/a | 1 | 1 |
|  | 0 | -M | 0 | -M | -1-M(1/a) | 0 | -M(1/a) | M | M(1+1/a) | 0 | -M |

План не оптимален, так как

1. Выберем разрешающим элементом

Делим разрешающую строку на разрешающий элемент. Из остальных строк вычитаем значения первой строки, умноженной на соответствующий элемент в разрешающем столбце.

И вычисляем новые дельты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -M | -M | -M | 0 |
| базис | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | u1 | u2 | u3 | b |
| x2 | 2 | 1 | 0 | -a/b | -(a+b)/ab | -1/b | -1/a | 1/b | 1/a | 0 | 0 |
| x3 | 1 | 0 | 1 | 0 | -1/a | 0 | -1/a | 0 | 1/a | 0 | 0 |
| u3 | -2 | 0 | 0 | (a+b)/b | (2b+a)/ab | 1/b | 2/a | -1/b | -2/a | 1 | 1 |
|  | 2M | 0 | 0 | -M(a+b)/b | -1-M(2b+a)/ab | -M/b | -2M/a | M(b+1)b | M(2+a)/a | 0 | -M |

План не оптимален, так как

1. Выберем разрешающим элементом

Делим разрешающую строку на разрешающий элемент. Из остальных строк вычитаем значения первой строки, умноженной на соответствующий элемент в разрешающем столбце.

И вычисляем новые дельты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -M | -M | -M | 0 |
| базис | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | u1 | u2 | u3 | b |
| x2 | 2b/(a+b) | 1 | 0 | 0 | -b/a(a+b) | -1/(a+b) | (a-b)/a(a+b) | 1/(a+b) | (b-a)/a(a+b) | a/(a+b) | a/(a+b) |
| x3 | 1 | 0 | 1 | 0 | -1/a | 0 | -1/a | 0 | 1/a | 0 | 0 |
| x4 | -2b/(a+b) | 0 | 0 | 1 | (2b+a)/a(a+b) | 1/(a+b) | 2b/a(a+b) | -1/(a+b) | -2b/a(a+b) | b/(a+b) | b/(a+b) |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | M | M | M | 0 |

План не оптимален, так как

1. Выберем разрешающим элементом

Делим разрешающую строку на разрешающий элемент. Из остальных строк вычитаем значения первой строки, умноженной на соответствующий элемент в разрешающем столбце.

И вычисляем новые дельты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -M | -M | -M | 0 |
| базис | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | u1 | u2 | u3 | b |
| x2 | 2b/(a+2b) | 1 | 0 | b/(2b+a) | 0 | -1/(2b+a) | 1/(2b+a) | 1/(2b+a) | -1/(2b+a) | (a+b)/(2b+a) | (a+b)/(2b+a) |
| x3 | a/(2b+a) | 0 | 1 | (a+b)/(2b+a) | 0 | 1/(2b+a) | -1/(2b+a) | -1/(2b+a) | 1/(2b+a) | b/(2b+a) | b/(2b+a) |
| x5 | -2ab/(2b+a) | 0 | 0 | a(a+b)/(2b+a) | 1 | a/(2b+a) | 2b/(2b+a) | -a/(2b+a) | -2b/(2b+a) | ab/(2b+a) | ab/(2b+a) |
|  | -2ab/(2b+a) | 0 | 0 | a(a+b)/(2b+a) | 0 | a/(2b+a) | 2b/(2b+a) | -a/(2b+a)+M | -2b/(2b+a)+M | ab/(2b+a)+M | ab/(2b+a) |

План не оптимален, так как

Далее следует рассмотреть случаи, когда , так как от этого зависит выбор разрешающего элемента

1. Выбираем разрешающим элементом

Делим разрешающую строку на разрешающий элемент. Из остальных строк вычитаем значения первой строки, умноженной на соответствующий элемент в разрешающем столбце.

И вычисляем новые дельты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -M | -M | -M | 0 |
| базис | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | u1 | u2 | u3 | b |
| x1 | 1 | (a+2b)/2b | 0 | 1/2 | 0 | -1/2b | 1/2b | 1/2b | -1/2b | (a+b)/2b | (a+b)/2b |
| x3 | 0 | -a/2b | 1 | 1/2 | 0 | 1/2b | -1/2b | -1/2b | 1/2b | (b-a)/2b | (b-a)/2b |
| x5 | 0 | a | 0 | a | 1 | 0 | 1 | 0 | -1 | a | a |
|  | 0 | a | 0 | a | 0 | 0 | 1 | M | -1+M | a+M | a |

Отрицательные дельты отсутствуют, следовательно, план оптимален.

1. Выбираем разрешающим элементом

Делим разрешающую строку на разрешающий элемент. Из остальных строк вычитаем значения первой строки, умноженной на соответствующий элемент в разрешающем столбце.

И вычисляем новые дельты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -M | -M | -M | 0 |
| базис | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | u1 | u2 | u3 | b |
| x2 | 0 | 1 | -2b/a | -b/a | 0 | -1/a | 1/a | 1/a | -1/a | (a-b)/a | (a-b)/a |
| x1 | 1 | 0 | (2b+a)/a | (a+b)/a | 0 | 1/a | -1/a | -1/a | 1/a | b/a | b/a |
| x5 | 0 | 0 | 2b | b+a | 1 | 1 | 0 | -1 | 0 | b | b |
|  | 0 | 0 | 2b | b+a | 0 | 1 | 0 | -1+M | M | 7+M | 7 |

Отрицательные дельты отсутствуют, следовательно, план оптимален.

Аналогично выглядят вычисления для решения двойственной задачи.

Обобщим полученные результаты.

Всего имеется 3 случая:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Проверим условия ограничений для каждого случая

Все условия выполняются

Все условия выполняются

Все условия выполняются.

Так же эту задачу можно решить, используя понятие седловой точки.

Седловыми точками являются элементы

Решение игры

То есть первому игроку при таком условии выгоднее всего выбрать 1 стратегию, а второму можно выбрать любой из вариантов хода.

Седловой точкой является элемент

То есть первому игроку выгоднее всего выбрать 1 стратегию, а второму при таких условиях следует пасануть.

Решение игры

Седловой точкой является элемент

То есть первому игроку выгоднее выбрать 1 стратегию, а второму при таком условии поддержать ставку.

Решение игры

1. **Вывод**

Для того, чтобы максимизировать выигрыш первому игроку, ему следует придерживаться первой стратегии, что очевидно, когда на руках самая большая карта, то стоит поддерживать и повышать ставку.

Второму игроку стоит опасаться повышения ставки в размере больше начальной, и можно рисковать, когда повышение ставки незначительно относительно начальной. В случае удвоения ставки второму игроку можно выбирать на своё усмотрение: поддерживать ставку или пасануть.

1. **Текст программы**

**import** scipy**.**optimize **as** opt

**def** fun**(**y**,** sign**,** V**):**

**return** sign **\*** y**[**V**]**

**def** do\_max**(**a**,**b**):**

**print(**"V -> max:"**)**

cons **=** **({**

'type'**:** 'ineq'**,**

'fun'**:** **lambda** t**:** b**\***t**[**0**]** **+** b**\***t**[**1**]** **-** b**\***t**[**2**]** **-** a**\***t**[**3**]** **-** t**[**4**]**

**},**

**{**

'type'**:** 'ineq'**,**

'fun'**:** **lambda** t**:** a**\***t**[**0**]** **+** a**\***t**[**2**]** **-** t**[**4**]**

**},**

**{**

'type'**:** 'eq'**,**

'fun'**:** **lambda** t**:** t**[**0**]** **+** t**[**1**]** **+** t**[**2**]** **+** t**[**3**]** **-** 1

**})**

bnc **=** **((**0**,** **None),(**0**,** **None),(**0**,** **None),(**0**,** **None),(None,** **None))**

res **=** opt**.**minimize**(**fun**,** x0**=(**1**,** 1**,** 1**,** 1**,** 1**),** args**=(-**1**,** 4**),** method**=**'SLSQP'**,** constraints**=**cons**,** bounds**=**bnc**,** options**={**'ftol'**:** 1e-7**})**

**print(**res**)**

**def** do\_min**(**a**,**b**):**

**print(**"V -> min:"**)**

cons **=** **({**

'type'**:** 'ineq'**,**

'fun'**:** **lambda** t**:** t**[**2**]** **-** b**\***t**[**0**]** **-** a**\***t**[**1**]**

**},**

**{**

'type'**:** 'ineq'**,**

'fun'**:** **lambda** t**:** t**[**2**]** **-** b**\***t**[**0**]**

**},**

**{**

'type'**:** 'ineq'**,**

'fun'**:** **lambda** t**:** t**[**2**]** **+** b**\***t**[**0**]** **-** a**\***t**[**1**]**

**},**

**{**

'type'**:** 'ineq'**,**

'fun'**:** **lambda** t**:** t**[**2**]** **+** a**\***t**[**0**]**

**},**

**{**

'type'**:** 'eq'**,**

'fun'**:** **lambda** t**:** t**[**0**]** **+** t**[**1**]** **-** 1

**})**

bnc **=** **((**0**,** **None),(**0**,** **None),(None,** **None))**

res **=** opt**.**minimize**(**fun**,** x0**=(**1**,** 1**,** 1**),** method**=**'SLSQP'**,** args**=(**1**,** 2**),** constraints**=**cons**,** bounds**=**bnc**,** options**={**'ftol'**:** 1e-7**})**

**print(**res**)**

**if** \_\_name\_\_**==**"\_\_main\_\_"**:**

a **=** **int(input(**"Введите первую ставку) a = "**));**

b **=** **int(input(**"Введите вторую ставку) b = "**));**

do\_max**(**a**,**b**)**

**print(**'\n\n'**)**

do\_min**(**a**,**b**)**'