|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | | |
| Федеральное государственное бюджетное  образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» | | |
|  | | |
| Кафедра теоретической и прикладной информатики | | |
| Лабораторная работа № 3 | | |
| по дисциплине «Методы принятия оптимальных решений» | | |
| **Решение матричных игр** | | |
|  | | |
|  | Бригада 7 | Побединский Сергей |
| Группа ПМ-84 | фадейкин леонид |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| Преподаватель | Лемешко борис юрьевич |
|  |  |
| Новосибирск, 2021 | | |

**Вариант 3**

1. **Цель работы**

Ознакомиться с методами решения задач игр методами линейного программирования.

1. **Задание**

Упрощенный покер

Первый игрок получает одну из карт Ст и Мл с равными вероятностями, а затем может или «сделать ставку» или «спасовать». Если первый делает ставку, то второй может «спасовать» и потерять α или «уравнять игру», и выиграть или потерять β в зависимости от того, имеется ли на руках у первого игрока карта Мл или Ст. Если первый игрок пасует, то второй может также пасовать, что даёт выигрыш 0, или сделать ставку, выигрывая α, если у первого игрока карта Мл, и теряя β, если у первого игрока Ст.

1. **Математическая модель**

Построим дерево игры для нашего условия:

получает карту

делает ход

делает ход

Где

- Начало игры

Ст – Старшая карта

Мл – Младшая карта

Став – Игрок делает ставку

Пас – Игрок пассует

– Выигрыш. - выигрыш первого игрока и проигрыш второго.

Составим платёжную матрицу игры:

У первого игрока будет 4 стратегии, а у второго – 2.

Величина выигрыша первого игрока при выборе i-ой стратегии и величина проигрыша второго игрока при выборе j-ой стратегии записывается в элемент матрицы.

Пусть – выигрыш первого игрока, который нужно максимизировать, тогда:

При условиях:

Пусть – проигрыш второго игрока, который нужно минимизировать, тогда,

При условиях:

1. **Решение**

(Ниже будет приведена программа решения данной двойственной задачи для проверки найденного аналитического решения)

Решим задачу максимизации, используя симплекс-метод искусственного базиса.

1. Означим

Для каждого ограничения с неравенством добавляем дополнительные переменные x6 и x7.

В целевую функцию добавляем искусственные пременные с коэффициентом -M, где M — очень большое число.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -M | -M | -M | 0 |
| базис | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | u1 | u2 | u3 | b |
| u1 | b | b | -b | -a | -1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| u2 | a | 0 | a | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| u3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

условие задачи с учётом добавленных искусственных переменных:

Вычислим дельты по формуле

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -M | -M | -M | 0 |
| базис | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | u1 | u2 | u3 | b |
| u1 | b | b | -b | -a | -1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| u2 | a | 0 | a | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| u3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| D | -M(a+b+1) | -M(b+1) | -M(1+a-b) | -M(1-a) | -1+2M | M | M | 0 | 0 | 0 | -M |

План не оптимален, так как

1. Выберем разрешающим элементом

Делим разрешающую строку на разрешающий элемент. Из остальных строк вычитаем значения первой строки, умноженной на соответствующий элемент в разрешающем столбце.

И вычисляем новые дельты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -M | -M | -M | 0 |
| базис | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | u1 | u2 | u3 | b |
| x1 | 1 | 1 | -1 | -a/b | -1/b | -1/b | 0 | 1/b | 0 | 0 | 0 |
| u2 | 0 | -a | 2a | a^2 / b | (a-b)/b | a/b | -1 | -a/b | 1 | 0 | 0 |
| u3 | 0 | 0 | 2 | (a+b)/b | 1/b | 1/b | 0 | -1/b | 1 | 1 | 1 |
| D | 0 | aM | -M(2a+2) | -M(a^2+a+b) | -1-M((a-b+1)/b) | -M((a+b)/b) | M | M((a+b)/b) | 0 | 0 | -M |

План не оптимален, так как

1. Выберем разрешающим элементом

Делим разрешающую строку на разрешающий элемент. Из остальных строк вычитаем значения первой строки, умноженной на соответствующий элемент в разрешающем столбце.

И вычисляем новые дельты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -M | -M | -M | 0 |
| базис | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | u1 | u2 | u3 | b |
| x1 | 1 | 1/2 | 0 | -a/2b | -(a+b)/2ab | -1/2b | -1/2a | 1/2b | 1/2a | 0 | 0 |
| x3 | 0 | -1/2 | 1 | a/2b | (a-b)/2ab | 1/2b | -1/2a | -1/2b | 1/2a | 0 | 0 |
| u3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1/a | 0 | 1/a | 0 | -1/a | 1 | 1 |
| D | 0 | -M | 0 | -M | -1-M(1/a) | 0 | -M(1/a) | M | M(1+1/a) | 0 | -M |

План не оптимален, так как

1. Выберем разрешающим элементом

Делим разрешающую строку на разрешающий элемент. Из остальных строк вычитаем значения первой строки, умноженной на соответствующий элемент в разрешающем столбце.

И вычисляем новые дельты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -M | -M | -M | 0 |
| базис | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | u1 | u2 | u3 | b |
| x2 | 2 | 1 | 0 | -a/b | -(a+b)/ab | -1/b | -1/a | 1/b | 1/a | 0 | 0 |
| x3 | 1 | 0 | 1 | 0 | -1/a | 0 | -1/a | 0 | 1/a | 0 | 0 |
| u3 | -2 | 0 | 0 | (a+b)/b | (2b+a)/ab | 1/b | 2/a | -1/b | -2/a | 1 | 1 |
| D | 2M | 0 | 0 | -M(a+b)/b | -1-M(2b+a)/ab | -M/b | -2M/a | M(b+1)b | M(2+a)/a | 0 | -M |

План не оптимален, так как

1. Выберем разрешающим элементом

Делим разрешающую строку на разрешающий элемент. Из остальных строк вычитаем значения первой строки, умноженной на соответствующий элемент в разрешающем столбце.

И вычисляем новые дельты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -M | -M | -M | 0 |
| базис | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | u1 | u2 | u3 | b |
| x2 | 2b/(a+b) | 1 | 0 | 0 | -b/a(a+b) | -1/(a+b) | (a-b)/a(a+b) | 1/(a+b) | (b-a)/a(a+b) | a/(a+b) | a/(a+b) |
| x3 | 1 | 0 | 1 | 0 | -1/a | 0 | -1/a | 0 | 1/a | 0 | 0 |
| x4 | -2b/(a+b) | 0 | 0 | 1 | (2b+a)/a(a+b) | 1/(a+b) | 2b/a(a+b) | -1/(a+b) | -2b/a(a+b) | b/(a+b) | b/(a+b) |
| D | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | M | M | M | 0 |

План не оптимален, так как

1. Выберем разрешающим элементом

Делим разрешающую строку на разрешающий элемент. Из остальных строк вычитаем значения первой строки, умноженной на соответствующий элемент в разрешающем столбце.

И вычисляем новые дельты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -M | -M | -M | 0 |
| базис | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | u1 | u2 | u3 | b |
| x2 | 2b/(a+2b) | 1 | 0 | b/(2b+a) | 0 | -1/(2b+a) | 1/(2b+a) | 1/(2b+a) | -1/(2b+a) | (a+b)/(2b+a) | (a+b)/(2b+a) |
| x3 | a/(2b+a) | 0 | 1 | (a+b)/(2b+a) | 0 | 1/(2b+a) | -1/(2b+a) | -1/(2b+a) | 1/(2b+a) | b/(2b+a) | b/(2b+a) |
| x5 | -2ab/(2b+a) | 0 | 0 | a(a+b)/(2b+a) | 1 | a/(2b+a) | 2b/(2b+a) | -a/(2b+a) | -2b/(2b+a) | ab/(2b+a) | ab/(2b+a) |
| D | -2ab/(2b+a) | 0 | 0 | a(a+b)/(2b+a) | 0 | a/(2b+a) | 2b/(2b+a) | -a/(2b+a)+M | -2b/(2b+a)+M | ab/(2b+a)+M | ab/(2b+a) |

План не оптимален, так как

Далее следует рассмотреть случаи, когда , так как от этого зависит выбор разрешающего элемента

1. Выбираем разрешающим элементом

Делим разрешающую строку на разрешающий элемент. Из остальных строк вычитаем значения первой строки, умноженной на соответствующий элемент в разрешающем столбце.

И вычисляем новые дельты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -M | -M | -M | 0 |
| базис | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | u1 | u2 | u3 | b |
| x1 | 1 | (a+2b)/2b | 0 | 1/2 | 0 | -1/2b | 1/2b | 1/2b | -1/2b | (a+b)/2b | (a+b)/2b |
| x3 | 0 | -a/2b | 1 | 1/2 | 0 | 1/2b | -1/2b | -1/2b | 1/2b | (b-a)/2b | (b-a)/2b |
| x5 | 0 | a | 0 | a | 1 | 0 | 1 | 0 | -1 | a | a |
| D | 0 | a | 0 | a | 0 | 0 | 1 | M | -1+M | a+M | a |

Отрицательные дельты отсутствуют, следовательно, план оптимален.

1. Выбираем разрешающим элементом

Делим разрешающую строку на разрешающий элемент. Из остальных строк вычитаем значения первой строки, умноженной на соответствующий элемент в разрешающем столбце.

И вычисляем новые дельты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -M | -M | -M | 0 |
| базис | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | u1 | u2 | u3 | b |
| x2 | 0 | 1 | -2b/a | -b/a | 0 | -1/a | 1/a | 1/a | -1/a | (a-b)/a | (a-b)/a |
| x1 | 1 | 0 | (2b+a)/a | (a+b)/a | 0 | 1/a | -1/a | -1/a | 1/a | b/a | b/a |
| x5 | 0 | 0 | 2b | b+a | 1 | 1 | 0 | -1 | 0 | b | b |
| D | 0 | 0 | 2b | b+a | 0 | 1 | 0 | -1+M | M | 7+M | 7 |

Отрицательные дельты отсутствуют, следовательно, план оптимален.

Аналогично выглядят вычисления для решения обратной задачи.

Обобщим полученные результаты:

Всего имеется 3 случая:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Проверим условия ограничений для каждого случая

Все условия выполняются

Все условия выполняются

Все условия выполняются.

1. **Вывод**
2. **Текст программы**