№1

По теореме Байеса:

$$P(\text{брак} \mid +) = \frac{P(+ \mid \text{брак})P(\text{брак})}{P(+)} =$$

$$= \frac{P(+ \mid \text{брак})P(\text{брак})}{P(+ \mid \text{брак})P(\text{брак}) + P(+ \mid \text{не брак})P(\text{не брак})} =$$

$$= \frac{0.95 \cdot 0.05}{0.95 \cdot 0.05 + 0.05 \cdot 0.95} = 0.5$$

№2

Даже без дополнительных улучшений такие приборы лучше находят брак, чем случайный выбор, так как если бы мы просто наугад с любой положительной вероятностью выдавали положительный результат, то вероятность выявления брака при условии положительного результата упала бы с 50% до 5%.
Однако для данного прибора можно сколь угодно улучшить вероятность выявления брака, если использовать много предсказаний такого же прибора вместо одного, в предположении, что ошибки разных предсказаний независимы.
Например, если есть возможность сделать стремящееся к бесконечности число таких предсказаний, то в случае, если продукция бракована, примерно 95% предсказаний дадут положительный результат, а если продукция не бракована, то только 5%. Значит достаточно смотреть на предсказание большинства, и при стремлении числа предсказаний к бесконечности вероятность выявления брака для такого метода стремится к 100%.

№3

Предположим, что ошибки первого и второго рода равны. Пусть p_1 - вероятность ошибки прибора, а p_2 - вероятность брака.

По теореме Байеса:

$$P(\text{брак} \mid +) = \frac{P(+ \mid \text{брак})P(\text{брак})}{P(+ \mid \text{брак})P(\text{брак}) + P(+ \mid \text{не брак})P(\text{не брак})} =$$

$$= \frac{(1-p_1)p_2}{(1-p_1)p_2 + p_1(1-p_2)}$$

Пусть мы хотим, чтобы прибор работал лучше честной монетки:

$$\frac{(1-p_1)p_2}{(1-p_1)p_2 + p_1(1-p_2)} > 0.5$$

$$p_2 - p_1p_2 > 0.5p_2 + 0.5p_1 - p_1p_2$$

$$p_2 > p_1 \Rightarrow P(\text{брак}) > P(\text{ошибка})$$

Аналогично для случая, когда прибор работает хуже честной монетки, можно вывести соотношение:

$$P(\text{брак}) < P(\text{ошибка})$$

И для случая, когда прибор работает так же, как честная монетка:

$$P(\text{брак}) = P(\text{ошибка})$$

Ещё для конкретной вероятности p выявления брака при условии, что прибор выдал положительный результат, можно вывести соотношение:

$$\frac{(1-p_1)p_2}{(1-p_1)p_2 + p_1(1-p_2)} = p$$

$$p_2 - p_1p_2 = pp_2 + pp_1 - 2pp_1p_2$$

$$p_1(2pp_2 - p_2 - p) = p_2(p-1)$$

$$p_1 = \frac{p_2(1-p)}{p - p_2(2p-1)} \Rightarrow P(\text{ошибка}) = \frac{P(\text{брак})(1-p)}{p - P(\text{брак})(2p-1)}$$