

Кодирование Хаффмана + heap



Кафедра экономической информатики БГУиР, 201

PISL Lesson03. Код Хаффмана + heap

- ⌘ Определение.
- ⌘ Жадный алгоритм кодирования Хаффмана.
- ⌘ Идея алгоритма
 - § наивный алгоритм
 - § оптимальный алгоритм
- ⌘ Дерево, как удобная структура для кодирования
 - § принцип работы. Код Хаффмана.
 - § Формальное описание алгоритма построения дерева
- ⌘ Куча – структура данных для приоритетных очередей, сортировок и т.д.
- ⌘ Задачи кодирования (А) декодирование (В) своя реализация кучи (С)

- ⌘ **Материалы:** <http://tinyurl.com/ei-pis!>
- ⌘ **Github:** <https://github.com/Khmelov/PISL2017-01-26>

PISL Lesson03. Код Хаффмана + heap

Советы по решению задач на программирование

- Тестируйте решение перед отправкой на git.
- **ПРИ КОПИРОВАНИИ ПАПКОК КОПИРУЙТЕ ВСЕ и тесты и задачи!**
- Если вы скопировали тест, а задачу нет – то у других людей проект не будет собираться. **По этой же причине не держите ваши решения вне git.** Даже недоделанные – отправляйте.
- Если проект все-таки не собирается из-за чужих ошибок, не исправляйте их, а просто отключите чужие папки (ПКМ -> Mark Directory -> Excluded).
- Проверяйте ваше решение при граничных значениях параметра: если в задаче на вход дается, скажем, массив размера $1 \leq n \leq 10000$, проверяйте, как ваша программа ведет себя при $n=1, 2, 10000$.
- Следите за переполнением типов. Например, если в вашем коде на перемножаются две переменные типа `int` высокого порядка, то результат перемножения может не поместиться в тип `int`.
 - Получить представление об асимптотике ожидаемого решения можно по заданным ограничениям на размер входа. Как правило, чтобы уложиться во временные рамки (несколько секунд), программа должна совершать до миллиарда операций. Соответственно, при ограничениях $1 \leq n \leq 10000$, скорее всего,
 - ожидается решение с асимптотикой $O(n^2)$ или $O(n \log n)$,
 - а при $1 \leq n \leq 10^6$ – с асимптотикой $O(n)$ или $O(n \log n)$.
- Для удобства при прохождении тестов работает `main` и наоборот.

Литература

Разобраться по сути:

- С. Дасгупта, Х. Пападимитриу, У. Вазири. Алгоритмы. МЦНМО. 2014.
 - Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. Алгоритмы: построение и анализ. Вильямс. 2013.
- Минимум для собеседований
- Лафоре Р. Структуры данных и алгоритмы в Java. Классика Computers Science. 2-е изд. — СПб.: Питер, 2013. — 704 с.: ил. — (Серия «Классика computer science»)

Минимум для собеседований

- Лафоре Р. Структуры данных и алгоритмы в Java. Классика Computers Science. 2-е изд. – СПб.: Питер, 2013. – 704 с.: ил. – (Серия «Классика computer science»)

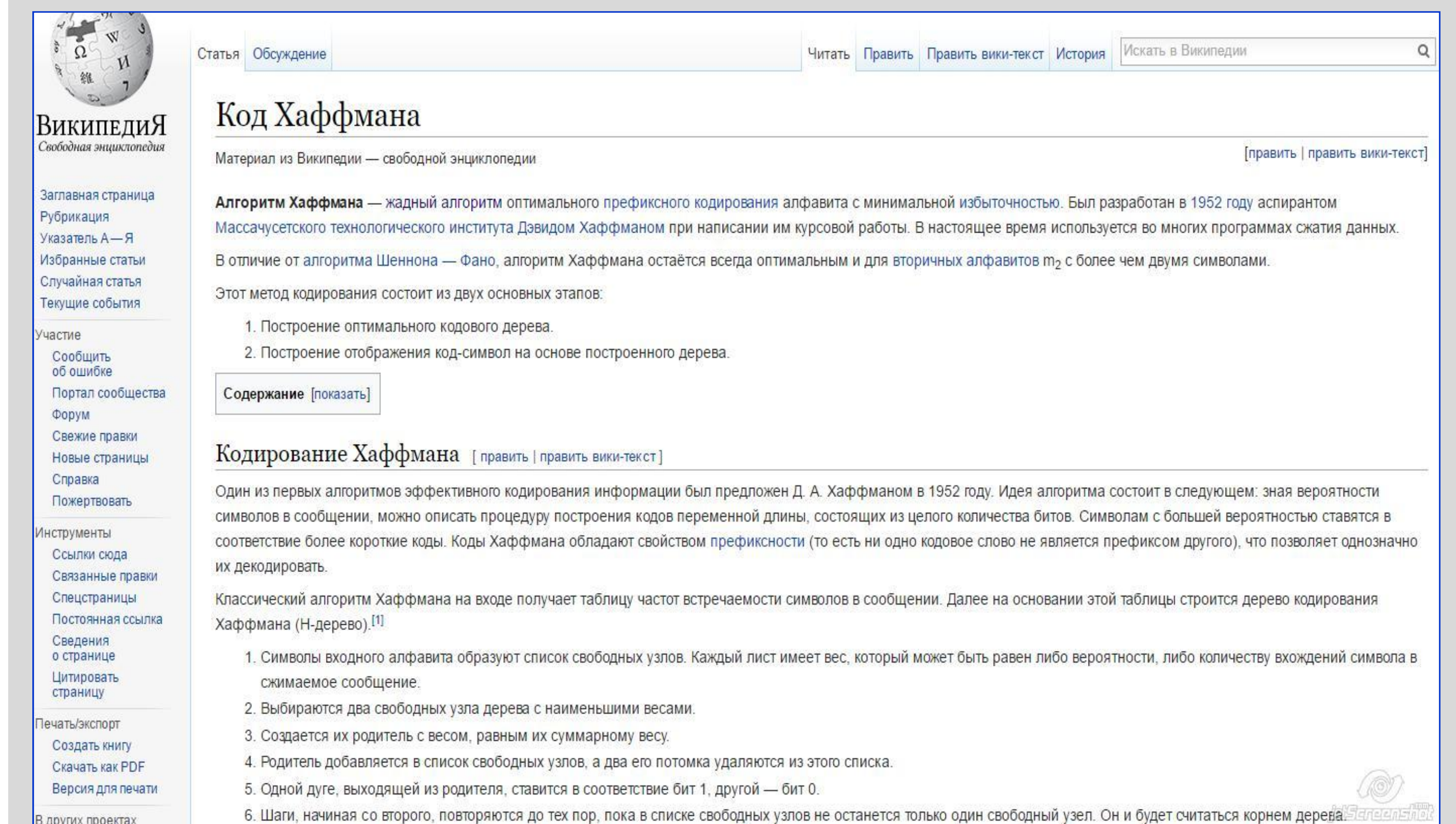
По желанию

- А. Шень. Программирование: теоремы и задачи. МЦНМО. 2014.

В качестве математической подготовки к курсу можно прочесть брошюры Александра Шеня «[Логарифм и экспонента](#)» и «[Математическая индукция](#)».

Конец документа

PISL Lesson03. Код Хаффмана + heap



PISL Lesson03. Код Хаффмана + heap

Допустим, у нас есть следующая таблица частот:

Символ	А	Б	В	Г	Д
Частота	15	7	6	6	5

Этот процесс можно представить как построение дерева, корень которого — символ с суммой вероятностей объединенных символов, получившийся при объединении символов из последнего шага, его p_0 потомков — символы из предыдущего шага и т. д.

Чтобы определить код для каждого из символов, входящих в сообщение, мы должны пройти путь от листа дерева, соответствующего текущему символу, до его корня, накапливая биты при перемещении по ветвям дерева (первая ветвь в пути соответствует младшему биту). Полученная таким образом последовательность битов является кодом данного символа, записанным в обратном порядке.

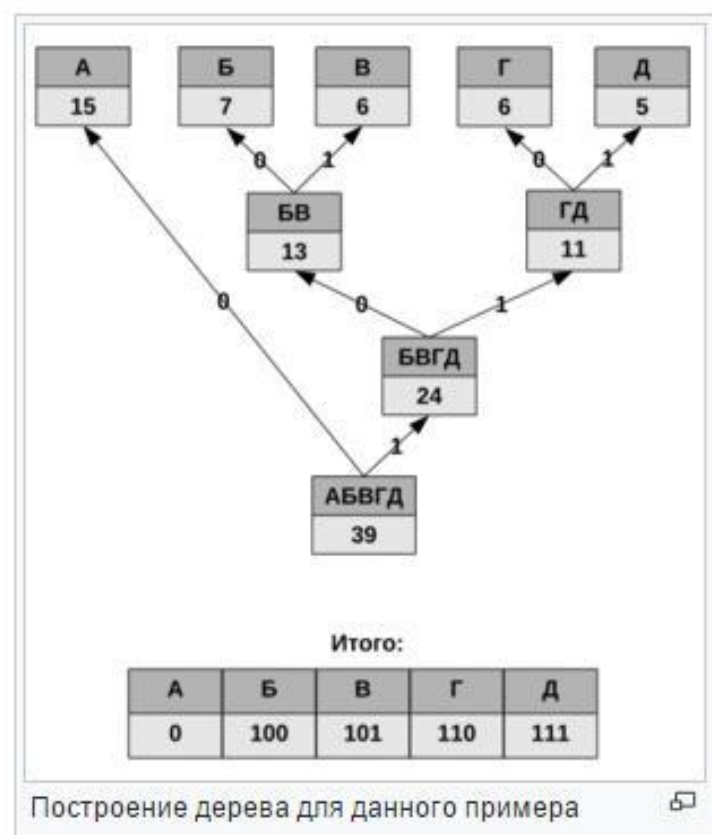
Для данной таблицы символов коды Хаффмана будут выглядеть следующим образом.

Символ	А	Б	В	Г	Д
Код	0	100	101	110	111

Поскольку ни один из полученных кодов не является префиксом другого, они могут быть однозначно декодированы при чтении их из потока. Кроме того, наиболее частый символ сообщения А закодирован наименьшим количеством бит, а наиболее редкий символ Д — наибольшим.

При этом общая длина сообщения, состоящего из приведённых в таблице символов, составит 87 бит (в среднем 2,2308 бита на символ). При использовании равномерного кодирования общая длина сообщения составила бы 117 бит (ровно 3 бита на символ). Заметим, что энтропия источника, независимым образом порождающего символы с указанными частотами, составляет ~2,1858 бита на символ, то есть избыточность построенного для такого источника кода Хаффмана, понимаемая как отличие среднего числа бит на символ от энтропии, составляет менее 0,05 бит на символ.

Классический алгоритм Хаффмана имеет ряд существенных недостатков. Во-первых, для восстановления содержимого сжатого сообщения декодер должен знать таблицу частот, которой пользовался кодер. Следовательно, длина сжатого сообщения увеличивается на длину таблицы частот, которая должна посылаться впереди данных, что может свести на нет все усилия по сжатию сообщения. Кроме того, необходимость наличия полной частотной статистики перед началом собственно кодирования требует двух проходов по сообщению: одного для построения модели сообщения (таблицы частот и H-дерева), другого для собственно кодирования. Во-вторых, избыточность кодирования обращается в ноль лишь в тех случаях, когда вероятности кодируемых символов являются обратными степенями числа 2. В-третьих, для источника с энтропией, не превышающей 1 (например, для двоичного источника), непосредственное применение кода Хаффмана бессмысленно.



5

Кафедра экономической информатики Бгуир 2017

PISL Lesson03. Код Хаффмана + heap

Сжатие данных

Вход: строка s .

Выход: бинарный код символов строки s , обеспечивающий кратчайшее представление s .

Пример

$s = abacabad$

коды символов: а: 00, b: 01, с: 10, d: 11

закодированная строка: 0001001000010011 (16 битов)

6

Кафедра экономической информатики Бгуир 2017

PISL Lesson03. Код Хаффмана + heap

Коды переменной длины

- Естественная идея: присвоить более короткие коды более частым символам.

7

Кафедра экономической информатики Бгуир 2017

PISL Lesson03. Код Хаффмана + heap

Коды переменной длины

- Естественная идея: присвоить более короткие коды более частым символам.
- $s = abacabad$
коды символов: а: 0, b: 10, с: 110, d: 111
закодированная строка: 01001100100111 (14 битов)

8

Кафедра экономической информатики Бгуир 2017

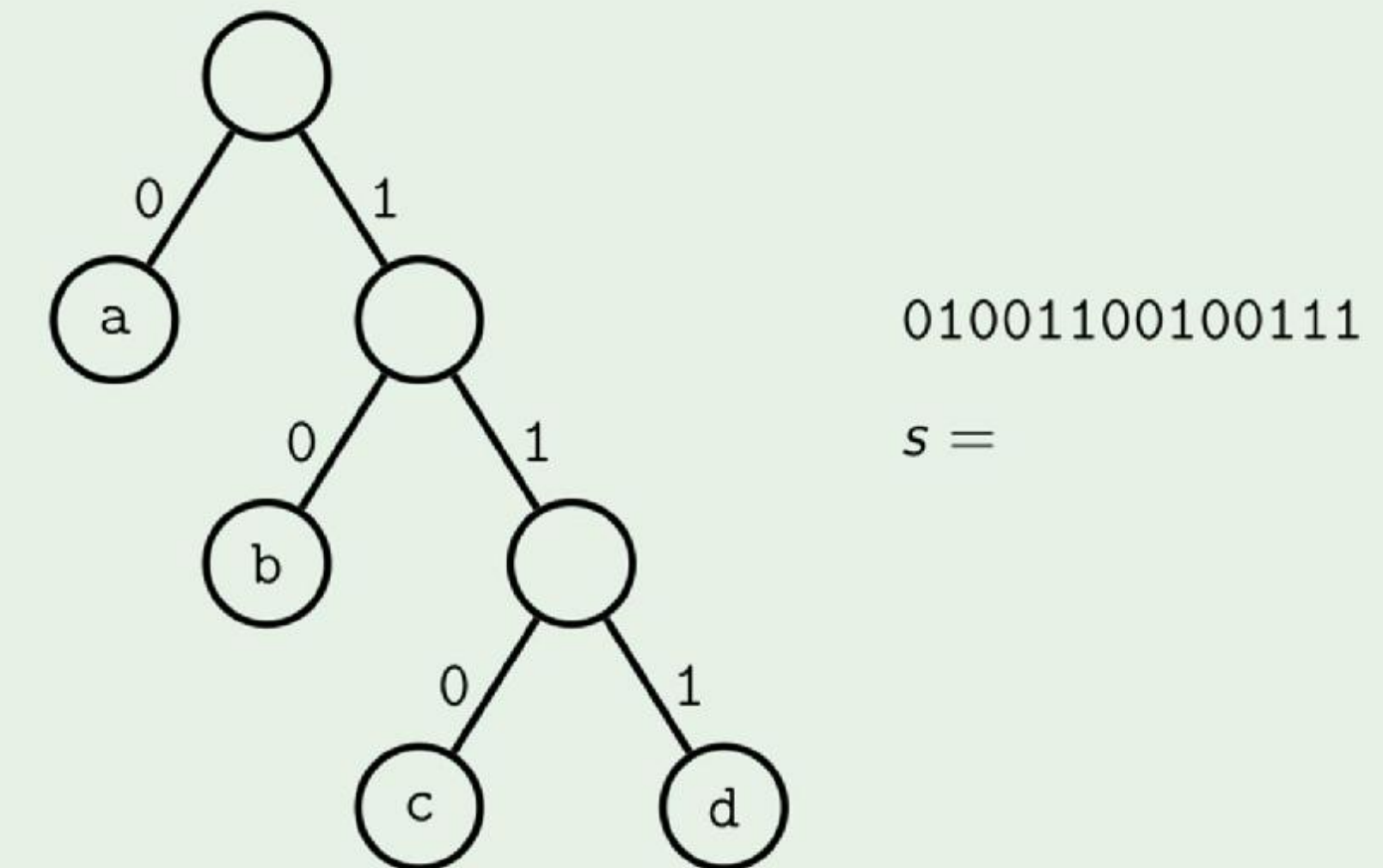
Коды переменной длины

- Естественная идея: присвоить более короткие коды более частым символам.
- $s = \text{abacabad}$
коды символов: a: 0, b: 10, c: 110, d: 111
закодированная строка: 01001100100111 (14 битов)
- Код называется **беспрефиксным**, если никакой код символа не является префиксом другого кода символа.

9

Декодирование на примере

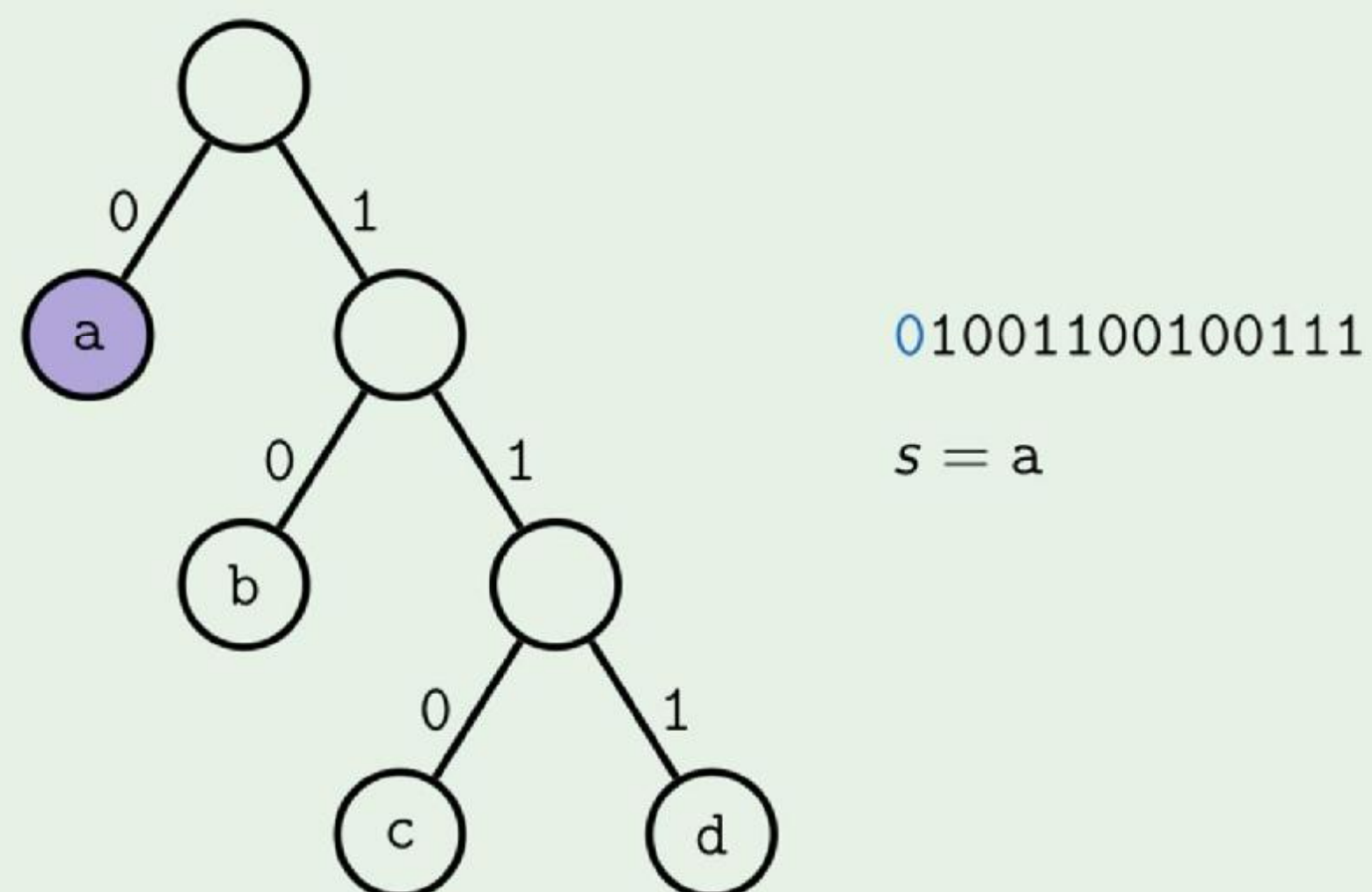
Пример



10

Декодирование на примере

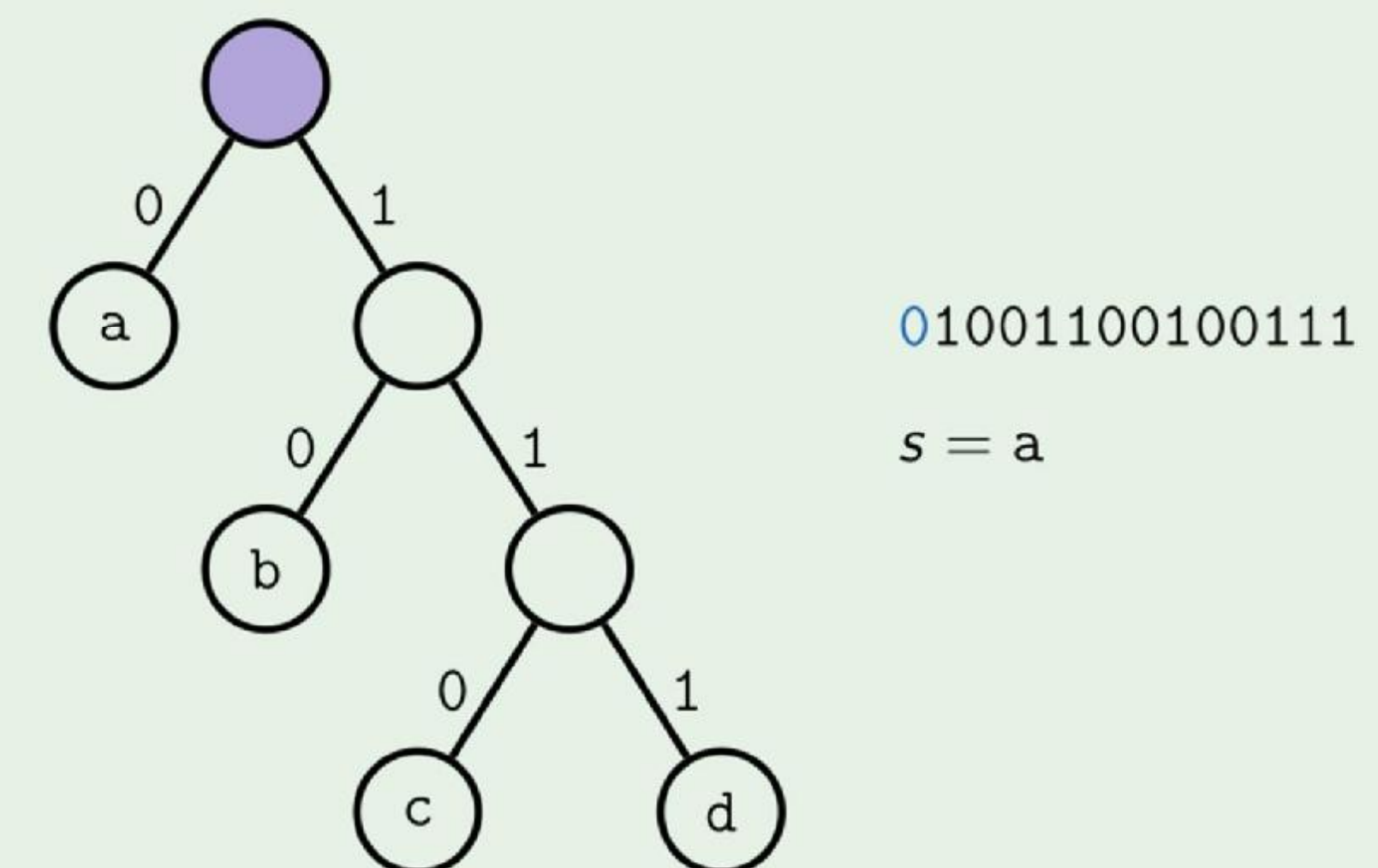
Пример



11

Декодирование на примере

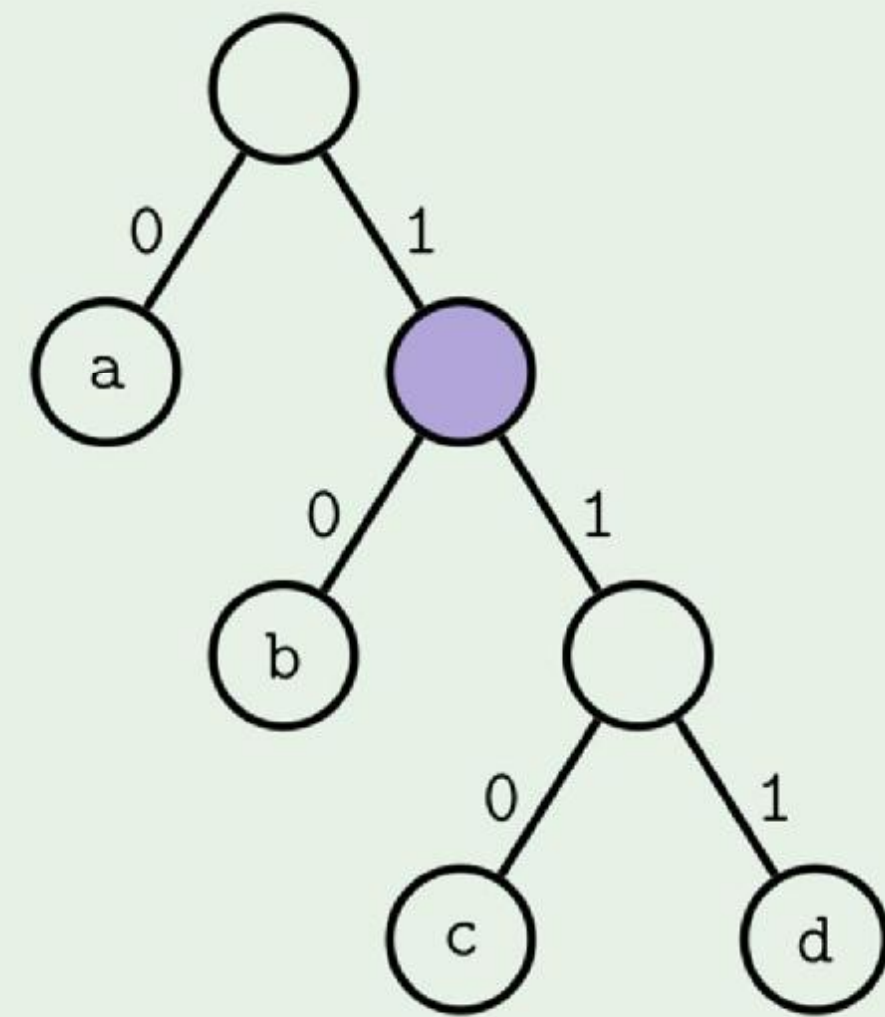
Пример



12

Декодирование на примере

Пример



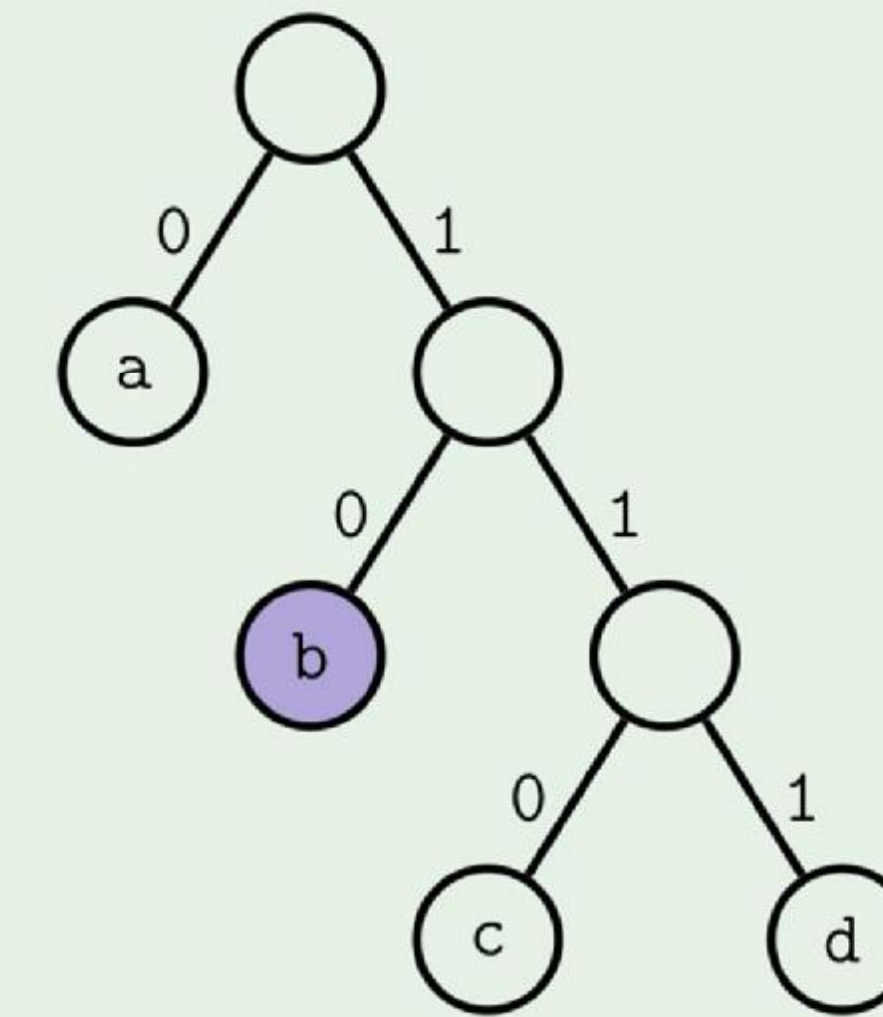
01001100100111

 $s = a$

13

Декодирование на примере

Пример



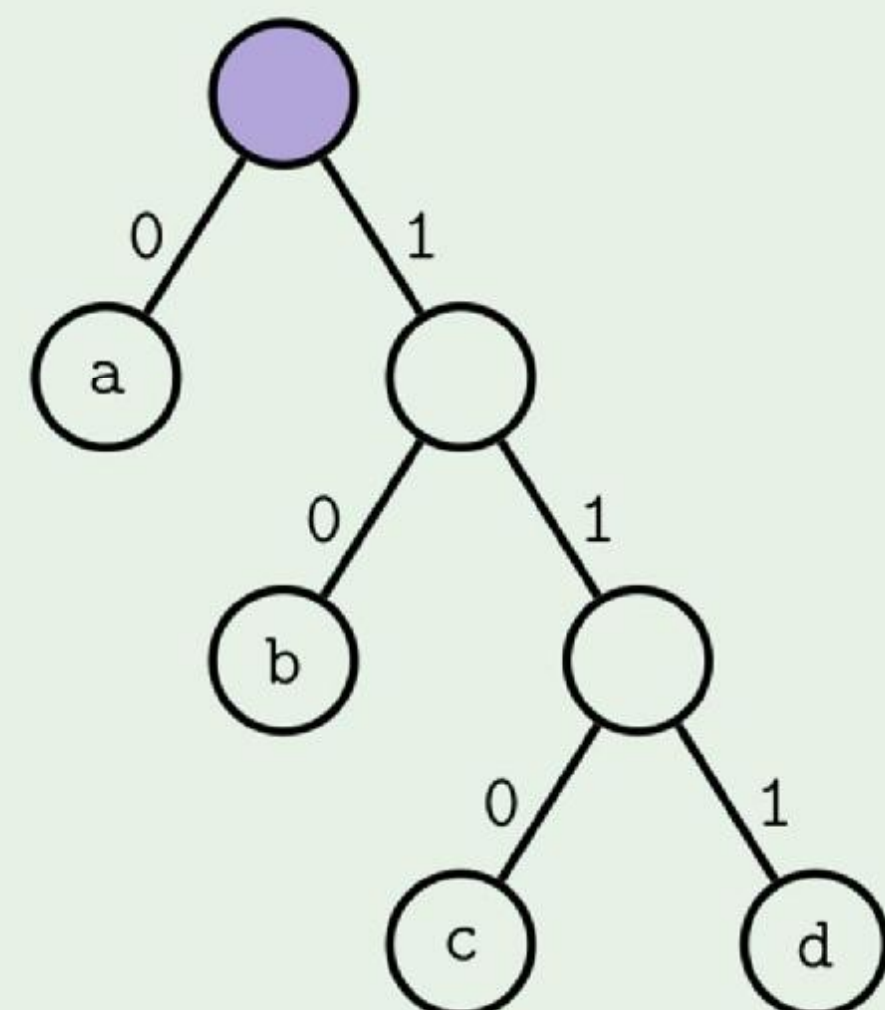
01001100100111

 $s = ab$

14

Декодирование на примере

Пример



01001100100111

 $s = ab$

15

Код Хаффмана

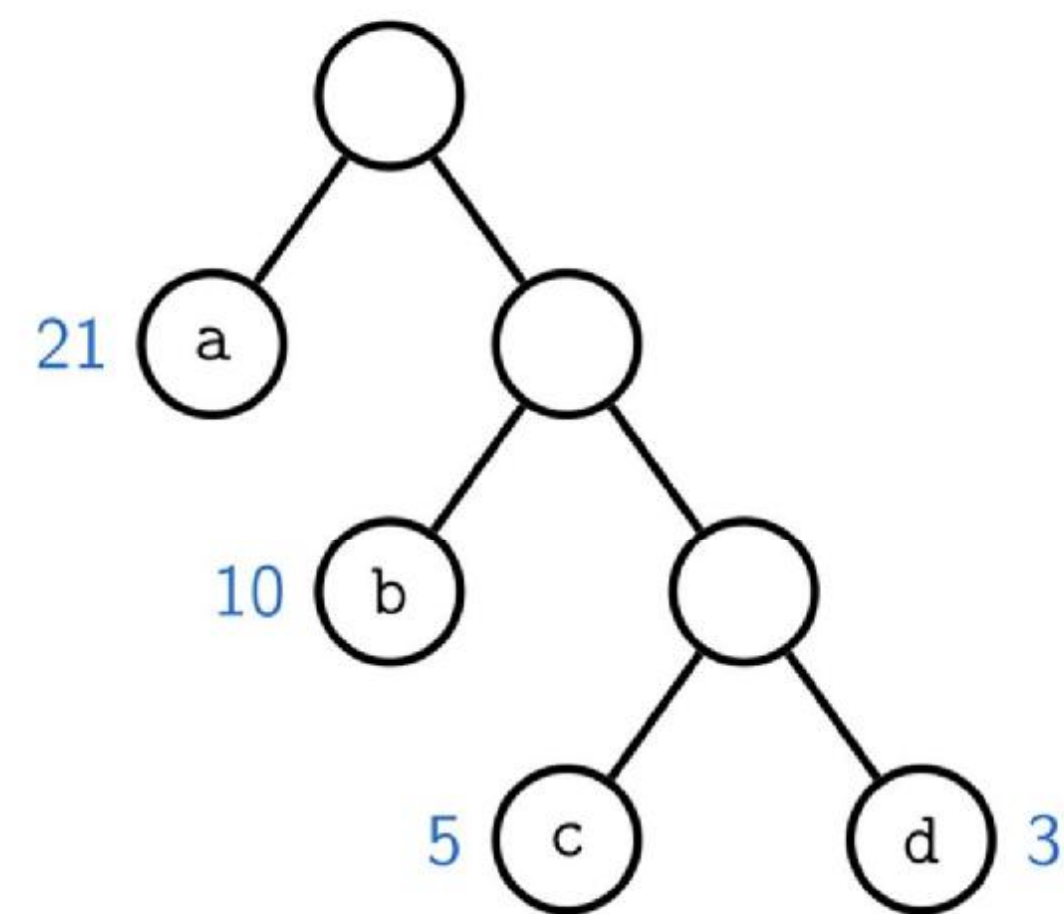
Код Хаффмана

Вход: частоты символов $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{N}$.Выход: строго двоичное дерево (у каждой вершины либо ноль, либо два сына), листья которого помечены частотами f_1, \dots, f_n , минимизирующее

$$\sum_{i=1}^n f_i \cdot (\text{глубина листа } f_i).$$

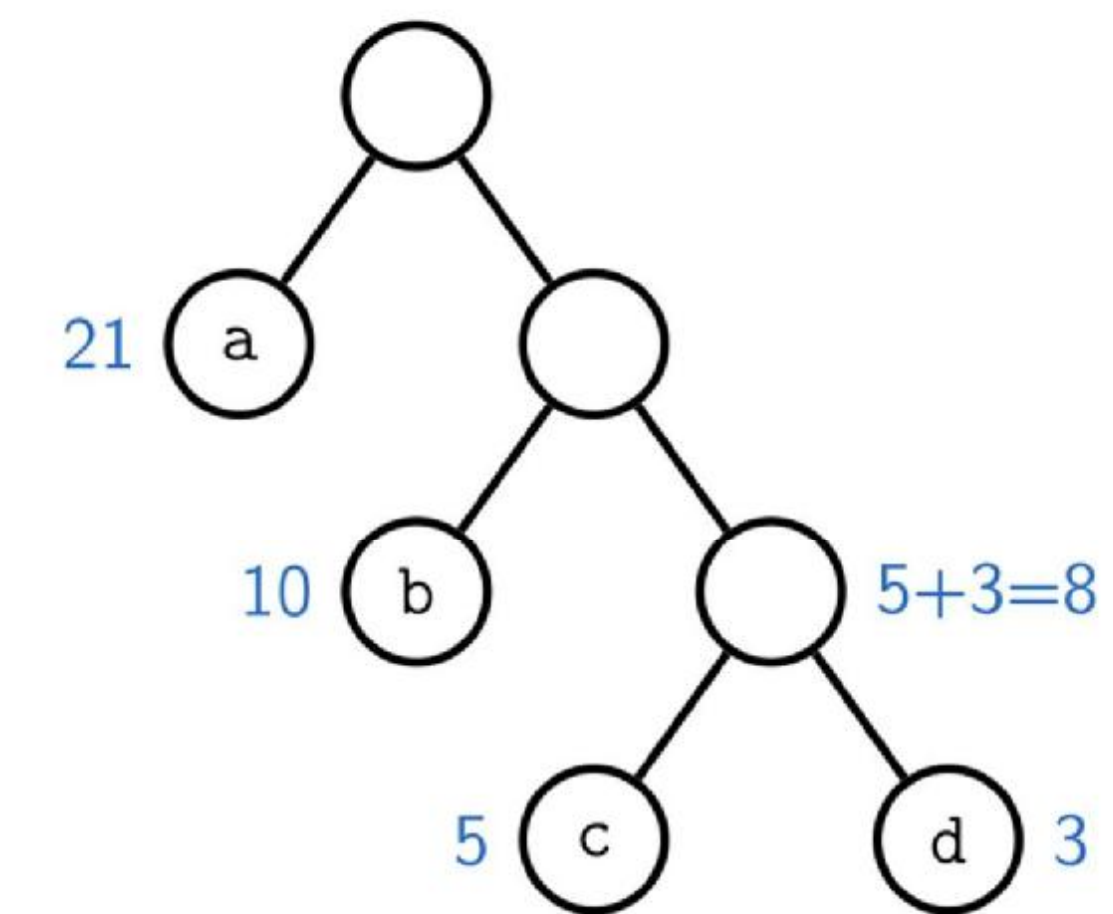
16

Частоты для внутренних вершин



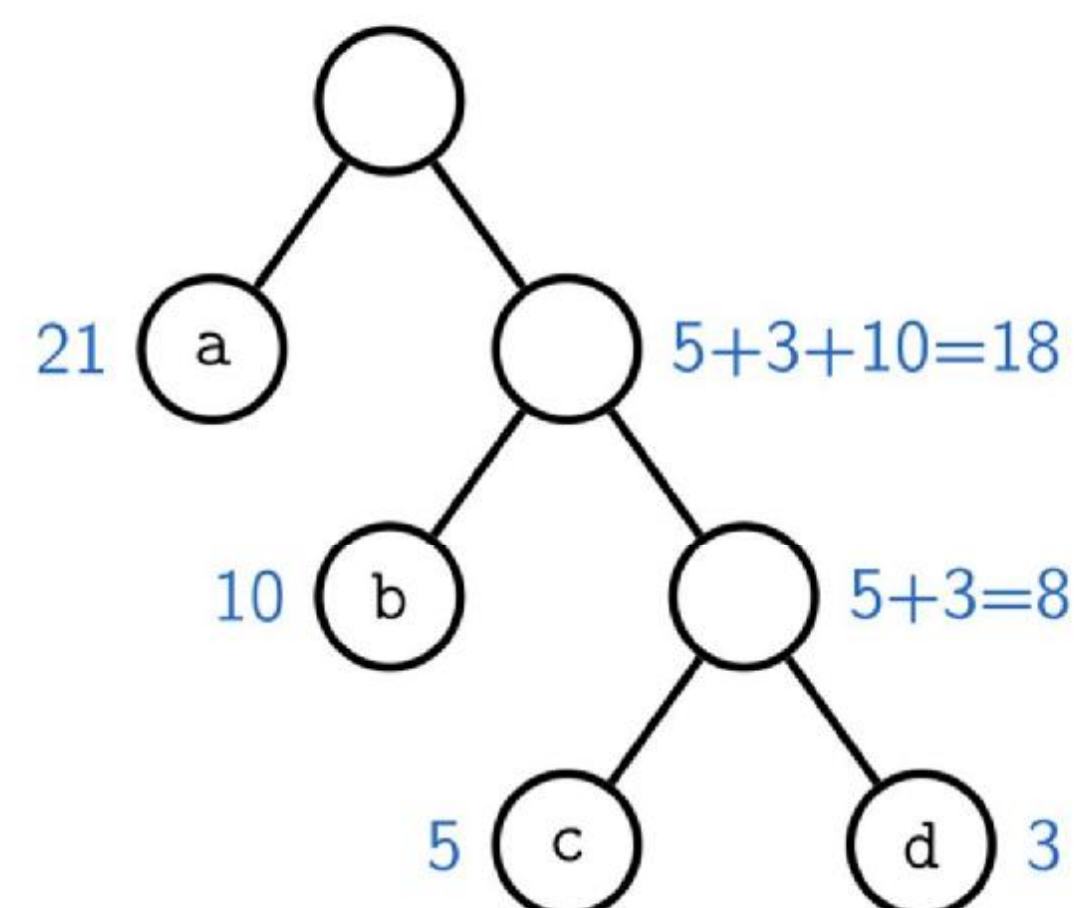
17

Частоты для внутренних вершин



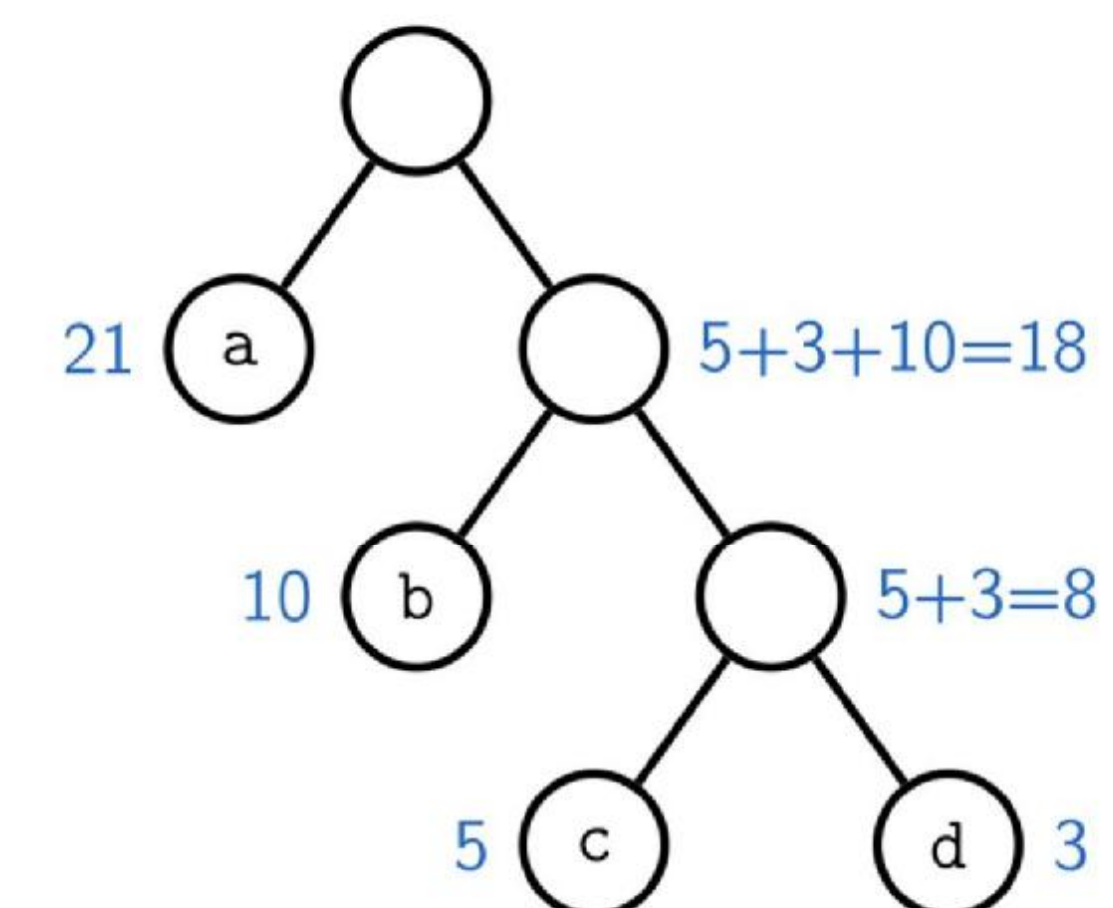
18

Частоты для внутренних вершин



19

Частоты для внутренних вершин



Частотой (некорневой) вершины назовём количество раз, которое вершина будет посещена в процессе кодировки/декодировки.

20

Надёжный шаг

- Таким образом, мы ищем строго двоичное дерево с минимальной суммой пометок в вершинах, в котором листья помечены входными частотами, а внутренние вершины — суммами пометок их детей.

21

Надёжный шаг

- Таким образом, мы ищем строго двоичное дерево с минимальной суммой пометок в вершинах, в котором листья помечены входными частотами, а внутренние вершины — суммами пометок их детей.
- Двумя наименьшими частотами помечены листья на нижнем уровне.

22

Надёжный шаг

- Таким образом, мы ищем строго двоичное дерево с минимальной суммой пометок в вершинах, в котором листья помечены входными частотами, а внутренние вершины — суммами пометок их детей.
- Двумя наименьшими частотами помечены листья на нижнем уровне.
- **Надёжный жадный шаг:** выбрать две минимальные частоты f_i и f_j , сделать их детьми новой вершины с пометкой $f_i + f_j$; выкинуть частоты f_i и f_j , добавить $f_i + f_j$.

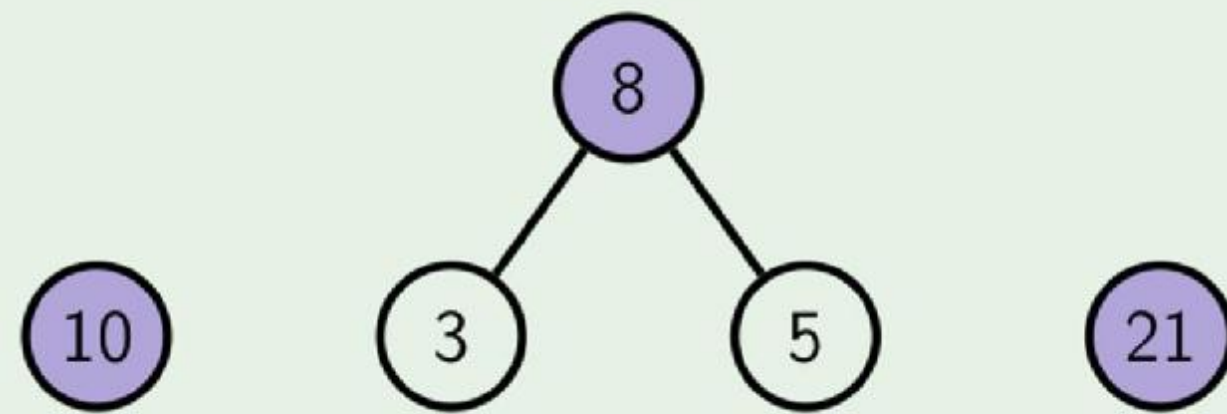
23

Пример

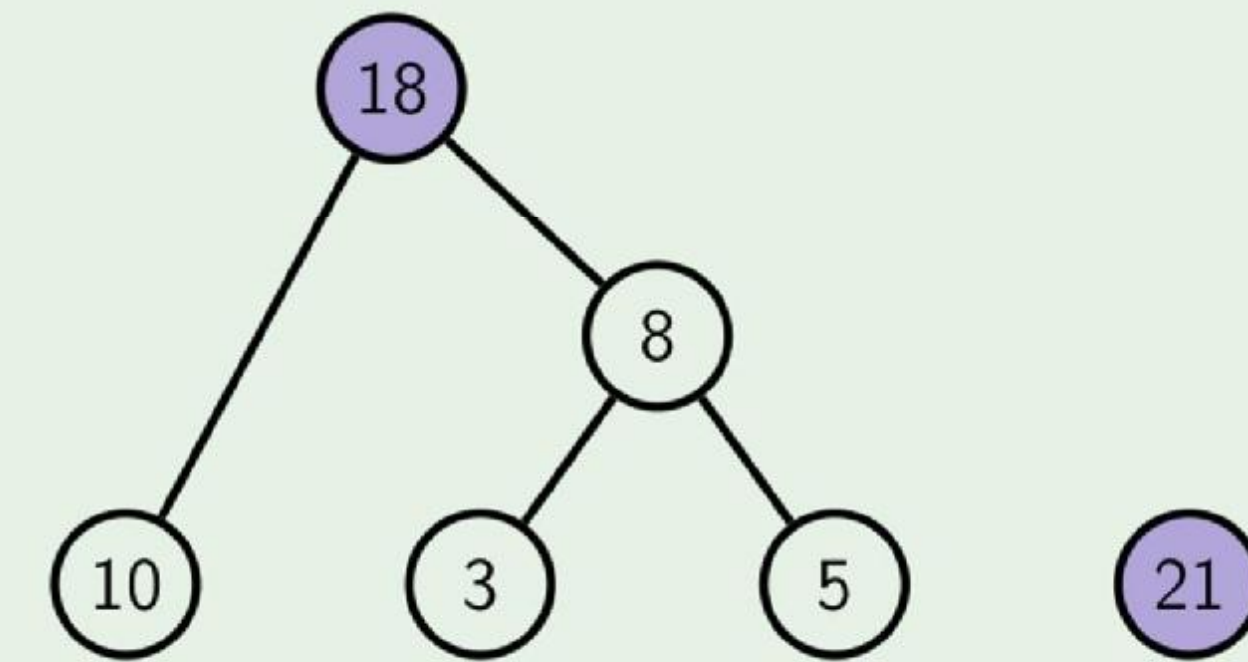


24

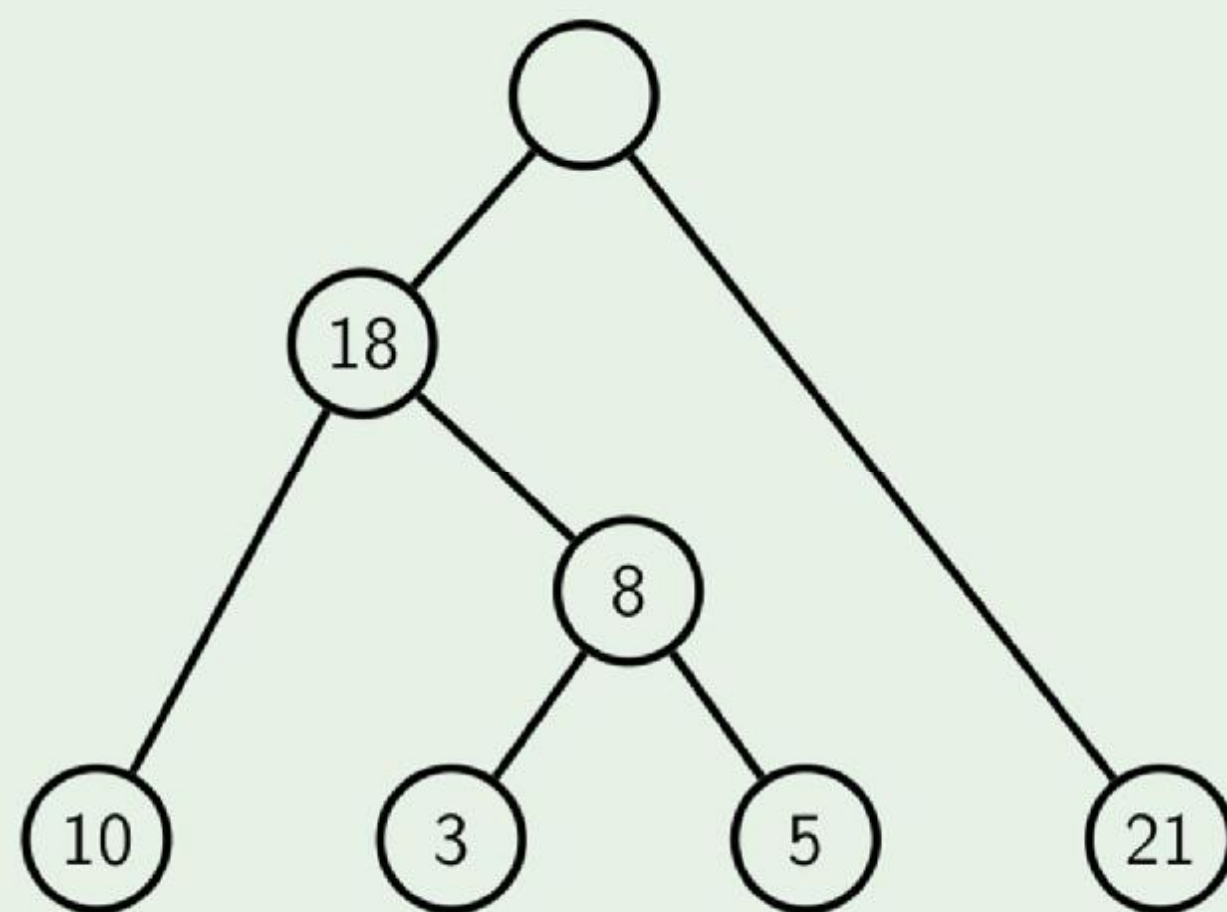
Пример



Пример



Пример



Очередь с приоритетами

`INSERT(p)` добавляет новый элемент с приоритетом *p*
`EXTRACTMIN()` извлекает из очереди элемент с минимальным приоритетом

Алгоритм

процедура HUFFMAN($F[1 \dots n]$)

```

 $H \leftarrow$  очередь с приоритетами
для  $i$  от 1 до  $n$ :
    INSERT( $H, (i, F[i])$ )
для  $k$  от  $n+1$  до  $2n-1$ :
    ( $i, F[i]$ )  $\leftarrow$  EXTRACTMIN( $H$ )
    ( $j, F[j]$ )  $\leftarrow$  EXTRACTMIN( $H$ )
    создать вершину  $k$  с детьми  $i, j$ 
     $F[k] = F[i] + F[j]$ 
    INSERT( $H, (k, F[k])$ )

```

29

Алгоритм

процедура HUFFMAN($F[1 \dots n]$)

```

 $H \leftarrow$  очередь с приоритетами
для  $i$  от 1 до  $n$ :
    INSERT( $H, (i, F[i])$ )
для  $k$  от  $n+1$  до  $2n-1$ :
    ( $i, F[i]$ )  $\leftarrow$  EXTRACTMIN( $H$ )
    ( $j, F[j]$ )  $\leftarrow$  EXTRACTMIN( $H$ )
    создать вершину  $k$  с детьми  $i, j$ 
     $F[k] = F[i] + F[j]$ 
    INSERT( $H, (k, F[k])$ )

```

30

Алгоритм

процедура HUFFMAN($F[1 \dots n]$)

```

 $H \leftarrow$  очередь с приоритетами
для  $i$  от 1 до  $n$ :
    INSERT( $H, (i, F[i])$ )
для  $k$  от  $n+1$  до  $2n-1$ :
    ( $i, F[i]$ )  $\leftarrow$  EXTRACTMIN( $H$ )
    ( $j, F[j]$ )  $\leftarrow$  EXTRACTMIN( $H$ )
    создать вершину  $k$  с детьми  $i, j$ 
     $F[k] = F[i] + F[j]$ 
    INSERT( $H, (k, F[k])$ )

```

Время работы: $O(n^2)$, если очередь с приоритетами реализована на базе массива, $O(n \log n)$ — если на базе кучи (разберём в следующей лекции).

31

Очередь с приоритетами

INSERT(p) добавляет новый элемент с приоритетом p
REMOVE(it) удаляет элемент, на который указывает итератор it
GETMIN() возвращает элемент с минимальным приоритетом
EXTRACTMIN() извлекает из очереди элемент с минимальным приоритетом
CHANGEPRIORITY(it, p) изменяет приоритет элемента, на который указывает итератор it , на p

32

Двоичная куча — Вики

https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Двоичная_куча

Определение

Определение:

Двоичная куча или пирамида (англ. *Binary heap*) — такое двоичное подвешенное дерево, для которого выполнены следующие три условия:

- Значение в любой вершине не меньше (если куча для максимума), чем значения её потомков.
- На i -ом слое 2^i вершин, кроме последнего. Слои нумеруются с нуля.
- Последний слой заполнен слева направо (как показано на рисунке)

Удобнее всего двоичную кучу хранить в виде массива $a[0..n-1]$, у которого нулевой элемент, $a[0]$ — элемент в корне, а потомками элемента $a[i]$ являются $a[2i+1]$ и $a[2i+2]$. Высота кучи определяется как высота двоичного дерева. То есть она равна количеству рёбер в самом длинном простом пути, соединяющем корень кучи с одним из её листьев. Высота кучи есть $O(\log n)$, где n — количество узлов дерева.

Чаще всего используют кучи для минимума (когда предок не больше детей) и для максимума (когда предок не меньше детей).

Двоичные кучи используют, например, для того, чтобы извлекать минимум из набора чисел за $O(\log n)$. Они являются частным случаем приоритетных очередей.

Базовые процедуры

Восстановление свойств кучи

Если в куче изменяется один из элементов, то она может перестать удовлетворять свойству упорядоченности. Для восстановления этого свойства служат процедуры `siftDown` (просивание вниз) и `siftUp` (просивание вверх). Если значение изменённого элемента увеличивается, то свойства кучи восстанавливаются функцией `siftDown`. Работа процедуры: если i -й элемент меньше, чем его сыновья, всё поддерево уже является кучей, и делать ничего не надо. В противном случае меняем местами i -й элемент с наименьшим из его сыновей, после чего выполняем `siftDown` для этого сына. Процедура выполняется за время $O(\log n)$.

siftDown

```
function siftDown(i : int):
    while 2 * i + 1 < a.heapSize
        left = 2 * i + 1
        right = 2 * i + 2
        j = left
        if right < a.heapSize and a[right] < a[left]
            j = right
        if a[i] < a[j]
            break
        swap(a[i], a[j])
        i = j
```

Пример кучи для минимума

Хранение кучи в массиве, красная стрелка — левый сын, зелёная — правый

Простейшие реализации

- массив: GETMIN имеет время работы $O(n)$



Простейшие реализации

- массив: GETMIN имеет время работы $O(n)$



- упорядоченный массив: GETMIN — $O(1)$, REMOVE — $O(n)$



Простейшие реализации

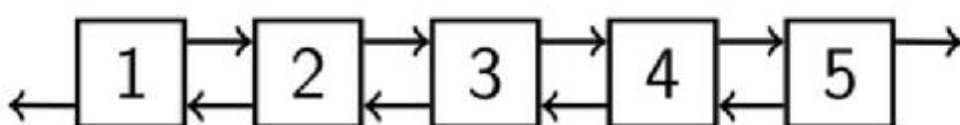
- массив: GETMIN имеет время работы $O(n)$



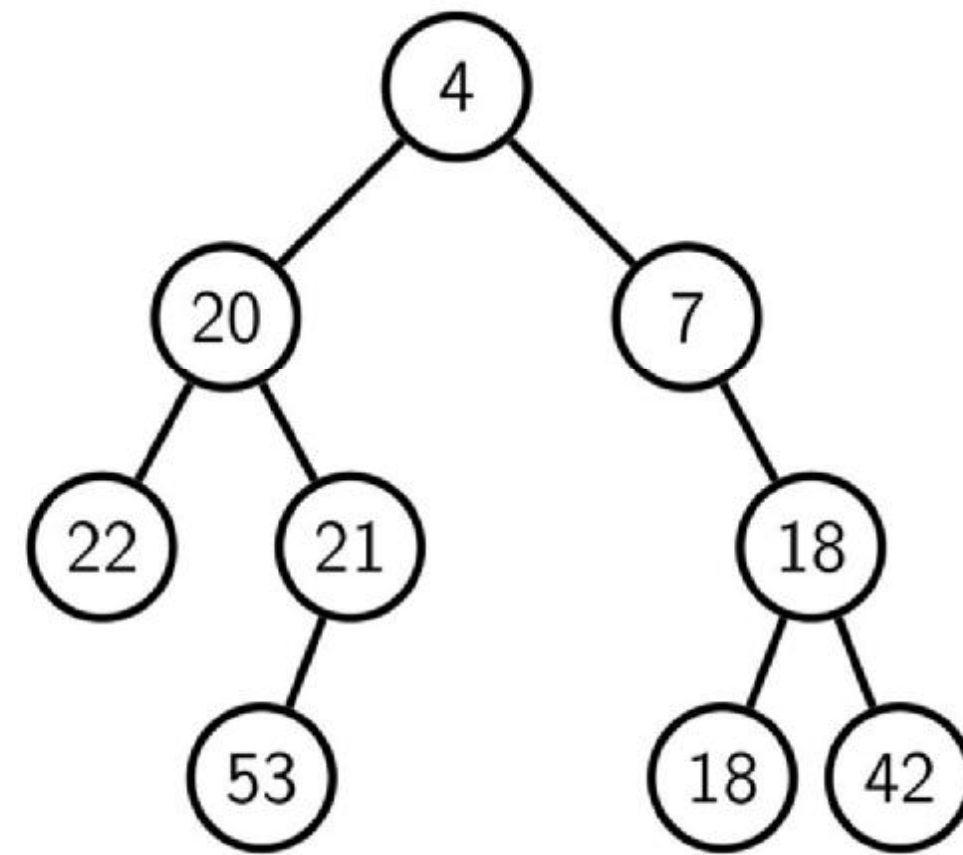
- упорядоченный массив: GETMIN — $O(1)$, REMOVE — $O(n)$



- упорядоченный список: GETMIN and REMOVE — $O(1)$, INSERT — $O(n)$



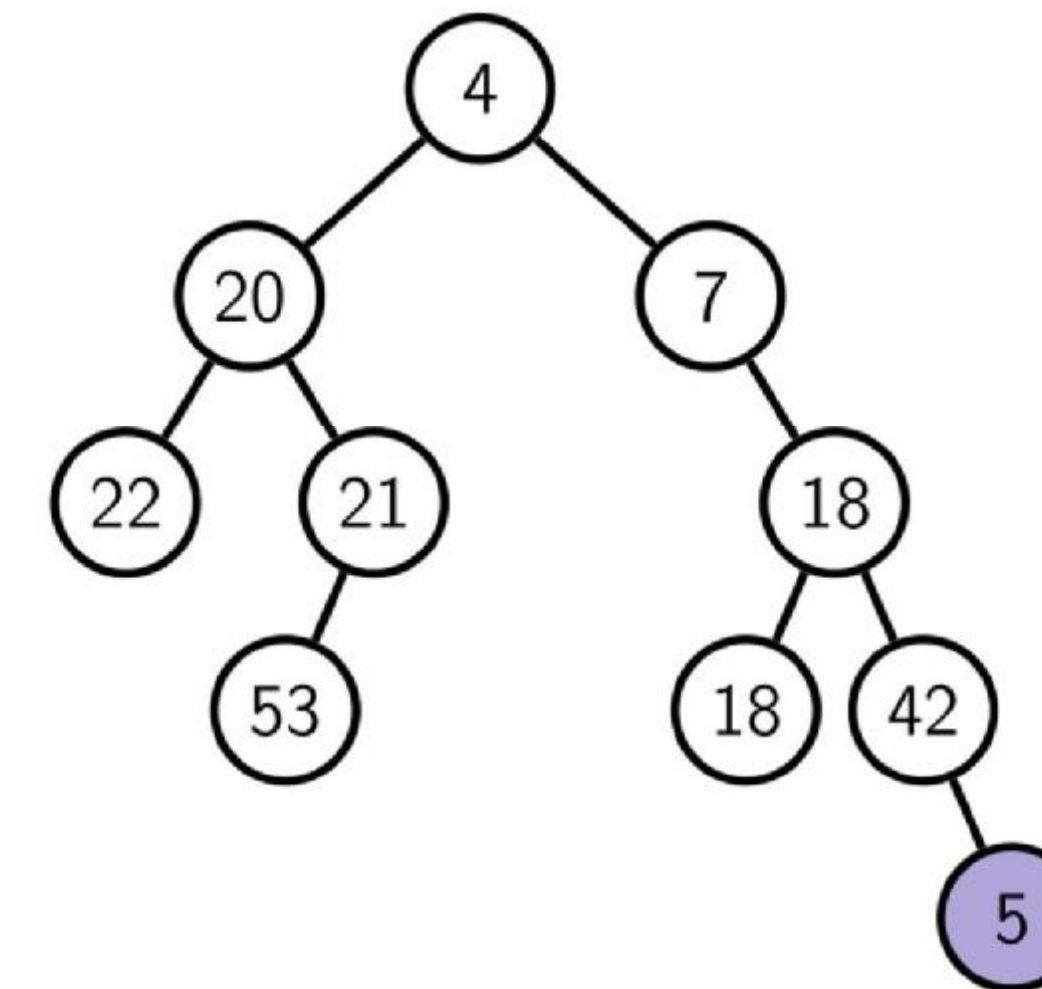
Двоичная (мин-)куча



- **основное свойство (мин-)кучи:** значение вершины \leq значений её детей
- минимальное значение хранится в корне, поэтому GETMIN работает за время $O(1)$

37

Вставка и просеивание вверх

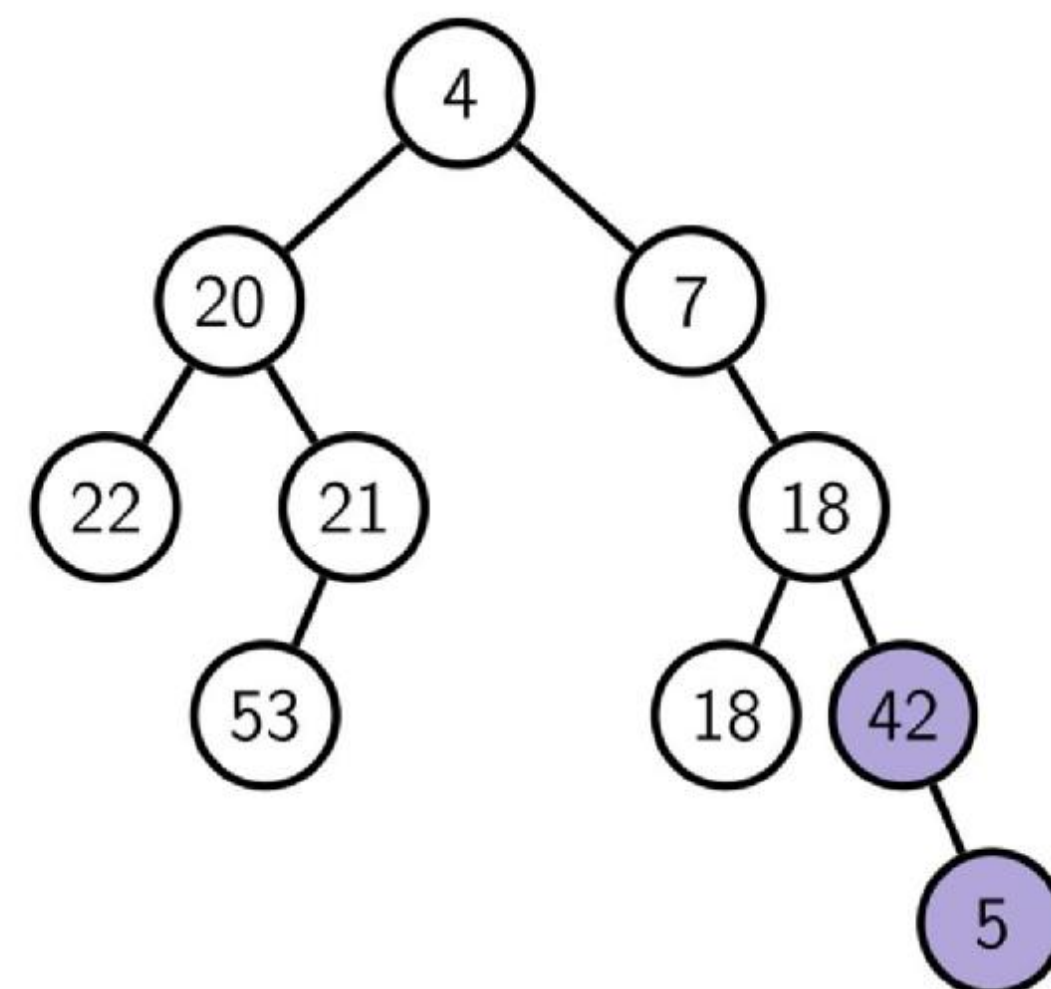


- подвесим новый элемент листом в произвольное место

```
function siftUp(i : int):
  while a[i] < a[(i - 1) / 2] // i == 0 - мы в корне
    swap(a[i], a[(i - 1) / 2])
    i = (i - 1) / 2
```

38

Вставка и просеивание вверх

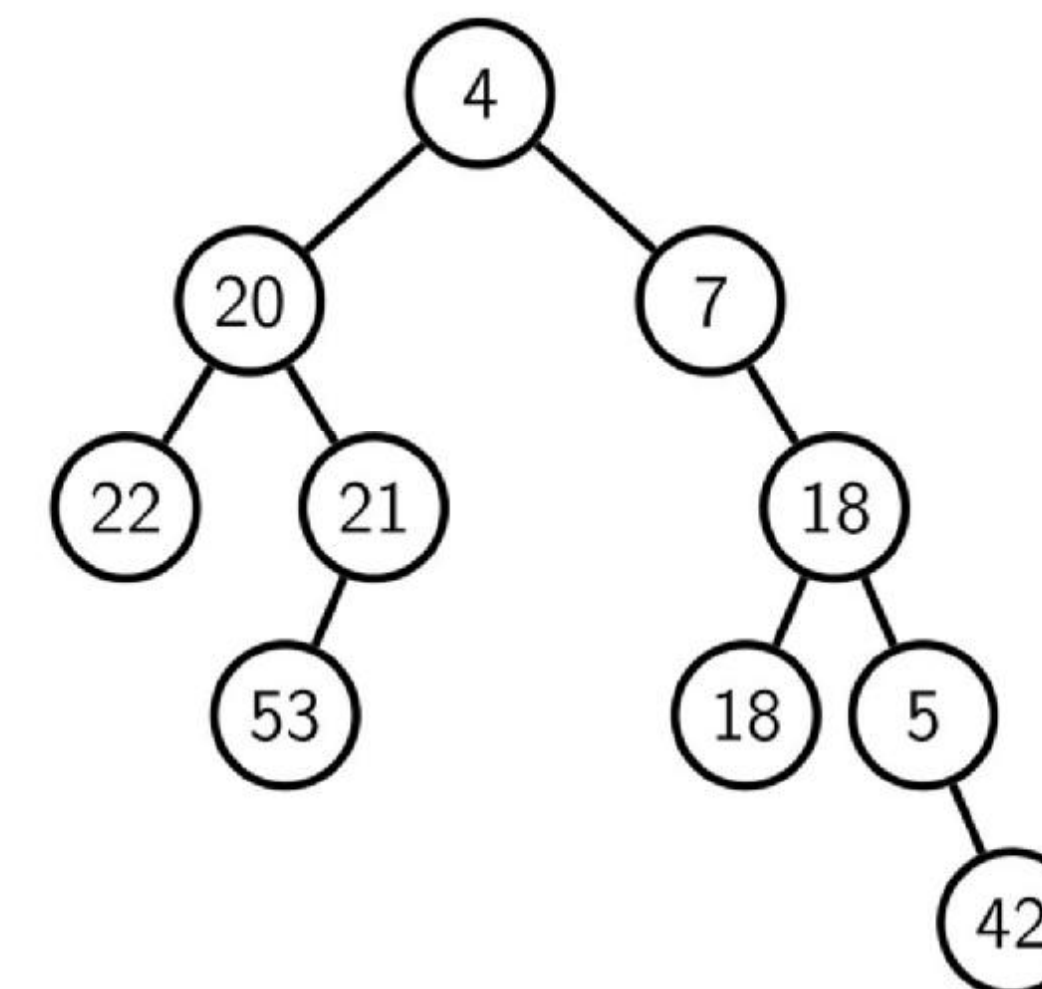


- подвесим новый элемент листом в произвольное место
- начнём чинить свойство кучи, просеивая проблемную вершину вверх

```
function siftUp(i : int):
  while a[i] < a[(i - 1) / 2] // i == 0 - мы в корне
    swap(a[i], a[(i - 1) / 2])
    i = (i - 1) / 2
```

39

Вставка и просеивание вверх

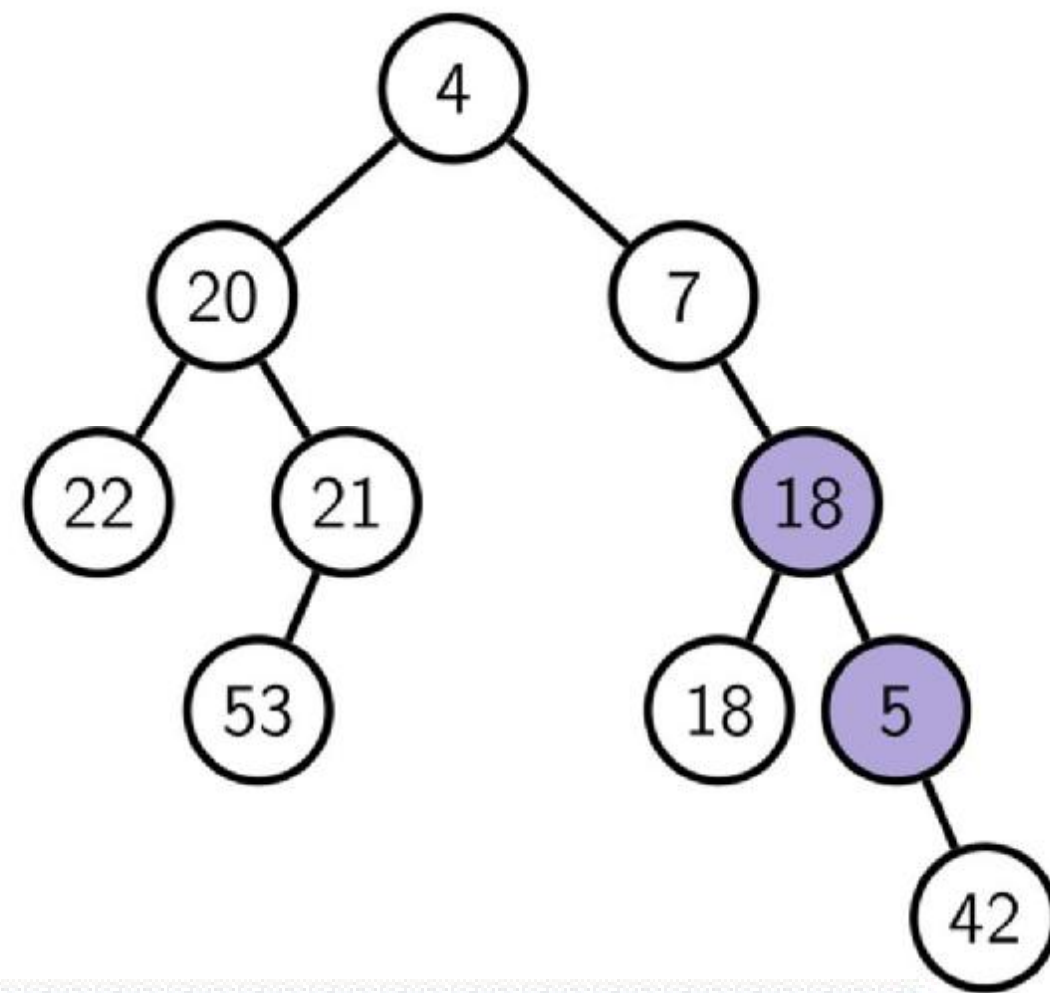


- подвесим новый элемент листом в произвольное место
- начнём чинить свойство кучи, просеивая проблемную вершину вверх

```
function siftUp(i : int):
  while a[i] < a[(i - 1) / 2] // i == 0 - мы в корне
    swap(a[i], a[(i - 1) / 2])
    i = (i - 1) / 2
```

40

Вставка и просеивание вверх

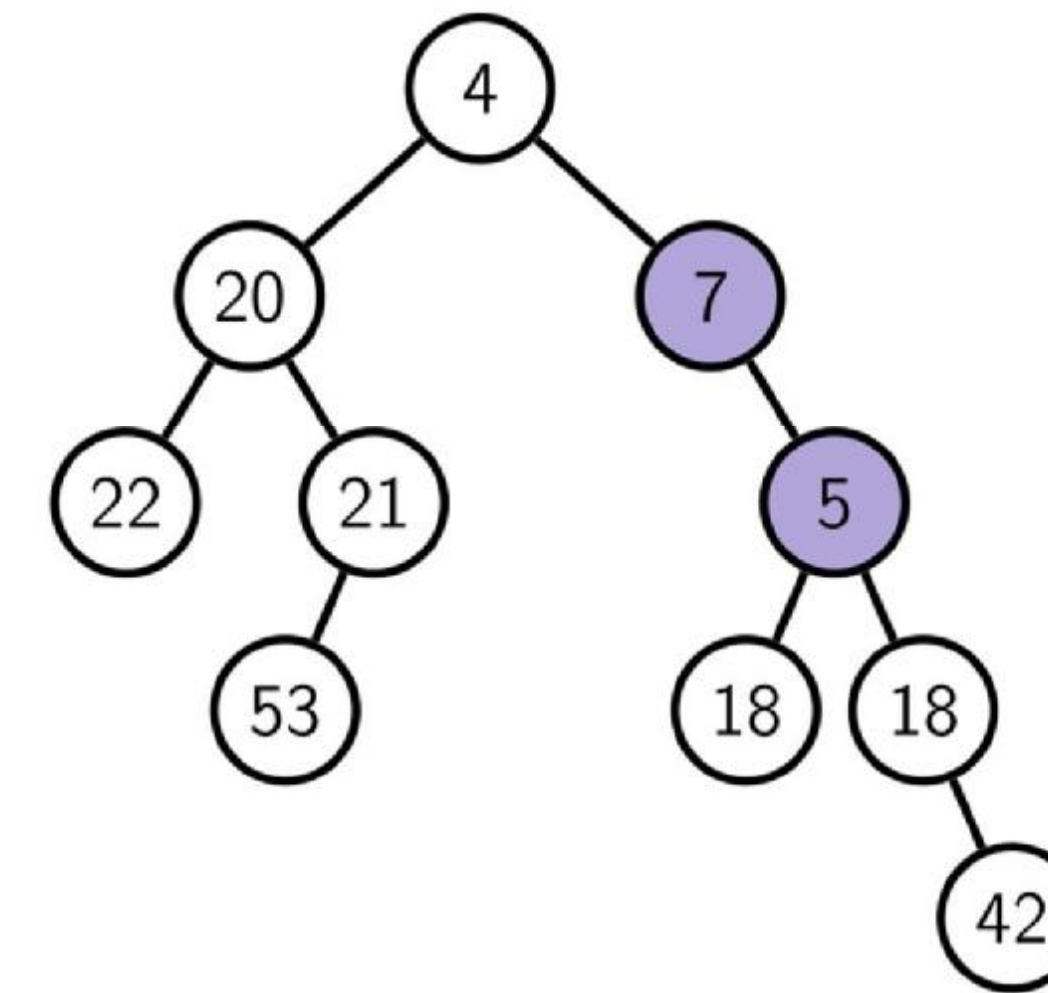


- подвесим новый элемент листом в произвольное место
- начнём чинить свойство кучи, просеивая проблемную вершину вверх

```
function siftUp(i : int):
  while a[i] < a[(i - 1) / 2]    // i == 0 — мы в корне
    swap(a[i], a[(i - 1) / 2])
    i = (i - 1) / 2
```

41

Вставка и просеивание вверх

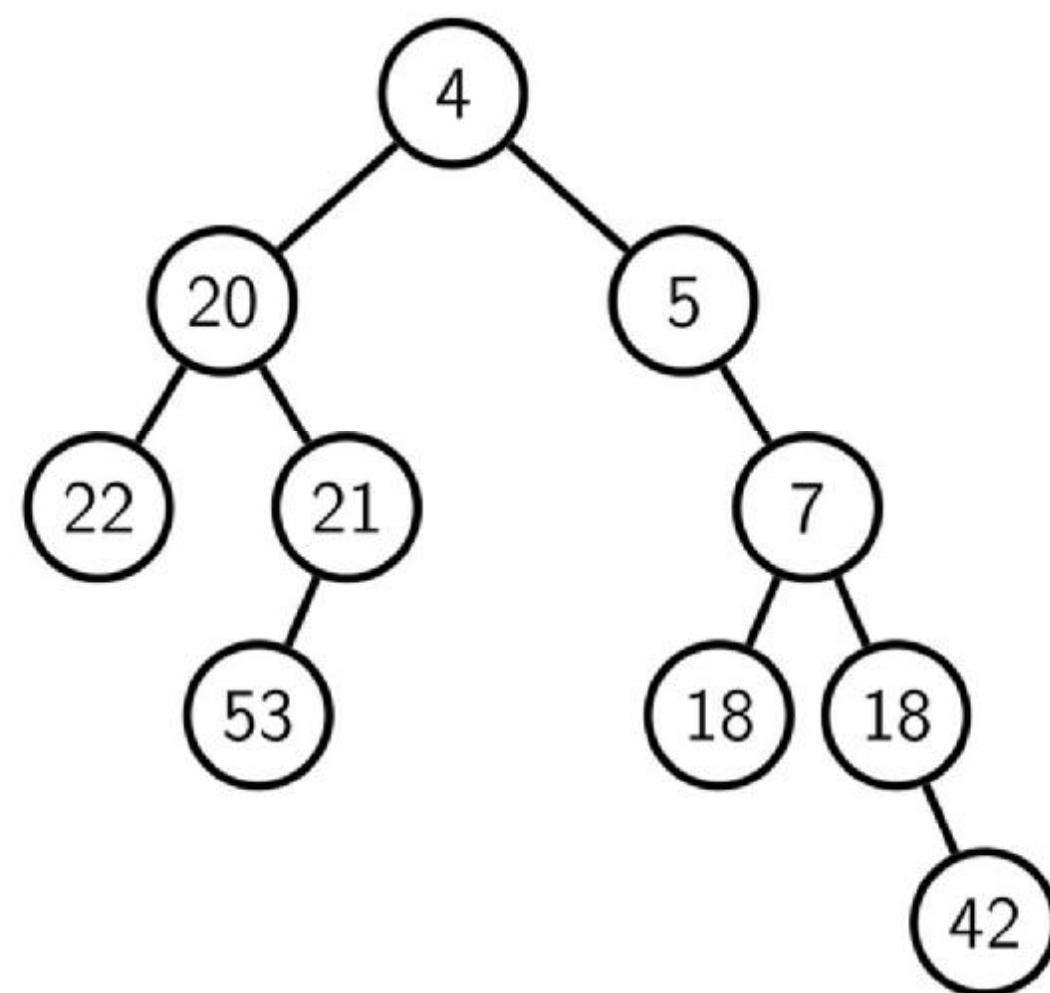


- подвесим новый элемент листом в произвольное место
- начнём чинить свойство кучи, просеивая проблемную вершину вверх

```
function siftUp(i : int):
  while a[i] < a[(i - 1) / 2]    // i == 0 — мы в корне
    swap(a[i], a[(i - 1) / 2])
    i = (i - 1) / 2
```

42

Вставка и просеивание вверх



- подвесим новый элемент листом в произвольное место
- начнём чинить свойство кучи, просеивая проблемную вершину вверх

43

Время работы операции вставки

- **важный инвариант:** в каждый момент времени свойство кучи нарушено не более чем в одной вершине

```
function siftDown(i : int):
  while 2 * i + 1 < a.heapSize    // heapSize — количество элементов в куче
    left = 2 * i + 1              // left — левый сын
    right = 2 * i + 2             // right — правый сын
    j = left
    if right < a.heapSize and a[right] < a[left]
      j = right
    if a[i] < a[j]
      break
    swap(a[i], a[j])
    i = j
```

44

Время работы операции вставки

- **важный инвариант:** в каждый момент времени свойство кучи нарушено не более чем в одной вершине
- при просеивании вверх эта вершина становится ближе к корню

45

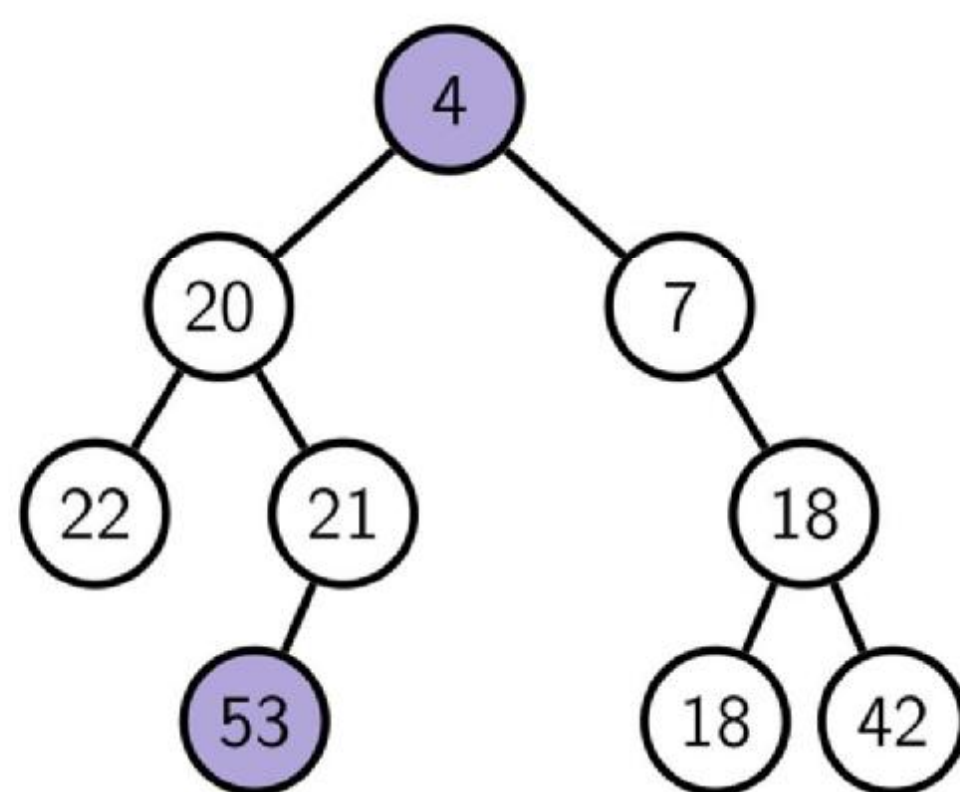
Время работы операции вставки

- **важный инвариант:** в каждый момент времени свойство кучи нарушено не более чем в одной вершине
- при просеивании вверх эта вершина становится ближе к корню
- время работы есть $O(h)$, где h — высота кучи

46

Извлечение минимума и просеивание вниз

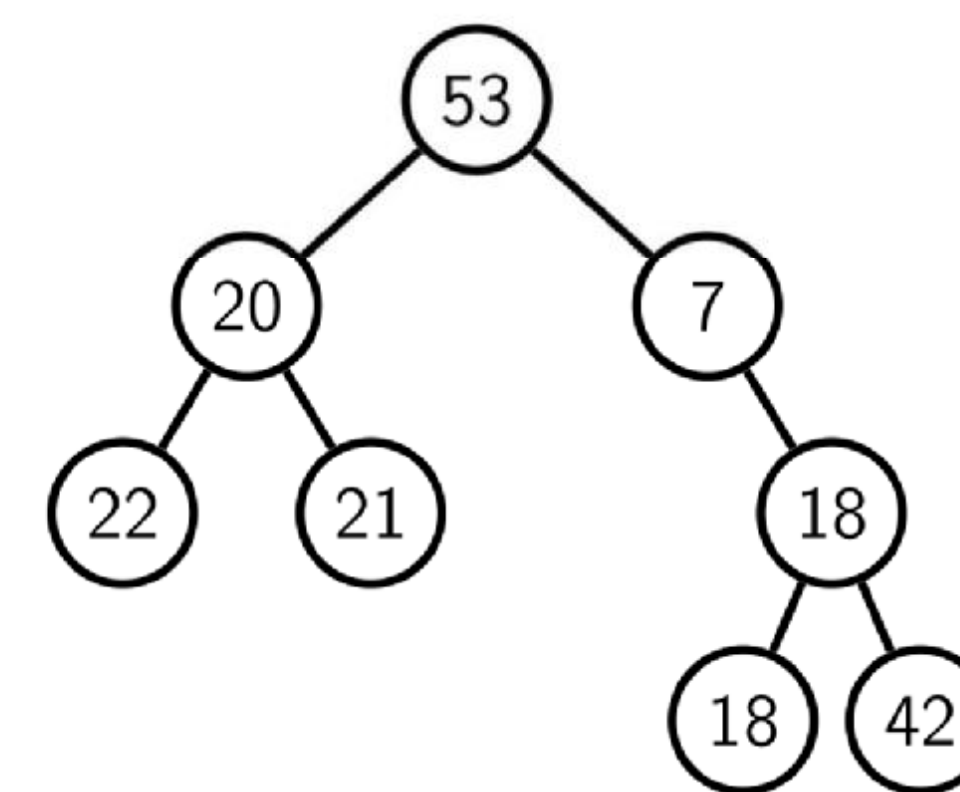
- заменим корень на любой лист



47

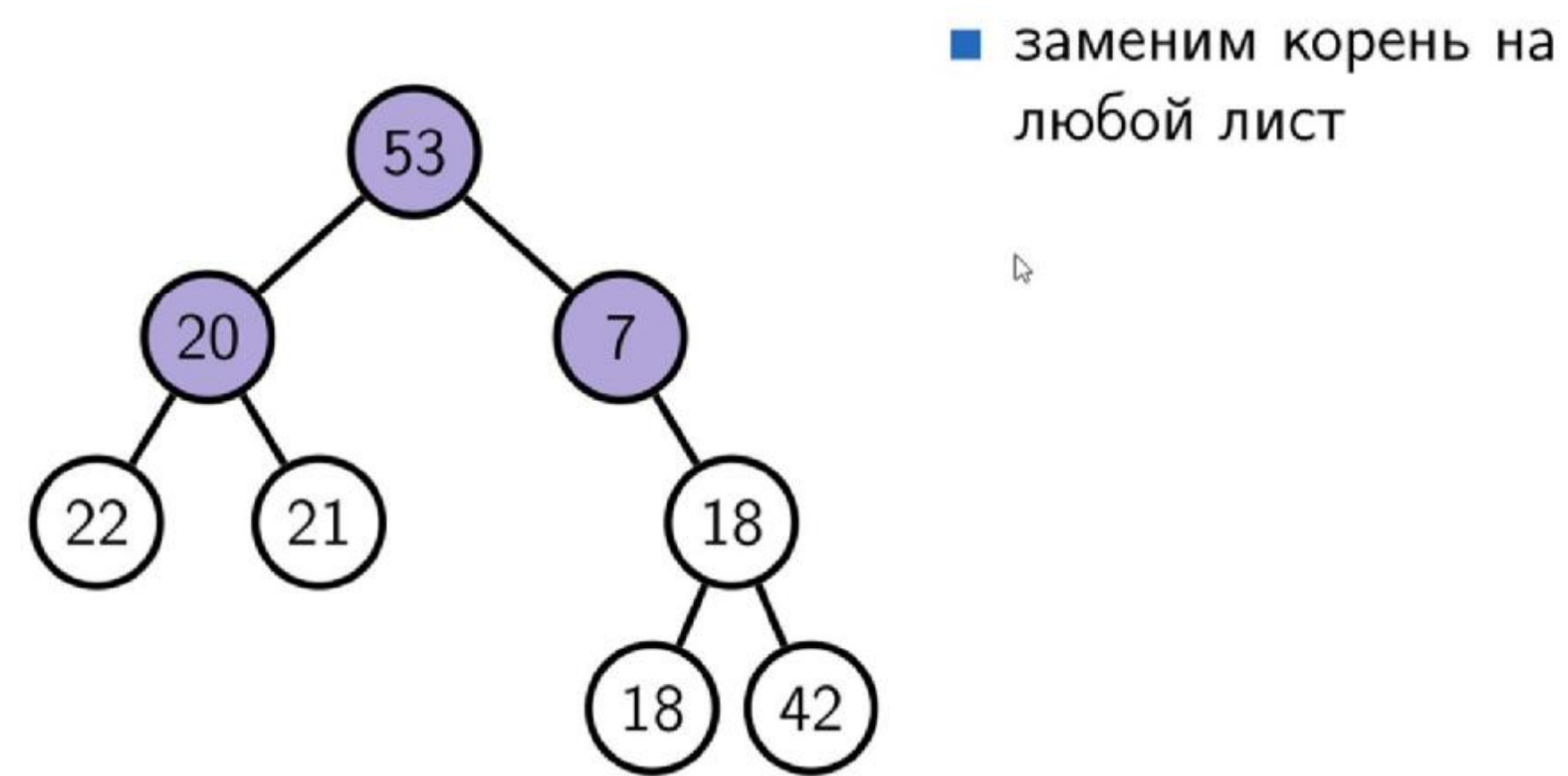
Извлечение минимума и просеивание вниз

- заменим корень на любой лист



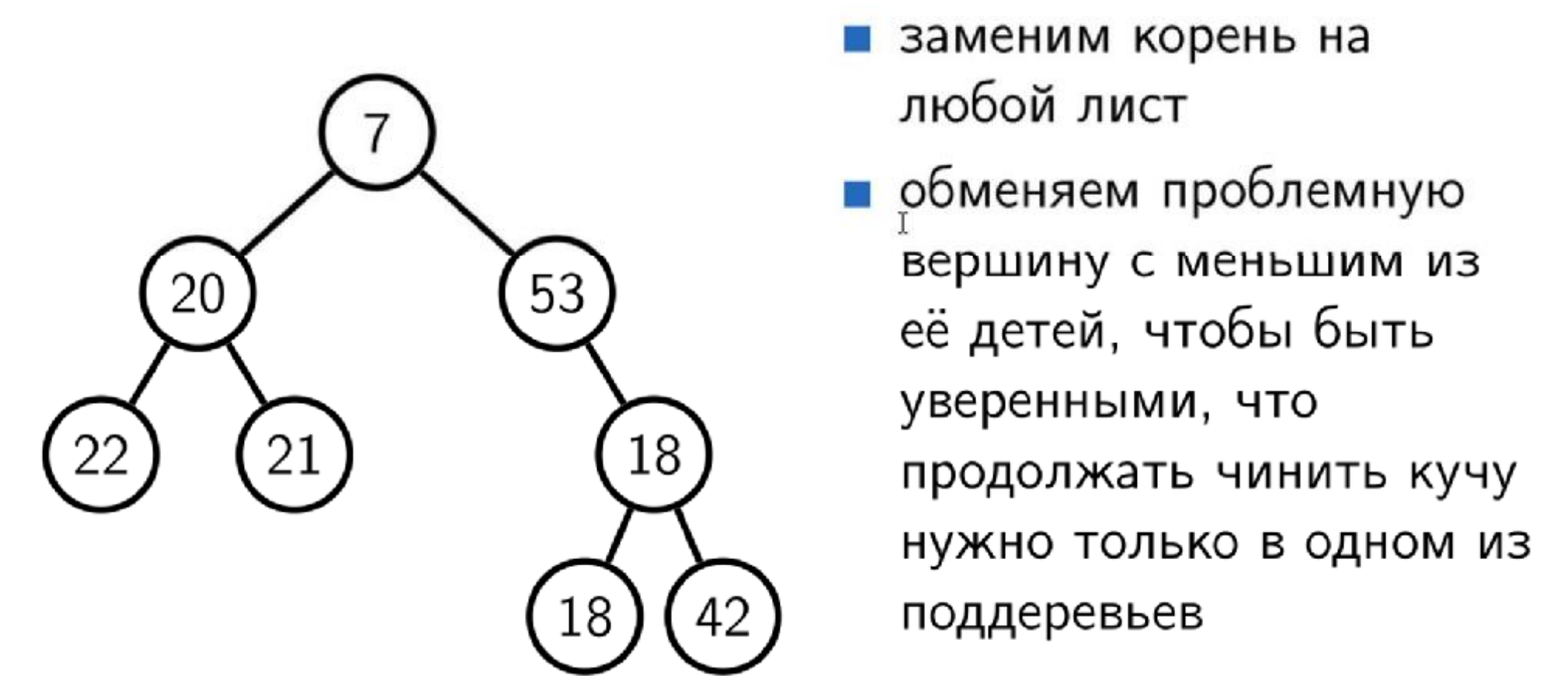
48

Извлечение минимума и просеивание вниз



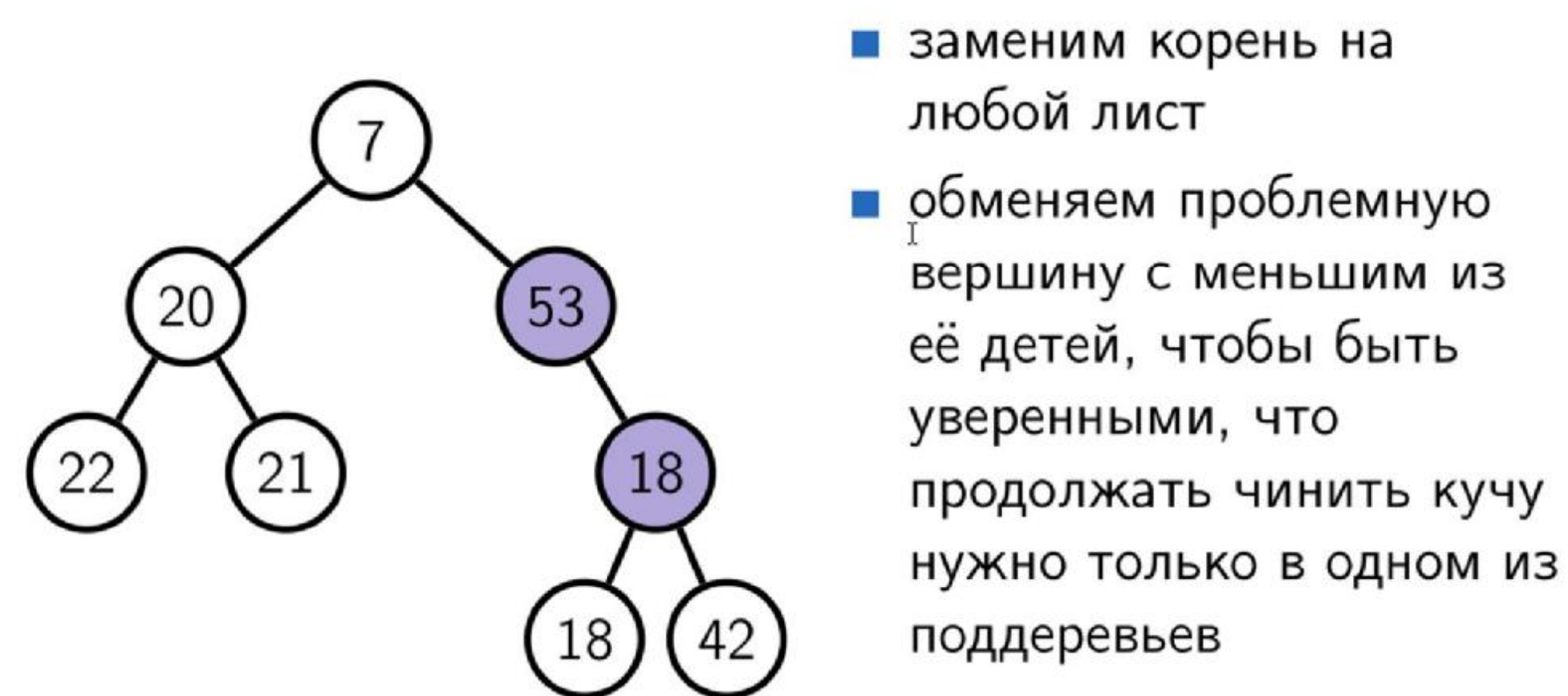
49

Извлечение минимума и просеивание вниз



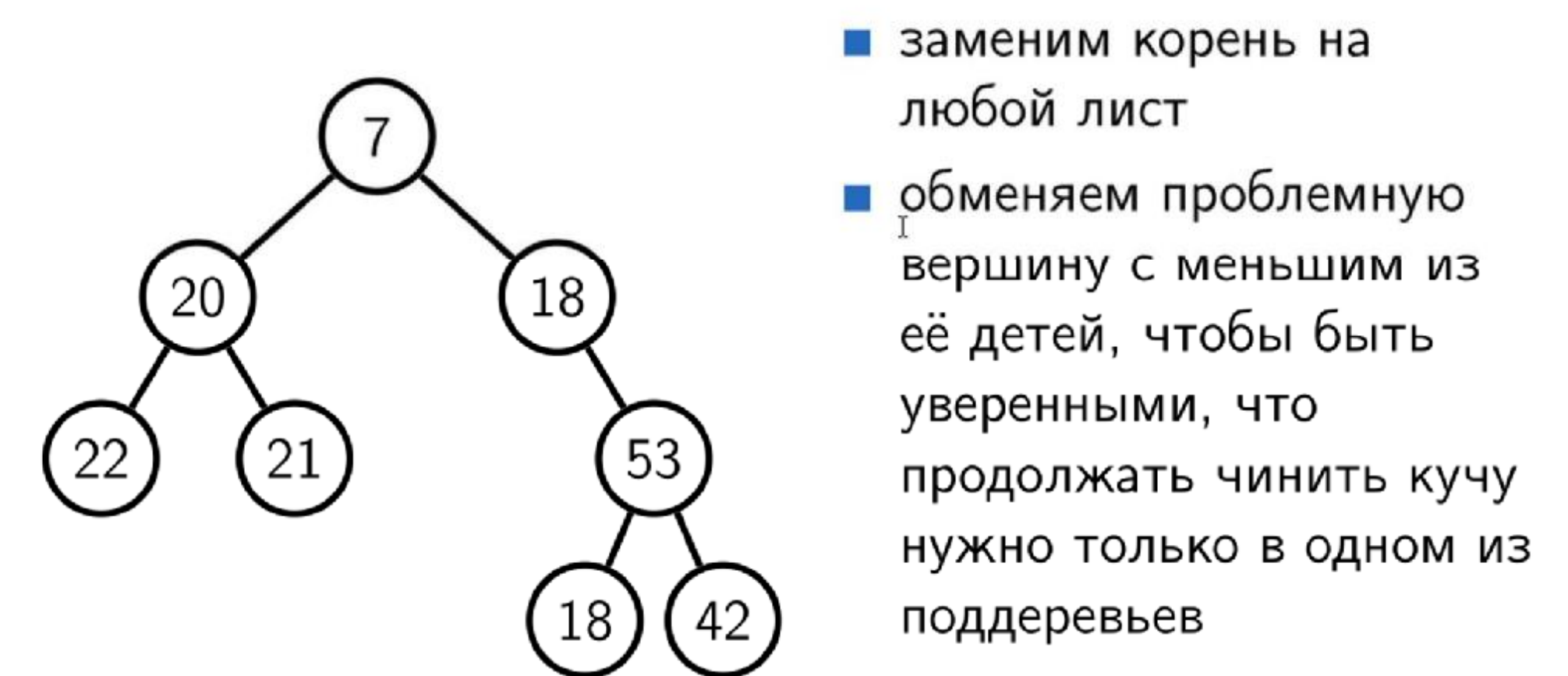
50

Извлечение минимума и просеивание вниз



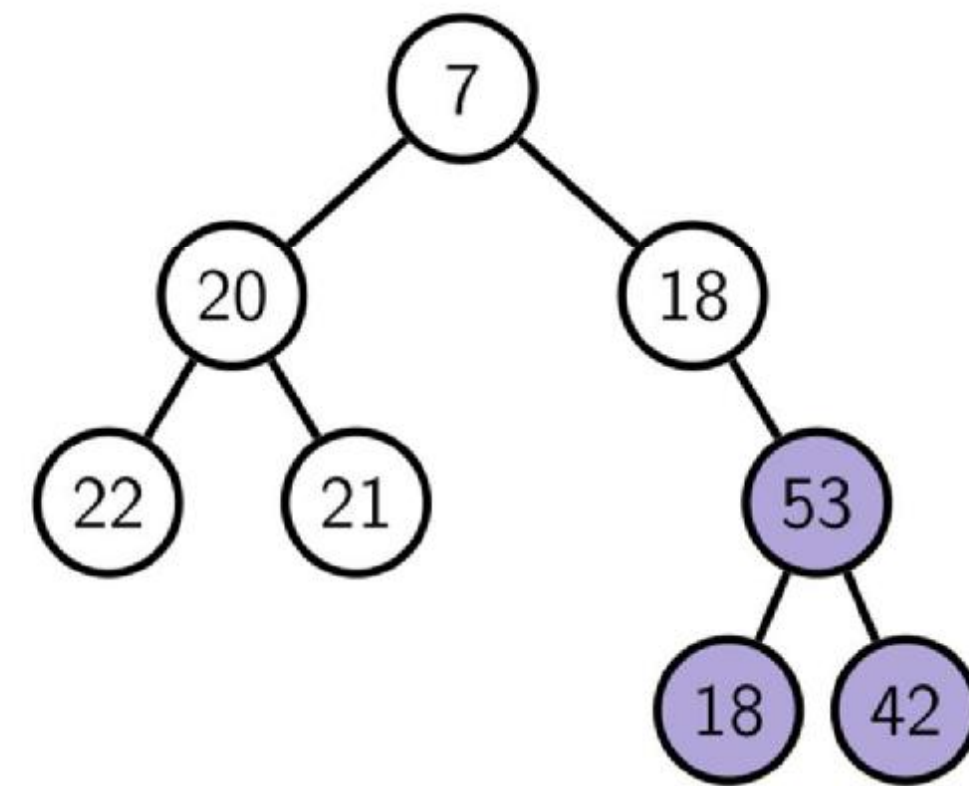
51

Извлечение минимума и просеивание вниз



52

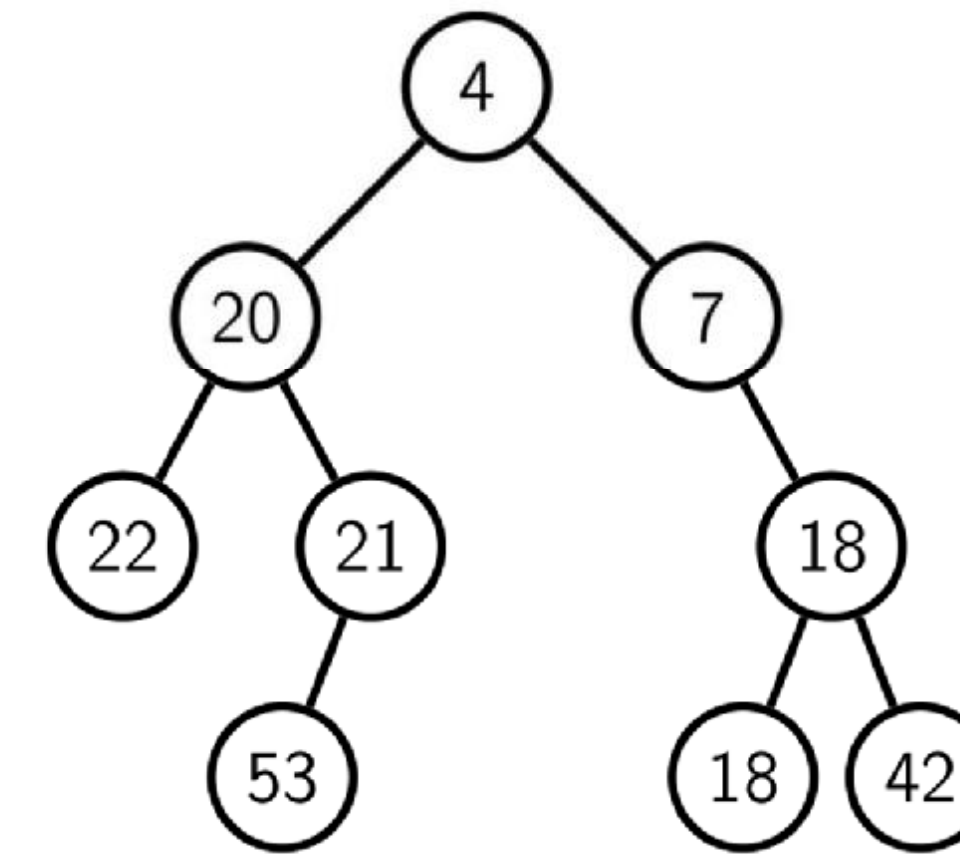
Извлечение минимума и просеивание вниз



- заменим корень на любой лист
- обменяем проблемную вершину с меньшим из её детей, чтобы быть уверенными, что продолжать чинить кучу нужно только в одном из поддеревьев

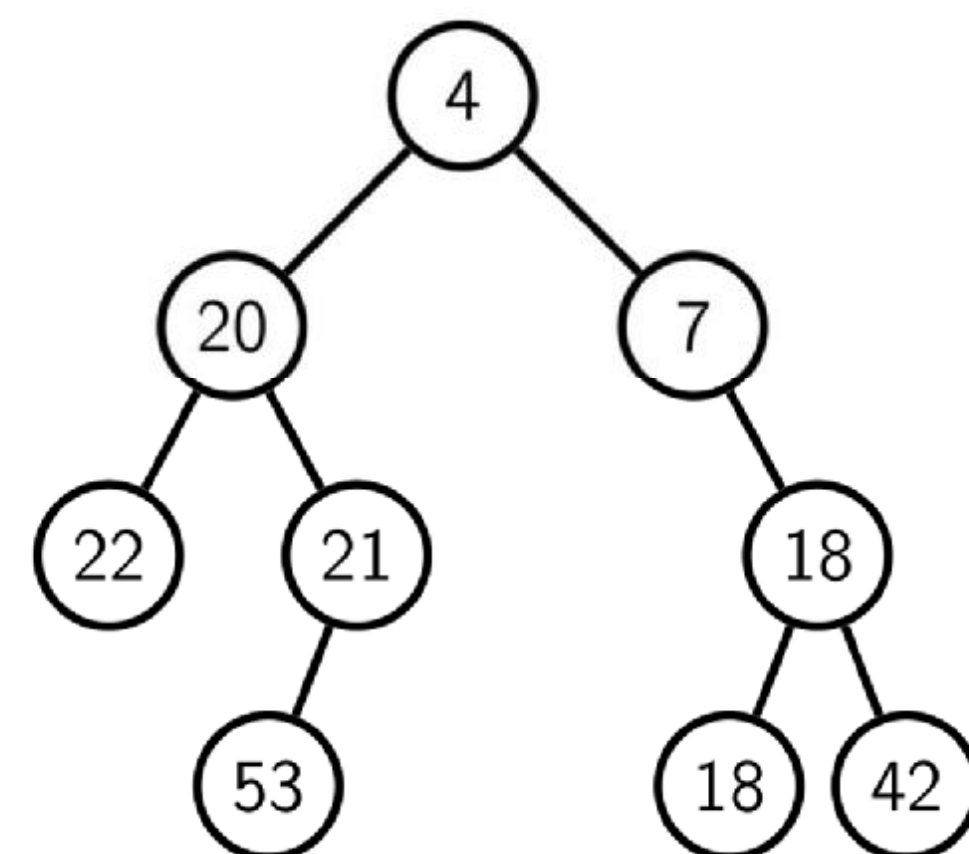
53

Изменение приоритета



54

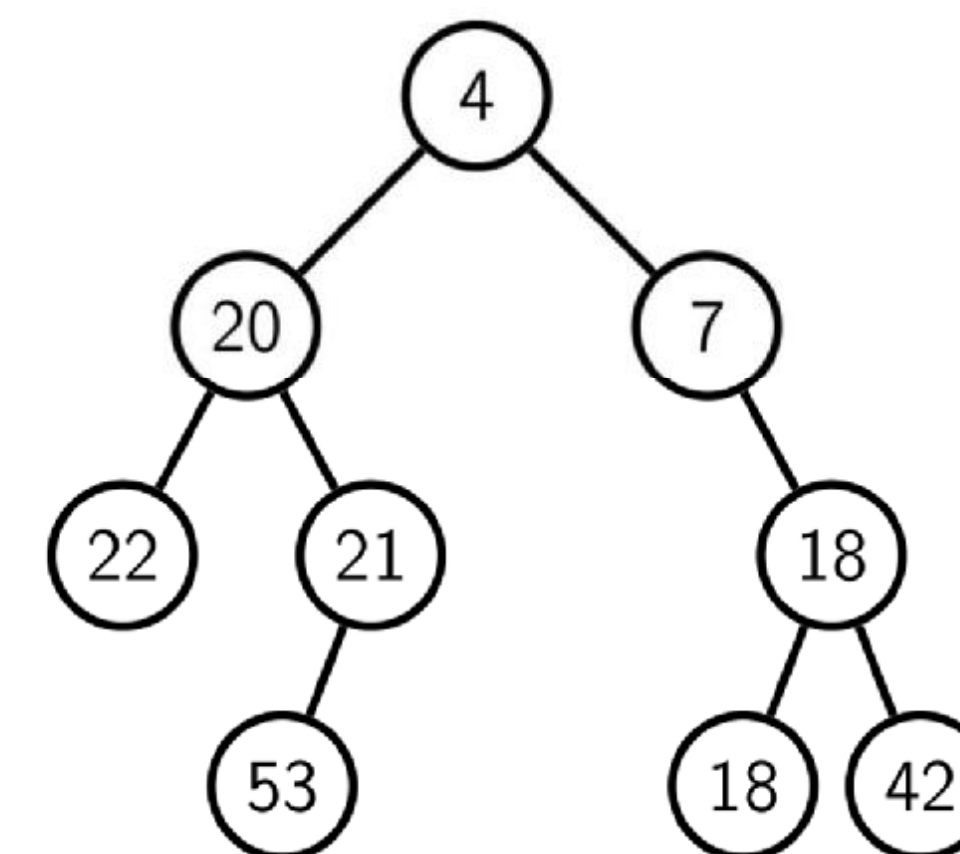
Изменение приоритета



изменим приоритет и дадим элементу просеяться вниз или вверх

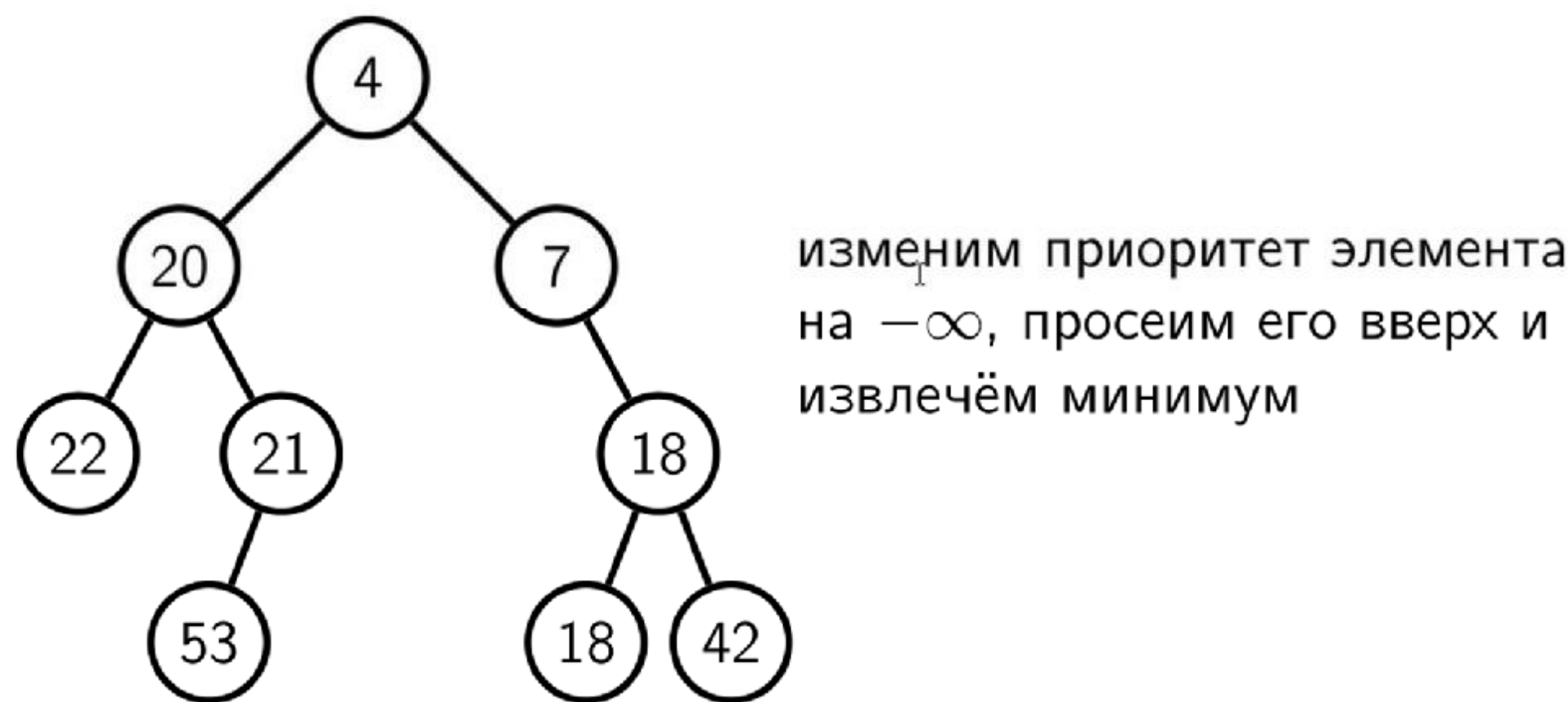
55

Удаление

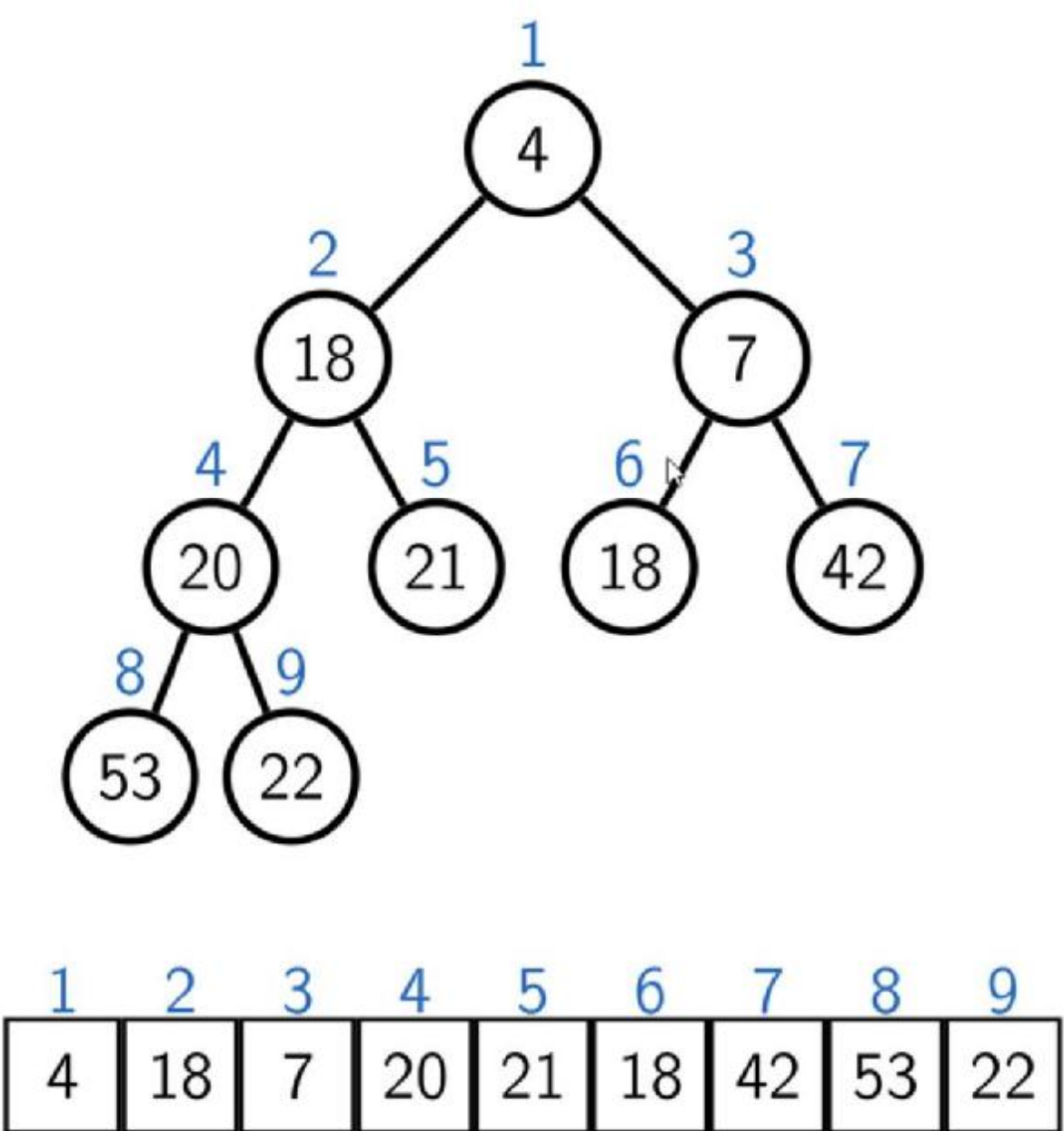


56

Удаление



Полное двоичное дерево и массив



Куча на массиве

- полное двоичное дерево: уровни заполняются слева направо; все уровни заполнены полностью, кроме, возможно, последнего



Куча на массиве

- полное двоичное дерево: уровни заполняются слева направо; все уровни заполнены полностью, кроме, возможно, последнего
- естественная нумерация вершин: сверху вниз, слева направо



Куча на массиве

- полное двоичное дерево: уровни заполняются слева направо; все уровни заполнены полностью, кроме, возможно, последнего
- естественная нумерация вершин: сверху вниз, слева направо
- при добавлении элемента подвешиваем лист на последний уровень; при удалении отрезаем самый последний лист

61

Куча на массиве

- полное двоичное дерево: уровни заполняются слева направо; все уровни заполнены полностью, кроме, возможно, последнего
- естественная нумерация вершин: сверху вниз, слева направо
- при добавлении элемента подвешиваем лист на последний уровень; при удалении отрезаем самый последний лист
- вершина i имеет родителя $\lfloor i/2 \rfloor$ и детей $2i$ и $2i + 1$ (при вычислении данных индексов нужно проверять, что они попадают в отрезок $[1, n]$)

Построение кучи из «хаоса»

```
function heapify():
    for i = a.heapSize / 2 downto 0
        siftDown(i)
```

62

Задание А. Кодирование Хаффмана

```
//Lesson 3. A_Huffman.
//Разработайте метод encode(File file) для кодирования строки (код Хаффмана)

// По данным файла (непустой строке ss длины не более 104104),
// состоящей из строчных букв латинского алфавита,
// постройте оптимальный по суммарной длине беспрефиксный код.

// Используйте Алгоритм Хаффмана — жадный алгоритм оптимального
// беспрефиксного кодирования алфавита с минимальной избыточностью.

// В первой строке выведите количество различных букв kk,
// встречающихся в строке, и размер получившейся закодированной строки.
// В следующих kk строках запишите коды букв в формате "letter: code".
// В последней строке выведите закодированную строку. Примеры ниже

// Sample Input 1:
// a
// Sample Output 1:
// 1 1
// a: 0
// 0

// Sample Input 2:
// abacabad
// Sample Output 2:
// 4 14
// a: 0
// b: 10
// c: 110
// d: 111
// 01001100100111
```

63

Задание А. Кодирование Хаффмана

```
//Lesson 3. A_Huffman.
//Разработайте метод encode(File file) для кодирования строки (код Хаффмана)

// По данным файла (непустой строке ss длины не более 104104),
// состоящей из строчных букв латинского алфавита,
// постройте оптимальный по суммарной длине беспрефиксный код.

// Используйте Алгоритм Хаффмана — жадный алгоритм оптимального
// беспрефиксного кодирования алфавита с минимальной избыточностью.

// В первой строке выведите количество различных букв kk,
// встречающихся в строке, и размер получившейся закодированной строки.
// В следующих kk строках запишите коды букв в формате "letter: code".
// В последней строке выведите закодированную строку. Примеры ниже

// Sample Input 1:
// a
// Sample Output 1:
// 1 1
// a: 0
// 0

// Sample Input 2:
// abacabad
// Sample Output 2:
// 4 14
// a: 0
// b: 10
// c: 110
// d: 111
// 01001100100111
```

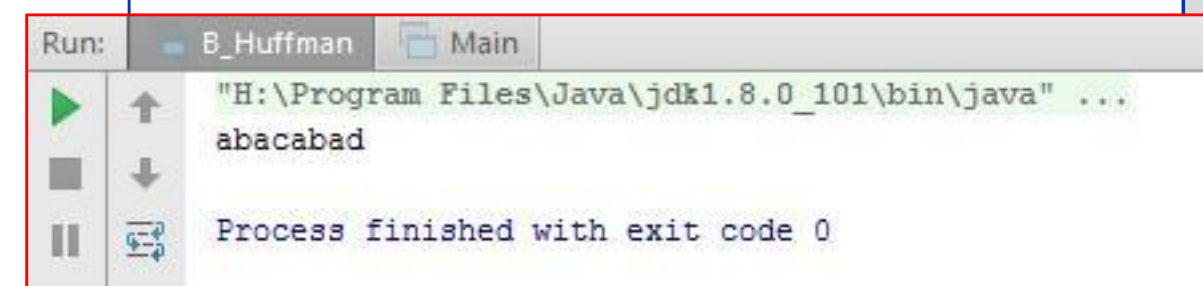
64

Задание Б. Декодирование Хаффмана

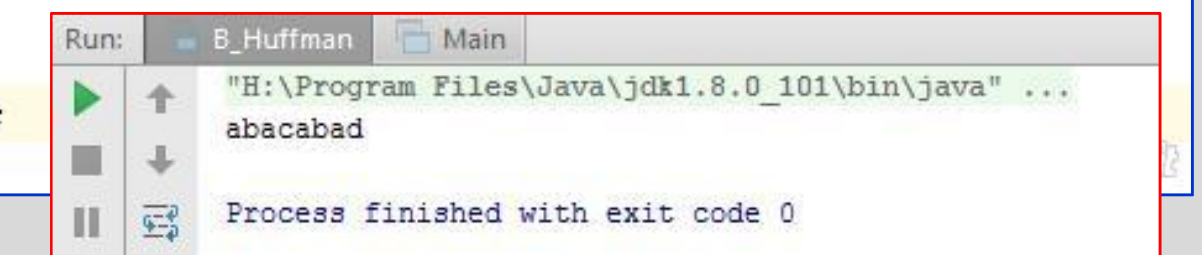
```
// Lesson 3. В_Huffman.
// Восстановите строку по её коду и беспрефиксному коду символов.

// В первой строке входного файла заданы два целых числа
// kk и ll через пробел — количество различных букв, встречающихся в строке,
// и размер получившейся закодированной строки, соответственно.
//
// В следующих kk строках записаны коды букв в формате "letter: code".
// Ни один код не является префиксом другого.
// Буквы могут быть перечислены в любом порядке.
// В качестве букв могут встречаться лишь строчные буквы латинского алфавита;
// каждая из этих букв встречается в строке хотя бы один раз.
// Наконец, в последней строке записана закодированная строка.
// Исходная строка и коды всех букв непусты.
// Заданный код таков, что закодированная строка имеет минимальный возможный размер.
```

<pre>// Sample Input 1: // 1 1 // a: 0 // 0 // Sample Output 1: // a</pre>	<pre>// Sample Input 2: // 4 14 // a: 0 // b: 10 // c: 110 // d: 111 // 01001100100111 // Sample Output 2: // abacabad</pre>
---	--



Задание Б. Декодирование Хаффмана



Задание C. Max-heap

```
import java.io.FileNotFoundException;

// Lesson 3. C_Heap.
// Задача: построить max-кучу = пирамиду = бинарное сбалансированное дерево на массиве.
// ВАЖНО! НЕЛЬЗЯ ИСПОЛЬЗОВАТЬ НИКАКИЕ КОЛЛЕКЦИИ, КРОМЕ ARRAYLIST (его можно, но только для массива)

//      Проверка проводится по данным файла
//      Первая строка входа содержит число операций  $1 \leq n \leq 100000$ .
//      Каждая из последующих nn строк задают операцию одного из следующих двух типов:

//      Insert x, где  $0 \leq x \leq 1000000000$  — целое число;
//      ExtractMax.

//      Первая операция добавляет число x в очередь с приоритетами,
//      вторая — извлекает максимальное число и выводит его.

//      Sample Input:
//      6
//      Insert 200
//      Insert 10
//      ExtractMax
//      Insert 5
//      Insert 500
//      ExtractMax
//
//      Sample Output:
//      200
//      500
```

Задание C. Max-heap

```

private class MaxHeap {
    //!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! НАЧАЛО ЗАДАЧИ !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!1
    //тут запишите ваше решение.
    //Будет мало? Ну тогда можете его собрать как Generic и/или использовать в варианте B
    private List<Long> heap = new ArrayList<>();

    int siftDown(int i) { //просеивание вверх

        return i;
    }

    int siftUp(int i) { //просеивание вниз

        return i;
    }

    void insert(Long value) { //вставка
    }

    Long extractMax() { //извлечение и удаление максимума
        Long result = null;

        return result;
    }
    //!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!1
}

```