Projeto de Filtros FIR e IIR

Disciplina: Processamento Digital de Sinais

Professores: Eddie Filho e Waldir Sabino

Projeto de Filtros FIR e IIR

Relembrando sobre a avaliação:

- Prova 1 (já realizado)
- Prova 2 (já realizado)
- Projeto/Sistema 1 (longo)
- Trabalhos Projeto/Filtragem (19) (curto)

Parte 1

Filtros FIR

Introdução

- Projetar filtros discretos com resposta ao impulso finita.
- Quatro tipos básicos de filtros: Passa-baixa, Passa-alta, Passa-faixa, Rejeita-faixa.
- Em todos os casos usaremos a formulação matemática e o projeto em si realizado em Matlab.
- Algumas etapas do projeto podem ser implementadas em linguagem C.

Introdução

- Procedimentos para Projetar filtros
  - Definir qual será a resposta em freqüência do filtro conforme a aplicação desejada.
  - Determinar a resposta ao impulso que produz a resposta em freqüência desejada.
  - Modificar a resposta ao impulso para que o filtro possa ser utilizado na prática.
  - Implementar o filtro utilizando alguma linguagem.

Aproximações para filtros FIR

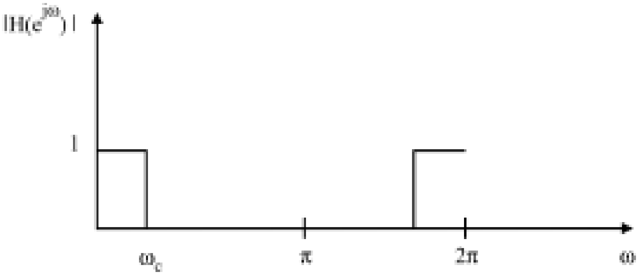
Filtros Ideais

- Os filtros ideais, que normalmente são o objetivo, não são passíveis de implementação, pois exigem infinitos coeficientes e são não-causais (prejudica implementação em tempo real).
- Exemplo:

Descrição Matemática do Filtro

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \begin{cases} 1, \text{ p/ } |\,\omega\,| \leq \omega_c \\ 0, \text{ p/ } \omega_c \leq |\,\omega\,| \leq \pi \end{cases}$$

Resposta de Magnitude do Filtro

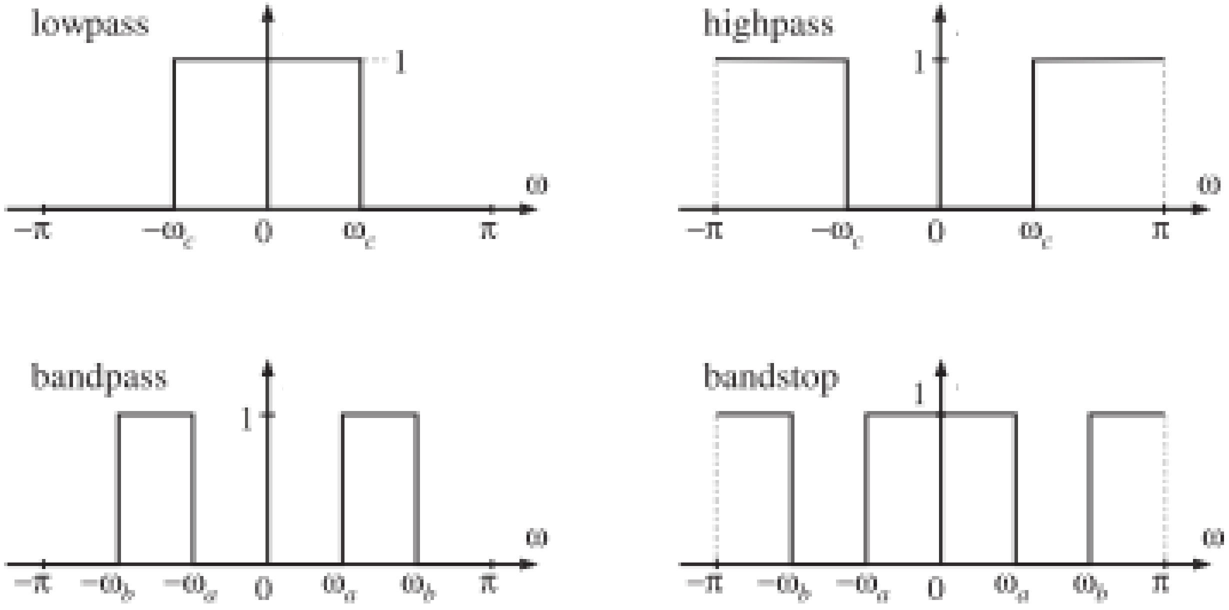


Note que: A resposta em magnitude é periódica (=2π)

Aproximações para filtros FIR

Filtros Ideais

- Resposta de Magnitude dos filtros ideais



Aproximações para filtros FIR

Filtros Ideais

- Resposta de Magnitude e Resposta ao Impulso.

Filter Type	Magnitude Response $\lvert H(e^{j\omega})\rvert$	Impulse Response $h(n)$
Lowpass	$\begin{cases} 1, & \text{for } 0 \leq \lvert\omega\rvert \leq \omega_c \\ 0, & \text{for } \omega_c < \lvert\omega\rvert \leq \pi \end{cases}$	$\begin{cases} \dfrac{\omega_c}{\pi}, & \text{for } n = 0 \\ \dfrac{1}{\pi n}\sin(\omega_c n), & \text{for } n \neq 0 \end{cases}$
Highpass	$\begin{cases} 0, & \text{for } 0 \leq \lvert\omega\rvert < \omega_c \\ 1, & \text{for } \omega_c \leq \lvert\omega\rvert \leq \pi \end{cases}$	$\begin{cases} 1 - \dfrac{\omega_c}{\pi}, & \text{for } n = 0 \\ -\dfrac{1}{\pi n}\sin(\omega_c n), & \text{for } n \neq 0 \end{cases}$
Bandpass	$\begin{cases} 0, & \text{for } 0 \leq \lvert\omega\rvert < \omega_{c_1} \\ 1, & \text{for } \omega_{c_1} \leq \lvert\omega\rvert \leq \omega_{c_2} \\ 0, & \text{for } \omega_{c_2} < \lvert\omega\rvert \leq \pi \end{cases}$	$\begin{cases} \dfrac{(\omega_{c_2} - \omega_{c_1})}{\pi}, & \text{for } n = 0 \\ \dfrac{1}{\pi n}\left[\sin(\omega_{c_2} n) - \sin(\omega_{c_1} n)\right], \end{cases}$
Bandstop	$\begin{cases} 1, & \text{for } 0 \leq \lvert\omega\rvert \leq \omega_{c_1} \\ 0, & \text{for } \omega_{c_1} < \lvert\omega\rvert < \omega_{c_2} \\ 1, & \text{for } \omega_{c_2} \leq \lvert\omega\rvert \leq \pi \end{cases}$	$\begin{cases} 1 - \dfrac{(\omega_{c_2} - \omega_{c_1})}{\pi}, & \text{for } n = 0 \\ \dfrac{1}{\pi n}\left[\sin(\omega_{c_1} n) - \sin(\omega_{c_2} n)\right], \end{cases}$

Aproximações para filtros FIR

Filtros Ideais

- Projeto de Filtros Ideais (Trabalho 1, 2 e 3).

1) **Projeto de filtro:** projetar um filtro passa-alta ideal com ganho unitário com freqüência de corte igual a 12kHz e considerando que a freqüência de amostragem é 60kHz.
2) **Projeto de filtro:** projetar um filtro passa-faixa ideal com ganho unitário com frequência de passagem entre 12kHz e 16kHz. A frequência de amostragem é 60kHz.
3) **Filtragem:** Misture duas senoides, uma com 40kHz e outra com 14kHz, com diferentes amplitudes. Filtre este sinal com os filtros projetados em (1) e (2). Esboce gráficos do sinal filtrado no domínio do tempo e da frequência.

Itens obrigatórios:

- Resposta em frequência (tanto freq. digital quanto analógica com comentários).
- Sinais no domínio do tempo, quando couber.

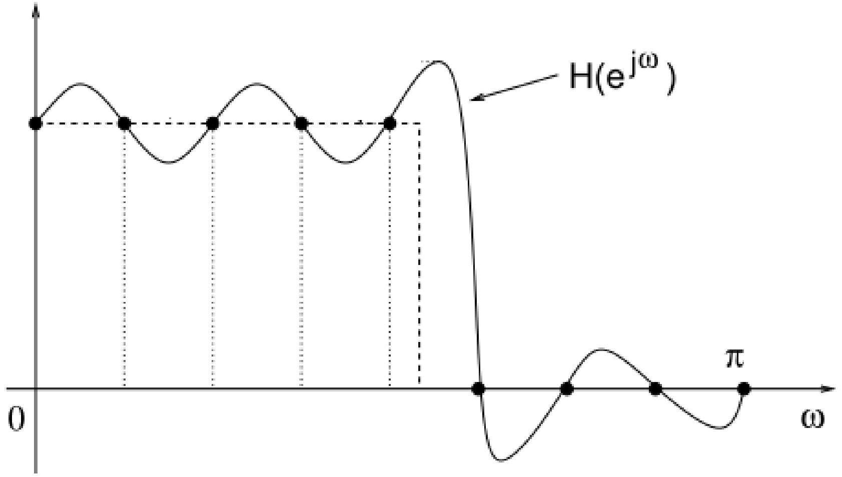
Dicas:

a) Cuidado com a relação entre freqüências digitais (símbolo ω) e analógicas (símbolo Ω). A relação é $\omega = \Omega \cdot T_s$.
b) A freqüência digital de amostragem equivalente à analógica é sempre igual a 2π.

Aproximações para filtros FIR

Amostragem na Freqüência

- Idéia principal:

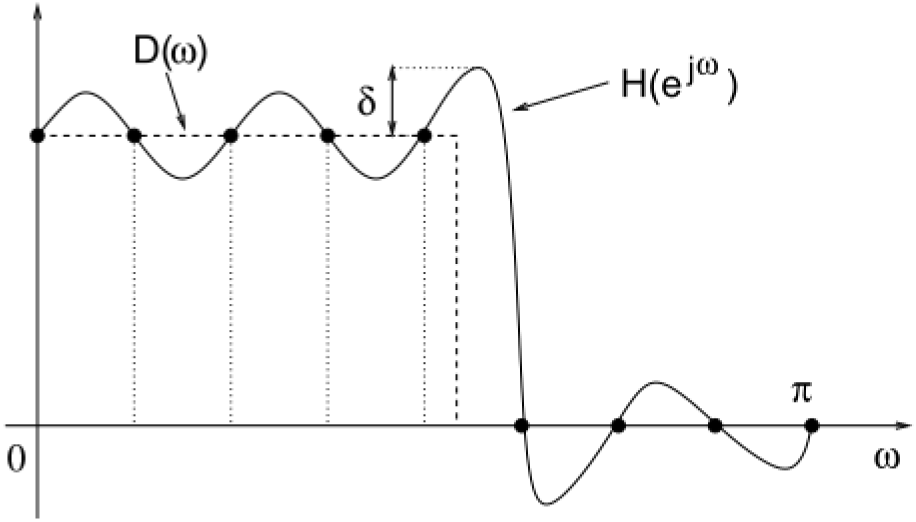


- Aproximação por amostragem na freqüência: a DFT do filtro corresponde às amostras da resposta em freqüência desejada.
- As amostras são tomadas em $\omega_s k/N$,com $0 \le k \le N$-1.

Aproximações para filtros FIR

Amostragem na Freqüência

- Supondo a resposta em freqüência desejada igual a $D(\omega)$ e a DTFT do filtro h(n) igual a $H(e^{j\omega})$ temos:



- Note que:

(1) O erro de aproximação é zero nas freqüências amostradas.

(2) O erro de aproximação é maior nas transições e menor fora delas.

(3) A transição pode ser "controlada" pois consegue-se impor um zero em $H(e^{j\omega})$.

Aproximações para filtros FIR

Amostragem na Freqüência

- Resposta ao Impulso.

Filter Type	Impulse Response $h(n)$, for $n = 0, \ldots, M$	Condition
Type I	$\frac{1}{N}\left[A(0) + 2\sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} (-1)^k A(k)\cos\frac{\pi k(1+2n)}{M+1}\right]$	
Type II	$\frac{1}{N}\left[A(0) + 2\sum_{k=1}^{\frac{M-1}{2}} (-1)^k A(k)\cos\frac{\pi k(1+2n)}{M+1}\right]$	$A\left(\frac{M+1}{2}\right) = 0$
Type III	$\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} (-1)^{k+1} A(k)\sin\frac{\pi k(1+2n)}{M+1}$	$A(0) = 0$
Type IV	$\frac{1}{N}\left[(-1)^{\frac{M+1}{2}+n} A\left(\frac{M+1}{2}\right) + 2\sum_{k=1}^{\frac{M-1}{2}} (-1)^k A(k)\sin\frac{\pi k(1+2n)}{M+1}\right]$	$A(0) = 0$

Aproximações para filtros FIR
Amostragem na Freqüência

- Correspondência entre os tipos de filtros.

Filter Type	Type I	Type II	Type III	Type IV
Lowpass	Yes	Yes	No	No
Highpass	Yes	No	No	Yes
Bandpass	Yes	Yes	Yes	Yes
Bandstop	Yes	No	No	No

Aproximações para filtros FIR

Amostragem na Freqüência

- Projeto de Filtros por Amostragem na Freqüência (Trabalho 4, 5 e 6).

1) **Projeto de filtro:** projetar um filtro passa-baixa com ganho unitário com freqüência de corte igual a 5kHz com transição de 1,5kHz e considerando que a freqüência de amostragem é 60kHz.
2) **Projeto de filtro:** projetar um filtro passa-alta com ganho unitário com freqüência de corte igual a 12kHz e transição de 3kHz e considerando que a freqüência de amostragem é 60kHz.
3) **Filtragem:** Misture três senoides, uma com 3kHz, outra com 17kHz e outra com 14kHz, com diferentes amplitudes. Filtre este sinal com os filtros projetados em (1) e (2). Esboce gráficos do sinal filtrado no domínio do tempo e da frequência.

Itens obrigatórios:

- Resposta em frequência (tanto freq. digital quanto analógica com comentários).
- Sinais no domínio do tempo, quando couber.

Dicas:

a) O termo A(k) é igual a resposta de magnitude desejada. Para determiná-la basta observar a resposta em freqüência do filtro.
b) A(s) freqüência(s) de transição iram indicar os valores de k tal que A(k) é zero ou um.

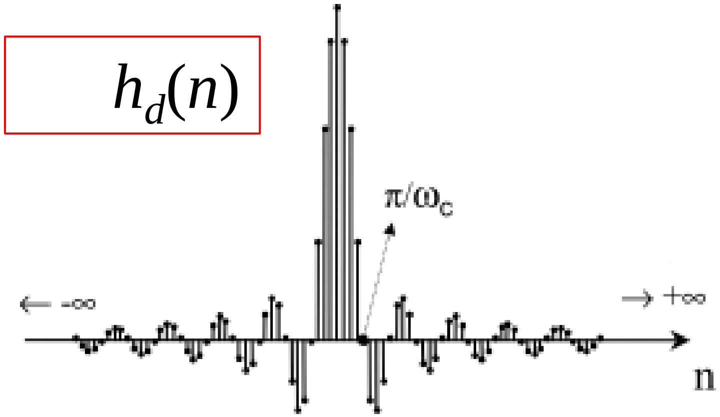
Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela

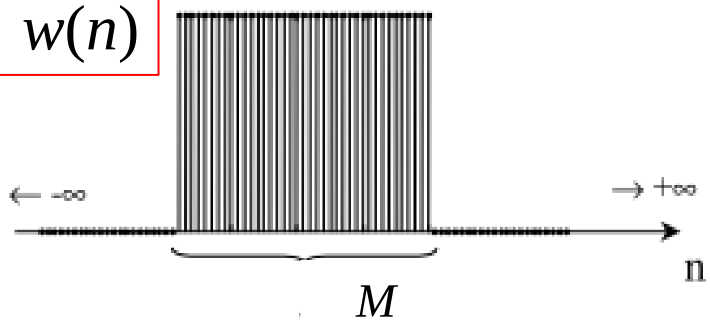
- Uma maneira de contornar o problema das respostas com duração infinita, apresentada pelos filtros ideais, é truncar a mesma com funções janela
- O Truncamento é interpretado como um produto no tempo discreto por uma função janela $w(n)$.
- Assim, supondo $h_d(n)$ a resposta ao impulso de duração infinita, temos:

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

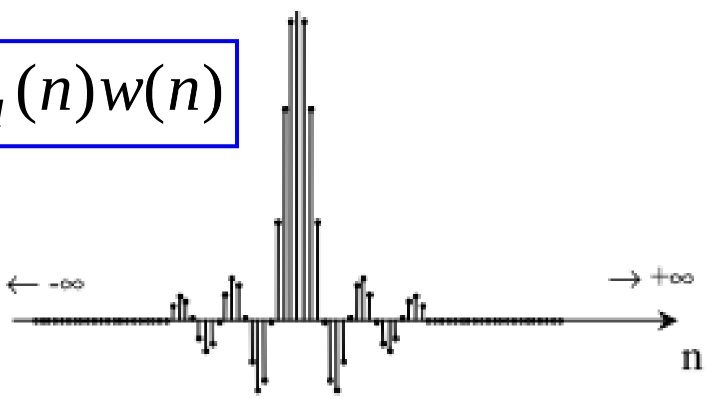
$$h_d(n)$$



$$w(n)$$



$$\boxed{h(n) = h_d(n)w(n)}$$



- Neste exemplo, podemos visualizar o efeito do truncamento no domínio do tempo.

- Note que o filtro truncado é obtido por um produto da função janela pela resposta ideal

Aproximações para filtros FIR

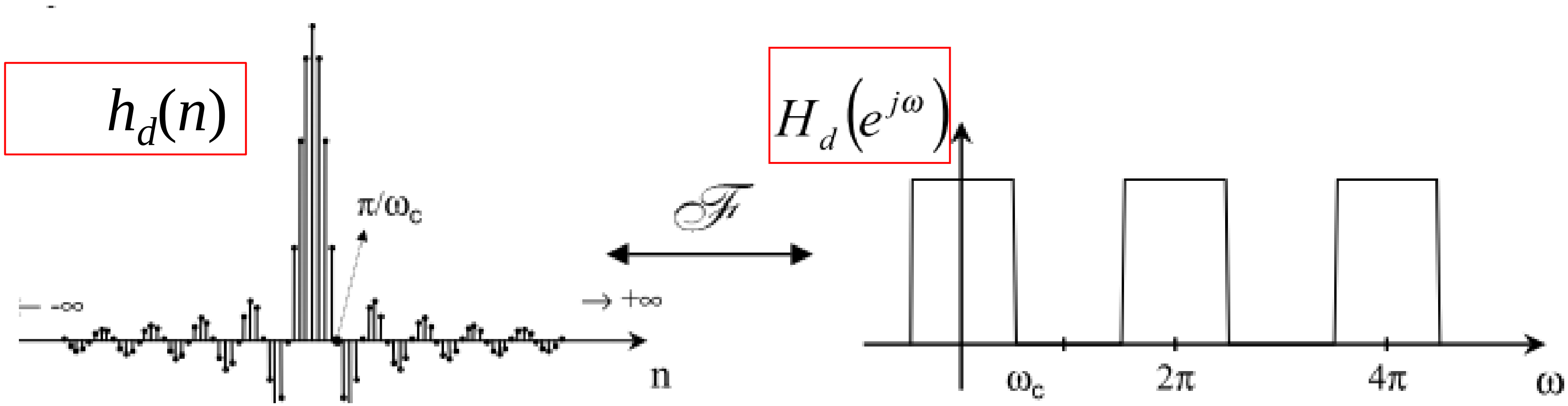
Projeto com Funções Janela

- Utilizando o Teorema da Modulação podemos determinar a resposta em freqüência para o filtro truncado.
- Dessa forma, o produto no domínio do tempo equivale a convolução no domínio na freqüência. Observe que a convolução é periódica pois os sinais são periódicos.
- Supondo:

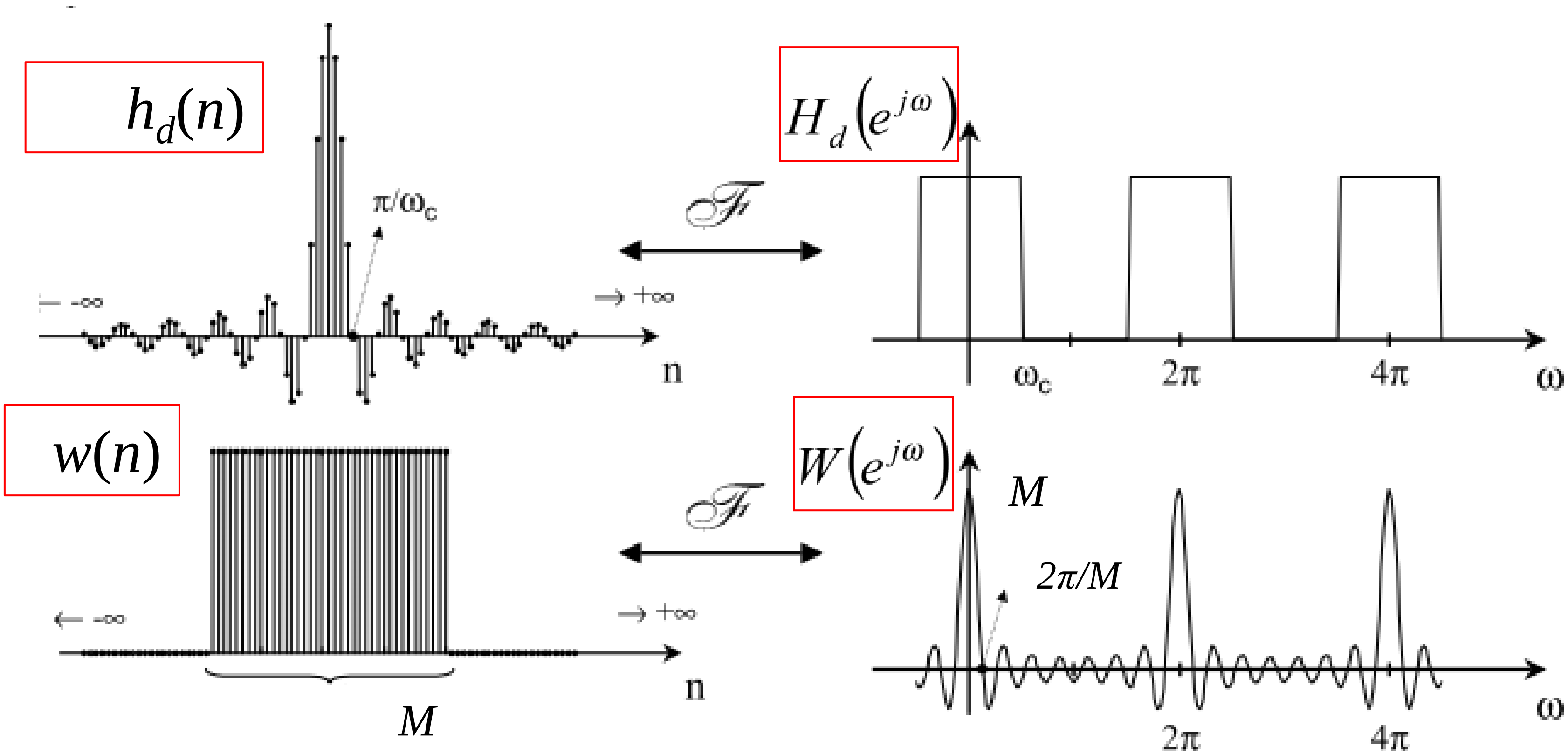
$$h_d(n) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} H_d\left(e^{j\omega}\right)$$

$$w(n) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} W\left(e^{j\omega}\right)$$

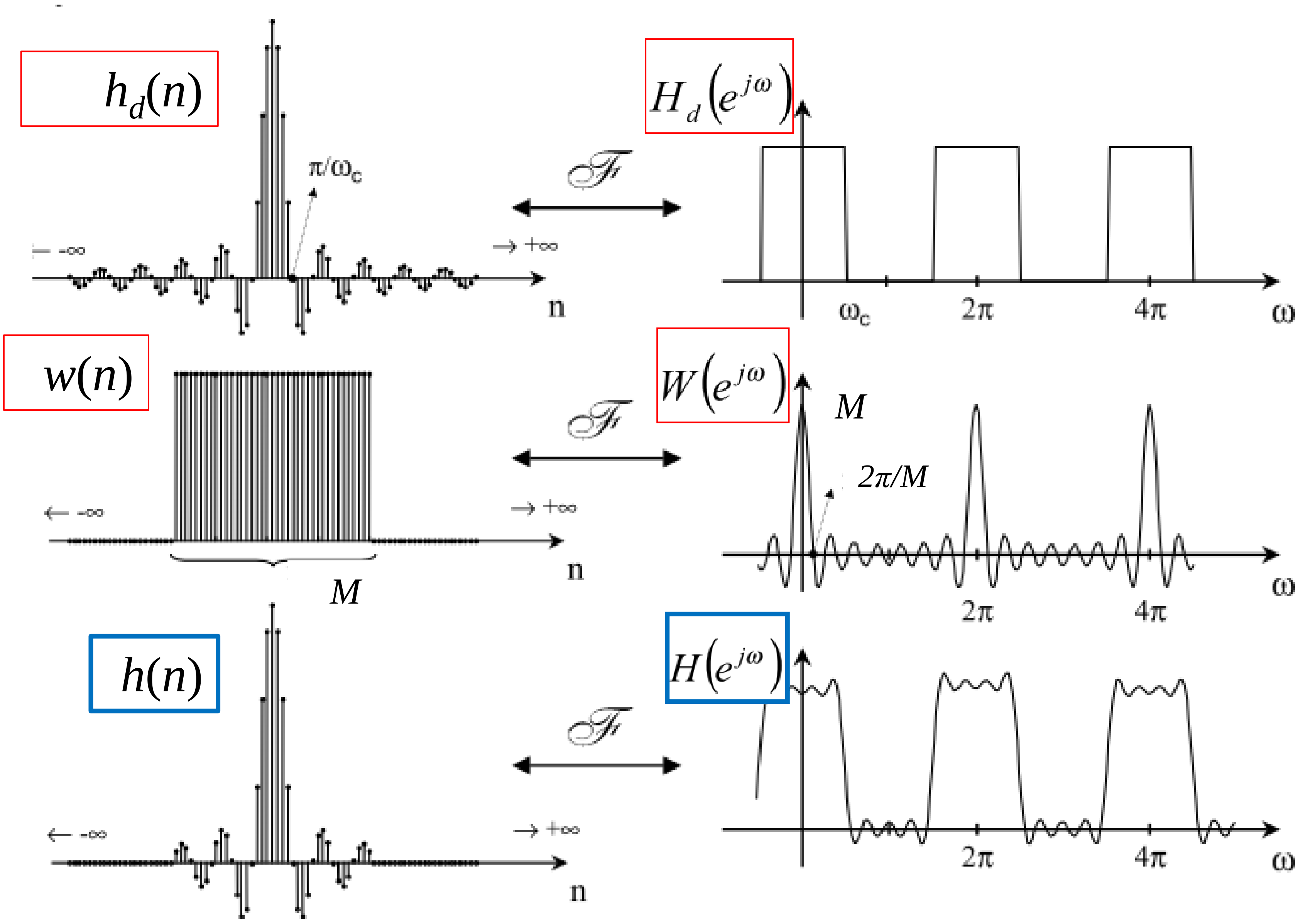
$$h(n) = h_d(n) \cdot w(n) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2\pi} H_d\left(e^{j\omega}\right) * W\left(e^{j\omega}\right)$$



$h_d(n)$
π/ω_c
$\leftarrow -\infty$
$\rightarrow +\infty$
n
$\mathscr{F}$
$H_d\left(e^{j\omega}\right)$
ω_c
2π
4π
ω



$h_d(n)$
π/ω_c
$\leftarrow -\infty$
$\rightarrow +\infty$
n
$H_d(e^{j\omega})$
ω_c
2π
4π
ω
$w(n)$
$\leftarrow -\infty$
$\rightarrow +\infty$
n
M
$W(e^{j\omega})$
M
$2\pi/M$
2π
4π
ω

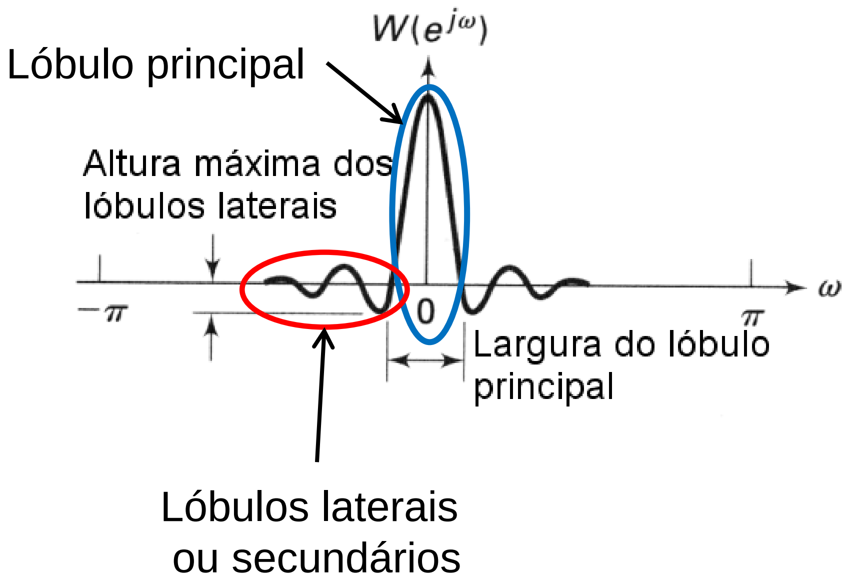


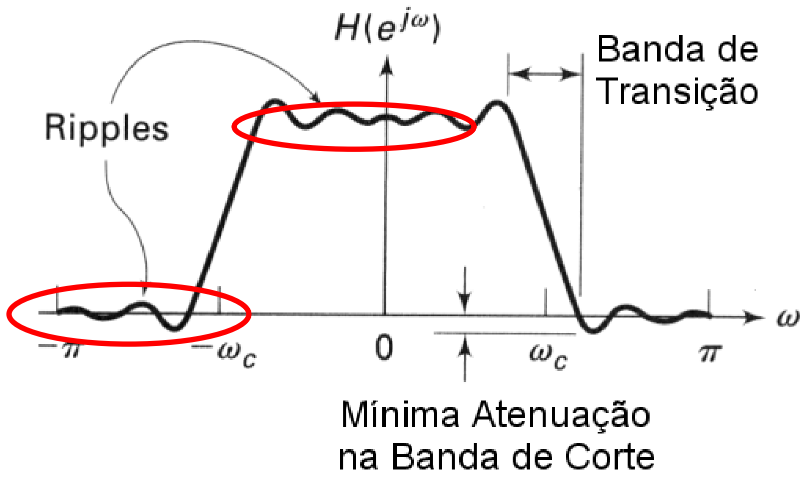
$h_d(n)$
π/ω_c
$\leftarrow -\infty$
$\rightarrow +\infty$
n
$\mathscr{F}$
$H_d(e^{j\omega})$
ω_c
2π
4π
ω
$w(n)$
M
$W(e^{j\omega})$
M
$2\pi/M$
$h(n)$
$H(e^{j\omega})$

Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela

- Antes de observar a resposta em freqüência do filtro truncado H, vamos definir alguns termos referentes à função janela e ao filtro truncado



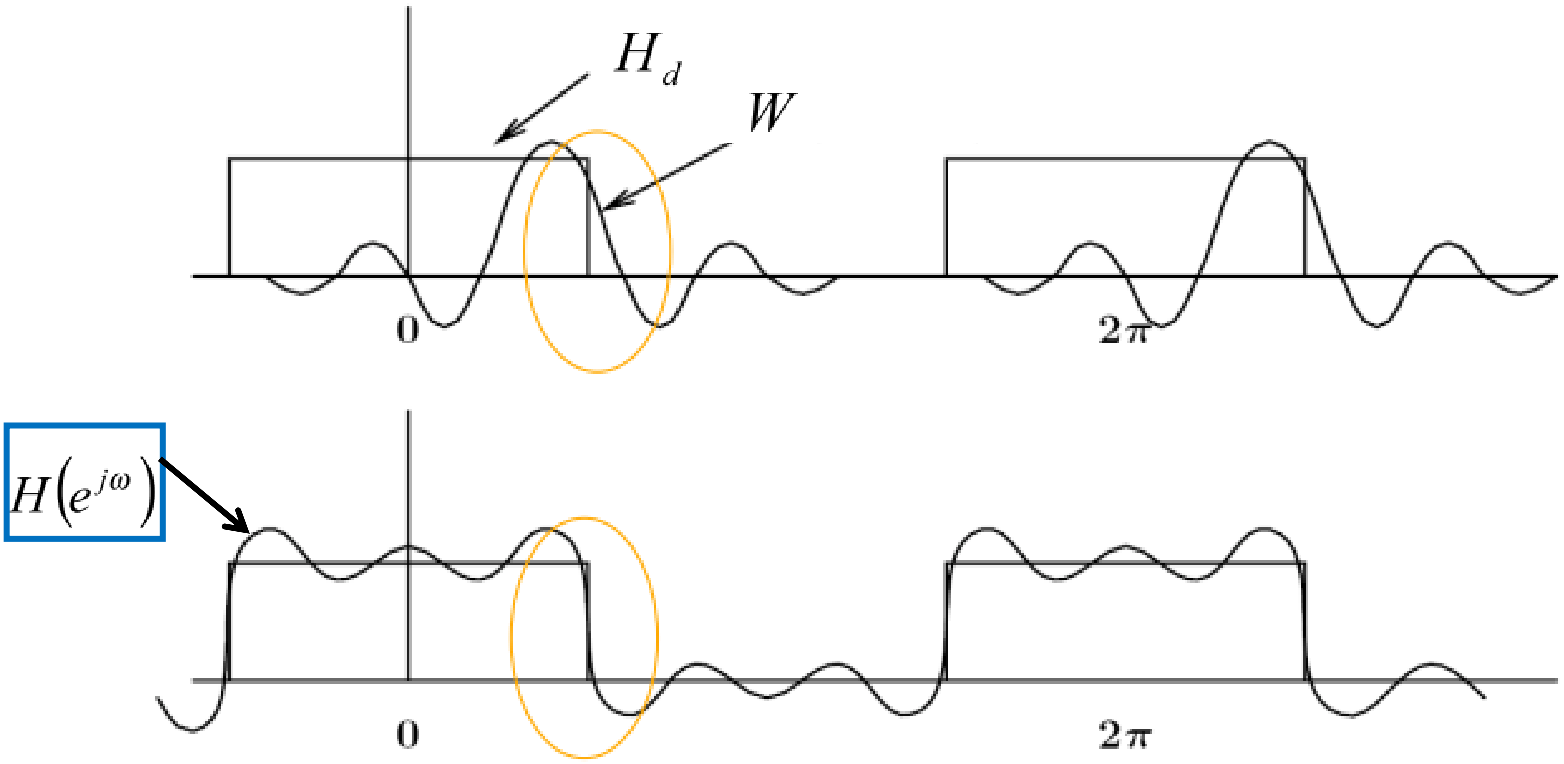


Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela

- Observando a resposta em freqüência do filtro truncado H, temos:

  (1) A Banda de Transição aumenta se a Largura do Lóbulo Principal aumentar.

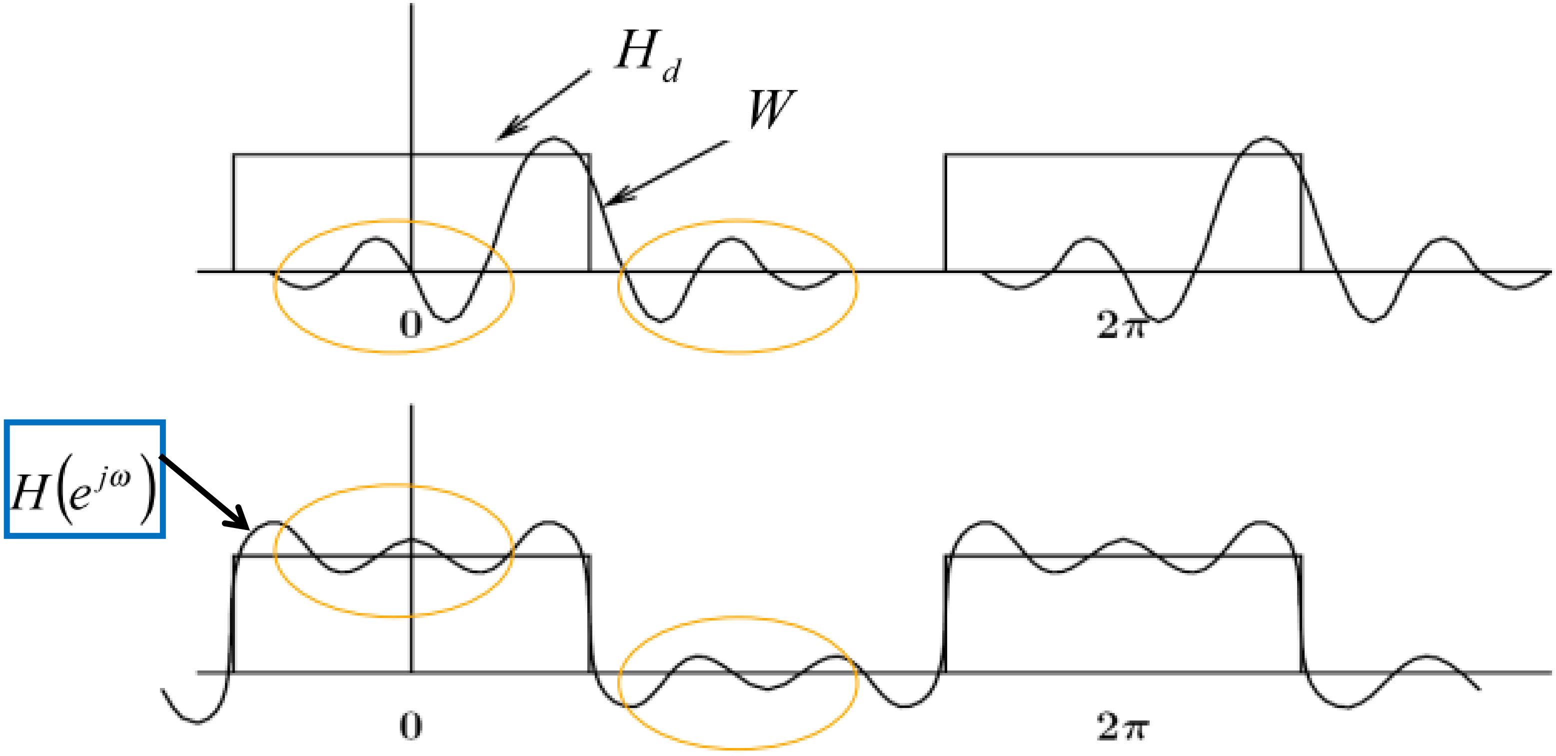


Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela

- Observando a resposta em freqüência do filtro truncado H, temos:

  (2) As ondulações (*ripples*) aumentam se as área dos Lóbulos Laterais (ou secundários) aumentarem.



Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela

- Assim, a forma da função janela modifica diversas especificações da resposta em freqüência do nosso filtro. Resumidamente, procuramos uma janela com as seguintes características:
  - Razão entre a amplitude do lóbulo principal e a do lóbulo lateral deve ser alta;
  - Largura do lóbulo principal determina a largura da faixa de transição. Logo, este valor deve ser pequeno;
- Nesse sentido, algumas funções foram propostas. São elas:

Aproximações para filtros FIR

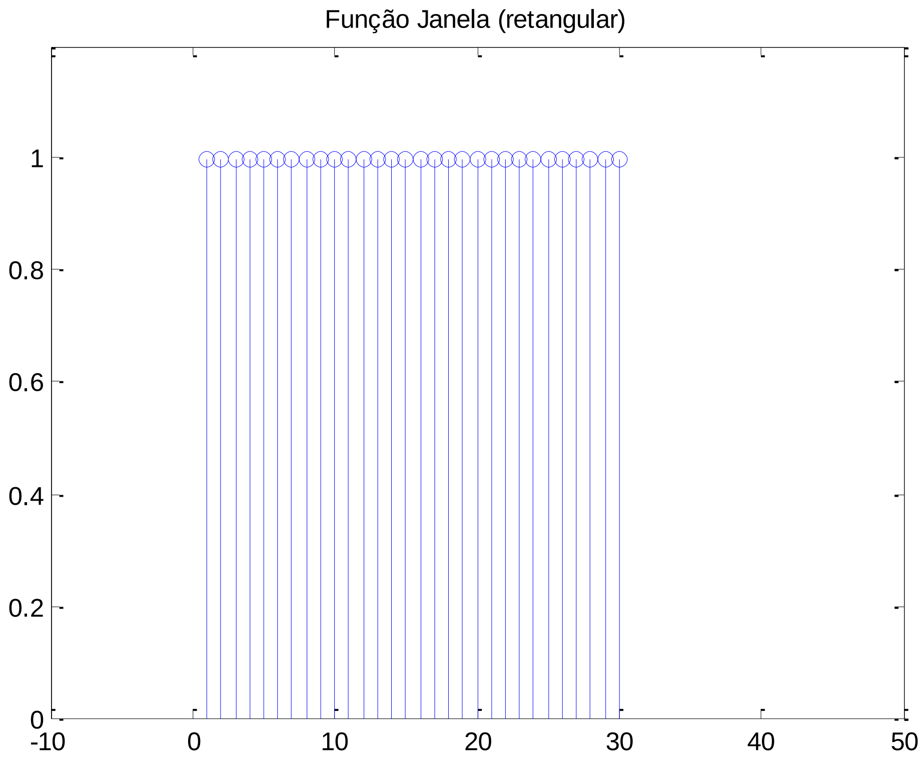
Projeto com Funções Janela – Retangular

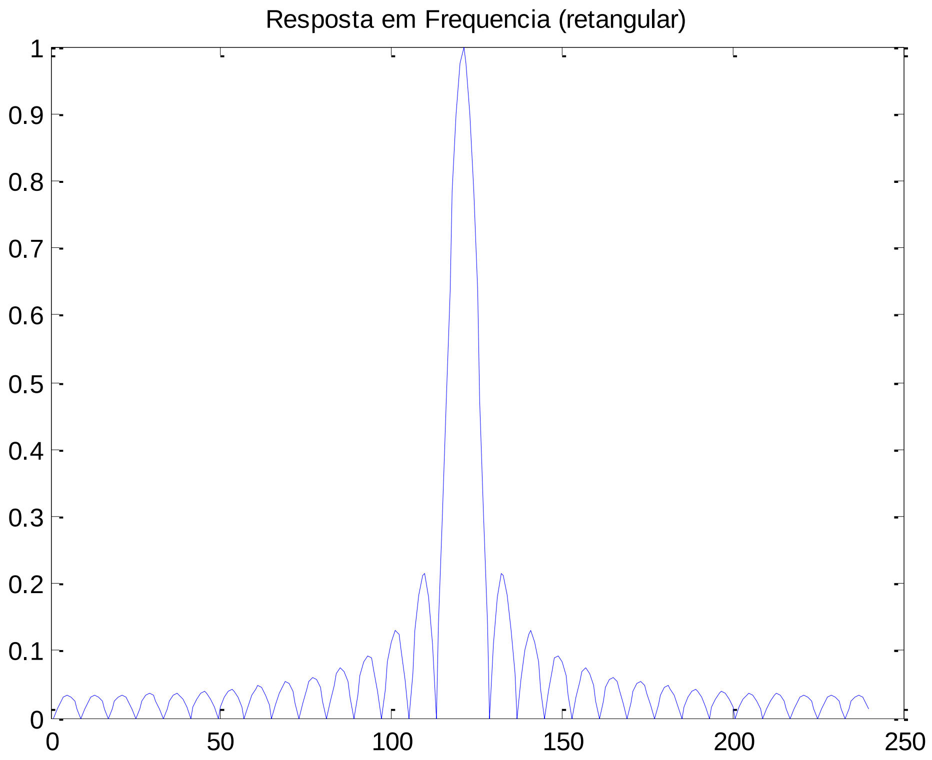
- A janela retangular, já estudada anteriormente.

$$w(n) = \begin{cases} 1 \text{ , p/ } 0 \le n \le M-1 \\ 0 \quad , outrovalor \end{cases}$$

Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela – Retangular





Aproximações para filtros FIR

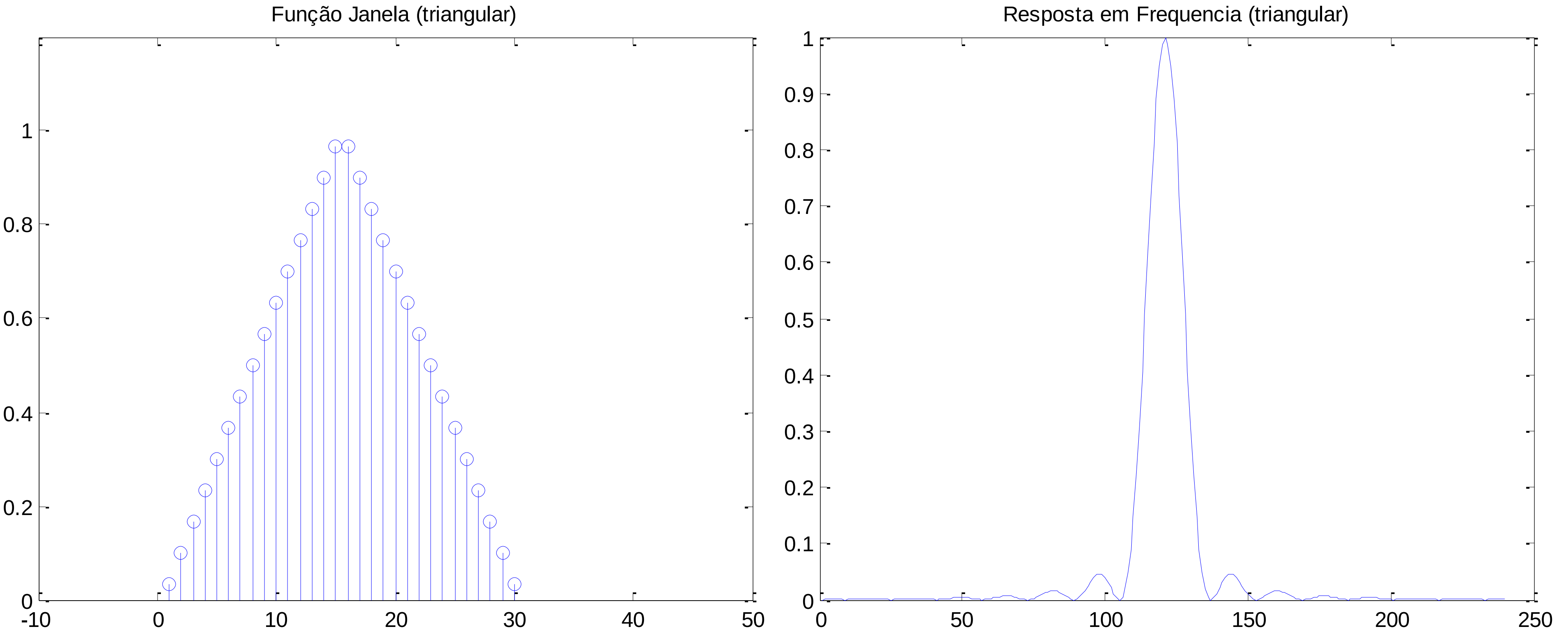
Projeto com Funções Janela – Triangular

- A janela retangular origina muita ondulação nas extremidades, que não pode ser controlada. Para reduzir essas ondulações, várias janelas foram propostas. A janela triangular é dada por:

$$w[n] = \begin{cases} 2n/M, & 0 \leq n \leq M/2 \\ 2 - 2n/M & M/2 < n \leq M \\ 0, & \text{outros casos.} \end{cases}$$

Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela – Triangular



Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela – *Hamming* e *Hanning*

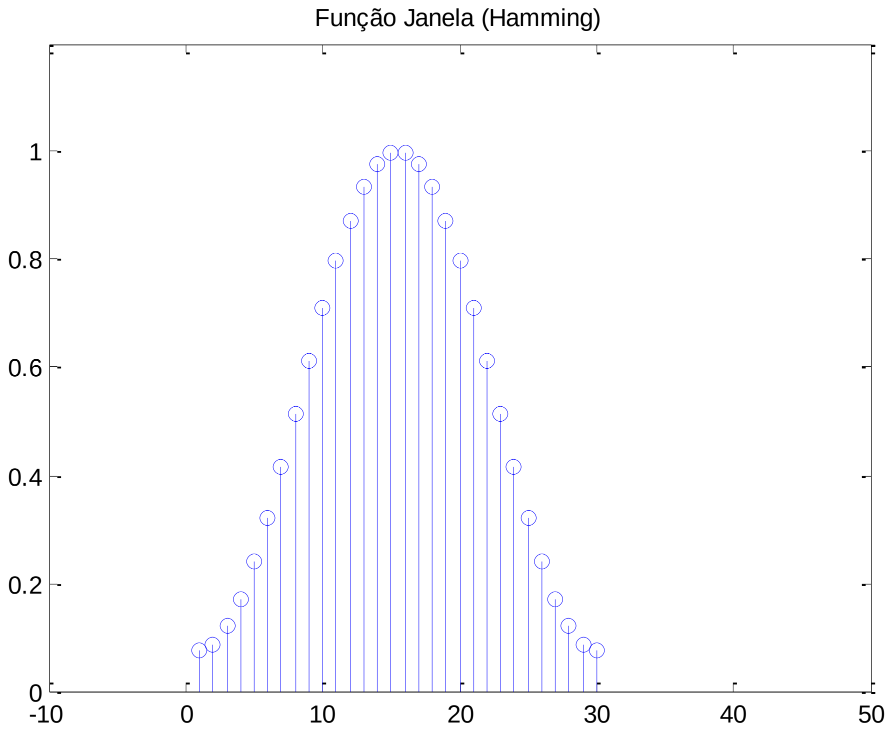
- A janela retangular origina muita ondulação nas extremidades, que não pode ser controlada. Para reduzir essas ondulações, várias janelas foram propostas. A janela de *hamming* (α=0,54) é dada por:

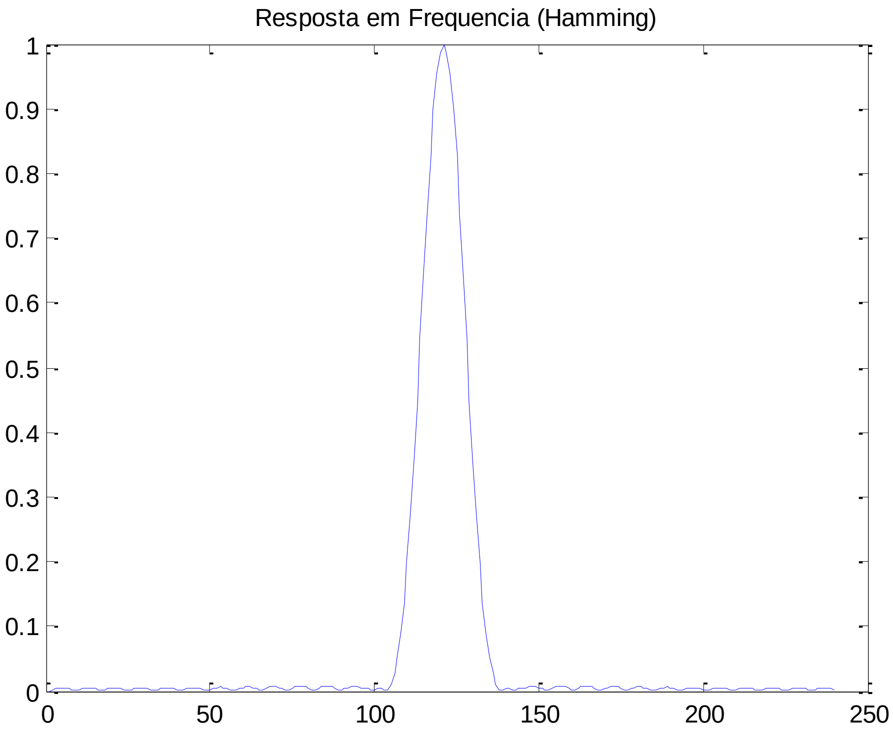
$$w(n) = \begin{cases} \alpha + (1-\alpha)\cos\left(\dfrac{2\pi n}{M}\right), & \text{p/ } |n| \leq \dfrac{M}{2} \\ 0, & |n| > \dfrac{M}{2} \end{cases}$$

- Se α=0,50, o filtro é conhecido como janela de *hanning*.

Aproximações para filtros FIR

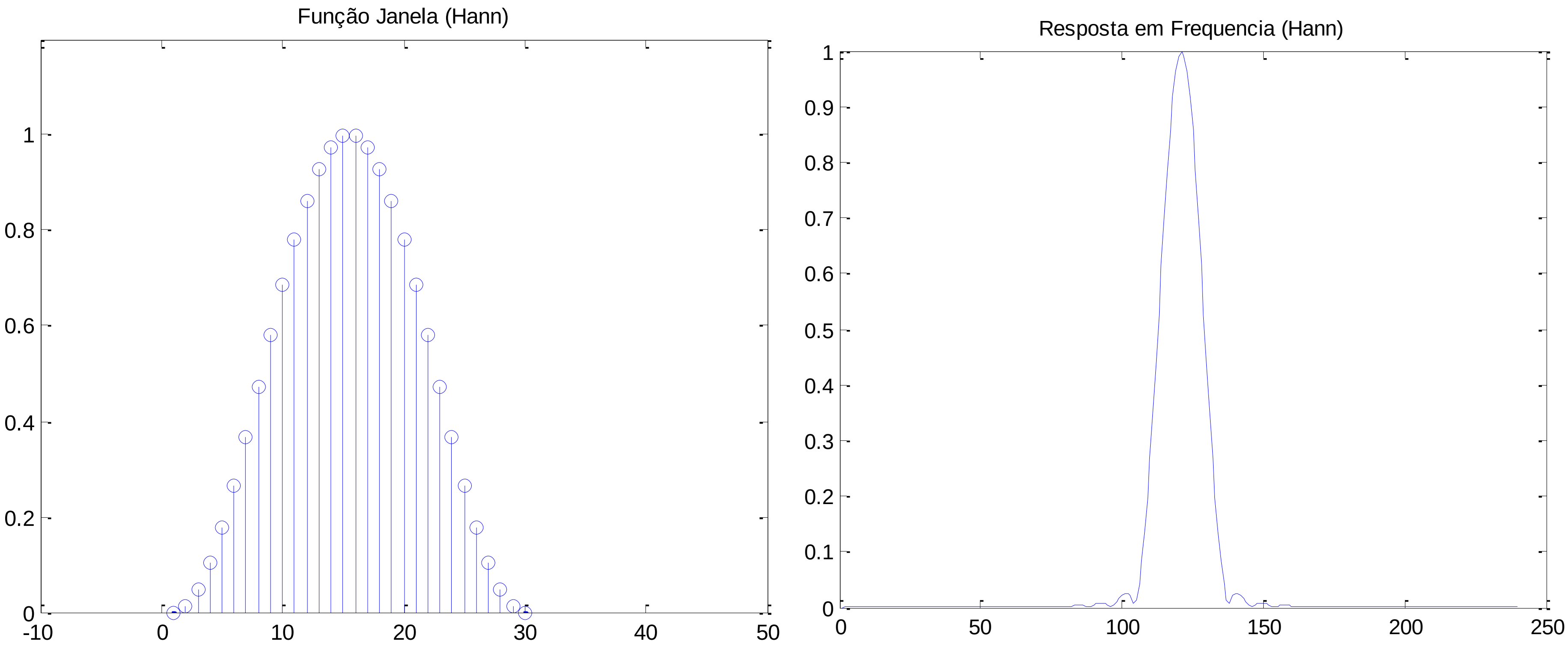
Projeto com Funções Janela – *Hamming* e *Hanning*





Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela – *Hamming* e *Hanning*



Aproximações para filtros FIR

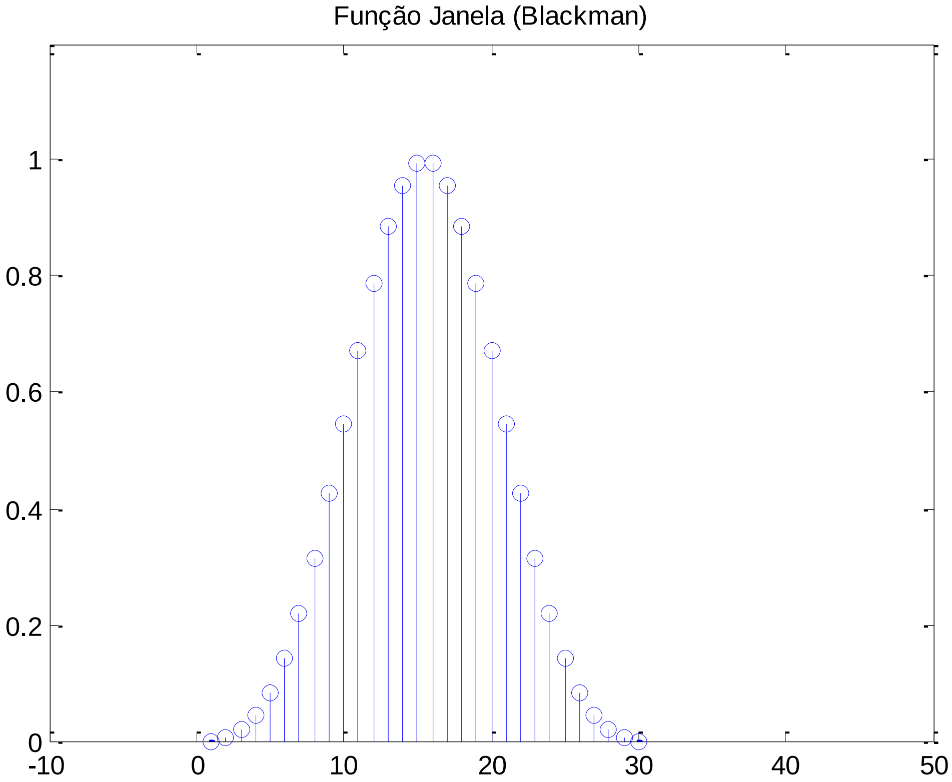
Projeto com Funções Janela – *Blackman*

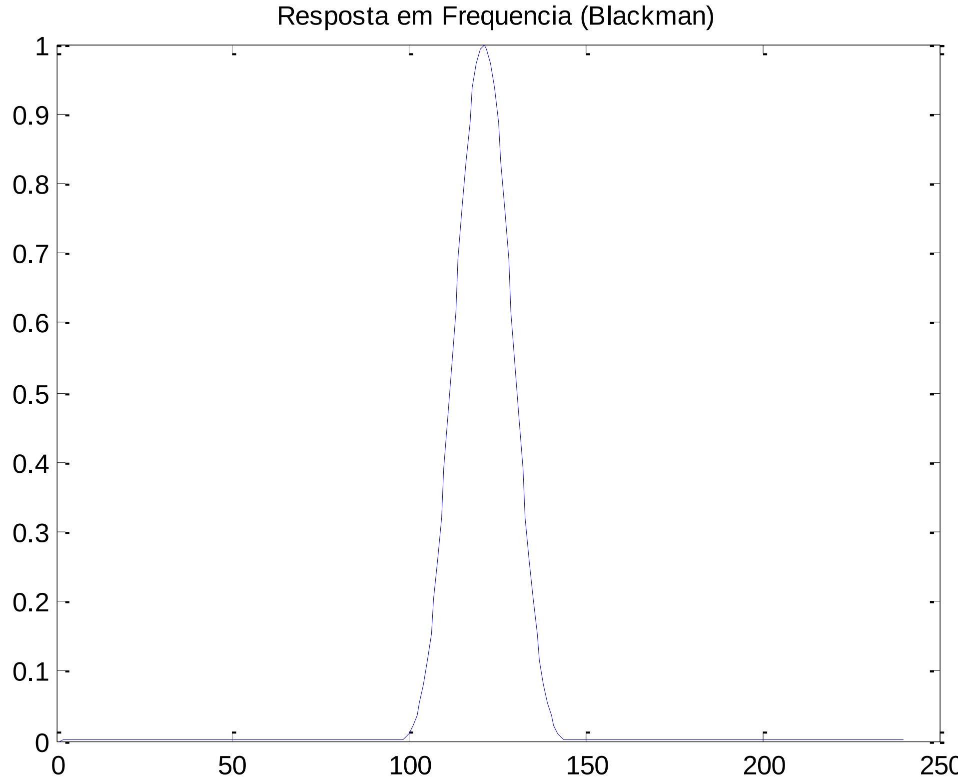
- A janela de *blackman* introduz um outro termo cossenoidal, visando um maior controle da faixa de transição.

$$w(n) = \begin{cases} 0{,}42 + 0{,}5\cos\left(\dfrac{2\pi n}{M}\right) + 0{,}08\cos\left(\dfrac{4\pi n}{M}\right), \text{ p/ } |n| \leq \dfrac{M}{2} \\ 0, \ |n| > \dfrac{M}{2} \end{cases}$$

Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela – *Blackman*





Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela – Procedimento Geral

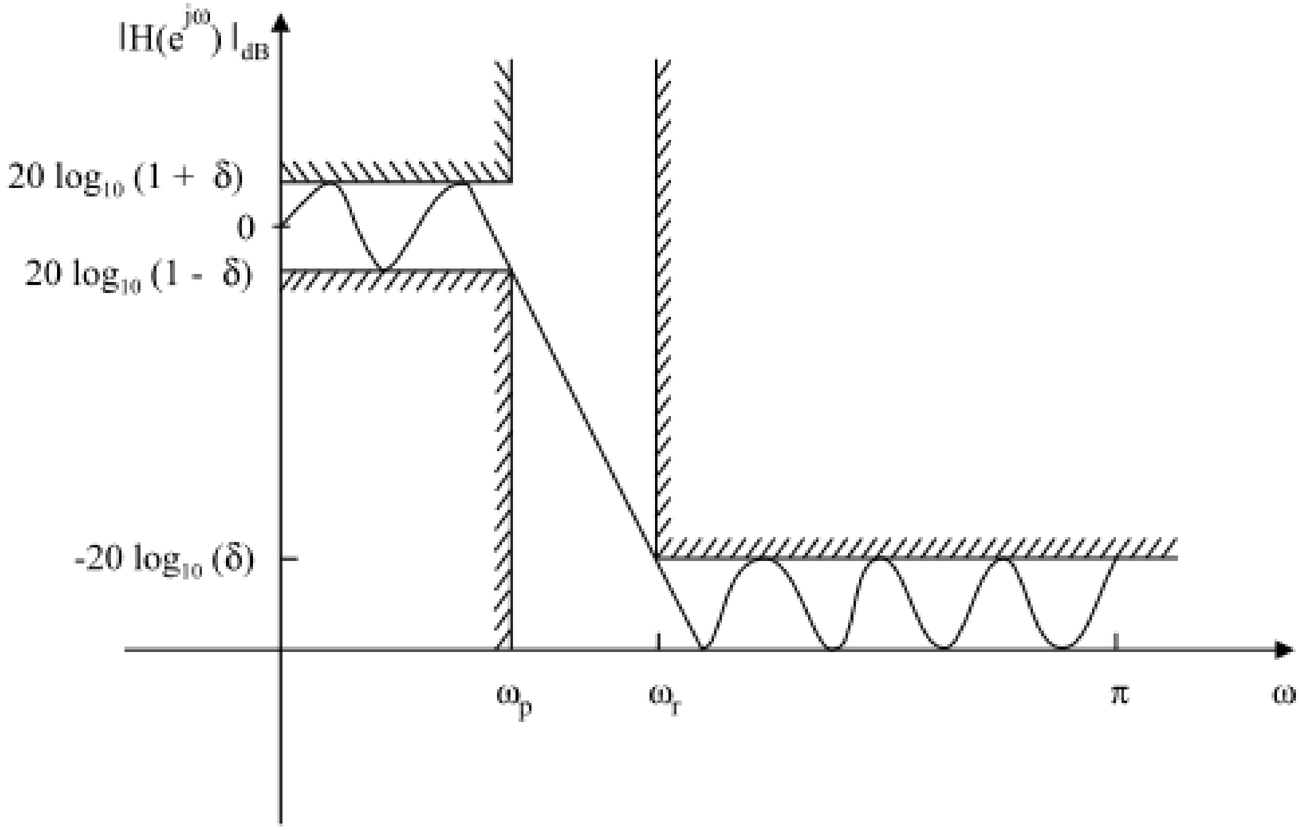
- Procedimento geral:

1) Selecione a função janela apropriada;
2) Especifique a resposta em freqüência do filtro ideal H_d;
3) Calcule os coeficientes do filtro ideal h_d
4) Multiplique os coeficientes do filtro ideal pela função janela para obter os coeficientes do filtro h;
5) Determine a resposta em freqüência do filtro h e faça iterações se necessário (tipicamente, altere o valor da ordem).

Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela – Procedimento Geral

- Procedimento geral (Especificações):



Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela – Procedimento Geral

- Procedimento geral (Especificações):

Window's name	Mainlobe	Mainlobe/sidelobe	Peak $20\log_{10}\delta$
Rectangular	$4\pi/M$	-13dB	-21dB
Hanning	$8\pi/M$	-32dB	-44dB
Hamming	$8\pi/M$	-43dB	-53dB
Blackman	$12\pi/M$	-58dB	-74dB

Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela

Retangular , Triangular, Hanning, Hamming, Blackman

- Trabalho 7, 8, 9, 10 e 11 (**projeto de filtro**)
  - Projete um filtro usando as cinco primeiras funções janelas com as seguintes especificações (pode-se usar somente duas funções Matlab)
  - Rejeita-faixa

$$\Omega_{p_1} = 2000 \text{ rad/s}$$
$$\Omega_{p_2} = 4000 \text{ rad/s}$$
$$\Omega_s = 10\,000 \text{ rad/s}$$

- Trabalho 12, 13 e 14 (**filtragem**)
  - Misture quatro senoides, uma com 3000rad/s, outra com 2500rad/s, outra com 1000rad/s e outra com 8000rad/s, com diferentes amplitudes. Filtre este sinal com os três dos cinco filtros janela, projetados nos trabalhos 7, 8, 9, 10 e 11. Esboce gráficos do sinal filtrado no domínio do tempo e da frequência.
- Itens obrigatórios:
  - Resposta em frequência (tanto freq. digital quanto analógica com comentários).
  - Sinais no domínio do tempo, quando couber.

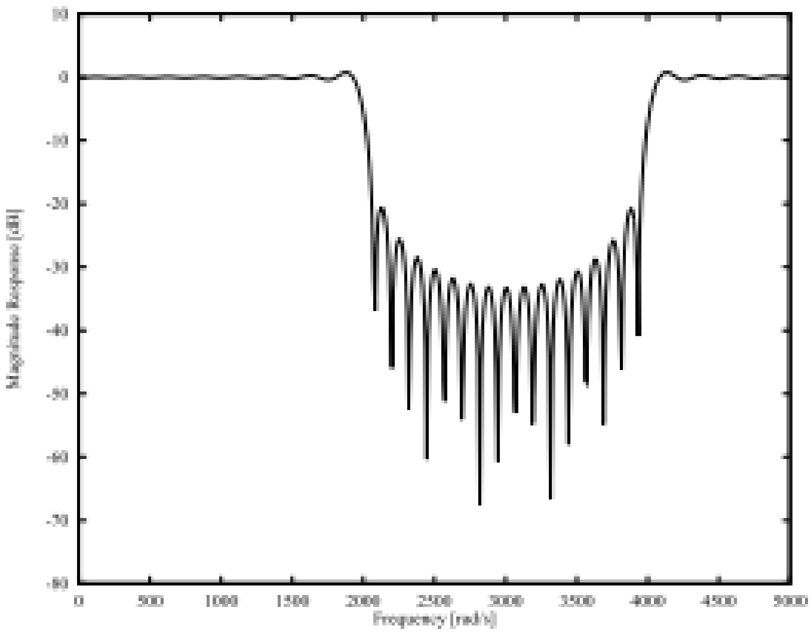
Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela

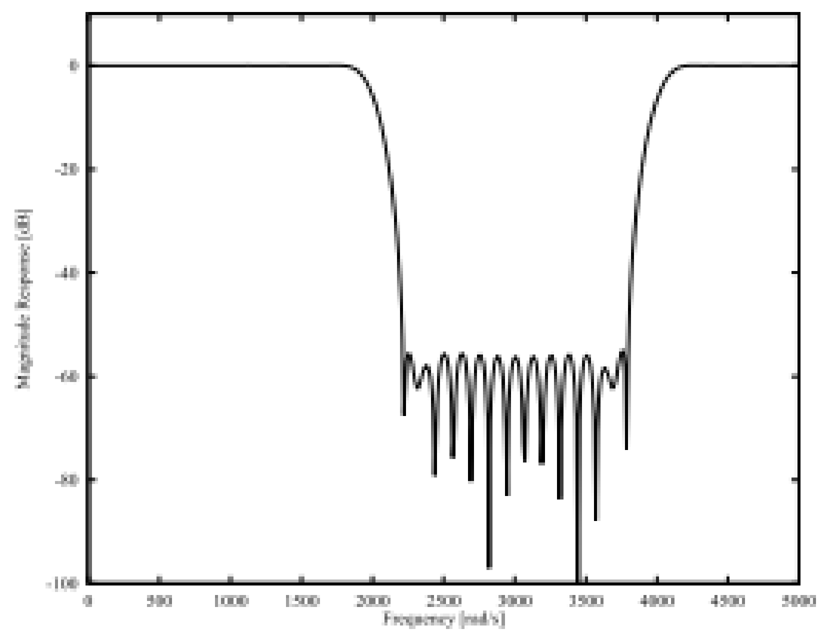
Retangular , Triangular, Hanning, Hamming, Blackman

- Exercício:

Retangular



Hamming



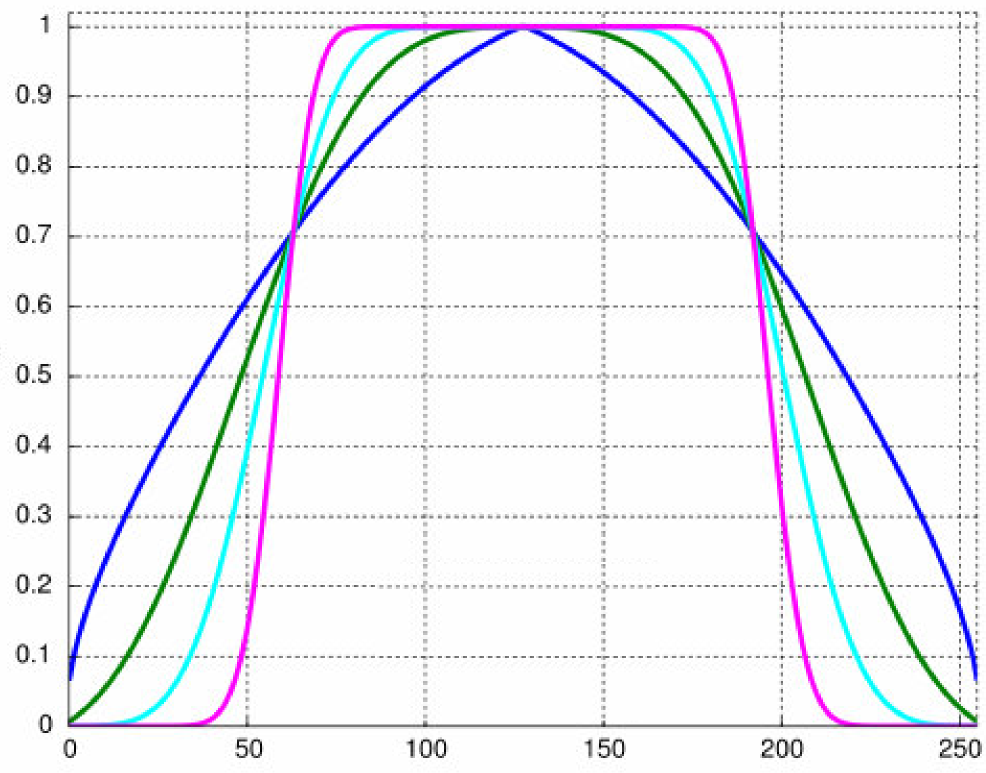
Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela – Procedimento Geral

- **Implementações no MatLab**
  - O MatLab tem diversas funções para implementar janelas:
    - w = rectwin(M+1): Janela retangular
    - w = bartlett(M+1): Janela triangular
    - w = hann(M+1): Janela de Hanning
    - w = hamming(M+1): Janela de Hamming
    - w = blackman(M+1): Janela de Blackman
    - w = kaiser(M+1, Beta): Janela de Kaiser
    - w = chebwin(M+1): Equiriple

Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela - Janela Flexível



Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela – *Kaiser* (Janela Flexível)

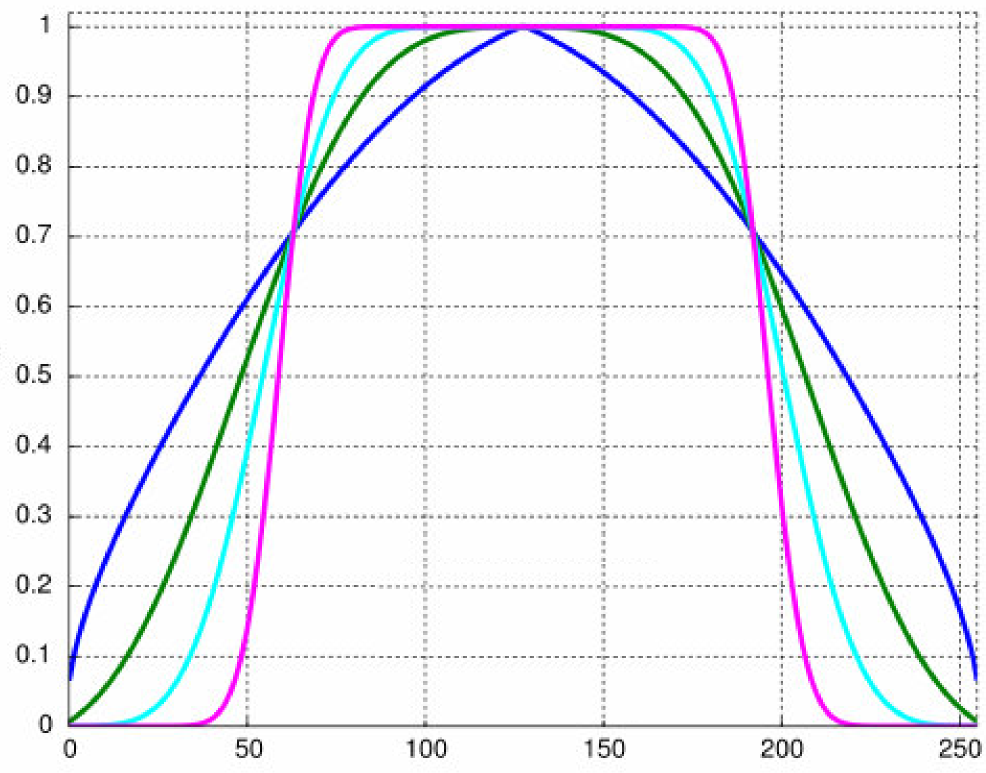
- A janela de kaiser permite controlar as ondulações nas faixas de passagem e rejeição. $\beta=\Omega_a(M/2)T$ e $I_0(x)$ é a função de *bessel* modificada de primeira classe de ordem zero.

$$w_K(n)=\begin{cases}\dfrac{I_0\left[\beta\sqrt{1-\left(2n/M\right)^2}\right]}{I_0(\beta)}, \mathrm{p}/\,|\,\mathrm{n}\,|\leq\dfrac{\mathrm{M}}{2}\\ 0,|\,\mathrm{n}\,|>\dfrac{\mathrm{M}}{2}\end{cases}$$

$$I_0(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\left(x/2\right)^k}{k!}\right]^2$$

Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela – *Kaiser* (Janela Flexível)



Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela – *Equiriple*

- A janela de Dolph-chebyshev (*equiripple*) permite que a largura do lóbulo principal e a faixa de transição sejam controlados pelo mesmo parâmetro (M) e a sua faixa de rejeição tem ondulação constante.

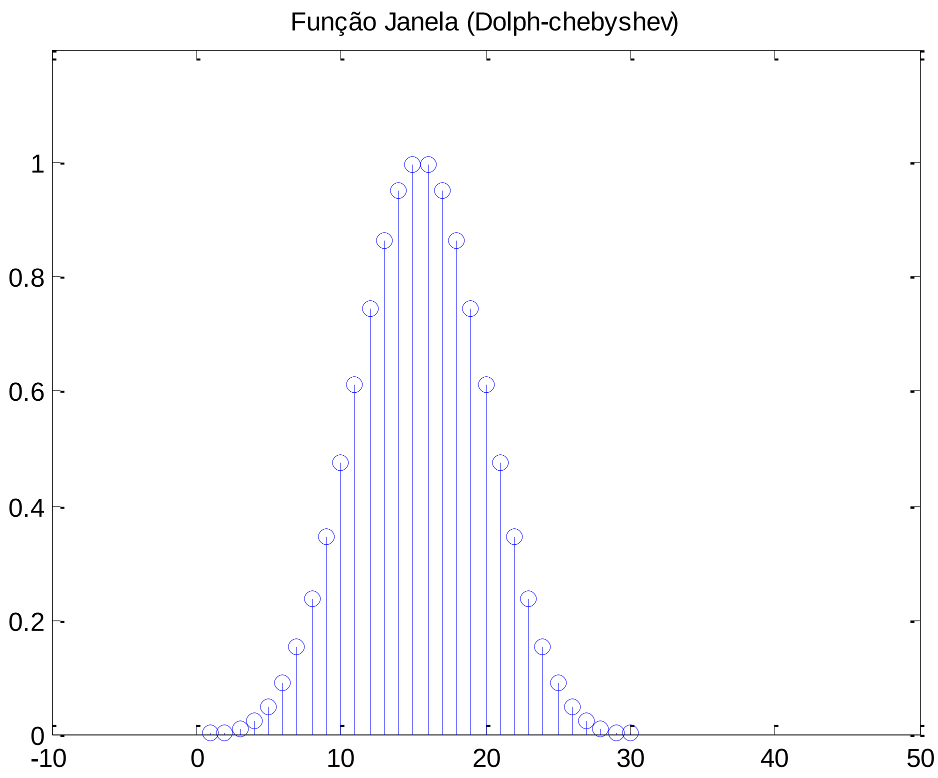
$$w_{DC}(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{M+1}\left\{\dfrac{1}{r} + 2\displaystyle\sum_{i=1}^{M/2} C_M\left[x_0 \cos\left(\dfrac{i\pi}{M+1}\right)\right]\cos\left(\dfrac{2ni\pi}{M+1}\right)\right\}, \text{p/} \mid \text{n} \mid \leq \dfrac{\text{M}}{2} \\ 0, \mid \text{n} \mid > \dfrac{\text{M}}{2} \end{cases}$$

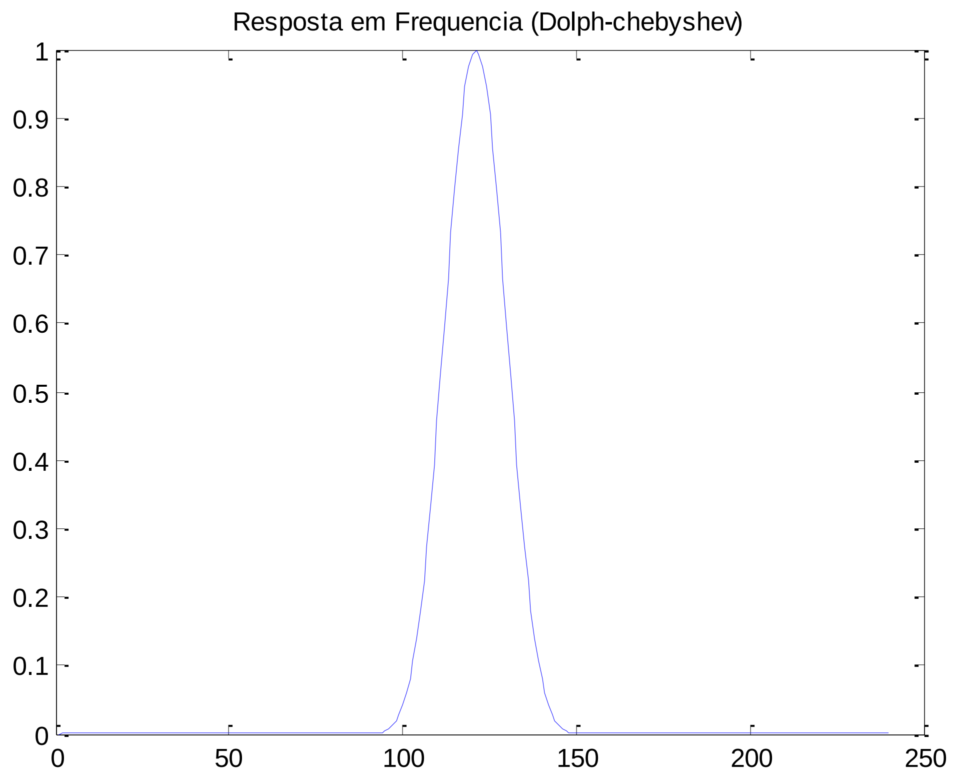
$$C_M(x) = \begin{cases} \cos\left[M \cos^{-1}(x)\right], p / \mid x \mid \leq 1 \\ \cosh\left[M \cosh^{-1}(x)\right], p / \mid x \mid > 1 \end{cases}$$

$$r = \frac{\delta_r}{\delta_p}, x_0 = \cosh\left[\frac{1}{M}\cosh^{-1}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela – *Equiriple*





Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela – *Kaiser*

- Passos para o projeto de um filtro com janela de kaiser:
  - Passo 1:
    - Se PB ou PA, $\Omega_c=(\Omega_p+\Omega_r)/2$ e $T_r=|\Omega_p-\Omega_r|$;
    - Se PF ou RF, $T_r=\min\{|\Omega_{p1}-\Omega_{r1}|,|\Omega_{p2}-\Omega_{r2}|\}$, $\Omega_{c1}=\Omega_{p1}+T_r/2$ e $\Omega_{c2}=\Omega_{p2}-T_r/2$;
  - Passo 2: $\delta_p=(10^{0,05Ap}-1)/(10^{0,05Ap}+1)$, $\delta_r=(10^{-0,05Ar})$ e $\delta=\min(\delta_p,\delta_r)$;
  - Passo 3: $A_p=20\log\{(1+\delta)/(1-\delta)\}$, $A_r=-20\log(\delta)$
  - Passo 4:

$$\beta=\begin{cases} 0, \text{p/ } A_r \le 21 \\ 0{,}5842(A_r-21)^{0,4}+0{,}07886(A_r-21), \text{p/ } 21 < A_r \le 50 \\ 0{,}1102(A_r-8{,}7), \text{p/ } 50 < A_r \end{cases}$$

Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela – *Kaiser*

- Passos para o projeto de um filtro com janela de kaiser:
  - Passo 5: $M \geq (\Omega_s D)/T_r$;

$$D = \begin{cases} 0{,}9222, \ \text{p/ } \mathrm{A}_r \leq 21 \\ (\mathrm{A}_r - 7{,}95)/14{,}36, \ p/\ 21 < \mathrm{A}_r \end{cases}$$

  - Passo 6: Calcular $w_k(n)$ e depois $h(n) = w_k(n)h_d(n)$;
  - Passo 7: $H(z) = z^{-M/2}\Im\{h'(n)\}$.

Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela – *Kaiser*

- Trabalho 15 (**projeto de filtro**)
  - Projete um filtro de kaiser com as seguintes especificações
    - Rejeita-faixa

$$A_p = 1.0 \text{ dB}$$
$$A_r = 45 \text{ dB}$$
$$\Omega_{p_1} = 800 \text{ Hz}$$
$$\Omega_{r_1} = 950 \text{ Hz}$$
$$\Omega_{r_2} = 1050 \text{ Hz}$$
$$\Omega_{p_2} = 1200 \text{ Hz}$$
$$\Omega_s = 6000 \text{ Hz}$$

Resposta

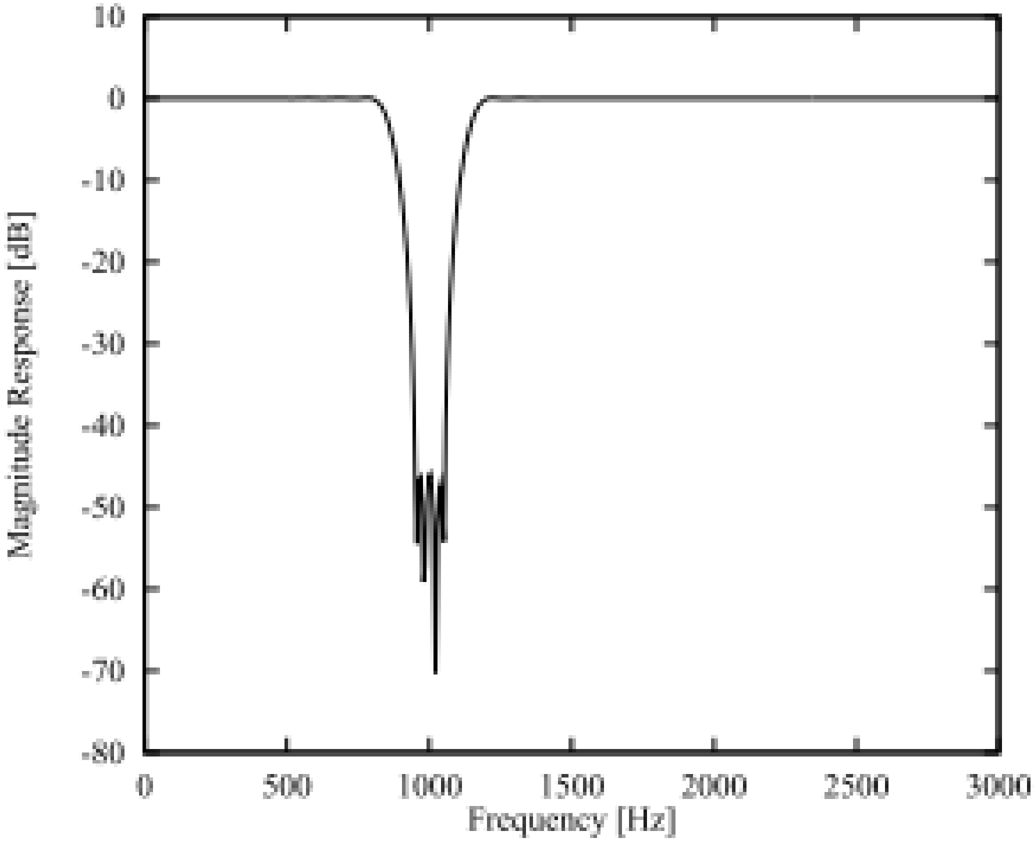
Ω_{c_1}	875 Hz
Ω_{c_2}	1125 Hz
Ω_{p_1}	800 Hz
Ω_{r_1}	950 Hz
Ω_{r_2}	1050 Hz
Ω_{p_2}	1200 Hz
δ_p	0.0575
δ_r	0.00562
T_r	150 Hz
D	2.5800835
β	3.9754327
M	104

- Trabalho 16 (**filtragem**)
  - Misture quatro senoides, uma com 1000Hz, outra com 980Hz, outra com 700Hz e outra com 1500Hz, com diferentes amplitudes. Filtre este sinal com o filtro Kaiser, projetado no trabalho 15. Esboce gráficos do sinal filtrado no domínio do tempo e da frequência.

Aproximações para filtros FIR

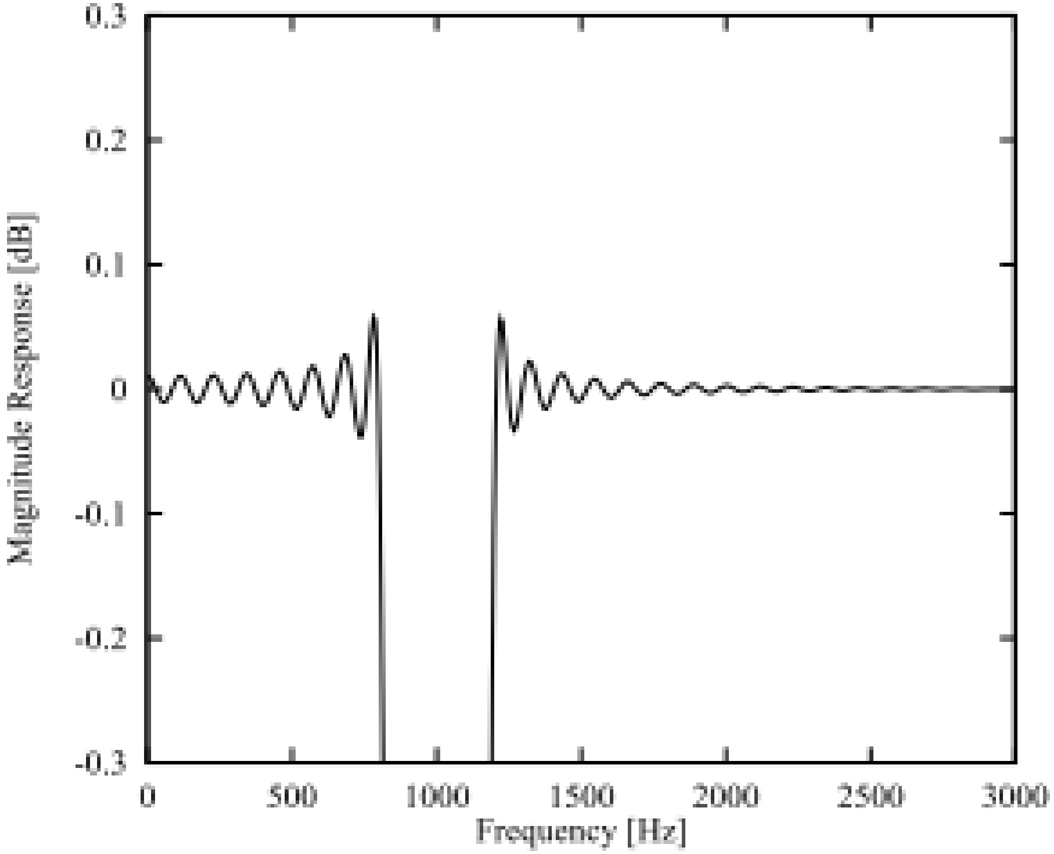
Projeto com Funções Janela – *Kaiser*

- Exercício:
  - Resposta em freqüência



Aproximações para filtros FIR
Projeto com Funções Janela – *Kaiser*

- Exercício:
  - Resposta em freqüência



Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela – Dolph-chebyshev (*equiripple*)

- Passos para o projeto:
  - Passo1: Executar passos 1 e 2 da janela de kaiser;
  - Passo 2: Determinar r;
  - Passo 3: Executar os passos 3 e 5 a 6 de kaiser, substituindo A_r por A_r + 2,5 no cálculo de D, pois a atenuação na banda de rejeição é maior.
  - Passo 4: Calcular x_0;
  - Passo 5: Proceder como na janela de kaiser.

Aproximações para filtros FIR

Projeto com Funções Janela – Dolph-chebyshev (*equiripple*)

- Trabalho 17 (**projeto de filtro**)
  - Projete novamente o filtro anterior com este método.

- Trabalho 18 (**filtragem**)
  - Use a senoide do trabalho 16 e filtre com o filtro *equiripple*, projetado no trabalho 17. Esboce gráficos do sinal filtrado no domínio do tempo e da frequência.

Aproximações para filtros FIR

Projeto utilizando Otimização – Formulação do Problema

- Para se utilizar algoritmos de otimização, é interessante descrever os filtros de forma mais generalizada.
- Utilizando os tipos I, II, III e IV podemos projetar todos os tipos de filtros e ainda com a fase sendo linear.
- A forma generalizada que utiliza a função auxiliar $P(\omega)$ igual a

$$P(\omega) = \sum_{l=0}^{L} p(l) \cos(\omega l)$$

para todos os tipos, pode ser encontrada como:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\alpha\omega - \beta)} A(\omega)$$

$$A(\omega) = Q(\omega) P(\omega),\ \alpha = \frac{M}{2}$$

Aproximações para filtros FIR

Projeto utilizando Otimização – Formulação do Problema

- A forma generalizada, para tipos I, II, III e IV pode ser expressa como:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\alpha\omega-\beta)}Q(\omega)P(\omega) = e^{-j(\alpha\omega-\beta)}A(\omega)$$

Type I: $\beta = 0$ and $Q(\omega) = 1$

Type II: $\beta = 0$ and $Q(\omega) = \cos(\frac{\omega}{2})$

Type III: $\beta = \frac{\pi}{2}$ and $Q(\omega) = \sin(\omega)$

Type IV: $\beta = \frac{\pi}{2}$ and $Q(\omega) = \sin(\frac{\omega}{2})$.

Aproximações para filtros FIR

Projeto utilizando Otimização – Formulação do Problema

- Se $D(\omega)$ for a resposta desejada, define-se a função erro ponderada por $W(\omega)$ como:

$$E(\omega) = W(\omega)\big(D(\omega) - A(\omega)\big) = W(\omega)\big(D(\omega) - Q(\omega)P(\omega)\big)$$

$$E(\omega) = W(\omega)Q(\omega)\left(\frac{D(\omega)}{Q(\omega)} - P(\omega)\right)$$

- Definindo:

$$W_q(\omega) = W(\omega)Q(\omega)$$

$$D_q(\omega) = \frac{D(\omega)}{Q(\omega)}$$

Aproximações para filtros FIR

Projeto utilizando Otimização – Formulação do Problema

- Temos a função de erro ponderada por $W_q(\omega)$ como:

$$E(\omega) = W_q(\omega)\left(D_q(\omega) - P(\omega)\right)$$

- De posse da função de erro ponderada, podemos definir o nosso problema de otimização para os filtros FIR como:

Determine o conjunto de coeficientes $p(l)$ que minimiza alguma função objetivo da função de erro ponderada $E(\omega)$ sobre um conjunto prescrito de freqüências.

Aproximações para filtros FIR

Projeto utilizando Otimização – Formulação do Problema

- A otimização então determinará o conjunto de coeficientes $p(l)$ que minimizará o erro $E(\omega)$. Tal função é avaliada num conjunto de freqüências $0 \leq \omega_i \leq \pi$. É possível descartar os pontos nas faixas de transição. Colocando em notação matricial:

$$\mathbf{e} = \mathbf{W}_q\left(\mathbf{d}_q - \mathbf{U}\mathbf{p}\right)$$

$$Onde:$$

$$\mathbf{e} = [E(\omega_1)\; E(\omega_2) \ldots E(\omega_N)]^T$$

$$\mathbf{W}_q = diag[W_q(\omega_1)\; W_q(\omega_2) \ldots W_q(\omega_N)]$$

$$\mathbf{d}_q = [D_q(\omega_1)\; D_q(\omega_2) \ldots D_q(\omega_N)]^T$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega_1) & \cdots & \cos(L\omega_1) \\ 1 & \cos(\omega_2) & \cdots & \cos(L\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos(\omega_N) & \cdots & \cos(L\omega_N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = [\,p(0)\; p(1) \ldots \mathrm{p(L)}]^T$$

Aproximações para filtros FIR

Projeto utilizando Otimização – Mínimos Quadrados (WLS)

- A otimização pelo método dos mínimos quadrados ponderados tem como objetivo minimizar o quadrado da energia da função erro E(ω):

$$\min_p \left\{ \left\| E(\omega) \right\|_2^2 \right\} = \min_p \left\{ \int_0^{\pi} \left| E(\omega) \right|^2 d\omega \right\} \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left| E(\omega_k) \right|^2 = \frac{1}{N} \mathbf{e}^T \mathbf{e}$$

Aproximações para filtros FIR

Projeto utilizando Otimização – Chebyshev (minimax)

- A otimização pelo método de chebyshev (minimax) procura minimizar o máximo valor absoluto da função erro:

$$\min_p \left\{ \| E(\omega) \|_\infty \right\} = \min_p \left\{ \max_{\omega \in F} \left\{ |E(\omega)| \right\} \right\}$$

- A ordem aproximada do filtro pode ser calculada com a fórmula:

$$M \approx \frac{-20 \log_{10}\left(\sqrt{\delta_r \delta_p}\right) - 13}{2{,}3237(\omega_r - \omega_p)} + 1$$

Aproximações para filtros FIR

Projeto utilizando Otimização – WLS-Chebyshev

- A otimização pelo método de WLS-chebyshev é utilizada em projeto de filtros de faixa estreita, levando em consideração tanto a atenuação mínima quanto a energia na faixa de rejeição.

- Tal técnica combina os métodos WLS e Chebyshev.

Aproximações para filtros FIR

Projeto utilizando Otimização - Funções do Matlab

- Comandos do MATLAB para projetar filtros por otimização

  Filtros WLS: firls e fircls.

  Filtros Chebyshev (minimax): firpm, usar também firpmord.

  Filtros WLS-chebyshev: não implementado no Matlab.

Aproximações para filtros FIR

Projeto utilizando Otimização

- Trabalho 18
- Exercício: Projete o filtro abaixo utilizando os métodos chebyshev e wls
  - Passa-baixas
  - A_p=1dB p/ $0 \leq \Omega \leq$ 2KHz
  - A_r=40dB p/ $\Omega \geq$ 2,5KHz
  - Ω_s=10KHz

- Trabalho 19
- Exercício: Projete o filtro multibanda abaixo utilizando o método de chebyshev.
  - $\delta r1$=40dB p/ $0 \leq \Omega \leq$ 2KHz
  - $\delta p1$=1dB p/ $2{,}5 \leq \Omega \leq$ 3,5KHz
  - $\delta r2$=40dB p/ $4 \leq \Omega \leq$ 6KHz
  - $\delta p2$=1dB p/ $6{,}5 \leq \Omega \leq$ 7,5KHz
  - $\delta pr3$=40dB p/ $8 \leq \Omega \leq$ 10KHz
  - Ω_s=20KHz

Parte 2

Filtros IIR

Aproximações para filtros IIR

Introdução

- Filtros IIR são representados por funções de transferência que consistem na razão de polinômios. Isso geralmente resulta numa resposta ao impulso com duração infinita.

- É possível projetar filtros IIR que necessitem de um número de multiplicações menor que o dos filtros FIR, o que os torna atrativos para aplicações em tempo real.

Aproximações para filtros IIR

Introdução

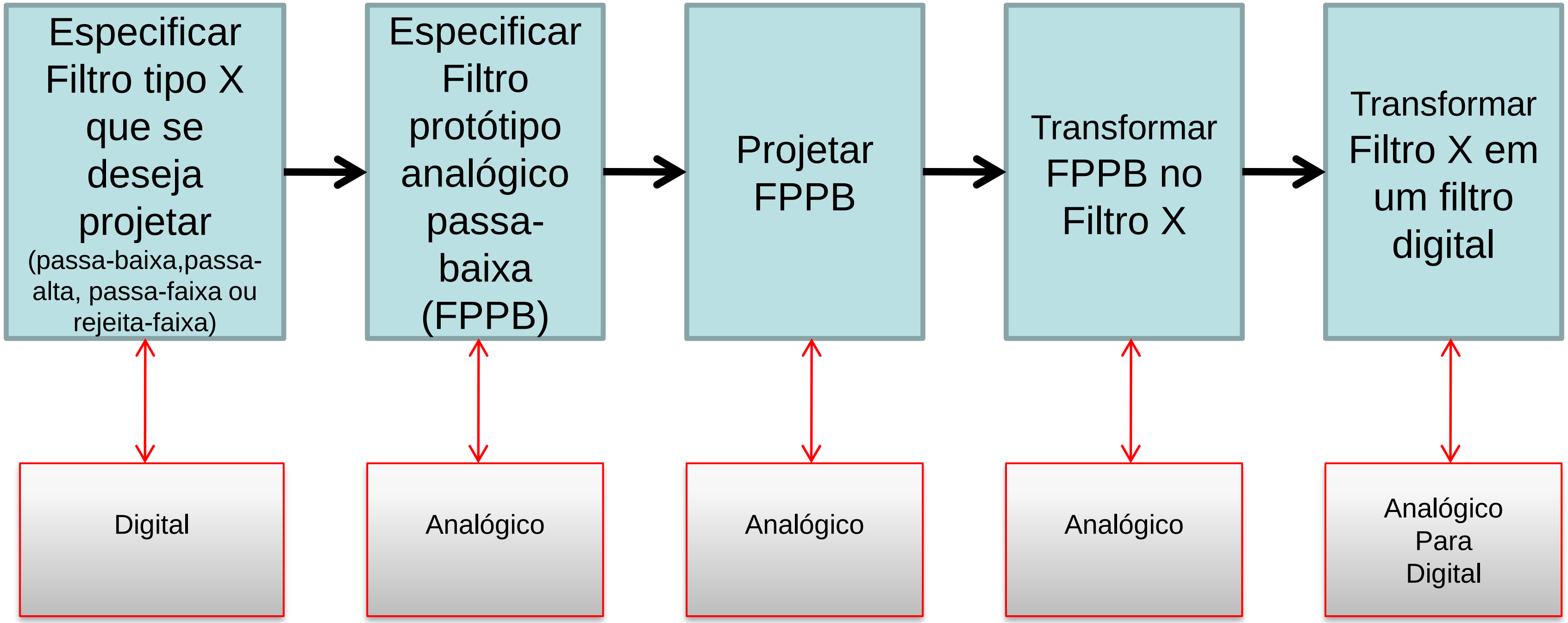
- O projeto de filtros digitais IIR utiliza métodos clássicos para aproximação de filtros analógicos (especificações de módulo). Esses filtros analógicos (obviamente) são definidos no domínio de tempo contínuo.

- Os diferentes tipos de filtros analógicos (passa-alta, passa-faixa e rejeita-faixa) são obtidos a partir de um filtro analógico protótipo passa-baixa.

Aproximações para filtros IIR

Introdução

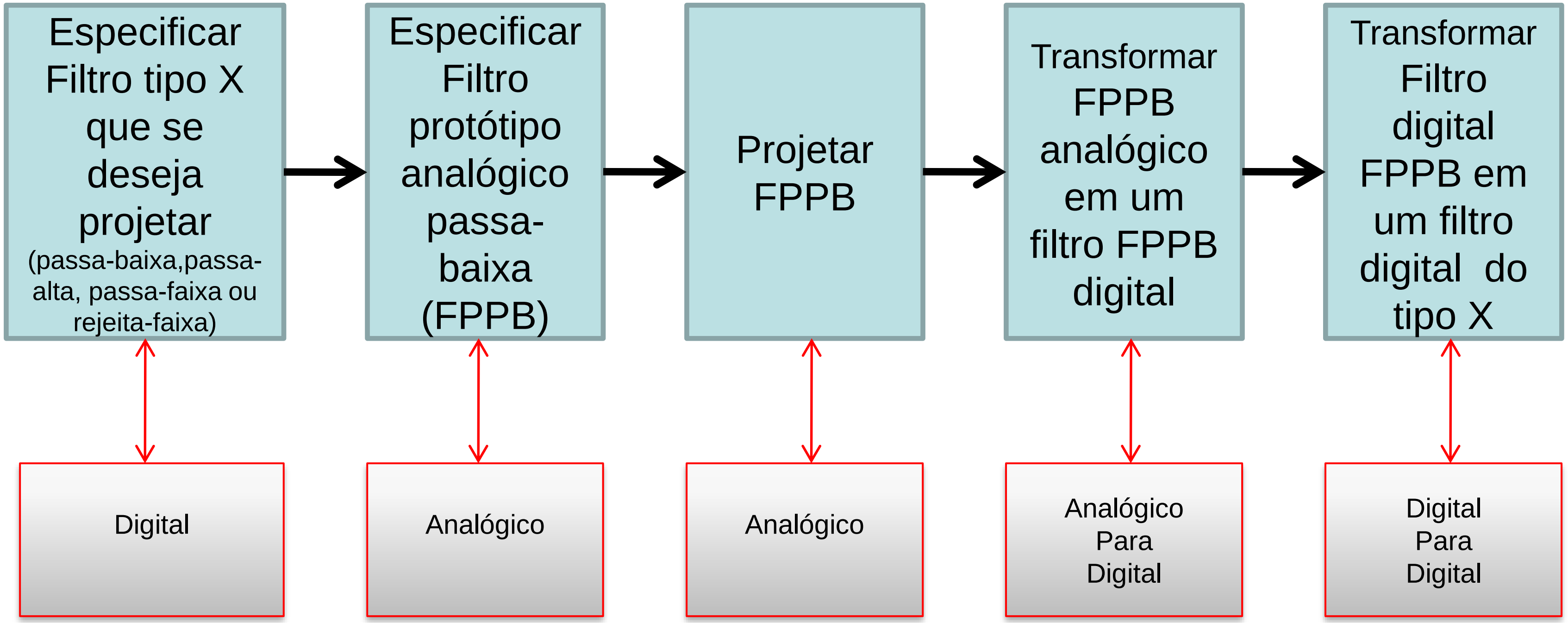
- A partir do filtro analógico protótipo passa-baixa podemos obter qualquer filtro digital IIR. Esquematicamente, temos duas opções, a primeira é:



Aproximações para filtros IIR

Introdução

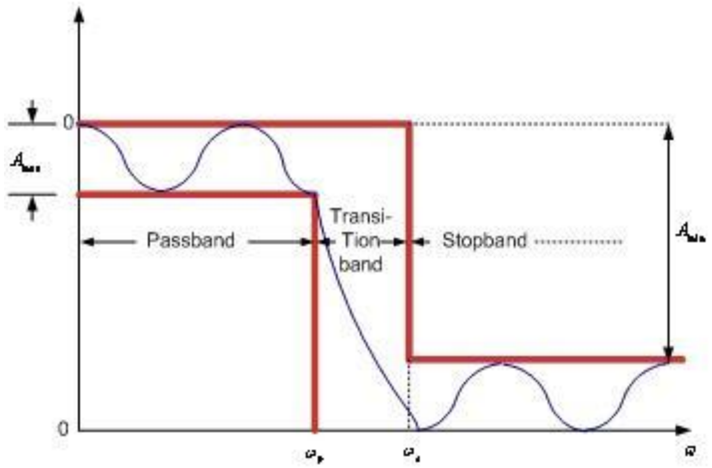
- A segunda é:



Aproximações para filtros IIR

Introdução

- O projeto de um filtro passa baixas analógico requer a especificação de resposta em módulo e fase que se deseja. ω_p e ω_r são as freqüências de passagem e rejeição e A_p e A_r são as ondulações máximas permitidas.



Aproximações para filtros IIR

Butterworth

- A aproximação de butterworth trata de filtros do tipo só-pólos, e a sua atenuação é dada por:

$$\left|A(j\Omega)\right|^2 = 1 + \left|E(j\Omega)\right|^2$$

- A freqüência Ω é normalizada pela freqüência de passagem (Ω_p) e E(jΩ) é o polinômio que aproxima A(j Ω). Para que o mesmo tenha módulo reduzido em altas freqüências e elevando em baixas, define-se:

$$E(j\Omega) = \varepsilon(j\Omega)^n$$

$$\left|A(j\Omega)\right|^2 = 1 + \varepsilon^2(\Omega)^{2n}$$

Aproximações para filtros IIR

Butterworth

- A atenuação em dB em dada por:

$$A_{dB}(\Omega) = 20\log_{10}\left|A(j\Omega)\right| = 10\log_{10}\left[1+\varepsilon^2(\Omega)^{2n}\right]$$

- A atenuação na faixa de passagem é então dada por:

$$A_p = 10\log_{10}\left[1+\varepsilon^2\right]$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1A_p - 1}}$$

- A ordem mínima do filtro é dada por

$$Ar = 10\log_{10}\left[1+\varepsilon^2(\Omega_r)^{2n}\right]$$

$$n \geq \frac{\log_{10}\left(\dfrac{10^{0,1A_r}-1}{\varepsilon^2}\right)}{2\log_{10}\Omega_r}$$

Aproximações para filtros IIR

Butterworth

- $|A(j\Omega)|^2$ pode ser dado por:

$$\left|A(j\Omega)\right|^2 = A(j\Omega)A(-j\Omega) = 1+\varepsilon^2(\Omega)^{2n} = 1+\varepsilon^2\left[-(j\Omega)^2\right]^n$$

$$\left|A(j\Omega)\right|^2 = 1+\varepsilon^2\left(-s^2\right)^n$$

- As raízes do polinômio são dadas por:

$$\left|A(j\Omega)\right|^2 = 1+\varepsilon^2\left(-s^2\right)^n = 0$$

$$S_i = \frac{1}{\varepsilon^{1/n}} e^{j\frac{\pi}{2}\left(\frac{2i+n+1}{n}\right)}$$

Aproximações para filtros IIR

Butterworth

- Para que o filtro seja estável, escolhe-se as raízes na metade esquerda do plano S:

$$H(s) = \frac{H_0}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$

$$H_0 = \prod_{i=1}^{n}(-p_i)$$

Aproximações para filtros IIR

Butterworth

- Para que o filtro seja estável, escolhe-se as raízes na metade esquerda do plano S:

$$H(s) = \frac{H_0}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$

$$H_0 = \prod_{i=1}^{n}(-p_i)$$