

Pràctica 1:

# Modelització del tractament d'ablació cardíaca IVS

Mètodes Numèrics II  
Grup 06

Autors:

Miguel Á. Hipólito, 1706041  
Marc Manteca, 1708583  
Sergi Martínez, 1707049  
Yixuan Qiu, 1707391

Universitat Autònoma de Barcelona

Dia de la entrega: 5 de desembre de 2025

# Contents

|          |                                      |          |
|----------|--------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Introducció</b>                   | <b>2</b> |
| <b>2</b> | <b>Modelització del problema</b>     | <b>2</b> |
| 2.1      | Solució analítica . . . . .          | 3        |
| <b>3</b> | <b>Mètodes numèrics</b>              | <b>3</b> |
| 3.1      | Mètode d'Euler explícit . . . . .    | 3        |
| 3.2      | Mètode d'Euler implícit . . . . .    | 3        |
| 3.3      | Mètode Crank-Nicolson . . . . .      | 3        |
| <b>4</b> | <b>Resultats</b>                     | <b>4</b> |
| 4.1      | Solució amb Euler explícit . . . . . | 4        |
| 4.2      | Solució amb Euler implícit . . . . . | 5        |
| 4.3      | Solució amb Crank-Nicolson . . . . . | 5        |
| 4.4      | Solució del problema . . . . .       | 6        |
| <b>5</b> | <b>Conclusions</b>                   | <b>7</b> |
| <b>6</b> | <b>Annex</b>                         | <b>8</b> |
| 6.1      | Matrius . . . . .                    | 8        |
| 6.2      | Gràfiques . . . . .                  | 8        |
| <b>7</b> | <b>Bibliografia</b>                  | <b>9</b> |

# 1 Introducció

El problema plantejat es basa en l'aplicació d'ablació cardíaca IVS. Aquesta cirurgia s'utilitza per tractar teixits "descoordinats" entre els ventricles del cor, on es fa servir uns elèctrodes a cada ventricle i es deixa el teixit entremig. D'aquesta forma, per aconseguir mort cel·lular en el teixit, s'aplica una diferència de potencial que, per efecte joule, escalfa la zona.

En el nostre cas tenim un pacient amb una paret entre ventricles de 2 cm de gruix, on al centre hi ha 0.5 cm de gruix amb teixit malalt. Per tant, el nostre objectiu és trobar durant quant de temps hem d'aplicar un senyal de 40V per tal que el tractament sigui el més eficient possible.

S'ha de considerar les tres següents condicions en resoldre el problema: que la màxima regió de teixit malalt estigui entre 50°C i 80°C el màxim temps possible, que la regió sana no arribi a 50°C, i que cap punt arribi a 80°C.

## 2 Modelització del problema

En aquesta pràctica fem servir la llei de Fourier per la temperatura:

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\kappa \nabla T) + P_{ext} \quad (1)$$

$$\text{On } c_v = 3686 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}, \quad \rho = 1081 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad \kappa = 0.56 \frac{\text{W}}{\text{m K}}, \quad \sigma = 0.472 \frac{\text{S}}{\text{m}}$$

Aquesta equació descriu l'evolució temporal del camp de temperatures en un cert volum, tenint en compte la conducció de calor i fonts de calor externes (en el nostre cas només l'efecte Joule). Les condicions inicials i de frontera del nostre problema seran la temperatura natural del cos humà  $T_c = 36.5^\circ\text{C}$

La nostre regió d'aplicació serà un cilindre d'alçada  $h = 2$  cm. Considerarem que el radi dels electròdes és un  $r$  arbitrari, però per la simetria del sistema ja veiem que podem reduir el problema a una dimensió i aquest radi no té molta importància.

Ara hem de trobar l'expressió per a la  $P_{ext}$ . Aquesta es refereix a la potència per unitat de volum, i, per tant, podem expressar-ho en funció dels nostres paràmetres:

$$P_{ext} = \frac{P}{V} = \frac{V_{ef}}{R} = \frac{1}{Al} \frac{V_{ef}}{\frac{h}{A} \frac{1}{\sigma}} = \frac{V_{ef} \sigma}{h^2} \quad (2)$$

On en el nostre cas  $V_{ef} = \frac{V_{pp}}{\sqrt{2}}$  i  $V_{pp}$  correspon al potencial pic a pic de corrent altern entre els electròdes, no confondre amb  $V$  que és el volum de la nostra regió.

A continuació normalitzem la nostra equació, trobant que:

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + 1} \quad (3)$$

$$\text{On } \tilde{T} = \frac{\kappa}{r^2 P_{ext}} T, \quad \tilde{t} = \frac{\kappa}{c_v \rho r^2} t, \quad \tilde{x} = x/r$$

Després de fer la normalització, trobem que la longitud característica del problema és  $r$ , i que la temperatura característica és el factor  $\frac{P_{ext} r^2}{\kappa}$ . En aquest cas el factor  $\alpha = \frac{\kappa}{c_v \rho}$  que té unitats de  $\text{m}^2/\text{s}$ , representa la freqüència característica de difusió quan ho dividim per l'àrea característica del nostre sistema ( $r^2$ ), o també la inversa d'aquest factor és el temps característic de difusió al multiplicar-ho per l'àrea.

## 2.1 Solució analítica

Seguidament, hem utilitzat l'annex, que indica que sigui l'equació del tipus:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + q(x, t) \quad (4)$$

Són conegudes la condició inicial,  $f(x, 0) = \beta$ , i les de frontera  $f(0, t) = f(1, t) = \beta$ , on  $x = 0$  i  $x = 1$  són les fronteres del sistema. Trobeu la sèrie de Fourier de sinus de  $q(x, t)$  i de la condició inicial:

$$q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(n\pi x) \quad b_n(t) = 2 \int_0^1 q(x, t) \sin(n\pi x) dx \quad (5)$$

La solució serà:

$$f(x, t) = \beta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \left( \frac{1 - e^{-n^2\pi^2 t}}{n^2\pi^2} \right) \sin(n\pi x) \quad (6)$$

Per tant, en el nostre cas, ens quedava la següent solució analítica:

$$\tilde{T} = \tilde{\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \left( \frac{1 - e^{-n^2\pi^2 t}}{n^3\pi^3} \right) \sin(n\pi x) \quad (7)$$

## 3 Mètodes numèrics

### 3.1 Mètode d'Euler explícit

El mètode d'Euler explícit es planteja substituint les derivades temporals i espacials per aproximacions finites en una malla discretitzada. En l'equació de difusió substituïm la derivada temporal per la derivada per la dreta i la segona derivada espacial la substituïm per la segona derivada central. Finalment, definint  $\gamma = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$  arribem a la següent expressió:

$$T_j^{n+1} = T_j^n + \gamma [T_{j+1}^n - 2T_j^n + T_{j-1}^n + (\Delta x)^2] \quad (8)$$

### 3.2 Mètode d'Euler implícit

Per l'altra banda el mètode d'Euler implícit substituïm per la derivada per la dreta pel temps i per la derivada central pel temps  $n + 1$ . Trobant d'aquesta manera l'expressió:

$$-\gamma T_{j+1}^{n+1} + (1 + 2\gamma) T_j^{n+1} - \gamma T_{j-1}^{n+1} - \Delta t = T_j^n \quad (9)$$

Definim llavors la matriu  $M$  i el vector  $b$ , de forma que poguem expressar el nostre sistema en forma matricial  $Mx = b$  i el poguem resoldre fent servir el mètode de Jacobi. El podem expressar de la següent manera:(veure Annex per matriu)

$$\boxed{MT^{n+1} = T^n + \Delta t \cdot 1_{\bar{v}}} \quad (10)$$

### 3.3 Mètode Crank-Nicolson

El mètode de Crank-Nicolson [1] es planteja agafant la segona derivada espacial i, a diferència de l'implícit, fem la mitjana entre el temps  $n + 1$  i  $n$ . Així, definit  $\gamma$  igual que abans, arribem a l'expressió (11).

$$-\frac{\gamma}{2} T_{j+1}^{n+1} + (1 + \gamma) T_j^{n+1} - \frac{\gamma}{2} T_{j-1}^{n+1} = \frac{\gamma}{2} T_{j+1}^n + (1 - \gamma) T_j^n + \frac{\gamma}{2} T_{j-1}^n + \Delta t \quad j = 0, \dots, N_t - 1 \quad (11)$$

Definim dues matrius  $A$  i  $B$ , de forma que podem expressar el nostre sistema d'equacions algebraiques amb l'equació (12) -veure Annex per l'expressió de les matrius-. Finalment, resolem recursivament per Jacobi igual que hem fet amb el mètode implícit.

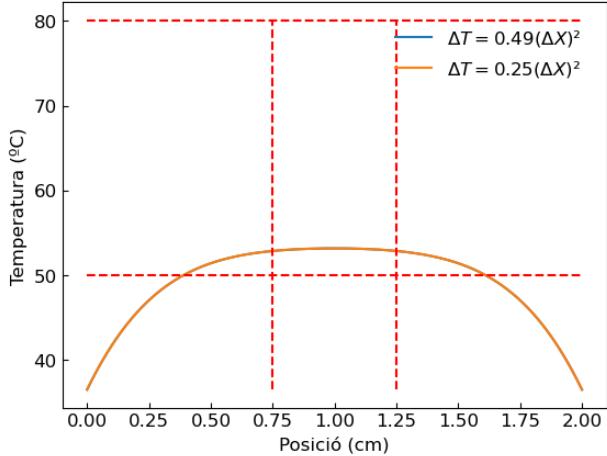
$$\boxed{AT^{n+1} = BT^n + \Delta t \cdot 1_{\bar{v}}} \quad (12)$$

## 4 Resultats

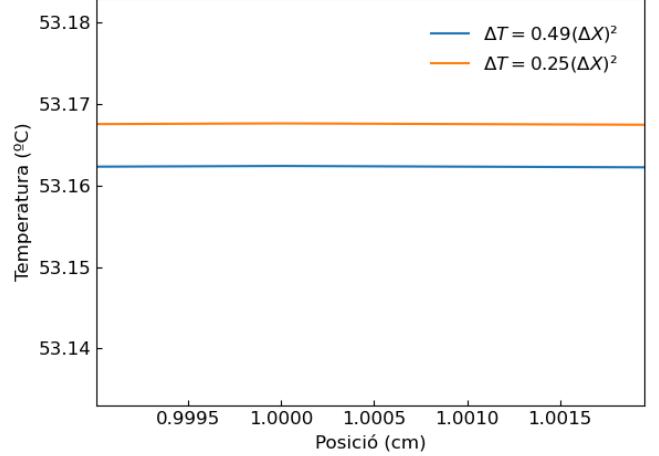
### 4.1 Solució amb Euler explícit

Per al mètode d'Euler explícit ho hem de mirar per a tres mallats diferents:  $\Delta\hat{t} = 0.51(\Delta\hat{x})^2$ ,  $\Delta\hat{t} = 0.49(\Delta\hat{x})^2$  i  $\Delta\hat{t} = 0.25(\Delta\hat{x})^2$ . Si estudiem la estabilitat d'aquest métode, podrem veure que per a  $\Delta\hat{t} = 0.51(\Delta\hat{x})^2$  aquest métode no és estable i per tant no ens esperarem cap resposta raonable d'aquest mallat (Annex: Fig. 8).

Per als altres mallats aquest métode sí que és estable i podrem aconseguir resultats aproximats.

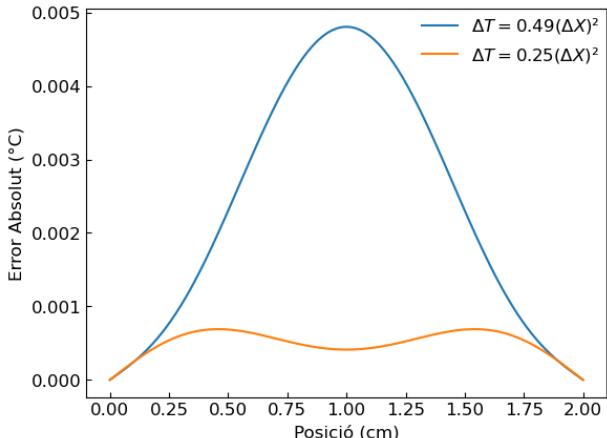


(a) Representació unidimensional de la temperatura en funció de la posició a dos mallats diferents

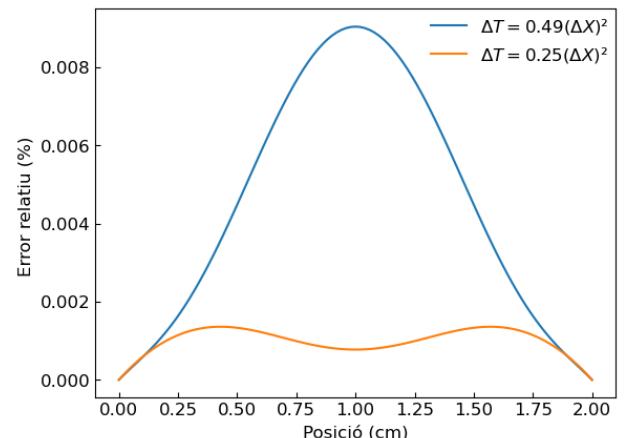


(b) Zoom al màxim de temperatura per a veure la diferència entre els mallats

Figure 1: Gràfiques obtingudes amb el mètode d'euler explícit a diferents mallats



(a) Errors absoluts de la temperatura en funció de la posició



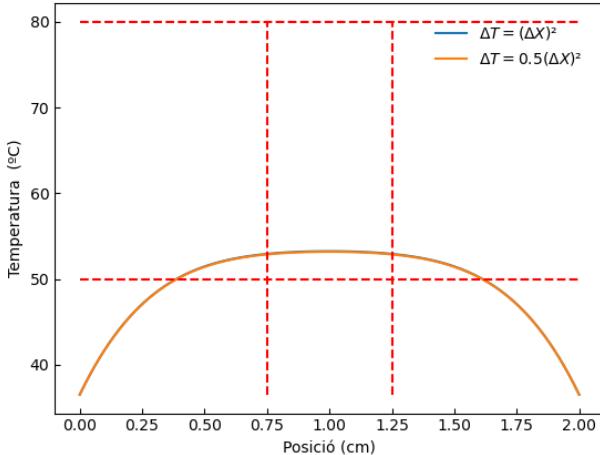
(b) Errors relatius de la temperatura en funció de la posició

Figure 2: Gràfiques d'errors obtingudes amb el mètode d'euler explícit a diferents mallats

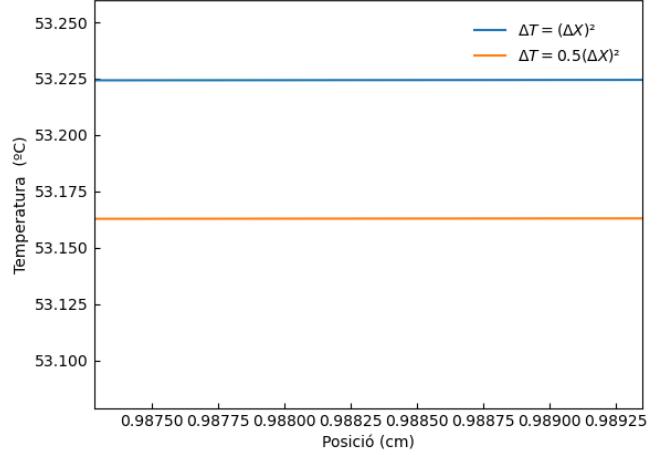
A les figures Fig 1 i Fig 2 observem que el métode d'euler explícit ens dona una solució molt aproximada a la analítica. També veiem que mentré més petit sigui el mallat més exacte ens donarà la resposta, tot i que com la precisió ja és prou bona al mallat  $\Delta\hat{t} = 0.49(\Delta\hat{x})^2$  no hi ha massa diferència.

## 4.2 Solució amb Euler implícit

Per a aquest mètode solucionarem l'equació (10) fent servir dos mallats diferents donats per les relacions:  $\Delta\tilde{t} = (\Delta\tilde{x})^2$  i  $\Delta\tilde{t} = 0.5(\Delta\tilde{x})^2$ . A continuació es mostren les solucions per cadascun dels mallats per  $t_a$  i els seus respectius errors absoluts i relatius.

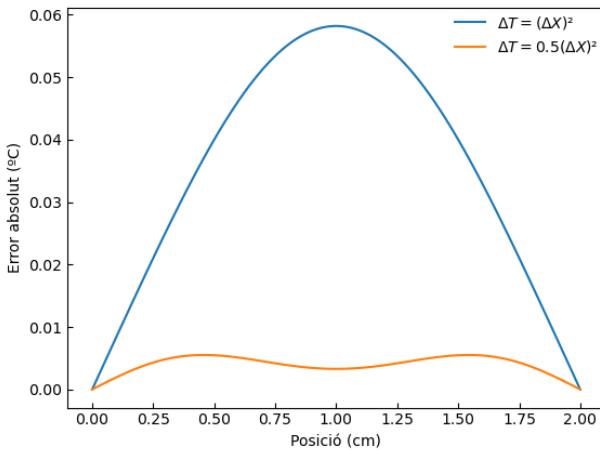


(a) Representació unidimensional de la temperatura en funció de la posició de la distància entre ventracles

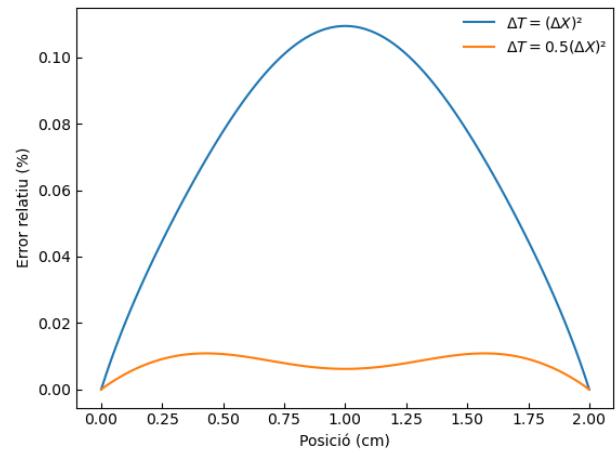


(b) Zoom al màxim de temperatura. Es veu que la major diferència són uns  $0.06^\circ\text{C}$  aproximadament

Figure 3: Gràfiques obtingudes amb el mètode d'Euler implícit a diferents mallats



(a) Error absolut en funció de la posició



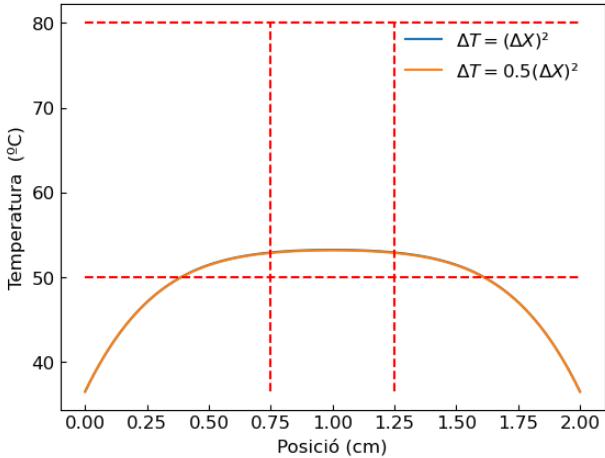
(b) Error percentual en funció de la posició

Figure 4: Error numèric de les dues solucions per Euler implícit respecte la solució analítica

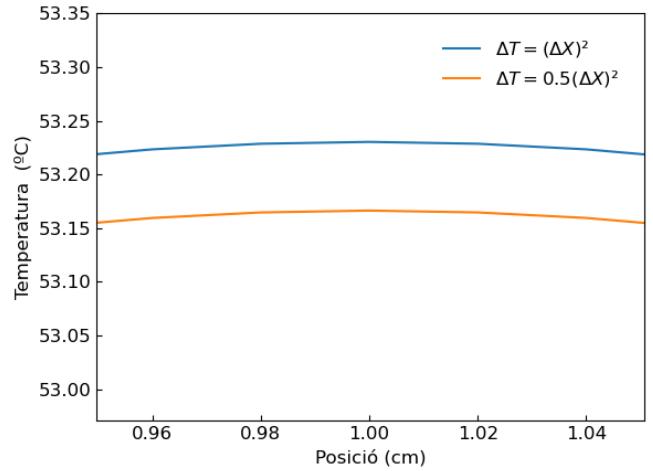
Podem observar que aquest mètode té un error inferior al mètode d'Euler explícit. Observem que entre els dos mallats no hi ha una diferència molt rellevant i que per tant no té molta rellevància quin mallat escollim, ja que en aquest cas el mètode convergeix per qualsevol  $\gamma$ . Aquest mètode és més precís que Euler explícit però a la vegada és més demandant en quant a càculs doncs s'ha de solucionar un sistema d'equacions a cada iteració.

## 4.3 Solució amb Crank-Nicolson

Finalment, pel mètode de Crank-Nicolson, agafem els dos mateixos mallats que amb l'implícit:  $\Delta\hat{t} = (\Delta\hat{x})^2$  i  $\Delta\hat{t} = 0.5(\Delta\hat{x})^2$ . Representem a la Fig. 5 les nostres solucions pel mateix temps i els seus respectius errors numèrics a la Fig. 6

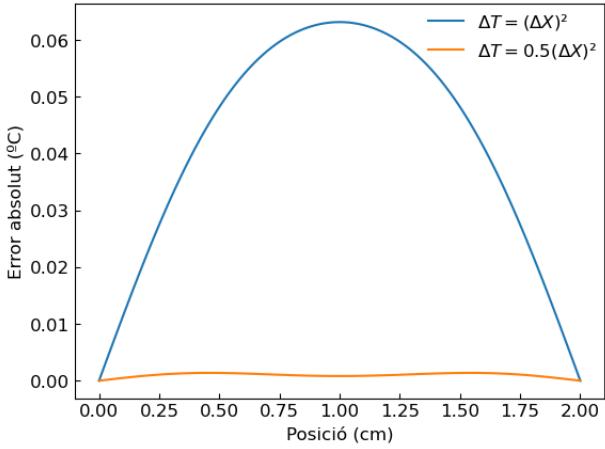


(a) Representació unidimensional de la temperatura en funció de la posició de la distància entre ventracles

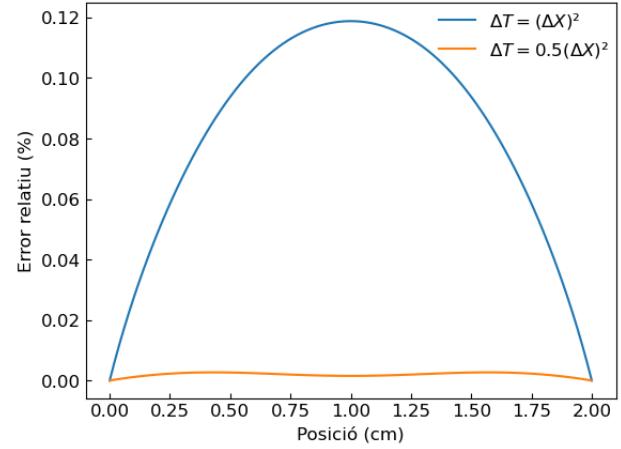


(b) Zoom al màxim de temperatura. Es veu que la major diferència són uns  $0.05^{\circ}\text{C}$  aproximadament

Figure 5: Gràfiques obtingudes amb el mètode de Crank-Nicolson a diferents mallats



(a) Error absolut en funció de la posició



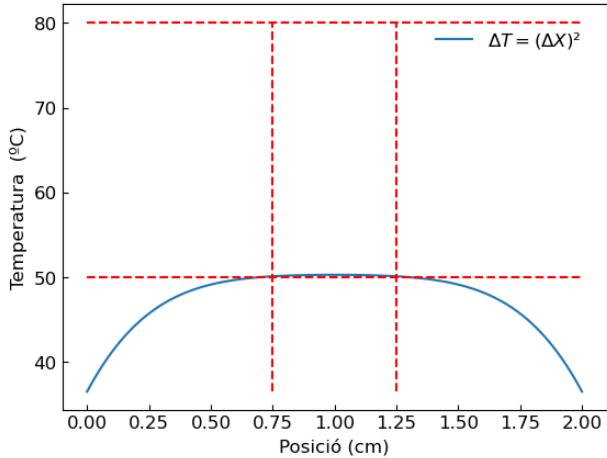
(b) Error percentual en funció de la posició

Figure 6: Error numèric de les dues solucions per Crank-Nicolson respecte la solució analítica

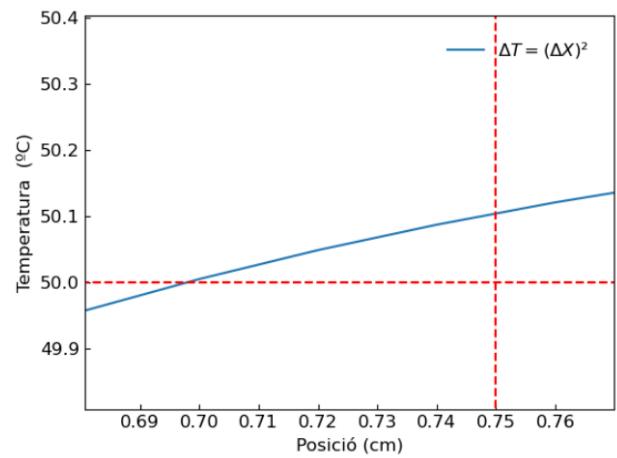
Comparant els errors percentuals de cada mètode (Fig. 2, Fig. 4 i Fig. 6) amb la discretització  $\Delta\hat{t} = 0.5(\Delta\hat{x})^2$ , veiem que el mètode més precís en el temps  $t_a$  és el mètode de Crank-Nicolson, que arriba a tenir un màxim d'error del 0.0027 %, mentre que el d'Euler explícit un 0.0090 % i l'implícit un 0.0108 %.

#### 4.4 Solució del problema

A continuació solucionem el problema de quant temps hem d'aplicar el senyal per evitar que la zona sana es cremi, doncs veiem que aquesta és sempre la condició més restrictiva. Ho farem mitjançant el mètode de Crank-Nicolson amb  $\gamma = 0.5$  doncs és el mètode més precís dels tres. Determinem que el temps d'aplicació de corrent òptima és d'aproximadament  $\tau \approx 58.35$  s. A continuació es mostren les gràfiques de la solució (Error numèric, annex: Fig. 9)



(a) Representació unidimensional de la temperatura en funció de la posició de la distància entre ventracles



(b) Zoom a la separació de zones. Es veu que hi ha una petita regió sana que es crema

Figure 7: Gràfiques obtingudes amb el mètode de Crank-Nicolson a diferents mallats

Tot i que el mètode de Crank-Nicolson ens dona un resultat precís hem de tenir en compte que en la modelització del problema hem fet numeroses aproximacions. Llavors el resultat que hem obtingut s'ha tractar com una aproximació i no com un resultat definitiu.

## 5 Conclusions

A partir de la modelització dels diferents mètodes, s'ha estudiat la convergència a la solució de cada un dels mètodes i amb els tres mètodes hem obtingut una solució molt aproximada a la analítica. A partir dels errors hem identificat que el mètode més precís per a resoldre l'equació de difusió de calor és el mètode de Crank-Nicolson amb el mallat de  $\Delta\hat{t} = 0.5(\Delta\hat{x})^2$ . Si ho mirem per la part dels càlculs, els mètodes d'euler implícit i Crank-Nicolson són més demandants que el mètode d'euler explícit.

Com que el mètode de Crank-Nicolson és el més precís és el que s'ha escollit per a la resolució del problema i hem trobat que el temps que hem d'aplicar el potencial és d'aproximadament  $\tau \approx 58.35s$ . No obstant, el resultat que hem obtingut és per al nostre model que és una aproximació, si es vol aplicar al tractament clínic s'hauria de tenir en compte més consideracions.

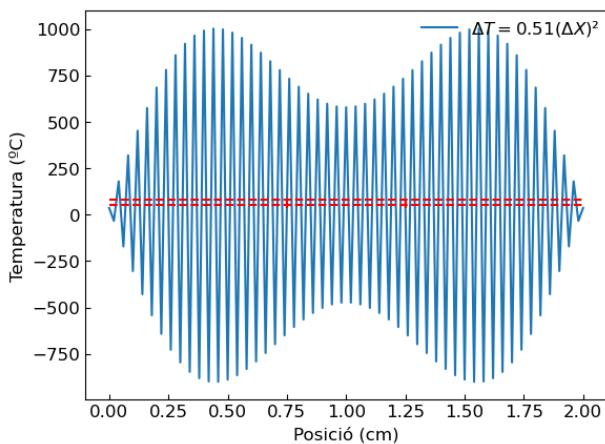
## 6 Annex

### 6.1 Matrius

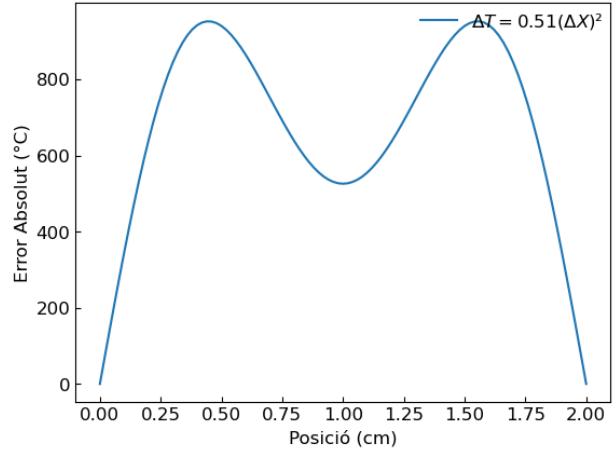
$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 1+2\gamma & -\gamma & 0 & \dots & 0 \\ -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma \\ 0 & \dots & 0 & -\gamma & 1+2\gamma \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1+\gamma & -\frac{\gamma}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\gamma}{2} & 1+\gamma & -\frac{\gamma}{2} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\frac{\gamma}{2} & 1+\gamma & -\frac{\gamma}{2} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{\gamma}{2} & 1+\gamma \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1-\gamma & \frac{\gamma}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 1-\gamma & \frac{\gamma}{2} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{\gamma}{2} & 1-\gamma & \frac{\gamma}{2} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\gamma}{2} & 1-\gamma \end{pmatrix}$$

### 6.2 Gràfiques

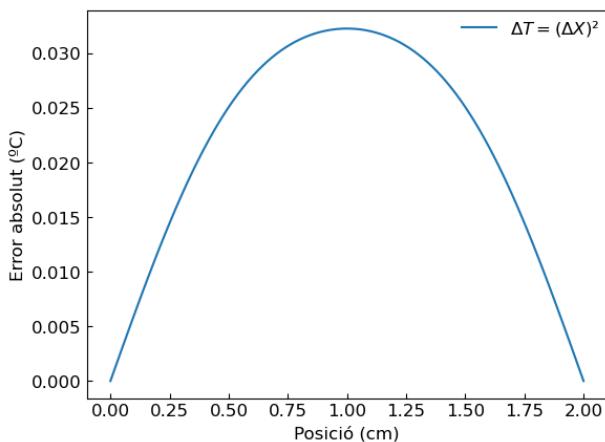


(a) Representació unidimensional de la temperatura en funció de la posició a  $\Delta\hat{t} = 0.51(\Delta\hat{x})^2$

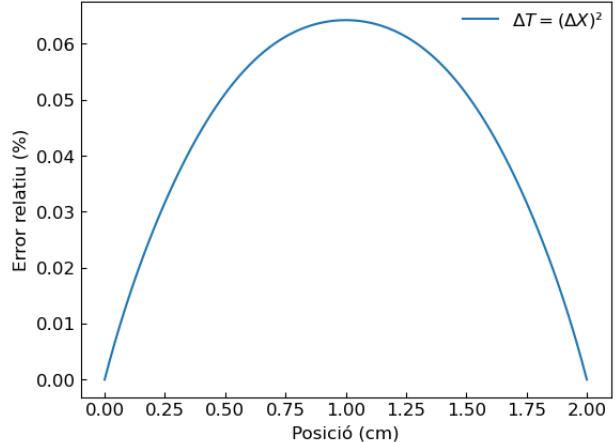


(b) Error absolut en funció de la posició a  $\Delta\hat{t} = 0.51(\Delta\hat{x})^2$

Figure 8: Gràfiques obtingudes amb el mètode d'euler explícit a  $\Delta\hat{t} = 0.51(\Delta\hat{x})^2$



(a) Error absolut en funció de la posició



(b) Error percentual en funció de la posició

Figure 9: Error numèric de les dues solucions per Crank-Nicolson respecte la solució analítica

## 7 Bibliografia

### References

- [1] *Crank-Nicholson Implicit Scheme — QuantStart*. URL: <https://www.quantstart.com/articles/Crank-Nicholson-Implicit-Scheme/>.