

Pràctica 2:
Pràctica de Simulació

Mètodes Numèrics II
Grup 06

Autors:

Miguel Á. Hipólito, 1706041
Marc Manteca, 1708583
Sergi Martínez, 1707049
Yixuan Qiu, 1707391

Universitat Autònoma de Barcelona

Dia de la entrega: 14 de Gener del 2026

Contents

1 Modelització del problema	2
1.1 Moviment de la Terra al voltant del Sol	2
1.2 Trajectòria solar	2
1.3 Generació d'energia	3
2 Mètodes Numèrics	3
2.1 Mètode d'Euler Explícit	4
2.2 Mètode d'Euler Semi-Implícit (Euler-Cromer)	4
2.3 Mètode Runge Kutta-4	4
3 Resultats	5
3.1 Anàlisi de l'Error Energètic	5
3.2 Moviment de la Terra al voltant del Sol	6
3.3 Generació d'energia	7
4 Conclusions	8
5 Annex	9
5.1 Matrius de rotació (sentit antihorari)	9
5.2 Fórmules pel temps sideri local	9
5.3 Grafiques Sunearthtools	9
6 Bibliografia	10

Abstract

L'objectiu d'aquesta pràctica és l'estudi de la instal·lació de plaques fotovoltaiques de silici a un habitatge unifamiliar a Catalunya, en concret, Cardedeu. Per a això, agafem un període de prova d'un any i modelitzem el moviment de la terra respecte al sol suposant que el sol es manté quiet i que no hi ha influència d'altres cossos. Resolem l'EDO fent servir Euler explícit, semi-implícit i Runge-Kutta 4, concloent que el darrer és el més exacte (comparant amb l'energia mecànica). A partir d'aquest grafiem la trajectòria solar des de Cardedeu. Amb això, i plantejant panells de 2 m que generen un màxim de potència de 400 W quan incideixen $10^3 W/m^2$ d'irradiació solar de forma perpendicular, podem estudiar l'energia elèctrica produïda en el nostre període. Estudiem la inclinació òptima dels panells i concluem que la inclinació dels panells és òptima als 36°.

1 Modelització del problema

1.1 Moviment de la Terra al voltant del Sol

Per a modelitzar el moviment de la Terra al voltant del sol utilitzarem la llei gravitacional de Newton, però, ho escriurem en coordenades esfèriques per a facilitar els càlculs.

$$\ddot{r} - \frac{l^2}{r^3} = \frac{-GM}{r^2} \quad (1)$$

$$\dot{\theta} = \frac{l}{r^2} \quad (2)$$

On $r_{periheli} = 1.47 \cdot 10^{11} m$, $v_{periheli} = 30272 \frac{m}{s}$, $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg^2 \cdot s^2}$, $M = 1.989 \cdot 10^{30} kg$ [1]
La Eq (1) descriu l'evolució de la distància radial de la Terra respecte al sol i la segona equació descriu l'evolució angular respecte al sol. En el nostre model considerarem la data d'inici com el 4 de gener de 2026, ja que ens facilita poder posar com a condició inicial que la velocitat radial és 0.

Per a resoldre aquest problema més fàcilment hem fet nombroses aproximacions al nostre model:

- Només estem considerant la interacció entre el Sol i la Terra, el qual es reflecteix en l'equació de la llei Gravitacional. No hem considerat la influència de la Lluna o altres planetes massius com Júpiter.
- Hem fixat el sol al punt d'origen
- Hem considerat que la Terra orbita estrictament en un pla xy

Amb aquest plantejament, arribem a obtenir l'equació normalitzada:

$$\frac{\partial^2 \tilde{r}}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\tilde{l}^2}{\tilde{r}^3} = \frac{k}{\tilde{r}^2}$$

(3)

$$\text{On } \tilde{r} = \frac{r}{r_0}, \quad \tilde{t} = \frac{v_0}{r_0} t, \quad \tilde{l} = \frac{l}{v_0 r_0}, \quad k = \frac{-GM}{v_0^2 r_0}$$

1.2 Trajectòria solar

Una vegada tenim la trajectòria de la terra al voltant del sol, el següent pas és poder simular el pas del sol (trajectòria solar) vist des del nostre punt d'interès: Cardedeu

Per tal d'estudiar la posició del sol tal i com el definit a $\vec{r}_\epsilon(S) = (0, 0, 0)$, el primer pas serà passar el nostre sistema Heliocentric-Ecliptic a Geocentric-Equatorial [2] amb les matrius de rotacions corresponents (Annex).

$$\vec{r}_{GE}(S) = R_X(-\epsilon) \cdot (\vec{r}_\epsilon(S) - \vec{r}_\epsilon(T)) \quad (4)$$

No obstant, aquest procés requereix que l'eix X estigui apuntat al punt vernal (equinoccí de primavera), mentre que en el nostre sistema el tenim apuntat al periheli. Caldrà una rotació extra al

voltant de l'eix Z abans de passar a geocèntriques. L'angle de rotació és definit per la longitud del periheli [3]

Una vegada en el sistema Geocentric-Equatorial, passem al Topocèntric-Horitzontal [4] amb matrius de rotacions, on es necessitarà calcular el temps sideri local (Annex) i situarnos a les coordenades de Cardedeu ¹.

$$\vec{r}_{TH}(S) = R_Y(90^\circ - \phi) \cdot R_Z(\Theta_L) \cdot \vec{r}_{GE}(S) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_T \end{pmatrix} \quad (5)$$

Finalment, per poder calcular i graficar la trajectòria solar desde la nostra posició, només cal amb trigonometria calcular el azimut (6) i l'angle d'elevació solar (7).

$$\theta_{az} = \arctan\left(\frac{y_{TH}}{x_{TH}}\right) \quad (6)$$

$$\theta_h = \arcsin\left(\frac{z_{TH}}{|\vec{r}_{TH}|}\right) \quad (7)$$

1.3 Generació d'energia

Una vegada que tenim la trajectòria solar podem calcular l'energia que generen les plaques. Primer hem de veure com incideix la llum del sol en les nostres plaques solars, ja que la potència que genera el Sol en les plaques dependrà de la constant de irradiació solar ($I_{sol} = 1362 \frac{W}{m^2}$) i l'angle d'incidència. En el nostre cas no hem tingut en compte els dies nuvolats ni qualsevol objecte que pugui fer ombra a les plaques solars. D'aquesta forma, podem descriure l'angle d'incidència a partir de la component normal de pla de les plaques i la component de les direccions dels raigs de llum.

$$N = (\sin(\beta)\sin(\gamma), \sin(\beta)\cos(\gamma), \cos(\beta)) \quad (8)$$

$$S = (\cos(\theta_h)\sin(\theta_{az}), \cos(\theta_h)\cos(\theta_{az}), \sin(\theta_h)) \quad (9)$$

La N és la component normal de les plaques y β és la inclinació de la placa respecte a terra i γ és l'orientació de les plaques. Llavors amb la propietat dels productes escalars podem identificar l'angle d'incidència.

$$N \cdot S = |N| \cdot |S| \cdot \cos(\theta_{inc}) \quad (10)$$

Com N i S són vectors unitaris ens queda l'equació de la següent forma:

$$\sin(\beta)\sin(\gamma)\cos(\theta_h)\sin(\theta_{az} + \sin(\beta)\cos(\gamma), \cos(\beta))\cos(\theta_h)\cos(\theta_{az}) + \cos(\beta)\sin(\theta_h) = \cos(\theta_{inc}) \quad (11)$$

Simplificant l'equació ens queda:

$$\cos(\theta_{inc}) = \sin(\theta_h)\cos(\beta) + \cos(\theta_h)\sin(\beta)\cos(\theta_{az} - \gamma) \quad (12)$$

Com que els panells solars que tenim generen $P_{panel} = 400W$ de potència quan incideixen 1000 $\frac{W}{m^2}$ d'irradiància solar, podem calcular la potència de la següent manera:

$$P = I_{sol}\cos(\theta_{inc}) \frac{NP_{panel}}{1000} \quad (13)$$

2 Mètodes Numèrics

Com a part complementària de l'estudi, hem analitzat la sensibilitat del sistema dinàmic a l'elecció del mètode d'integració numèrica. Com les òrbites planetàries són sistemes conservatius a llarg termini, és crucial avaluar no només la precisió instantània de la trajectòria, sinó l'estabilitat energètica del mètode emprat. Per a fer-ho, hem implementat i comparat tres esquemes d'integració diferents utilitzant el mateix pas temporal h : el mètode d'Euler Explícit, el mètode d'Euler Semi-Implícit i el mètode Runge-Kutta 4 (usat com a referència).

¹Coordenades: 41°38'23.47" N, 2°21'34.26" E (IDESCAT)

2.1 Mètode d'Euler Explícit

Aquest és el mètode més bàsic de primer ordre. Consisteix a avançar l'estat del sistema utilitzant la derivada avaluada únicament a l'instant inicial del pas. L'algoritme iteratiu és:

$$Y_{n+1} = Y_n + h f(t_n, Y_n) \quad (14)$$

En la mecànica orbital, aquest mètode és conegut per ser inestable, ja que introduceix sistemàticament energia al sistema, fent que l'òrbita no es tanqui i el planeta s'allunyi en espiral cap a l'exterior, tal com es demostra a les nostres gràfiques d'error.

2.2 Mètode d'Euler Semi-Implícit (Euler-Cromer)

Per a corregir la inestabilitat de l'Euler explícit sense augmentar la complexitat de computació, hem implementat la variant semi-implícita. La diferència fonamental es troba en l'ordre d'actualització de les variables: primer s'actualitza la velocitat utilitzant l'acceleració actual, i seguidament es fa servir aquesta nova velocitat per actualitzar la posició. Les equacions discretitzades per al nostre sistema són:

$$v_{n+1} = v_n + ha(r_n) \quad (15)$$

Aquest mètode és simplèctic, la qual cosa significa que preserva l'estructura geomètrica de l'espai de fases. Físicament, això es tradueix en el fet que l'energia de l'òrbita no divergeix, sinó que oscil·la acotadament al voltant del valor real, cosa que permet òrbites estables a llarg termini.

2.3 Mètode Runge Kutta-4

El mètode numèric Runge-Kutta 4 consisteix en fer servir diferents pendents de la funció per a fer passos petits i així dibuixar la corba de la trajectòria.

En el que es diferencia amb el mètode d'Euler, és que el mètode de Runge-Kutta 4 utilitza 4 pendents per a aproximar el pròxim pas, així que ens donarà una aproximació més precisa que el mètode d'Euler.

El mètode RK-4 s'aplica a una equació de primer grau, per tant, haurem de fer una reducció d'ordre per l'equació radial. La reducció que farem serà $\frac{dr}{dt} = v$, llavors ens quedarà de la següent manera:

$$\frac{dr}{dt} = v \quad (16)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{l^2}{r^3} + \frac{k}{r^2} \quad (17)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{r^2} \quad (18)$$

Aquestes seran les 3 equacions de primer grau en el qual haurem de fer passos per a resoldre el problema.

Per a resoldre les 3 funcions a la vegada definim un vector que contingui informació de les variables del sistema.

$$Y = \begin{pmatrix} r \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \quad (19)$$

Definint aquest vector, la funció que ens queda per a iterar és:

$$\frac{dY}{dt} = f(t, Y) \quad (20)$$

Llavors per a realitzar cada pas s'utilitza les següents pendents:

$$k_1 = f(t_n, Y_n) \quad (21)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, Y_n + h \frac{k_1}{2}\right) \quad (22)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, Y_n + h \frac{k_2}{2}\right) \quad (23)$$

$$k_4 = f(t_n + h, Y_n + hk_3) \quad (24)$$

El càcul d'aquests pendents consisteixen en el següent: k_1 és el pendent del punt inicial del pas, per a calcular el pendent s'utilitza el pendent anterior per a avançar fins a la meitat del pas i aquí estimar la nova pendent, així fins a k_4 on s'usa k_3 per a avançar el pas complet.

Amb aquestes 4 pendents per a calcular el següent valor de Y_n es fa un promig ponderat de les 4 pendents

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (25)$$

3 Resultats

3.1 Anàlisi de l'Error Energètic

Per quantificar numèricament la qualitat de cada mètode, hem definit l'error relatiu basant-nos en la conservació de l'energia mecànica específica, la qual hauria de ser constant en un sistema keplerià ideal. L'energia en un instant t es calcula com la suma de l'energia cinètica i la potencial:

$$E(t) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{r^2} + \frac{k}{r} \quad (26)$$

L'error relatiu a cada pas es defineix com:

$$\epsilon(t) = \left| \frac{E(t) - E_0}{E_0} \right| \quad (27)$$

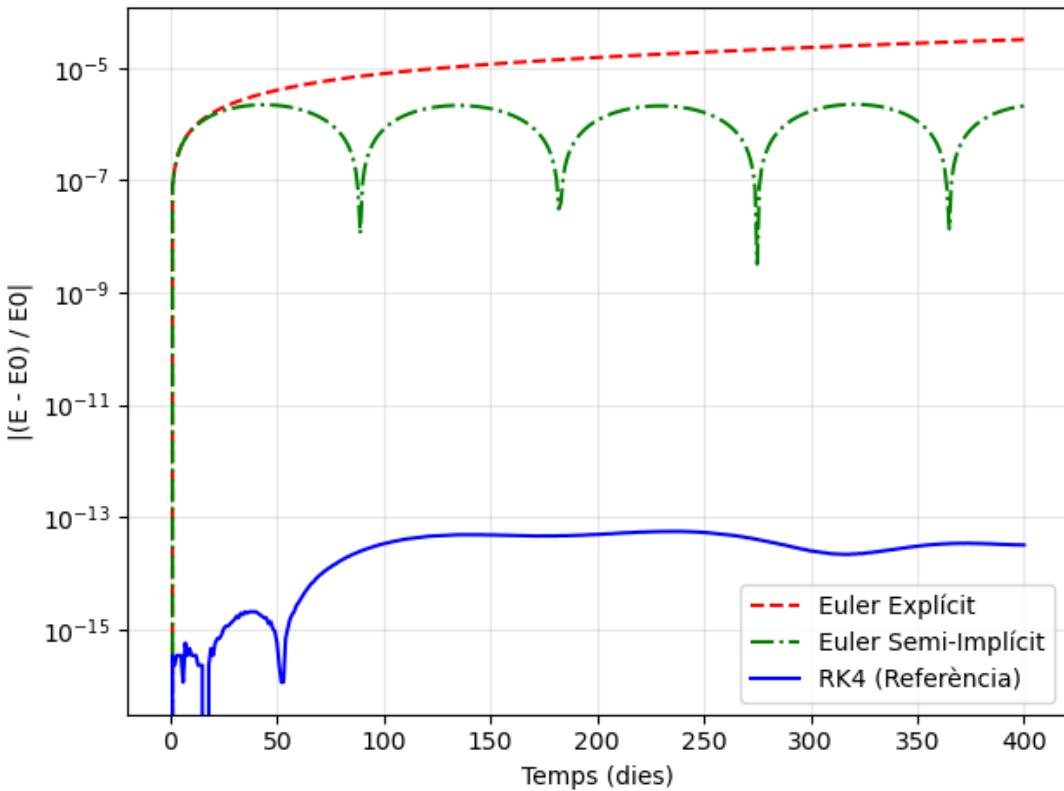


Figure 1: Comparativa de l'error relatiu de l'energia mecànica en escala logarítmica per els tres mètodes numèrics estudiats.

Els resultats obtinguts mostren que mentre l'Euler explícit presenta un error que creix exponencialment, el mètode semi-implícit manté l'error acotat, i el mètode RK4 presenta un error menyspreable, el qual és lògic degut a que d'ordres superiors. Això confirma la seva idoneïtat per a la simulació principal d'aquest treball.

3.2 Moviment de la Terra al voltant del Sol

A partir d'iterar la llei de Gravitació universal amb el mètode de Runge-Kutta 4, hem traçat el seu moviment al voltant del Sol.

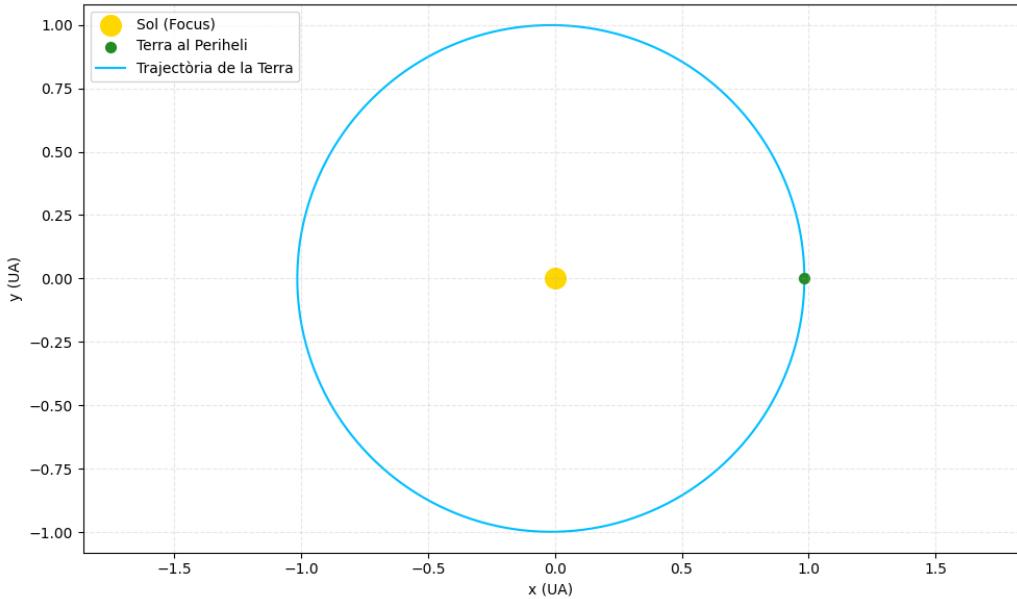


Figure 2: Trajectòria de la Terra al voltant del Sol, mètode Runge-Kutta 4

En la Figura 2, si ens fixem en les línies d'escala, podem observar que la trajectòria de la Terra no és perfectament circular, sinó que és el·líptica. En el nostre codi hem trobat que el radi mínim al periheli és $r_{min} = 0.9832$ UA i un radi màxim a l'afeli de $r_{max} = 1.0149$ UA. Amb aquesta diferència de radis ens dona una excentricitat de $\epsilon = 0.0159$ el qual s'apropa molt al valor teòric de l'excentricitat de la Terra $\epsilon_{teòric} = 0.0167$ [5]. Tenim un error relatiu d'aproximadament 5 %. Per tant, podem conoure que hem fet una aproximació força correcta.

Per altra banda, amb els canvis de base corresponents, arribem a representar a la Figura 3 la trajectòria solar a diferents dates durant l'any.

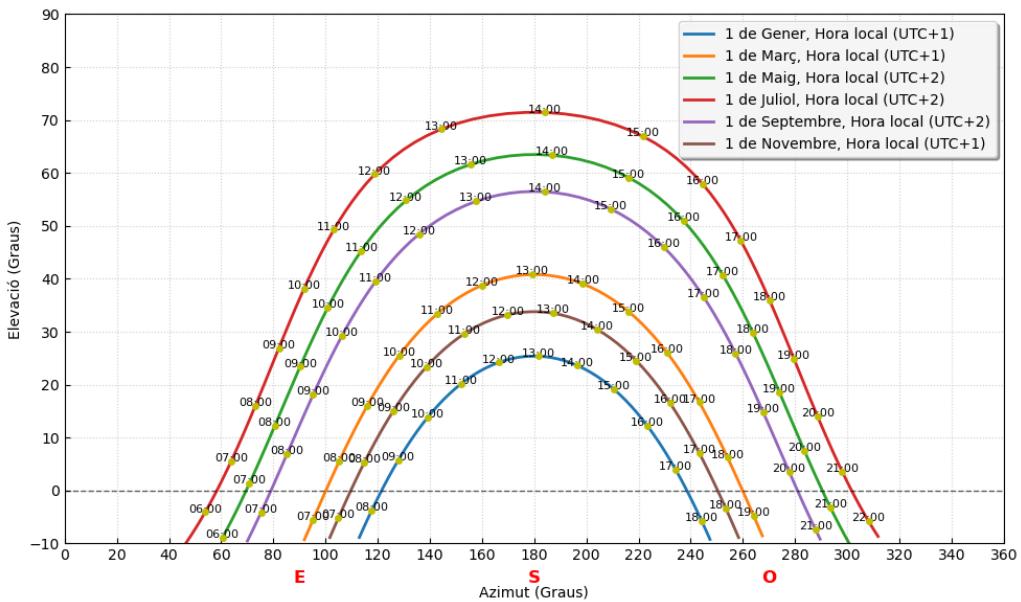


Figure 3: Trajectòria Solar (Elevació-Azimut) des de Cardedeu el primer de cada dos mesos. Hores representades en UTC+X

Per comprovar que el nostre càcul és correcte, utilitzem pàgines com SunEarthTools [6] que et grafien la trajectòria a diferents dates amb l'horari que vulguis. No obstant això, com Espanya té un horari d'hivern i d'estiu, cal grafiar per GMT+1 (Annex: Figura 7) i GMT+2 (Annex: Figura 6), per tal de realitzar una comparació correcta. D'aquesta forma, podem veure que l'elevació màxima a l'hivern correspon a les 13:00 i l'elevació màxima a l'estiu a les 14:00, cosa que concorda amb la nostra representació.

3.3 Generació d'energia

Com que la instal·lació de panells és sobre una teulada hem considerat 4 panells solars és un bon nombre de panells per a treballar inicialment.

En quant l'orientació dels panells solars hem assumit que orientats cap al sud és el més eficient, ja que observant la Figura 3 és l'orientació on es capta més llum solar durant el dia. En aquesta orientació hem calculat l'energia generada anualment per a cada grau d'inclinació des dels 0° fins als 90° i hem obtingut els resultats de la gràfica 4.

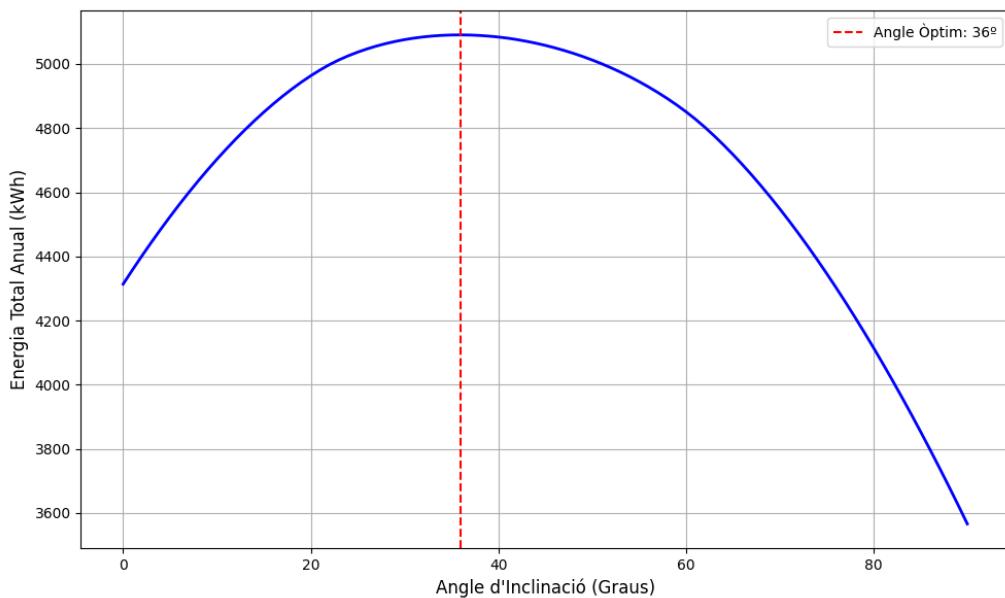


Figure 4: Energia anual per a cada grau d'inclinació

A la gràfica 4 podem observar que obtenim una energia generada màxima quan les plaques tenen una inclinació de 36 graus, l'energia generada amb 36° d'inclinació ha sigut d'aproximadament 5090 kWh . Ara amb aquesta inclinació de 36° hem calculat l'energia generada a cada dia de l'any.

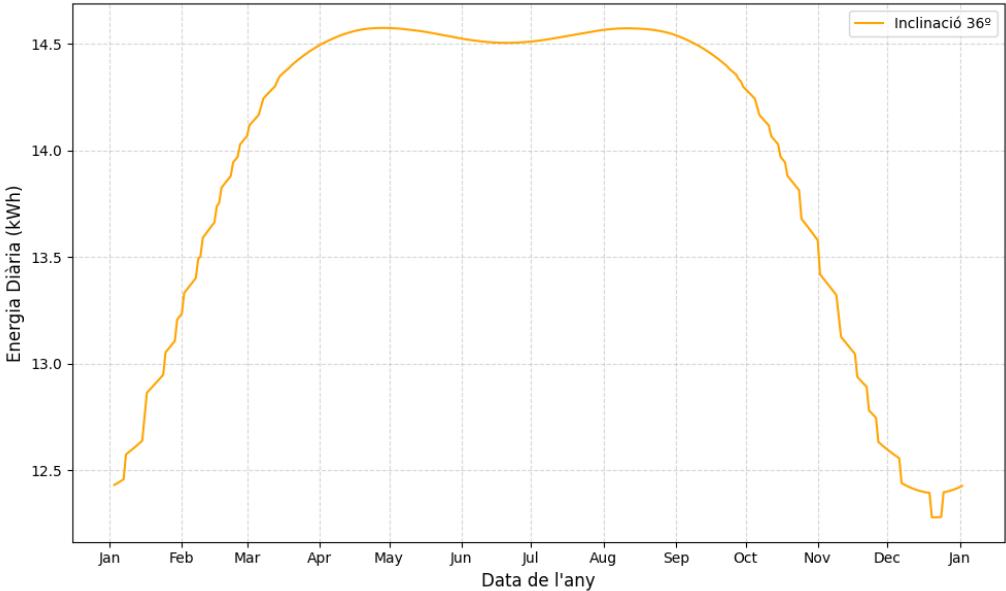


Figure 5: Producció d'energia diària amb angle òptim

A la gràfica 5 observem que els dies que generen menys energia són als dies d'hivern, el qual té sentit, ja que són els dies més curts. D'altra banda, podem observar que a juliol, el qual és el mes de màxima insolació, en lloc de presentar un pic s'aprecia una disminució en l'energia generada respecte als mesos adjacents. Aquest fenomen s'explica per la limitació dels panells solars, els quals poden una potència màxima de 400 W. Llavors en els dies d'irradiància més alta es produeix una saturació que retalla l'energia excedent. En canvi, en els mesos adjacents l'angle d'incidència de 36 ° els permet mantenir una producció propera màxima durant més de temps.

4 Conclusions

En aquest treball hem modelitzat el moviment de la Terra al voltant del sol i la generació d'energia amb plaques solars.

En primer lloc, el mètode de Runge-Kutta 4 (RK4) ha provat ser una eina altament precisa per a resoldre aquest problema de l'òrbita terrestre, validat a partir de la comparació de excentricitats entre aquest model ($\epsilon = 0.0159$) i el teòric ($\epsilon_{teòric} = 0.0167$) on tenim una discrepància menor a 5 %. A partir de les comparacions d'errors també hem observat que el mètode de Runge-Kutta 4 és molt més precís que el mètode d'Euler explícit i el mètode d'Euler-Cromer.

Respecte a l'anàlisi energètic i la instal·lació de plaques solars. Hem determinat que una instal·lació de plaques solars amb una inclinació de 36 ° és el que optimitza la generació d'energia anual, el qual amb 4 plaques solars arriba a ser 5090 kWh.

L'energia generades per a les plaques solars a l'angle òptim és de 12-15 kWh al dia. Si ho comparem a l'energia que consumeix una casa unifamiliar promig que de 15-25 kWh [7], que equivaldrà a un consum anual d'entre 5475-9125 kWh observem que la nostra instal·lació de plaques solars cobreix des d'un 55% fins a un 93% de la demanda elèctrica. Davant d'aquests números seria interessant estudiar les necessitats de cada casa i optimitzar el nombre de panells a les seves necessitats. Tot i que, cal recalcar que el nostre model és sota condicions ideals, on no patim pèrdues d'energies per núvols o altres objectes.

5 Annex

5.1 Matrius de rotació (sentit antihorari)

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.2 Fòrmules pel temps sideri local

$$J_0 = 367y - \text{ENT}\left[\frac{7(y + \text{ENT}\left(\frac{m+9}{12}\right))}{4}\right] + \text{ENT}\left(\frac{275m}{9}\right) + d + 1721013.5$$

$$T_0 = \frac{J_0 - J_{2000}}{36525} \quad (J_{2000} = 2451545.0)$$

$$\Theta_{G_0} = 100.4606184 + 36000.77004T_0 + 0.000387933T_0^2 - 2.583 \cdot 10^{-8}T_0^3$$

$$\Theta_G = \Theta_{G_0} + 360.98564724 \cdot \frac{UT}{24}$$

$$\Theta_L = \Theta_G + \lambda$$

5.3 Grafiques Sunearthtools

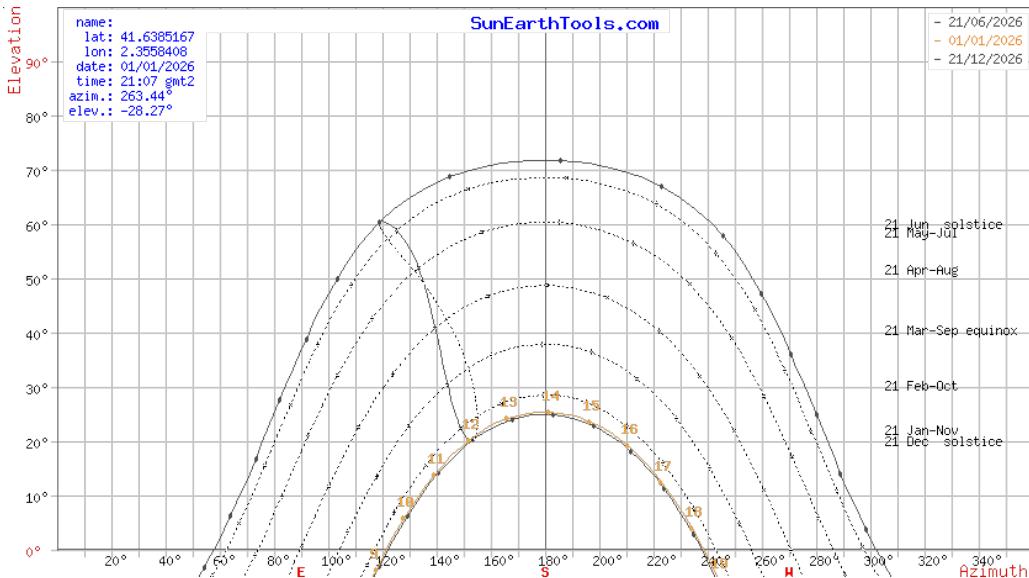


Figure 6: Trajectòria solar amb GMT+1. Corba groga corresponent al 1 de Gener de 2026

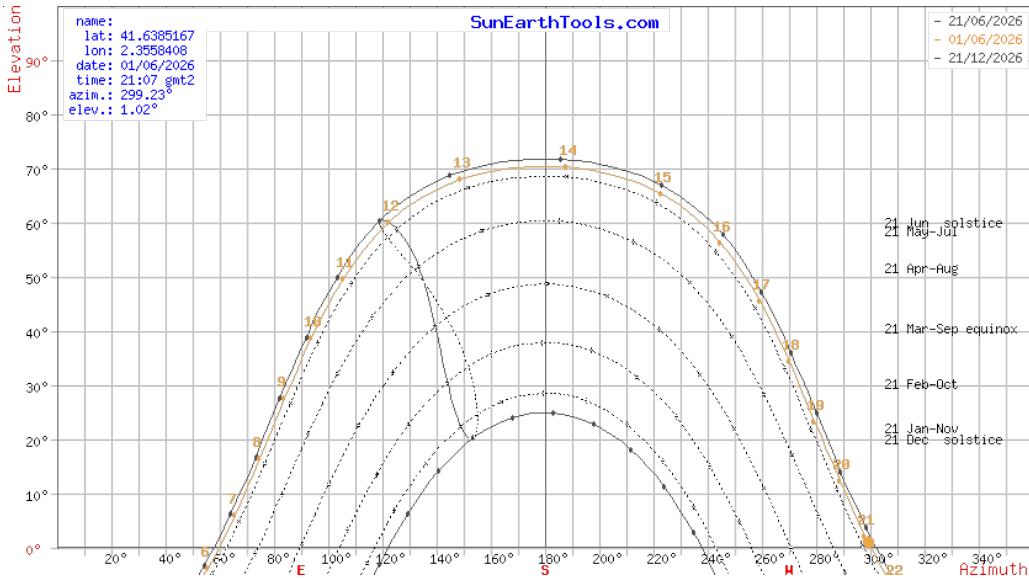


Figure 7: Trajectòria solar amb GMT+2. Corba groga corresponent al 1 de Juny de 2026

6 Bibliografia

References

- [1] *Horizons System*. URL: <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/app.html#/>.
- [2] Universitat Politècnica de València - UPV. *Cambio de coordenadas: Geocéntrico-ecuatoriales a Heliocéntrico-eclípticas y viceversa / / UPV*. Dec. 5, 2023. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=NZXcbBI--E8>.
- [3] J. L. Simon et al. “Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the moon and the planets.” In: *aap* 282.2 (Feb. 1, 1994), pp. 663–683. URL: <http://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1994A&A...282..663S/abstract>.
- [4] Universitat Politècnica de València - UPV. *Cambio de coordenadas: Geocéntrico-ecuatoriales a Topocéntrico-horizontales y viceversa / / UPV*. Dec. 11, 2023. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=YjF4qWJpjHo>.
- [5] colaboradores de Wikipedia. *Excentricidad orbital*. Dec. 2025. URL: https://es.wikipedia.org/wiki/Excentricidad_orbital.
- [6] info@sunearthtools.com. *Cálculo de la posición del sol en el cielo para cada lugar en cualquier momento*. URL: https://www.sunearthtools.com/dp/tools/pos_sun.php?lang=es#top.
- [7] Ayub. *Cuántos kWh consume tu casa al día y cómo entender tu gasto energético - EFIS*. Sept. 16, 2025. URL: <https://www.efis.es/blog/cuantos-kwh-consume-casa-dia/>.