Universidad Autónoma de Madrid

Notas de clase de Cálculo I

Sergio Cruz Blázquez sergio.cruz@uam.es

Tema 4: Funciones continuas

La noción de función surge en el siglo XVII al estudiar la dependencia entre cantidades variables en física y geometría. Por ejemplo, Galileo describía la posición de un cuerpo en movimiento como dependiente del tiempo.

El propósito de las funciones, por tanto, es expresar de manera precisa la dependencia entre dos magnitudes reales. Algunos ejemplos de uso cotidiano pueden ser

(i) La altura de una persona en función de su edad
(ii) Nota media del expediente en función del número de asignaturas cursadas.

En su formulación directa, una función es una ley que asocia a cada elemento de un conjunto un <u>único</u> elemento de $\mathbb{R}$.

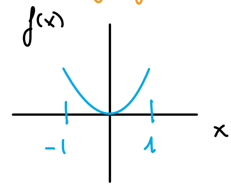
<u>Definición</u> Dado $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, una función real de variable real definida en A es una correspondencia que asocia a cada valor $x \in A$ un único valor $f(x) \in \mathbb{R}$. Escribimos:

$$f: A \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \dots$$

Decimos que A es el conjunto de definición o dominio de f. Al mayor conjunto A donde puede definirse f se le llama <u>dominio natural</u> o

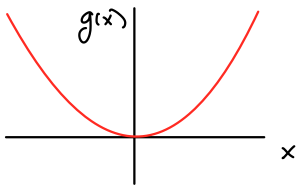
(más adelante hablaremos de gráficas)

dominio maximal de f.



Ejemplo $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ es la función que asocia x^2 a cada elemento $x \in [-1,1]$

El dominio maximal de la relación $x \mapsto x^2$ es $\mathbb{R}$, porque podemos calcular el cuadrado de cualquier número real



$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g(x) = x^2$

f y g no son la misma función porque sus dominios son distintos

Definición Dada $f: A \to \mathbb{R}$, llamamos imagen de f al conjunto de valores que toma f, esto es,

$$f(A) = \{ f(x) : x \in A \}$$

Si $B \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $f(A) \subseteq B$, podemos escribir $f: A \to B$ para enfatizar que f toma valores en A y devuelve valores de B. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to [0, +\infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Definición Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos y $f: A \to B$ una función. Decimos que f es

(i) inyectiva si $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, es decir, si puntos distintos tienen siempre imágenes distintas.

(ii) sobreyectiva si $f(A) = B$, es decir, para todo $b \in B$ existe (al menos) un $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

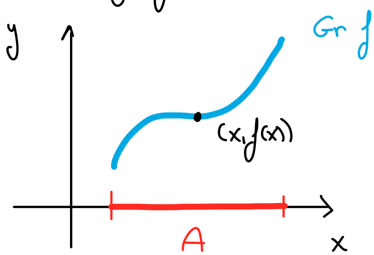
(iii) biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.

Toda función real de variable real queda completamente determinada por su gráfica, que es el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$:

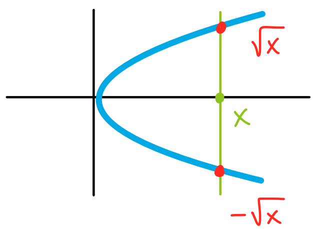
$$Gr(f)=\{(x,f(x)) : x\in A\}$$

Si representamos este conjunto en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, los puntos que forman $Gr(f)$ son aquellos que cumplen dos condiciones:

- $x\in A$
- $y=f(x)$.



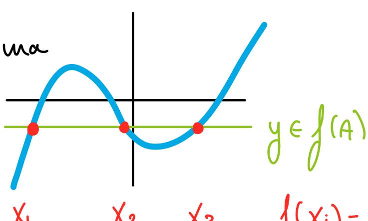
Si f es una función, cada recta vertical que pasa por $(x,0)$ con $x\in A$ corta una <u>única</u> vez a $Gr(f)$, a altura $y=f(x)$. Si $x\notin A$, la recta vertical no corta a $Gr(f)$.



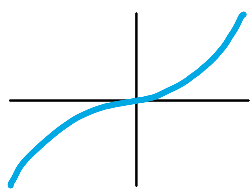
El conjunto $\{(x,y): y^2=x\}$ no corresponde a la gráfica de ninguna función, ya que hay valores de x con dos imágenes.

En la gráfica de f, la inyectividad se corresponde con que cada recta horizontal que pasa por $(0,y)$, con $y\in f(A)$, corte una única vez a $Gr(f)$.

Gráfica de una función no inyectiva.



$f(x_i)=y \quad i=1,2,3$



Gráfica de una función inyectiva.

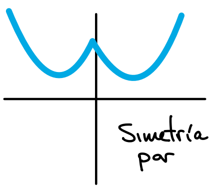
Destacamos las siguientes simetrías de f y su traducción como simetrías de $Gr(f)$:

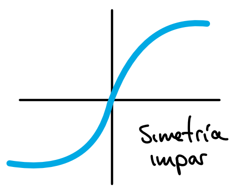
Definición Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es

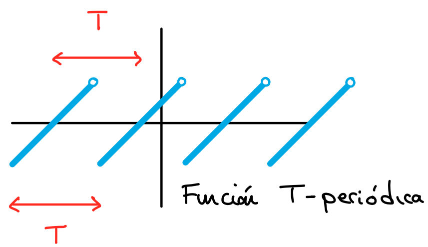
(i) <u>par</u> si $A = -A = \{-x : x \in A\}$ y $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in A$, es decir, si su gráfica es simétrica respecto al eje y.

(ii) <u>impar</u> si $A = -A$ y $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in A$, esto es, si su gráfica es simétrica respecto del origen de coordenadas (al plegar el plano sobre ambos ejes, las dos mitades de la gráfica son coincidentes).

(iii) <u>periódica de periodo $T > 0$</u> si $A = \{x \pm T : x \in A\}$ y $f(x+T) = f(x)$ $\forall x \in A$. En tal caso, la gráfica de f se repite en cada intervalo de longitud T.







Pasamos a recordar algunas operaciones básicas que podemos hacer con funciones.

Transformaciones elementales (traslaciones, dilataciones y reflexiones).

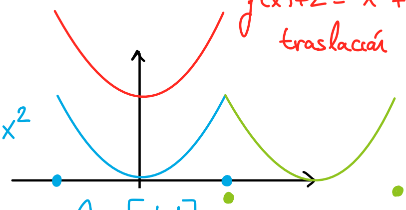
Definición Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función y $c \in \mathbb{R}$. Llamamos

$$A_c = \{z \in \mathbb{R} : z + c \in A\} = \{x - c : x \in A\}$$

- La <u>traslación horizontal</u> de c unidades de f es la función $g: A_c \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = f(x+c)$. (Si $c > 0$, es una traslación a izquierda, y si $c < 0$ es a derecha).

- La <u>traslación vertical</u> de c unidades de f es la función $g: A \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = f(x) + c$ (si $c > 0$, es una traslación hacia arriba, o hacia abajo si $c < 0$).

$f(x)+2 = x^2+2$ traslación vertical



$f(x) = x^2$

$f(x-2) = (x-2)^2$ traslación horizontal

$A = [-1,1]$

$A_{-2} = [1,3]$

Definición Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función. Dado un $c \in \mathbb{R}^*$, llamamos

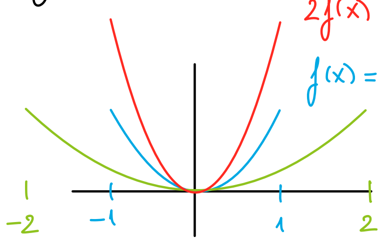
$$cA = \{cx : x \in A\}.$$

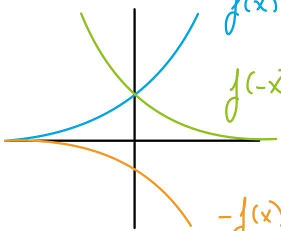
- La <u>reflexión respecto al eje x</u> de f es la función $g: A \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = -f(x)$.
- La <u>reflexión respecto al eje y</u> de f es la función $g: -A \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = f(-x)$
- La <u>reflexión respecto al origen</u> de f es la función $g: -A \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = -f(-x)$.
- La <u>dilatación horizontal de factor $1/c$</u> es la función $g: \frac{1}{c}A \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(cx)$
- La <u>dilatación vertical de factor c</u> es la función $g: A \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = cf(x)$.

$2f(x) = 2x^2$ (dilatación vertical).

$f(x) = x^2$

$f(\frac{x}{2}) = \frac{x^2}{4}$ (dilatación horizontal)





$f(x) = e^x$

$f(-x) = e^{-x}$ (reflexión respecto del eje y)

$-f(x) = -e^x$ (reflexión respecto del eje x)

Enumeramos a continuación las operaciones algebraicas que podemos hacer con dos funciones. Llamamos $\mathcal{F}(A)$ al conjunto de las funciones de A en $\mathbb{R}$.

Definición Para cualesquiera $f, g \in \mathcal{F}(A)$, se definen

(i) Suma: $f+g \in \mathcal{F}(A)$, $(f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad \forall x \in A$.

(ii) Producto: $fg \in \mathcal{F}(A)$, $(fg)(x) = f(x)g(x) \quad \forall x \in A$.

(iii) Cociente: Si $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in A$, entonces $f/g \in \mathcal{F}(A)$, siendo

$$f/g\,(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Las propiedades de la suma y el producto de números reales se traslada de forma inmediata a las correspondientes operaciones de funciones.

La suma es asociativa, conmutativa, tiene neutro (la función 0, esto es, $f(x) = 0 \quad \forall x \in A$) y opuesto $(-f)$. El producto es asociativo, conmutativo, distributivo, con neutro ($f(x) = 1 \quad \forall x \in A$), pero no toda función $f \neq 0$ tiene inversa respecto del producto, ya que para definir $1/f$ necesitamos $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in A$, mientras que $f \neq 0$ significa que $\exists x \in A : f(x) \neq 0$. A menos que A sea un solo punto, estas condiciones no son equivalentes.

Debemos evitar la notación f^{-1} para referirnos a $1/f$, ya que esta se reserva para la inversa respecto de la composición de funciones:

Definición Sean $f: A \to \mathbb{R}$ y $g: B \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f(A) \subseteq B$. Entonces, se define la función "f compuesta con g" como

$$g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

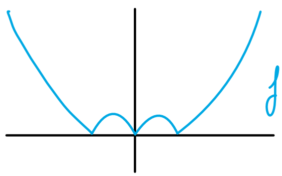
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(A) \subseteq B \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Ejemplo Consideramos las funciones $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = |x|$, $g(x) = x^3 - x$. Como $f(\mathbb{R}), g(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ trivialmente, podemos considerar las composiciones en ambos sentidos.

$$f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \circ g(x) = f(g(x)) = |x^3 - x|$$

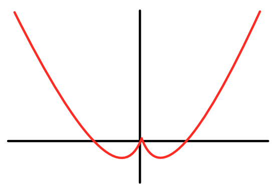
$$g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$g \circ f(x) = g(f(x)) = |x|^3 - |x|$$

Las funciones <u>son distintas</u>



$|x^3 - x|$

$f \circ g(1/2) = \frac{3}{8}$



$|x|^3 - |x|$

$g \circ f(1/2) = \frac{-3}{8}$

Definición Sea $f: A \to f(A)$ una función inyectiva (y por tanto biyectiva, ya que el conjunto de llegada es $f(A)$, lo que la hace sobreyectiva).

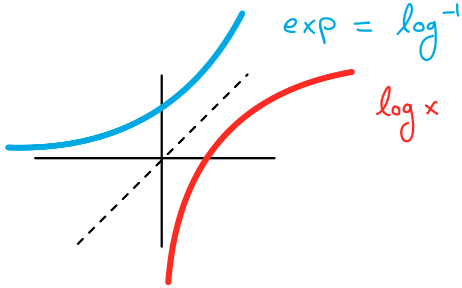
Entonces, a cada $y \in f(A)$ le corresponde un <u>único</u> $x \in A$ tal que $y = f(x)$.

Escribimos entonces $x = f^{-1}(y)$, obteniendo una nueva función

$$f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$$
$$y \longrightarrow f^{-1}(y).$$

llamada función inversa de f, y que verifica $f \circ f^{-1}(y) = y \quad \forall y \in f(A)$ y $f \circ f^{-1}(x) = x \quad \forall x \in A$.

Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante



Para comprobar esto, basta observar que, si $(x,y) \in Gr(f)$ ($x \in A$ e $y = f(x)$), entonces $(x,y) = (f^{-1}(y), y)$, por lo que $(y,x) \in Gr(f^{-1})$.

Nota: Para funciones inyectivas sencillas, calcular la inversa consiste en despejar x de la ecuación $y = f(x)$.

Definición Sea $f: A \to \mathbb{R}$. Decimos que f es

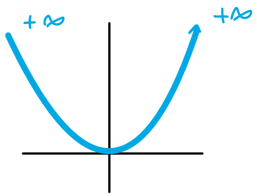
- Creciente si $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- Estrictamente creciente si $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- Decreciente si $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- Estrictamente decreciente si $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- Monótona si es creciente o decreciente
- Estrictamente monótona si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Proposición Toda función estrictamente monótona es inyectiva

Con estas herramientas, estamos preparados para ver ejemplos de funciones y sus inversas.

Funciones elementales

1. Consideramos la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$.



Notación

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+_0 = [0,+\infty)$

Si $\{x_n\} \to \pm\infty \Rightarrow \{f(x_n)\} \to +\infty$

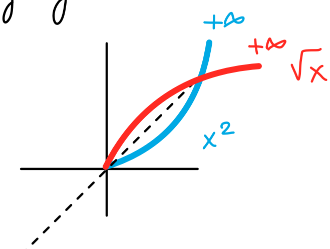
f no es inyectiva en $\mathbb{R}$ $\left(f(x) = f(-x)\right)$, pero sí lo es en $\mathbb{R}^+_0$.

Sea $g: \mathbb{R}^+_0 \longrightarrow \mathbb{R}^+_0$, $g(x) = x^2$. Sabemos que, si $0 \le y < x \Rightarrow y^2 < x^2$, luego g es estrictamente creciente $\Rightarrow$ inyectiva.

$g^{-1}: g(\mathbb{R}^+_0) = \mathbb{R}^+_0 \longrightarrow \mathbb{R}^+_0$ Para obtener su fórmula, despejamos

$g^{-1}(y) = x$, con $y = f(x) = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$ (porque $x \in \mathbb{R}^+_0$).

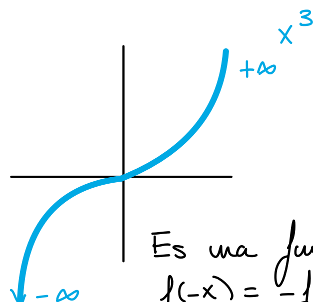
$\Rightarrow g^{-1}(y) = \sqrt{y}$



② Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

Su imagen es $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Si $\{x_n\} \to \pm\infty \Rightarrow \{f(x_n)\} \to \pm\infty$.

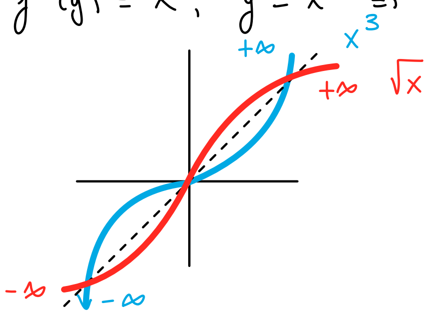


Es una función impar $f(-x) = -f(x)$.

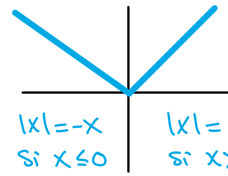
f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+_0$ $(0 \le x < y \Rightarrow x^3 < y^3)$ e impar, luego estrictamente creciente en $\mathbb{R} \Rightarrow$ inyectiva.

$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f^{-1}(y) = x$, $y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$.

$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$



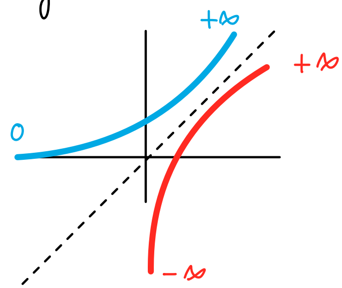
3. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = |x|$



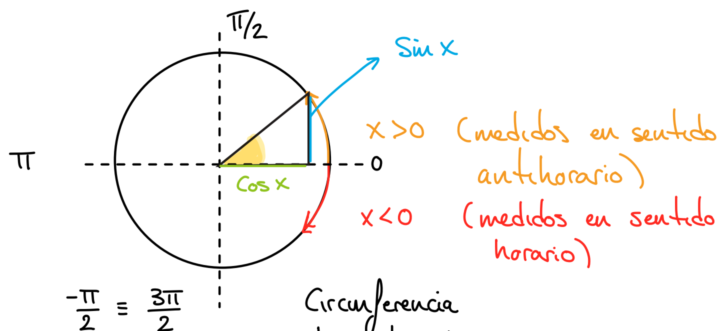
$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+_0$. Si $\{x_n\} \to \pm\infty \Rightarrow \{f(x_n)\} \to +\infty$

Es una función par, luego no inyectiva.

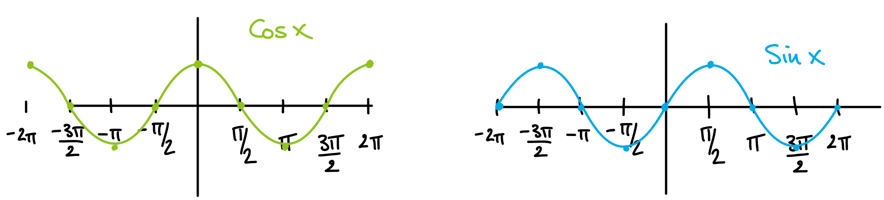
4. $\log: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ y $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, vistas en la parte de sucesiones.



5. Funciones seno y coseno.



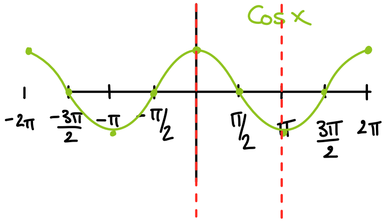
Circunferencia de radio 1 (longitud 2π)

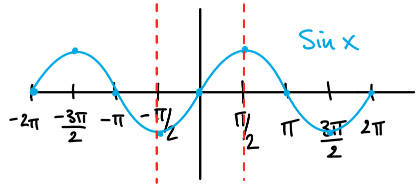


$\sin, \cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones 2π-periódicas ($\Rightarrow$ no inyectivas)

$\sin(\mathbb{R}) = \cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

$\cos$ es par ($\cos(-x) = \cos x$) y $\sin$ es impar ($\sin(-x) = -\sin x$).





$\sin: [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1,1]$ y $\cos: [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$ son inyectivas, por lo que podemos considerar sus inversas

$\arcsin: [-1,1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$

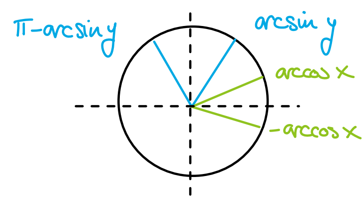
$\arcsin y \equiv$ único ángulo en $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cuyo sin es y

$\arccos: [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$

$\arccos y \equiv$ único ángulo en $[0,\pi]$ cuyo cos es y.

<u>Resolución de las ecuaciones trigonométricas fundamentales:</u> Sea $y \in [-1,1]$.

$$\sin x = y \iff \begin{cases} x \in \{\arcsin y + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\ x \in \{\pi - \arcsin y + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$



$$\cos x = y \iff \begin{cases} x \in \{\arccos y + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\ x \in \{-\arccos y + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

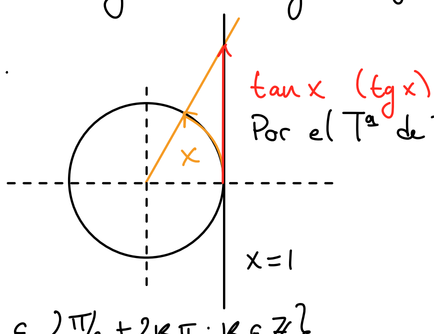
<u>Identidades trigonométricas importantes:</u>

(Tª Pitágoras) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(Suma) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \forall x,y \in \mathbb{R}. \Rightarrow \sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \forall x,y \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

6 Función tangente.

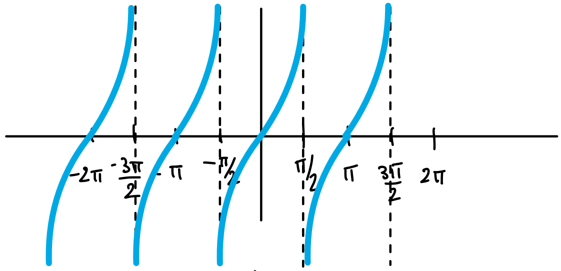


Por el Tª de Thales: $tg\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$\cos x = 0 \iff \begin{cases} x \in \{\pi/2 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\ x \in \{-\pi/2 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \end{cases} \iff x \in \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

$\arccos 0 = \pi/2$

Se define la función $tg: \mathbb{R}\setminus\{\pi/2 + k\pi : k\in\mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad tg\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$



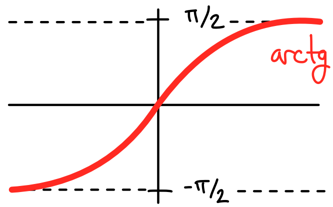
tg es una función impar y π-periódica

$tg((-\pi/2, \pi/2)) = \mathbb{R}$

Es inyectiva en $(-\pi/2, \pi/2)$, luego podemos considerar su inversa:

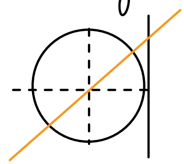
$arctg: \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$

$arctg\, y =$ único ángulo en $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ cuya tg vale y.



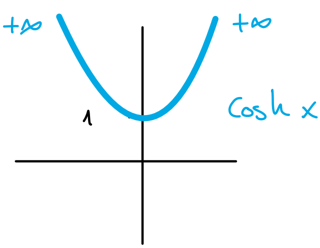
Resolución de la ecuación trigonométrica fundamental: sea $y \in \mathbb{R}$

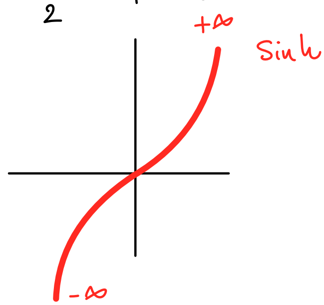
$y = tg\, x \iff x \in \{arctg\, y + k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$
(la otra solución ya está incluida)



7 Funciones hiperbólicas

$\sinh, \cosh: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$





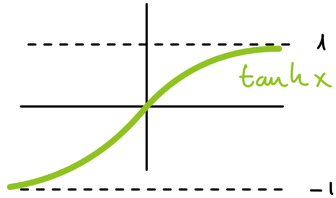
Si $\{x_n\} \to \pm\infty \Rightarrow \{\cosh x_n\} \to +\infty$
$\cosh(\mathbb{R}) = [1, +\infty)$
Función par

Si $\{x_n\} \to \pm\infty \Rightarrow \{\sinh x_n\} \to \pm\infty$.
$\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
Función impar.

Identidad fundamental: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

$\tanh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \tanh(x) = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\tanh(\mathbb{R}) = (-1,1)$



Si $\{x_n\} \to \pm\infty \Rightarrow$
$\Rightarrow \{\tanh(x_n)\} \to \pm 1.$