Universidad Autónoma de Madrid

Notas de clase de Cálculo I

Sergio Cruz Blázquez sergio.cruz@uam.es

Tema 1: Los números reales

Comprender el conjunto de los números reales, su estructura y sus propiedades es el primer paso para hacer análisis mat matemático. Presentamos el conjunto sin dar una definición precisa de número real, pues lo importante no es tanto saber qué es un número real como conocer qué propiedades tiene el conjunto de los números reales.

Introduciremos este conjunto mediante una serie de axiomas, que son postulados que admitimos como ciertos y a partir de los cuales podemos deducir todas las demás propiedades.

> Admitimos la existencia del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, que junto con sus operaciones internas de suma y producto y su relación de orden es un cuerpo ordenado que verifica el axioma del continuo.

Que $\mathbb{R}$ sea un cuerpo significa que sus operaciones de suma y producto satisfacen las siguientes propiedades:

Para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$, se cumplen:

(A1) Asociatividad: $x+(y+z) = (x+y)+z$, $x(yz) = (xy)z$

(A2) Conmutatividad: $x+y = y+x$, $xy = yx$

(A3) Distributividad: $x(y+z) = xy + xz$

(A4) Existencia de neutros: $x+0 = x$, $x \cdot 1 = x$.
Puede comprobarse que los neutros son únicos.

(A5) Existencia de elementos simétricos: $x+(-x) = x$ (opuesto), si $x \neq 0$, entonces $x \cdot 1/x = 1$ (inverso).

Por comodidad, denotamos $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Observamos que $x \cdot 0 = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, por lo que 0 no tiene inverso: $1/0$ no tiene sentido.

Además de la suma y el producto, en $\mathbb{R}$ tenemos una tercera estructura que nos permite comparar números reales y trabajar con desigualdades. Para definir este orden, partimos de la existencia de un subconjunto de $\mathbb{R}$ denotado $\mathbb{R}^+$, cuyos elementos llamamos <u>números positivos</u> y que tiene estas dos propiedades:

(A6) Tricotomía: Para cada $x \in \mathbb{R}$, se verifica solo una de las siguientes tres afirmaciones: $x = 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, $-x \in \mathbb{R}^+$.

El conjunto $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{R}^+\}$ es llamado conjunto de los números negativos.

(A7) Estabilidad Si $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow xy,\ x+y \in \mathbb{R}^+$.

<u>Definición</u> Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Decimos que $x < y \iff y - x \in \mathbb{R}^+$, y $x \leq y \iff y - x \in \mathbb{R}^+$ o $y = x$.

La relación de orden $\leq$ cumple las siguientes propiedades, que pueden deducirse a partir de (A6) y (A7).

Proposición Propiedades del orden de los números reales:

(i) Reflexiva: $x \leq x$

(ii) Antisimétrica: Si $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$.

(iii) Transitiva: Si $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

(iv) Orden total: Para $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x \leq y$ o bien $y \leq x$

Estas propiedades se resumen diciendo que $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado.

(v) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

(vi) $x \leq y$, $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$

(vii) $x \leq y \Rightarrow -x \geq -y$

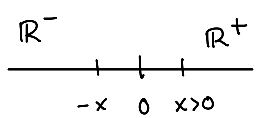
(viii) $0 < x \leq y \Rightarrow 1/x \geq 1/y$.

Proposición (Ejercicio) Si $x, y > 0$, entonces $x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$.

Ya tenemos las herramientas necesarias para hablar de la propiedad más importante de $\mathbb{R}$:

(A8) Axioma del continuo Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ subconjuntos no vacíos tales que $a \leq b$ $\forall a \in A$ $\forall b \in B$. Entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x \leq b$ $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$.

Este postulado tiene una consecuencia muy intuitiva: entre dos números reales distintos cualesquiera siempre hay otro número real. Este hecho nos permite representar gráficamente $\mathbb{R}$ como una recta infinita continua.



Los números naturales. Usando las propiedades de la suma, podemos construir un subconjunto infinito de números reales, al que llamaremos los números naturales: $1 < 1+1 = 2 < 1+1+1 = 3 < \cdots$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Nota: En realidad, para definir subconjuntos de $\mathbb{R}$ necesitamos también la axiomática del la teoría de conjuntos, pero esto se sale de los contenidos del curso.

El **principio de inducción** es un tipo de argumento que nos permite demostrar la validez de una fórmula o propiedad para todos los naturales a partir de uno en adelante.

Supongamos que queremos demostrar que una afirmación $P(n)$ es cierta para $n \geq n_0$. Lo hacemos en dos pasos:

1. Caso base: Probamos que $P(n_0)$ es cierta.

2. Paso inductivo: demostramos que si $P(n)$ fuese cierta para algún $n \geq n_0$ arbitrario, entonces lo sería también $P(n+1)$.

Ejemplo: Demostrar que $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Caso base: comprobamos la fórmula para $n=1$: $\quad 1 = \dfrac{1 \cdot 2}{2}$ ✓

Paso inductivo: Suponemos que la fórmula vale para $n \in \mathbb{N}$, y buscamos obtenerla para $n+1$.

$$\underbrace{1+2+\cdots+n}_{\text{Uso la hipótesis de inducción}} + n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad ✓$$

Nota: A veces, para demostrar $P(n+1)$ harán falta $P(n)$ y $P(n-1)$. En tal caso, procedemos como sigue:

① Comprobamos $P(n_0)$ y $P(n_0+1)$ en la etapa base.

② Demostramos que $P(n+1)$ es verdad usando $P(n)$ y $P(n-1)$.

Comentamos una propiedad de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$ que establece que en $\mathbb{R}$ no existe ningún elemento infinitamente pequeño o grande:

Proposición (Propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$) Si $\varepsilon > 0$ es cualquier número positivo, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ con $0 < 1/n < \varepsilon$. Equivalentemente, si $y \in \mathbb{R}$ y $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y < nx$.

Recordamos a continuación otros subconjuntos notables de $\mathbb{R}$:

- Los números enteros $\mathbb{Z}$, obtenidos como los naturales, el 0 y sus opuestos:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

- Los números racionales $\mathbb{Q}$, formados como cocientes con numerador entero y denominador natural:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

  Mediante el algoritmo de la división, podemos identificar estos números con los números reales que tienen un desarrollo decimal finito o periódico.

- Irracionales: Números reales que no son racionales. En particular, tienen desarrollo decimal infinito no periódico: $\sqrt{2}, \pi, e, 0'1010010001\ldots$

  Se denotan por $\mathbb{I}$ o $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

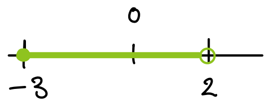
Una propiedad de la recta real es que por mucho que hagamos "zoom", siempre vemos infinitos racionales e infinitos irracionales.

Proposición: (Densidad de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ en $\mathbb{R}$). Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, existen infinitos racionales $q \in \mathbb{Q}$ tales que $a < q < b$, e infinitos irracionales r con $a < r < b$.

Hacemos un inciso para aprender a reconocer subconjuntos de números reales definidos a través de una fórmula:

Ejemplos $A = \{ \underbrace{(-1)^n n}_{\text{Fórmula que depende de } n} : \underbrace{n \in \mathbb{N}}_{\text{Valores que toma } n} \} = \{ \cdots, \underset{n=-2}{-2}, 1, 0, -1, 2, \ldots \}$

$B = \{ \underbrace{x \in \mathbb{R}}_{\text{valores de } x} : \underbrace{-3 \leq x < 2}_{\text{que satisfacen una condición}} \}$



$= [-3, 2[$

Dado un $x \in \mathbb{R}$, el axioma de tricotomía garantiza que, entre x y $-x$, al menos uno es ≥ 0. Llamamos a esta cantidad el valor absoluto de x:

Definición Sea $x \in \mathbb{R}$, definimos su valor absoluto como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Intuitivamente, es el número que resulta de quitarle el signo a x.

Proposición (Propiedades básicas del valor absoluto)

(i) $-|x| \leq x \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $|x| \geq 0$, y $|x| = 0$ si, y solamente si, $x = 0$.

(iii) $|xy| = |x| \cdot |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$

(iv) (Desigualdad triangular) $|x \pm y| \leq |x| + |y|$, y la igualdad se da si y solo si x e y tienen el mismo signo o uno es cero.

(v) (Desigualdad triangular inversa) $||x|-|y|| \leq |x-y|$, con igualdad si y sólo si x e y tienen el mismo signo o uno es cero.

Recordatorio: Cada $x>0$ tiene dos raíces cuadradas, $\sqrt{x}$ y $-\sqrt{x}$, pero $\sqrt{x}$ SIEMPRE denota la raíz positiva. Ejemplo: $\sqrt{4}=2$.

(vi) $\sqrt{x^2}=|x|$ (Ejemplo: $\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5$).

(vii) Si $y\geq 0$, $|x|\leq y \iff -y\leq x\leq y$.

(viii) Si $y>0$, $|x|<y \iff -y<x<y$.

Geométricamente:

(i) $|x-y|$ representa la distancia entre x e y.

(ii) $\{x\in\mathbb{R} : |x-a|\leq r\} = [a-r, a+r]$

(iii) $\{x\in\mathbb{R} : |x-a|< r\} =]a-r, a+r[$.

No necesariamente en A.

Definición Sea $A\subset\mathbb{R}$, $A\neq\emptyset$ (no vacío), y $x\in\mathbb{R}$. Decimos que x es un mayorante (resp. minorante) de A si $a\leq x$ (resp. $x\leq a$) para todo $a\in A$. En tal caso, decimos que A está mayorado (resp. minorado). Si A está mayorado y minorado, decimos que está acotado.

Definición Sea $A\subset\mathbb{R}$, $A\neq\emptyset$ y mayorado. Entonces existe $x\in\mathbb{R}$ tal que

(i) x es un mayorante de A (x es el menor mayorante).

(ii) Para todo $\varepsilon>0$, existe $a\in A$ tal que $x-\varepsilon\leq a\leq x$.

Llamamos a x el supremo de A, y lo denotamos por $x=\sup A$.
Si $x\in A$, entonces decimos que es el máximo de A ($x=\max A$).

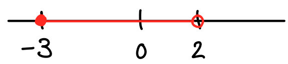
Definición Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y minorado. Entonces existe $x \in \mathbb{R}$, que llamamos ínfimo de A y denotamos por $x = \inf A$, tal que

(i) x es un minorante de A

(ii) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $x \leq a \leq x + \varepsilon$.

Si $\inf A \in A$, entonces se llama mínimo de A ($x = \min A$).

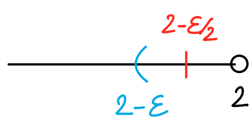
Ejemplo $A = [-3, 2[$



$\min A = -3$, ya que $-3 \leq a \quad \forall a \in A$ (por definición de intervalo) y $-3 \in A$ (Si tenemos un minorante de A en A, entonces es un mínimo).

$\sup A = 2$. Por definición de intervalo, se tiene que $a \leq 2 \quad \forall a \in A$. Sea $\varepsilon > 0$. Necesitamos encontrar $a \in A$ tal que

$2 - \varepsilon \leq a \leq 2$



Podemos tomar $2 - \frac{\varepsilon}{2} = a$

Proposición Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Si $x \in A$ es una cota superior (resp. cota inferior) de A, entonces $x = \max A$ (resp. $x = \min A$).

Ejemplo Sea $A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$. Veamos que A es acotado y calculemos sup e inf.

Por un lado, $0 < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, por lo que A está minorado e $\inf A \geq 0$.

Por otro lado, como se tiene $n \geq 1$ y $m \geq 1$, entonces $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq 2$, por lo que A está mayorado y $\sup A \leq 2$.

Dado que $2 \in A$ $(n = m = 1)$, entonces 2 es el máximo de A.

Veamos ahora que $\inf A = 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Debemos encontrar $a \in A$ tal que

$$0 \leq a = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Por la propiedad arquimediana de $\mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{2}{\varepsilon}$, lo que nos da $1/n < \varepsilon/2$. Entonces, $a = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ verifica

$$0 < a < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tema 2: Sucesiones de números reales

Intuitivamente, una sucesión de números reales es una lista ordenada de números reales indexada en los naturales:

Notación.

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\} = \{x_n\}_{n \geq 1}.$$

Definición Una sucesión es una aplicación $s: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $n \mapsto s(n) = x_n$. A menudo, identificamos la sucesión con su imagen $s(\mathbb{N})$, a la que denotamos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o $\{x_n\}$ si no hay lugar a confusión.

Si $\{x_n\}$ es una sucesión, llamamos al n-ésimo término x_n el término general de la sucesión, y nos permite reconstruir toda la sucesión. A veces, x_n vendrá dado mediante una fórmula recursiva.

Ejemplos:

(1) $\{x_n\} = \left\{\frac{n-1}{n+1}\right\} = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \dots\right\}$

(2) $x_1 = 1$, $x_n = \dfrac{1}{1 + x_{n-1}}$ $n \geq 2$ $\{x_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \dots\right\}$

Definición Decimos que una sucesión $\{x_n\}$ está acotada cuando su imagen $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$. Equivalentemente, si existe $M > 0$ tal que

$$|x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (¡M \text{ no depende de } n!)$$

Ejemplo $\{x_n\} = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\} = \left\{ 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \dots \right\}$ es una sucesión acotada, ya que $|x_n| = \left| 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right| \underset{D.T.}{\leq} 1 + \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = 1 + \frac{1}{n} \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Definición Sea $\{x_n\}$ una sucesión, y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que $\{x_n\}$ converge a L si:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \left[n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon \right]$$

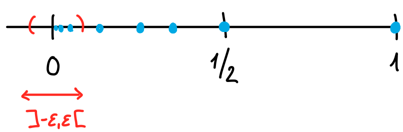
En tal caso, se dice que L es el límite de $\{x_n\}$ y escribimos

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = L, \quad \text{o bien } \{x_n\} \longrightarrow L \quad (n \to +\infty).$$

Nota: El límite de una sucesión, si existe, es único.

Interpretación gráfica: L es el límite de x_n si, por pequeño que tomemos un intervalo centrado en L ($]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$), encontramos un n_0-ésimo de la sucesión $\{x_n\}$ tal que todos los términos a partir de x_{n_0} quedan dentro de $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$.

$\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$



$\left\{ \frac{1}{n} \right\} \longrightarrow 0.$

Definición Decimos que $\{x_n\}$ es convergente cuando tiene un límite $L \in \mathbb{R}$.

En general en este curso no vamos a calcular límites por la definición, pero conviene tener ejemplos no triviales de sucesiones convergentes y no convergentes, que nos permitan estudiar una gama más amplia mediante las reglas de cálculo de límites que veremos más adelante.

Ejemplo: $\left\{ \frac{1}{n} \right\} \to 0.$

Sea un $\varepsilon>0$ cualquiera. Para probar esto, debemos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$, entonces $\left| 1/n - 0 \right| < \varepsilon \iff 1/n < \varepsilon$.

La propiedad arquimediana nos da un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > 1/\varepsilon$.

Por tanto, si $n \geq n_0 > 1/\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, como buscábamos.

Ejemplo: La sucesión $\{n\}$ no es convergente.

Supongamos por reducción al absurdo que $\{n\} \to L$. Entonces, tomando $\varepsilon = 1$ encontramos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$ entonces

$$|n-L| < 1 \Rightarrow n-L < 1 \Rightarrow n < 1+L.$$

Esto contradice la propiedad arquimediana, así que lo que hemos supuesto es falso (que $\{n\}$ converge).

Proposición Si $\{x_n\}$ es convergente $\Rightarrow \{x_n\}$ está acotada

Definición Sea $s: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una sucesión y sea $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una aplicación estrictamente creciente, esto es,

$$\text{para } n, m \in \mathbb{N} \text{ con } n < m \text{ se tiene } \sigma(n) < \sigma(m)$$

entonces, llamamos a la sucesión $s \circ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad n \longmapsto s(\sigma(n))$ una subsucesión o sucesión parcial de s. Si $s = \{x_n\}$, entonces denotamos $s \circ \sigma = \{x_{\sigma(n)}\}$.

Ejemplos Las aplicaciones $n \to 2n$ y $n \to 2n-1$ son estrictamente crecientes, lo que nos da dos subsucesiones notables:

$\{x_{2n}\} \equiv$ subsucesión de los términos en posición par

$\{x_{2n-1}\} \equiv$ subsucesión de los términos en posición impar.

Proposición Si $\{x_n\} \to L$ y $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una subsucesión, entonces $\{x_{\sigma(n)}\} \to L$.

Como consecuencia de este resultado y de la unicidad del límite, si existen dos sucesiones parciales tales que

$$\{x_{\sigma_1(n)}\} \to L_1 \qquad \{x_{\sigma_2(n)}\} \to L_2 \quad \text{con } L_1 \neq L_2,$$

entonces $\{x_n\}$ no tiene límite.

Ejemplo: Sea $\{x_n\} = \{2 + (-1)^n\}$. Estudiamos las subsucesiones:

$$\left.\begin{array}{l} \{x_{2n}\} = \{2+(-1)^{2n}\} = \{3\} \longrightarrow 3 \\ \{x_{2n-1}\} = \{2+(-1)^{2n-1}\} = \{1\} \longrightarrow 1 \end{array}\right] \{x_n\} \text{ no tiene límite}$$

En general, <u>no es cierto</u> que la convergencia de varias parciales a un mismo límite implique que la sucesión original converja a dicho límite. Sin embargo, esto sí es cierto para las parciales de pares e impares:

Proposición $\{x_n\} \to L \iff [\{x_{2n}\} \to L$ y $\{x_{2n-1}\} \to L]$

Teorema: (Bolzano - Weierstrass) Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada. Entonces existe una subsucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ convergente.

Recogemos en el siguiente resultado las propiedades básicas que tienen las operaciones con sucesiones convergentes:

Proposición Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones de números reales, y $L, L_1, L_2 \in \mathbb{R}$.

(1) $\{x_n\} \to L \iff \{|x_n - L|\} \to 0 \iff \{x_n - L\} \to 0$.

(2) Si $\{x_n\} \to L \Rightarrow \{|x_n|\} \to |L|$

Obsérvese que el recíproco de esta propiedad no es cierto: si tomamos

$\{x_n\} = \{(-1)^n\}$, podemos ver que $\{|x_n|\} = \{1\} \to 1$, mientras que $\{x_n\}$ no es convergente, ya que $\{x_{2n}\} \to 1$ y $\{x_{2n-1}\} \to -1$.

(3) Si $\{x_n\} \to L_1$ e $\{y_n\} \to L_2 \Rightarrow \{x_n + y_n\} \to L_1 + L_2$.

(4) Si $\{x_n\}$ está acotada e $\{y_n\} \to 0 \Rightarrow \{x_n y_n\} \to 0$.

Ejemplo $\left\{ \dfrac{\cos(n^2\pi)}{n} \right\} = \left\{ \cos(n^2\pi) \cdot \dfrac{1}{n} \right\}$.

Como $|\cos(n^2\pi)| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$, entonces la sucesión tiene límite 0.

(5) Si $\{x_n\} \to L_1$ e $\{y_n\} \to L_2$, entonces $\{x_n y_n\} \to L_1 L_2$.

(6) Si $\{y_n\} \to L_2$ y $\{x_n\} \to L_1 \neq 0$, entonces $\left\{ \dfrac{y_n}{x_n} \right\} \to \dfrac{L_2}{L_1}$

Ejemplo Estudiar la convergencia de $\left\{ \dfrac{n^2 - n}{2 - n^2} \right\}$

Hemos visto que la sucesión $\{n\}$ no converge, por lo que, en principio, no podemos usar las reglas enumeradas anteriormente.

Para sortear el problema, dividimos numerador y denominador por n^2:

$$\frac{n^2 - n}{2 - n^2} = \frac{1 - 1/n}{2/n^2 - 1} = \frac{\overbrace{1 - 1/n}^{\to 1}}{\underbrace{\frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n} - 1}_{\to -1}} \longrightarrow -1.$$

Nos centramos ahora en proporcionar resultados que nos permitan asegurar que una sucesión $\{x_n\}$ es convergente usando desigualdades.

El primero es el llamado Teorema del sándwich, que nos da la convergencia de cualquier sucesión que pueda encajarse entre dos sucesiones convergentes con el mismo límite:

Proposición Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ sucesiones tales que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $\{x_n\} \to L$ y $\{z_n\} \to L$, entonces también $\{y_n\} \to L$.

Ejemplo Sea $\{y_n\} = \left\{ \dfrac{(-1)^n n}{n^2+1} \right\}$. Vamos a usar el resultado anterior para demostrar que $\{y_n\} \to 0$. $n^2+1 \geq n^2$

Acotamos como sigue: $0 \leq |y_n| = \left| \dfrac{(-1)^n n}{n^2+1} \right| = \dfrac{n}{n^2+1} \leq \dfrac{1}{n} \longrightarrow 0.$

Por el criterio anterior con $\{x_n\} = \{0\}$ y $\{z_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, obtenemos que

$$\{y_n\} \to 0.$$

Los comportamientos crecientes o decrecientes de las sucesiones también nos ayudarán a determinar si estas son convergentes.

Definición Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ es:

(i) Creciente si $x_n \leq x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) Decreciente si $x_n \geq x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(iii) Monótona si es creciente o decreciente.

Teorema de la convergencia monótona: Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Más precisamente,

- Si $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, $\{x_n\} \to \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.
- Si $\{x_n\}$ es decreciente y minorada, $\{x_n\} \to \inf\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$

Ejemplo Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida por la ley de recurrencia

$$a_n = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$$

En primer lugar, comprobamos por inducción que $a_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Para $n=1$ es claro: $1 < 2$. Si ahora suponemos que $a_n < 2$, entonces vemos que

Claramente $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{a_n} < \sqrt{2}$

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} < \sqrt{4} = 2.$$

Ahora, veamos que es monótona creciente. Para ello, comprobamos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Uso el paso anterior, $\sqrt{a_n} < \sqrt{2}$.

En efecto, $a_{n+1}/a_n = \dfrac{\sqrt{2a_n}}{a_n} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a_n}} > \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

Como $\{a_n\}$ es creciente y mayorada, $\{a_n\} \to L$. Si tenemos en cuenta que $\{a_{n+1}\}$ es una subsucesión de $\{a_n\}$, y por tanto

$$\{a_{n+1}\} \to L,$$

Este paso es consecuencia de un resultado que veremos más adelante.

nos queda la identidad $L = \sqrt{2L} \Rightarrow L^2 = 2L \Rightarrow$

$$\begin{cases} L = 0 & \text{Imposible, ya que es creciente y } x_1 = 1 \\ L = 2 & \Rightarrow \text{única otra posibilidad.} \end{cases}$$

Entonces, $\{a_n\} \to 2$.

Hasta ahora, hemos probado una cadena de implicaciones:

Monótona y acotada $\overset{1}{\Rightarrow}$ convergente $\overset{2}{\Rightarrow}$ acotada $\overset{3}{\Rightarrow}$ admite subsucesión convergente.

Podemos ver fácilmente que ninguna de las implicaciones es reversible:

1. $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}$ es convergente pero no es monótona
2. $\{(-1)^n\}$ es acotada pero no convergente
3. $\{n(1-(-1)^n)\} = \{2, 0, 6, 0, 8, \dots\}$ no es acotada pero la subsucesión de los pares es convergente.

El teorema de la convergencia monótona nos proporciona más ejemplos de sucesiones convergentes.

Ejemplos (1) Sea $a \in \mathbb{R}$ con $|a| < 1$. La sucesión $\{|a|^n\}$ es decreciente y mayorada, luego convergente, y se comprueba sin dificultad que su límite es 0.

(2) La sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es creciente y mayorada, luego convergente. Llamamos a su límite "e". Este número real es irracional y verifica $2 < e < 3$ $(e = 2'71828\dots)$

Por otro lado, la sucesión $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ es también creciente y mayorada, y puede probarse que

$$\left\{ \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \right\} \longrightarrow \frac{1}{e}$$

Ejemplo Estudiar la convergencia de la sucesión $\left\{ \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{2n} \right\}$.

La idea es relacionar nuestra sucesión con una subsucesión de $(1+1/n)^n$ o $(1-1/n)^n$. Procedemos como sigue:

$$\frac{n-1}{n+2} = \frac{n+2-2-1}{n+2} = 1 - \frac{3}{n+2} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{n+2}{3}\right)}$$

Entonces, $\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{2n} = \left(\underbrace{\left(1-\frac{1}{\frac{n+2}{3}}\right)^{\frac{n+2}{3}}}_{\text{Sucesión parcial de } (1-1/n)^n \;\longrightarrow\; 1/e}\right)^{\underbrace{\frac{3\cdot 2n}{n+2}}_{\to 6}} \xrightarrow{\circledast} \left(\frac{1}{e}\right)^{6} = e^{-6}.$

⊛ Este paso es consecuencia de un resultado que veremos más adelante.

Pasamos ahora a profundizar en las sucesiones que no son convergentes, a las que llamaremos divergentes. Es menester señalar que en algunos textos, esta nomenclatura se reserva para un tipo concreto de sucesiones no convergentes, que son las que tienden a $+\infty$ o $-\infty$.

Definición Una sucesión $\{x_n\}$ se dice divergente si no es convergente.

Definición Sea $\{x_n\}$ una sucesión. Decimos que $\{x_n\}$:

(i) diverge a $+\infty$ si para todo $K\in\mathbb{R}$, existe un $n_0\in\mathbb{N}$ tal que, si $n\geq n_0 \Rightarrow x_n > K$. En tal caso escribimos $\{x_n\}\to+\infty$.

(ii) diverge a $-\infty$ si para todo $K\in\mathbb{R}$, existe un $n_0\in\mathbb{N}$ tal que, si $n\geq n_0 \Rightarrow x_n < K$. En tal caso escribimos $\{x_n\}\to-\infty$.

Claramente, $\{x_n\}\to-\infty \iff \{-x_n\}\to+\infty$, por lo que a menudo solo consideraremos uno de los dos casos.

Insistimos en que $+\infty$ y $-\infty$ son solo símbolos para indicar la dirección en la que una sucesión diverge. Escribir $\{x_n\}\to+\infty$ no significa que $\{x_n\}$ sea convergente ni que su límite sea $+\infty$. Por ello, debemos evitar expresiones como

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty,$$

que solo crean confusión.

Estudiamos ahora la relación que existe entre estas sucesiones y las que hemos visto anteriormente:

Proposición (Subsucesiones) Sea $\{x_n\}$ una sucesión y $\{x_{\sigma(n)}\}$ una subsucesión.

Si $\{x_n\} \to +\infty \Rightarrow \{x_{\sigma(n)}\} \to +\infty$.

Si $\{x_n\} \to -\infty \Rightarrow \{x_{\sigma(n)}\} \to -\infty$.

Proposición (Monotonía) Si $\{x_n\}$ es creciente y no mayorada, entonces $\{x_n\} \to +\infty$. De igual forma, si $\{x_n\}$ es decreciente y no minorada, entonces $\{x_n\} \to -\infty$.

Ejemplo Sea $a > 1$. La sucesión $\{a^n\}$ es creciente y no está mayorada, por tanto $\{a^n\} \to +\infty$

Si $a < 1$, entonces $\{|a^n|\} = \{|a|^n\} \to +\infty$, pero a^n no tiende a $+\infty$ ni a $-\infty$, pues oscila de signo. $\{(-2)^n\} = \{-2, 4, -8, 16, \dots\}$

Ejemplo La sucesión $\{\sqrt{n}\}$ es creciente y no está mayorada, por lo que $\{\sqrt{n}\} \to +\infty$.

- Creciente: como $n+1 > n$ y tanto $n+1$ como n son >0, entonces $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ (Si $x, y > 0 \Rightarrow x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$)

- No mayorada: Si $\exists M \in \mathbb{R} : \sqrt{n} \leq M \Rightarrow n \leq M^2 \ \forall n \in \mathbb{N}$, que contradice la propiedad arquimediana.

El siguiente criterio permite deducir que una sucesión diverge a $\pm\infty$ comparándola con otra con el mismo comportamiento.

Proposición Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones con $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

(i) Si $\{x_n\} \to +\infty \Rightarrow \{y_n\} \to +\infty$

(ii) Si $\{y_n\} \to -\infty \Rightarrow \{x_n\} \to -\infty$.

Ejemplo Consideramos la sucesión

$$\{x_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \right\} = \left\{ 1,\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}, \dots \right\}$$

Si $k \leq n \Rightarrow \sqrt{k} \leq \sqrt{n} \Rightarrow 1/\sqrt{k} \geq 1/\sqrt{n}$. Entonces,

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

Como $\sqrt{n} \to +\infty$, entonces $\{x_n\} \to +\infty$.

Finalmente, resumimos el álgebra de $\pm\infty$ en la siguiente proposición

Proposición Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones de números reales.

(i) Si $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\}$ está minorada, entonces $\{x_n + y_n\} \to +\infty$. (En particular, la segunda condición se cumple si $\{y_n\} \to L$ o $\{y_n\} \to +\infty$.)

(ii) Si $\{x_n\} \to -\infty$ e $\{y_n\}$ está mayorada $\Rightarrow \{x_n + y_n\} \to -\infty$ (En particular, si $\{y_n\} \to L$ o $\{y_n\} \to +\infty$).

Mayorada lejos de 0

(iii) Si $\{x_n\} \to +\infty$ y existen $\alpha > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $y_n > \alpha > 0$ para $n \geq m$, entonces $\{x_n y_n\} \to +\infty$. (En particular, si $\{y_n\} \to L > 0$ o $\{y_n\} \to +\infty$)

(iv) Si $\{x_n\} \to -\infty$ y existen $\alpha > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $y_n > \alpha > 0$ para $n \geq m$, entonces $\{x_n y_n\} \to -\infty$. (En particular, si $\{y_n\} \to L > 0$ o $\{y_n\} \to +\infty$).

(v) Sea $\{x_n\} \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\{x_n\} \to 0 \iff \left\{ \frac{1}{|x_n|} \right\} \to +\infty$$

Recogemos en las siguientes tablas-resumen los casos más frecuentes de los resultados de álgebra de límites comentados anteriormente.

Suma $x_n + y_n$

$x_n \downarrow$ \ $y_n \to$	$L_2 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$L_1 \in \mathbb{R}$	$L_1 + L_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$[\infty - \infty]$
$-\infty$	$-\infty$	$[\infty - \infty]$	$-\infty$

Producto $x_n y_n$

$x_n \downarrow$ \ $y_n \to$	$L_2 \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$L_1 \neq 0$	$L_1 L_2$	0	$\operatorname{sgn}(L_1)\infty$	$-\operatorname{sgn}(L_1)\infty$
0	0	0	$[0 \cdot \infty]$	$[0 \cdot \infty]$
$+\infty$	$\operatorname{sgn}(L_2)\infty$	$[0 \cdot \infty]$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\operatorname{sgn}(L_2)\infty$	$[0 \cdot \infty]$	$-\infty$	$+\infty$

Cociente $y_n / x_n = \frac{1}{x_n} \cdot y_n$

$x_n \downarrow$ \ $y_n \to$	$L_2 \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$L_1 \neq 0$	L_2 / L_1	0	$+\infty$	$-\operatorname{sgn}(L_1)\infty$
0	$+\infty$ (v.a.)	$\left[\frac{0}{0}\right]$	$+\infty$ (v.a)	$+\infty$ (v.a)
$+\infty$	0	0	$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$	$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$
$-\infty$	0	0	$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$	$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Notación

$\operatorname{sgn} : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\operatorname{sgn} x = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

v.a. (en valor absoluto)

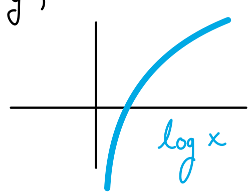
$$\left| \frac{y_n}{x_n} \right| \to +\infty.$$

Los casos señalados en rojo se conocen como indeterminaciones, que es un término que denota que no existe un criterio general que nos permita decidir el comportamiento de la sucesión.

Además de las presentadas anteriormente, existen otras que aparecen al considerar sucesiones de la forma $\{a_n^{b_n}\}$. Para poder tratarlas, adelantamos una pequeña parte del temario de funciones reales:

El logaritmo es la función $\log : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica

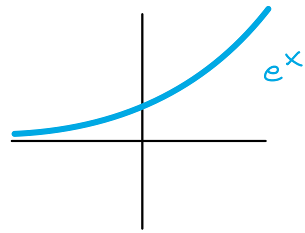
- es estrictamente creciente (si $0 < x < y \Rightarrow \log x < \log y$)
- $\log(xy) = \log x + \log y \quad \forall x, y > 0$
- $\log 1 = 0$, $\log e = 1$



- si $\{x_n\} \to L > 0 \Rightarrow \log(x_n) \to \log L$
- si $\{x_n\} \to +\infty \Rightarrow \log(x_n) \to +\infty$
- Si $x_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to 0 \Rightarrow \log(x_n) \to -\infty$

La exponencial es la aplicación $e^{\square} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ que verifica

- es estrictamente creciente (si $x < y \Rightarrow e^x < e^y$).
- $e^{x+y} = e^x e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $e^0 = 1, \quad e^1 = e$
- Si $\{x_n\} \to L \Rightarrow e^{x_n} \to e^L$
- Si $\{x_n\} \to +\infty \Rightarrow e^{x_n} \to +\infty$
- Si $\{x_n\} \to -\infty \Rightarrow e^{x_n} \to 0$.



La exponencial y el logaritmo son inversas la una de la otra, esto es,

$$e^{\log x} = x \quad \forall x > 0, \qquad \log e^y = y \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Definición Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0$. Se define la potencia de base a y exponente b como

$$a^b = e^{b \log a}.$$

El siguiente resultado nos permite resolver indeterminaciones de los tipos anteriores que involucran exponenciales y logaritmos:

Teorema (Escala de infinitos) Sea $\alpha > 0$. Entonces

(i) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0$ (ii) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{e^n} = 0.$

Cabe resaltar que no importa cuan grande o pequeño sea el valor de $\alpha>0$; cualquier potencia positiva de n "domina" al $\log n$, así como la exponencial domina a cualquier potencia de n.

Ejemplo Consideramos la sucesión $\left\{\dfrac{n^2\log n}{1+n^3+n^4 2^{-n}}\right\}=\{x_n\}$

Identificamos n^3 como el término dominante, y dividimos numerador y denominador por este:

$$\frac{n^2\log n}{1+n^3+n^4 2^{-n}}=\frac{\frac{\log n}{n}}{\frac{1}{n^3}+1+n2^{-n}}$$

Usando la escala de infinitos sabemos que $\dfrac{\log n}{n}\to 0$ y que $n2^{-n}=\dfrac{n}{2^n}\to 0$. Por tanto, $\{x_n\}\to 0$

Teorema (equivalencia logarítmica) Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que $x_n>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ y $\{x_n\}\to 1$, y sea $\{y_n\}$ otra sucesión. Entonces,

- $y_n(x_n-1)\to L \iff x_n^{y_n}\to e^L$
- $y_n(x_n-1)\to +\infty \iff x_n^{y_n}\to +\infty$
- $y_n(x_n-1)\to -\infty \iff x_n^{y_n}\to 0$

La sucesión $y_n(x_n-1)$ juega el papel del exponente.

Ejemplo Consideramos la sucesión $\left\{\left(\dfrac{3^n}{3^n+2^n}\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)^n}\right\}$.

Es fácil ver que
$$\frac{3^n}{3^n+2^n}=\frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}\longrightarrow 1,$$

por lo que tenemos una indeterminación del tipo $[1^\infty]$. Estudiamos la sucesión
$$\frac{3^n}{2^n}\left(\frac{3^n}{3^n+2^n}-1\right)=\frac{3^n}{2^n}\cdot\frac{3^n-3^n-2^n}{3^n+2^n}=\frac{-6^n}{6^n+4^n}\to -1$$

Por equivalencia logarítmica, $\left\{\left(\frac{3^n}{3^n+2^n}\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)^n}\right\} \to \frac{1}{e}$

Teorema (Criterio de la raíz para sucesiones) Sea $x_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

- Si $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\} \to L \Rightarrow \left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} \to L$
- Si $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\} \to +\infty \Rightarrow \left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} \to +\infty.$

Ejemplo Probemos que la sucesión $\left\{(n!)^{1/n}\right\} \to +\infty.$

Tenemos $x_n = \sqrt[n]{a_n}$, con $a_n = n! \overset{def}{=} \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)\,n!}{n!} = (n+1) \to +\infty.$ Entonces, lo mismo le ocurre a $(n!)^{1/n}$ por el criterio de la raíz.

Tema 3: Series de números reales

Al estudiar una sucesión de números reales $\{x_n\}$ surge de forma natural una nueva idea, la de sumar todos sus términos. Para ello, podemos considerar sumas finitas sucesivas:

$$x_1, \quad x_1 + x_2, \quad x_1 + x_2 + x_3, \ldots$$

Si esta nueva sucesión es convergente, es plausible interpretar su límite como la suma infinita de los términos de x_n.

Definición Dada una sucesión $\{x_n\}$, llamamos serie de término general $\{x_n\}$ a la sucesión de sumas parciales

$$\{S_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{n} x_k\right\},$$

y la denotaremos simplemente $\sum_{n\geq 1} x_n$.

Con esta definición queda claro que las series no son un objeto nuevo, son sucesiones cuyo término general se obtiene sumando los términos de otra sucesión. Por tanto, todas las nociones de sucesiones (convergencia, monotonía, ...) se trasladan de forma automática a este contexto.

Definición Decimos que una serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ es convergente cuando $\{S_n\}$ lo es como sucesión. En tal caso, llamamos a su límite la suma de la serie y lo denotamos por

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Cuando estudiamos una serie, estamos considerando dos sucesiones, así que conviene fijar una notación que aclare a cuál nos referimos en cada momento.

$$\sum_{n\geq 1} x_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} x_k \right\}$$

Sumas parciales de la serie

Término general de la serie

Para $n\in\mathbb{N}$, a x_n lo llamaremos n-ésimo término de la serie, y diremos que $\sum_{k=1}^{n} x_k$ es la n-ésima suma parcial de la serie.

Si $\sum_{n\geq 1} x_n$ es convergente, llamamos a su límite la suma de la serie para diferenciarlo del posible límite de $\{x_n\}$, del que hablaremos enseguida.

Ejemplo: Si decimos que $\sum_{n\geq 1} x_n$ es una serie de términos no negativos, significa que $x_n \geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. En particular, $\sum_{n\geq 1} x_n$ es una sucesión creciente.

Queda claro por tanto que toda serie es, por definición, una sucesión, pero el recíproco también es cierto: toda sucesión puede escribirse como una serie. Por tanto, series y sucesiones son dos puntos de vista diferentes para estudiar el mismo concepto matemático.

Sea $\{y_n\}$ una sucesión, y aceptemos por convenio que $y_0 = 0$. Definimos entonces

$$x_n = y_n - y_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces, podemos ver que $\sum_{n\geq 1} x_n = \{y_n\}$. En efecto, dado $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k - y_{k-1} =$$

$$= \cancel{y_1} + (\cancel{y_2} - \cancel{y_1}) + (\cancel{y_3} - \cancel{y_2}) + \cdots + y_n - \cancel{y_{n-1}} = y_n.$$

Merece la pena dar un nombre a las series que se reducen a estudiar una única sucesión del tipo que acabamos ver:

<u>Definición</u> Diremos que una serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ es <u>telescópica</u> si su término general puede escribirse de la forma

$$x_n = y_{n+1} - y_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

para alguna sucesión $\{y_n\}$. Entonces, el estudio de $\sum_{n\geq 1} x_n$ equivale al de $\{y_{n+1} - y_1\}$.

<u>Ejemplo</u> La serie de Mengoli es $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

Podemos ver fácilmente que $\displaystyle\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = -\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$, por lo que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = -\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$$

Llamando $y_n = \frac{1}{n}$, tenemos $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = -\sum_{n\geq 1} (y_{n+1} - y_n)$

$$= -\left((y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \cdots + (y_{n+1} - y_n) \right) = y_1 - y_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Como $\left\{ 1 - \frac{1}{n+1} \right\} \to 1$, la serie es convergente y su suma es 1. —

Si bien series y sucesiones son conceptos equivalentes, muchas de las sucesiones más importantes que aparecerán en análisis matemático vendrán en forma de series para las cuales no hay una forma cómoda de dar una fórmula explícita para sus sumas parciales.

Por tanto, debemos priorizar el obtener información sobre $\sum_{n\geq 1} x_n$ a partir de su término general $\{x_n\}$. Un primer hecho básico es que $\sum_{n\geq 1} x_n$ no puede ser convergente si $\{x_n\} \not\to 0$:

Proposición Si $\sum_{n\geq 1} x_n$ es convergente $\Rightarrow \{x_n\} \to 0$.

La pregunta sobre si el recíproco es cierto plantea un problema sobre sucesiones que no habríamos considerado de no adoptar el punto de vista de las series:

$$¿\text{ Si } \{y_{n+1} - y_n\} \to 0, \text{ entonces } \{y_n\} \text{ converge?}$$

La respuesta es negativa en ambos casos: que $\{x_n\} \to 0$ <u>NO ES SUFICIENTE</u> para afirmar que $\sum_{n\geq 1} x_n$ converge.

Ejemplo La serie armónica $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge positivamente.

Como $0 < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, la serie es creciente, por lo que basta ver que no está mayorada. Para ello, demostramos por inducción que

$$S_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

Para $n=1$ es claro: $1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$. Supongamos ahora que la desigualdad es cierta para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$S_{2^{n+1}} = \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2} + \underbrace{(2\cdot 2^n - 2^n)}_{\text{Cantidad de sumandos}} \frac{1}{2^{n+1}}$$

Sumando más pequeño.

$$= 1 + \frac{n}{2} + 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n+1}{2}$$

A veces, puede interesarnos que una serie empiece en $n=0$. Denotamos por $\sum_{n\geq 0} x_n$ a la serie cuyas sumas parciales vienen dadas por:

$$\hat{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} x_n = \sum_{n\geq 1} x_{n-1}$$

Sumamos n términos

Además, si S_n son las sumas parciales de $\sum_{n\geq 1} x_n$, se comprueba sin dificultad que

$$\hat{S}_{n+1} = x_0 + S_n,$$

de donde sigue que la convergencia de $\sum_{n\geq 0} x_n$ equivale a la de $\sum_{n\geq 1} x_n$ y, si son convergentes, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

De igual manera, podemos considerar series que empiezan en valores mayores que 1. Si $p \in \mathbb{N}$, entonces definimos

$$\sum_{n\geq p+1} x_n \overset{\text{def.}}{=} \left\{ \sum_{k=p+1}^{n+p} x_k \right\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} x_{k+p} \right\} = \sum_{n\geq 1} x_{n+p}.$$

Ejemplo Usando la fórmula anterior para $p=2$, vemos que

$$\sum_{n\geq 3} \frac{1}{(n-1)(n-2)} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n-1)} \quad \text{(serie de Mengoli)}$$

Definición Dado $a \in \mathbb{R}$, la serie geométrica de razón a es la serie

$$\sum_{n\geq 0} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots$$

Como $\{a^n\} \to 0 \iff |a|<1$, esta es una condición necesaria para que la serie sea convergente. Vemos que también es suficiente:

Ejemplo: Si $|a|<1$, $\sum\limits_{n\geq 0} a^n$ es convergente y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$.

Para $a\neq 1$, tenemos:

$$(1-a)(1+a+a^2+\cdots+a^n) = 1-a+a-a^2+a^2-\cdots-a^{n+1} = 1-a^{n+1}$$

Entonces $\sum\limits_{k=0}^{n} a^k = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} \longrightarrow \dfrac{1}{1-a}$, al ser $|a|<1$.

Una sencilla consecuencia del álgebra de sucesiones convergentes nos permite ampliar nuestro catálogo de series convergentes:

Proposición Si $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ y $\sum\limits_{n\geq 1} y_n$ son convergentes y $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, entonces $\sum\limits_{n\geq 1}(\alpha x_n+\beta y_n)$ es convergente y $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n+\beta y_n) = \alpha\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + \beta\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$

Ejemplo: Probar que $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{2^{n-1}+3^{n+1}}{5^n}$ es convergente y calcular su suma.

Reescribimos el término general: $\dfrac{2^{n-1}+3^{n+1}}{5^n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n + 3\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^{n-1}+3^{n+1}}{5^n} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{5}\right)^n + 3\sum_{n\geq 1}\left(\frac{3}{5}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} + 3\sum_{n\geq 0}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} = \frac{1}{5}\underbrace{\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{5}\right)^n}_{\text{Convergente}} + \frac{9}{5}\underbrace{\sum_{n\geq 0}\left(\frac{3}{5}\right)^n}_{\text{Convergente}}$$

La serie por tanto es convergente y su suma vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}+3^{n+1}}{5^n} = \frac{1}{5}\,\frac{1}{1-\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{9}{5}\,\frac{1}{1-\left(3/5\right)} = \frac{29}{6}.$$

Criterios de convergencia para series de términos no negativos

En esta sección trabajaremos con series $\sum_{n\geq 1} a_n$ con $a_n \geq 0$. Este tipo de series son crecientes, ya que sus sumas parciales S_n verifican

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n.$$

Por tanto, será convergente o divergirá a $+\infty$ dependiendo de si está mayorada o no:

$$(a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}) \quad \sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge} \iff \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\} \text{ está mayorada.}$$

Por tanto, de la convergencia de una serie podemos deducir la de muchas otras a las que esta mayora.

Criterio de comparación: Sean $\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ dos series con $a_n, b_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\exists p \in \mathbb{N}$: $a_n \leq b_n$ $\forall n \geq p$. Entonces:

$$\sum_{n\geq 1} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge.}$$

De este criterio puede deducirse en la práctica uno mucho más útil

Criterio de comparación por paso al límite Sean $\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ dos series con $a_n \geq 0$ y $b_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Supongamos que

$$\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \to L \geq 0$$

(i) Si $L > 0$, entonces $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge $\iff \sum_{n\geq 1} b_n$ converge

(ii) Si $L = 0$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

Ejemplo $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^2+3n+4}$. Vamos a compararla con la serie armónica $\sum_{n\geq 1} 1/n$.

Si $a_n = \frac{n}{n^2+3n+4}$ y $b_n = \frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, entonces

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{n}{n^2+3n+4}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{n^2+3n+4} \quad (\to 1)$$

Entonces, $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge $\iff \sum_{n\geq 1} 1/n$ converge, por lo que no es convergente.

Nota: Que la convergencia de dos sucesiones sea equivalente no significa que tengan la misma suma. Por ejemplo,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge} \iff \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} \text{ converge}, \text{ ya que } \left\{\frac{1/n(n+1)}{1/n^2}\right\} \to 1,$$

pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Se necesitan herramientas más avanzadas para probar esto).

Ejemplo La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$ converge para $p\in\mathbb{R}$, $p\geq 2$.

El caso $p=2$ acabamos de verlo. Si $p\geq 2$, entonces $n^p \geq n^2$ para todo $n\in\mathbb{N}$, luego

$$\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n\in\mathbb{N},$$

y podemos usar el primer criterio de comparación.

Teorema (Criterio de la raíz para series). Sea $a_n \geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ y supongamos que $\{\sqrt[n]{a_n}\} \to L \geq 0$.

(1) Si $L>1$, entonces $\{a_n\} \not\to 0$ y la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge a $+\infty$.

(2) Si $L<1$, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente

Ejemplo: $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2^n(n^2+1)}{n^n}$. Llamamos $a_n = \dfrac{2^n(n^2+1)}{n^n}$.

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2\sqrt[n]{n^2+1}}{n} = \frac{2}{n}\sqrt[n]{n^2+1}.$$

Podemos usar el criterio de la raíz para sucesiones para estudiar $\{\sqrt[n]{n^2+1}\}$:

Sea $x_n = n^2+1$. $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{(n+1)^2+1}{n^2+1} \longrightarrow 1$, luego $\left\{\sqrt[n]{n^2+1}\right\} \longrightarrow 1$

Como $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow 0$, el criterio de la raíz (para series) nos dice que la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente

Observación importante: Si $L=1$, el criterio <u>no decide</u>. Por ejemplo:

$$\left\{\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}\right\} \longrightarrow 1 \quad \text{y} \quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

$$\left\{\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right\} \longrightarrow 1 \quad \text{y} \quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} \longrightarrow +\infty$$

Teorema (Criterio del cociente o de D'Alembert) Sea $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y supongamos que

$$\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} \longrightarrow L \geq 0$$

(i) Si $L>1$, entonces $a_n \not\to 0$, luego la serie diverge.

(ii) Si $L<1$, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente.

Ejemplo (Hoja 3 – 6d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ Sea $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2\,(2n)!}{(2n+2)!\,(n!)^2} = \frac{(n+1)!\,(n+1)!\,\cancel{(2n)!}}{(2n+2)(2n+1)\,\cancel{2n!}\,n!\,n!} = \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} \longrightarrow \frac{1}{4}, \text{ luego la serie converge.}$$

Los criterios de la raíz y el cociente pueden parecernos equivalentes, pero no es difícil ver que el criterio de la raíz permite decidir casos en los que el criterio del cociente no lo hace:

Ejemplo $\sum_{n\geq 1} a_n$ con $a_n = \dfrac{3+(-1)^n}{2^n}$.

Usando el criterio del cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3+(-1)^{n+1})\,2^n}{2^{n+1}(3+(-1)^n)} = \frac{1}{2}\,\frac{3+(-1)^{n+1}}{3+(-1)^n} \begin{cases} \xrightarrow{\text{pares}} 1/4 \\ \xrightarrow{\text{impares}} 1 \end{cases}$$

No puede aplicarse el criterio.

Usando el de la raíz:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{3+(-1)^n} \begin{cases} \xrightarrow{\text{pares}} \frac{1}{2}\sqrt[n]{4} \longrightarrow 1/2 \\ \xrightarrow{\text{impares}} \frac{1}{2}\sqrt[n]{2} \longrightarrow 1/2 \end{cases}$$

la serie converge.

Teorema (Criterio de condensación o de Cauchy) Sea $\{a_n\}$ una sucesión <u>decreciente</u> con $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n\geq 0} 2^n a_{2^n} \text{ converge}$$

Ejemplo Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$.

Si $\alpha \leq 0$, el término general no converge a 0, por lo que la serie no es convergente.

Sea por tanto $\alpha > 0$. La sucesión $\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}$ es decreciente, ya que:

$$n^\alpha = e^{\alpha \log n} < e^{\alpha \log(n+1)} = (n+1)^\alpha \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{(n+1)^\alpha},$$

Entonces podemos estudiar $\sum_{n\geq 0} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$. Esta es la serie geométrica de razón $1/2^{\alpha-1}$, que converge cuando

$$\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$$

$$\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1 \iff 1 < 2^{\alpha-1} \iff 0 < \alpha - 1 \iff \alpha > 1$$

Criterios de convergencia para series de signo variable

Pasamos ahora al caso general de una serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ con $x_n \in \mathbb{R}$. Diremos que la serie es de signo variable cuando existan infinitos términos positivos e infinitos negativos.

- Si hay un número finito de términos negativos, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geq 0 \ \forall n \geq m$. Sabemos que la convergencia de $\sum_{n\geq 1} x_n$ equivale a la de
$$\sum_{n\geq m} x_n,$$
que es de términos no negativos, luego podemos usar los criterios ya vistos.

- Si hay un número finito de términos positivos, entonces consideramos
$$\sum_{n\geq 1} (-x_n),$$
cuya convergencia es equivalente a la de $\sum_{n\geq 1} x_n$, y se encuentra en las condiciones del punto anterior.

Cuando $\sum_{n\geq 1} x_n$ es de signo variable, resulta natural compararla con $\sum_{n\geq 1} |x_n|$, lo que nos lleva a la siguiente noción:

Definición Decimos que una serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ es absolutamente convergente cuando $\sum_{n\geq 1} |x_n|$ es convergente.

Teorema Toda serie absolutamente convergente es convergente. Más aún, si $\sum_{n\geq 1} |x_n|$ converge entonces $\sum_{n\geq 1} x_n$ converge y:
$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

El recíproco no es cierto, y para dar numerosos ejemplos de series que convergen pero no lo hacen absolutamente, introducimos las series alternadas y el criterio de Leibniz:

Definición Llamamos serie alternada a cualquier serie de la forma

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n \quad \text{o} \quad \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} a_n,$$

donde $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema (Criterio de Leibniz) Sea $\{a_n\}$ una sucesión sucesión decreciente con $\{a_n\} \to 0$. Entonces la serie alternada

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n$$

converge.

Ejemplo La sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ es decreciente y $\{\frac{1}{n}\} \to 0$, por lo que la serie armónica alternada

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

es convergente. Sin embargo, no es absolutamente convergente, ya que

$$\sum_{n\geq 1} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

es divergente.

Ejemplo $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-2)^n}{(-3)^n + n^2}$. Sea $x_n = \dfrac{(-2)^n}{(-3)^n + n^2}$ para $n \in \mathbb{N}$.

Estudiamos

$$\sum_{n\geq 1} |x_n| = \sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{|(-3)^n + n^2|}.$$

Se tiene:

$$\frac{2^n}{|(-3)^n + n^2|} \leq \frac{2^n}{\left| |(-3)^n| - n^2 \right|} = \frac{2^n}{3^n - n^2}$$

Veamos que $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{3^n - n^2}$ es convergente usando, por ejemplo, el criterio del cociente:

$$\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}-(n+1)^2} \cdot \frac{3^n - n^2}{2^n} = \frac{2(3^n-n^2)}{3^{n+1}-(n+1)^2} = \frac{2\left(1-\frac{n^2}{3^n}\right)}{3\left(1-\frac{(n+1)^2}{3^n}\right)} \longrightarrow \frac{2}{3} < 1.$$

Por tanto, $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{3^n-n^2}$ es convergente. Por comparación, también lo es $\sum_{n\geq 1} |x_n|$, lo cual significa que $\sum_{n\geq 1} x_n$ es absolutamente convergente $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ converge.

Curiosidad: convergencia incondicional

Volvemos a la pregunta que nos hicimos al principio: si $\sum_{n\geq 1} x_n$ es convergente, ¿tiene sentido identificar $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ con la suma de todos los términos de x_n?

Hemos visto que esta suma infinita verifica de una cierta manera las propiedades asociativa y distributiva, así que ahora nos preguntamos por la conmutativa en sentido general:

Pregunta: Si reordenamos los términos de una serie convergente, ¿sigue siendo convergente y su suma es la misma?

Definición Una permutación de $\mathbb{N}$ es una aplicación $P: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyectiva (si $n_1 \neq n_2 \Rightarrow P(n_1) \neq P(n_2)$ y $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}: P(n) = m$, es decir, todo natural m tiene una única preimagen $n \in \mathbb{N}$ con $\pi(n) = m$).

Dadas $\{x_n\}$ una sucesión y $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una permutación, consideramos la sucesión $\{x_{\pi(n)}\}$, que consiste en reordenar los términos de $\{x_n\}$.

Pregunta: $\sum_{n\geq 1} x_n$ converge $\overset{?}{\Rightarrow} \sum_{n\geq 1} x_{\pi(n)}$ converge

Esto motiva la siguiente definición:

Definición Una serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ se dice <u>incondicionalmente convergente</u> si $\sum_{n\geq 1} x_{\pi(n)}$ converge para toda permutación $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Toda serie incondicionalmente convergente es convergente, ya que basta con tomar $\pi(n) = n$, pero el recíproco es falso. De hecho, se tiene la siguiente equivalencia:

Teorema: Una serie de números reales $\sum_{n\geq 1} x_n$ es incondicionalmente convergente $\iff$ es absolutamente convergente. En tal caso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{para toda permutación } \pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}.$$

Esta equivalencia arroja un hecho interesante: si una serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ es convergente pero no absolutamente convergente, podemos encontrar una reordenación de sus términos para formar una serie divergente.

<u>Esta definición sí debe recordarse.</u>

Definición: Una serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ se dice condicionalmente convergente cuando $\sum_{n\geq 1} x_n$ es convergente pero $\sum_{n\geq 1} |x_n|$ no.

Peor aun: toda serie condicionalmente convergente puede reordenarse para que su suma sea cualquier valor que queramos:

Teorema (de Riemann) Sean $\sum_{n\geq 1} x_n$ una serie condicionalmente convergente y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = +\infty$ o $\alpha = -\infty$. Entonces, existe $\pi_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n\geq 1} x_n \longrightarrow \alpha.$$

Por tanto, la idea intuitiva de "sumar todos los términos de x_n" debe manejarse con cuidado cuando $\sum_{n\geq 1} x_n$ no es absolutamente convergente.