Universidad Autónoma de Madrid

Problemas resueltos de Cálculo I

Sergio Cruz Blázquez sergio.cruz@uam.es

Tema 1: Los números reales

5a) Demostrar que $2^n > n^2$ para todo $n \geqslant 5$.

Lo hacemos por inducción. Etapa base: $n=5$ $\quad 2^5 = 32 > 5^2 = 25$ ✓

Paso inductivo: suponemos que $2^n > n^2$ $\forall n \geqslant 5$, y queremos ver que $2^{n+1} > (n+1)^2$. Razonamos como sigue:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \overset{\text{hipótesis de ind.}}{<} 2^n + 2n + 1 \overset{\text{factor común } 2^n}{=} 2^n\left(1 + \frac{2n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) = (*)$$

Puesto que $2^n > n^2$, entonces $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n^2}$, y de ahí se sigue que

$$(*) = 2^n\left(1 + \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) = 2^n\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

De igual forma, como $n \geqslant 5$, entonces $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{5}$, y nos queda:

$${}^{n}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \leq 2^n \underbrace{\left(1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{25}\right)}_{<2.} < 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$$

4c) Probar que $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1}$, para $n \geqslant 2$.

Por comodidad, resumimos $P(n)$ usando sumatorios:

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Date cuenta; hacemos inducción sobre n, no k!

Etapa base: $n=2$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=2}^{3} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}. \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \end{array}\right\} \checkmark$$

Paso inductivo: Suponemos que $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, y buscamos llegar a que

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}}_{\text{Vamos a partir de esta}}$$

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

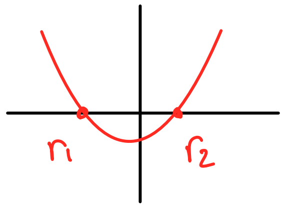
$$= \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} + \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}}_{\text{añadimos lo que necesitamos}} - \underbrace{\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}}_{\text{lo restamos para que quede igual}} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} =$$

$$= \sum_{k=n}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Sacamos el n-ésimo término} \\ \text{del sumatorio}}}{=} \frac{1}{n} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k}.$$

2c) Encontrar los valores de x que satisfacen: $|x^2-5x+6| < 2$.

Como $2>0$, podemos usar la propiedad $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$, y resolver:

$-2 < x^2 - 5x + 6 < 2$ (dos desigualdades) $\begin{cases} -2 < x^2 - 5x + 6 \iff x^2 - 5x + 8 > 0 \\ x^2 - 5x + 6 < 2 \iff x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases}$



ax^2+bx+c, $a>0$
positivo en $]-\infty, r_1[\cup]r_2, +\infty[$
negativo en $]r_1, r_2[$

x^2-5x+8 no tiene raíces reales, así que es siempre positivo, la 1ª ecuación se verifica para todo $x \in \mathbb{R}$.

$x^2-5x+4 = 0 \iff x=1$, $x=4$. Entonces, $x^2-5x+4 < 0 \iff$
$\iff x \in]1,4[$.

2b) $|x+1| \leq |x-1|$. No elevamos al cuadrado, es más fácil distinguir casos:

Si $x<-1$, $-x-1 \leq -x+1 \iff -1 \leq 1$ Se cumple siempre

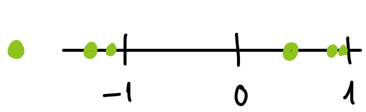
Si $-1 \leq x \leq 1$, $x+1 \leq -x+1 \iff 2x \leq 0 \iff x \leq 0$.
Los puntos $x \in [-1, 0]$ satisfacen la ecuación.

Si $x > 1$, $x+1 < x-1 \Rightarrow 1 < -1$, no se verifica nunca.

Juntando toda la información: $x \in]-\infty, 0]$.

8d) Decidir si el conjunto $\{(-1)^n - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado y calcular, si existen, su supremo y su ínfimo. (A)

Vemos cómo son los puntos del conjunto A: $\{-2, \frac{1}{2}, \frac{-4}{3}, \frac{3}{4}, \dots\}$



Esto nos hace pensar que A es acotado, su ínfimo es -2 y su supremo es 1.

Por un lado; $n \geq 1 \Rightarrow 1/n \leq 1 \Rightarrow -1/n \geq -1$. Esto nos da

$$(-1)^n - \frac{1}{n} \geq -1 - 1 = -2.$$

Como $-2 \in A$ y es una cota inferior, tenemos que $-2 = \min A$.

Veamos ahora que $1 = \sup A$. Empezamos viendo que 1 es una cota superior:

$$(-1)^n - 1/n \leq 1 - 1/n \leq 1$$

Ahora, comprobamos que $\forall \varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$1 - \varepsilon \leq (-1)^n - 1/n \leq 1$$

Por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 \leq \varepsilon$, lo que nos da $1 - \varepsilon \leq (-1)^{n_0} - 1/n_0$. Si tomamos $n_1 \in \mathbb{N}$ como un natural par $\geq n_0$, tenemos

$$1 - \varepsilon \leq (-1)^{n_1} - 1/n_1 = 1 - 1/n_1 \leq 1,$$

como queríamos.

7a) $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\} = \left\{ \frac{n-1}{n} : n \geq 2 \right\} = \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \geq 2 \right\} = A.$

Mayorado: $1 - \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces A está mayorado.

Minorado. $n \geq 2 \Rightarrow 1/n \leq 1/2 \Rightarrow -1/n \geq -1/2 \Rightarrow 1 - 1/n \geq 1 - 1/2 = 1/2.$

Como $1/2$ es una cota inferior y $1/2 \in A \Rightarrow \min A = 1/2$.

Veamos ahora que $\sup A = 1$, pero no es un máximo $(1 \notin A)$.

Dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $a \in A$ ($1 - 1/n$ con $n \geq 2$) tal que

$$1 - \varepsilon \leq 1 - 1/n \leq 1. \qquad \left(-\varepsilon \leq -1/n \Rightarrow \varepsilon \geq 1/n \Rightarrow 1/\varepsilon \leq n \right)$$

Tomamos $n \geq \max\{2, 1/\varepsilon\}$, y vemos que se tiene

$$n \geq 1/\varepsilon \Rightarrow 1/n \leq \varepsilon \Rightarrow -1/n \geq -\varepsilon \Rightarrow \underbrace{1-1/n}_{\in A.} \geq 1-\varepsilon$$

Tema 2: Sucesiones de números reales

Ejercicio 6

a) $\left\{ \dfrac{1}{n!} \right\}$ Tenemos que $n! = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1 \geq n$, lo que nos da:

$$0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$, por lo que $\left\{ \dfrac{1}{n!} \right\} \to 0$.

b) $\left\{ \dfrac{2\cos(3n) + 5\sin(n^2)}{n+1} \right\}$. Tomamos valor absoluto:

$$0 \leq \frac{|2\cos(3n) + 5\sin(n^2)|}{n+1} \leq \frac{2|\cos(3n)| + 5|\sin(n^2)|}{n+1} \leq \frac{7}{n+1} \longrightarrow 0$$

Entonces, $\left\{ \dfrac{2\cos(3n) + 5\sin(n^2)}{n+1} \right\} \longrightarrow 0.$

c) $\left\{ \dfrac{(-1)^{n+1} + 2^{-n} + \cos(n!)}{\sqrt{n}} \right\}$ Tomamos valor absoluto:

Sucesión decreciente, la podemos acotar por el primer término

$$0 \leq \left| \frac{(-1)^n + 2^{-n} + \cos(n!)}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{2 + 2^{-n}}{\sqrt{n}} = \frac{2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt{n}} \leq \frac{5/2}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0.$$

Por tanto $\left\{ \dfrac{(-1)^{n+1} + 2^{-n} + \cos(n!)}{\sqrt{n}} \right\} \longrightarrow 0$

7c) $$\sqrt{n^2+1} - n = \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}$$

$\sqrt{n^2+1} \longrightarrow +\infty$ (parcial de $\sqrt{n}$) y $n \to +\infty \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} \longrightarrow 0.$

7d) $$n\sqrt{n^2+1} - n^2 = \frac{n^2(n^2+1) - n^4}{n\sqrt{n^2+1} + n^2} = \frac{n^2}{n\sqrt{n^2+1} + n^2} =$$

Racionalizamos

dividimos por n^2 numerador y denominador

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} \longrightarrow 1/2$$

7f) $$a_n = \frac{6^n}{5^n + (-6)^n} = \frac{\frac{1}{6^n}}{\frac{1}{6^n}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n + (-1)^n}$$

$$a_{2n} = \frac{1}{1+\left(\frac{5}{6}\right)^{2n}} \longrightarrow 1$$

$$a_{2n-1} = \frac{1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1} \longrightarrow -1$$

La sucesión no converge, ya que tiene dos subsucesiones que convergen a distintos límites.

8a) Lo hacemos de dos formas:

Por un lado, $\sqrt[n]{2n^3} = e^{1/n \log(2n^3)} = e^{1/n \log 2 + 3/n \log n} =$

$$= e^{\frac{\log 2}{n}} e^{\frac{3 \log n}{n}} \longrightarrow e^0 \cdot e^0 = 1.$$

Alternativamente, si $\{a_n\} = 2n^3$, vemos que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)^3}{2n^3} \longrightarrow 1$, luego $\sqrt[n]{2n^3} \longrightarrow 1$ por el criterio de la raíz.

8f) Llamamos $a_n = \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \; (\to 1)$ y $b_n = n$

Estudiamos la sucesión $b_n(a_n - 1) = n\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 2 + \frac{1}{n} \to 2$, luego $a_n^{b_n} \longrightarrow e^2$

10. a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $c_n = a_n + b_n \leq \underbrace{A+B}_{\text{no depende de } n} \Rightarrow A+B$ es una cota superior de $\{c_n\} \Rightarrow C \leq A+B$ (C es la menor cota superior).

b) Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son crecientes $\Rightarrow \{a_n\} \to A$ y $\{b_n\} \to B$

Pero entonces $\{c_n\}$ también es creciente $\Rightarrow \{c_n\} \to C$

$(c_n = a_n + b_n \leq a_{n+1} + b_{n+1} = c_{n+1})$

Por las propiedades y la unicidad del límite,

$C \leftarrow \{c_n\} = \{a_n + b_n\} \to A+B \Rightarrow A+B = C.$

c) Falso, $\{a_n\} = (-1)^n$ $\quad \sup a_n = 1$

$\{b_n\} = (-1)^{n+1}$ $\quad \sup b_n = 1$

$\{a_n + b_n\} = \{0\}$ $\quad \sup c_n = 0.$

13. $a_0 = 1, \; a_1 = 2, \; a_n = \frac{3}{2} a_{n-1} - \frac{1}{2} a_{n-2}$ para cada $n \geq 2.$

a) Demostremos por inducción que $\{a_n\}$ es creciente de la siguiente manera:

Etapa base: $a_0 < a_1$ $\quad (1 < 2$ ✓$)$

Paso inductivo: Suponiendo que $\underline{a_{n-1} < a_n}$ para algún n, probemos que $a_n < a_{n+1}$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3}{2} a_n - \frac{1}{2} a_{n-1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1}) > 0$$

b) Comprobemos ahora que $a_n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hacemos una inducción empezando en $n = 2$:

<u>Etapa base</u>: $a_0 = 1 < 3, \; a_1 = 2 < 3, \; a_2 = \frac{5}{2} < 3.$ ✓

<u>Paso inductivo</u>: Suponiendo que $a_n < 3$ para algún $n \geq 2$, veamos que $a_{n+1} < 3$.

$$a_{n+1} = \frac{3}{2} a_n - \frac{1}{2} a_{n-1} < \frac{9}{2} - \frac{1}{2} a_{n-1}$$

Como $\{a_n\}$ es creciente, $a_{n-1} \geq a_1 = 2 \quad \forall n \geq 2$, por lo que $-a_n \leq 2$. Esto nos da:

$$a_{n+1} < \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{7}{2} \quad (= 3'5)$$

No importa cuanto aumentemos la etapa base, siempre nos da una cota estríctamente mayor a 3...

(Es fácil demostrar otras cotas como que $a_n < 5$, pero calcular el límite es muy complicado usando la ley de recurrencia).

12. Sea $1 < t \leq 4$, y sea $\{x_n\}$ la sucesión definida mediante

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{t}{x_n}\right) = \frac{1}{2} \frac{x_n^2 + t}{x_n}$$

a) $\sqrt{t} \leq x_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Empezamos con la cota superior:

Lo hacemos por inducción, teniendo en cuenta que

<u>Etapa base</u>: $\sqrt{t} \leq \sqrt{4} = 2 = x_1 \leq 2$ ✓

<u>Paso inductivo</u>: Supongamos que $\sqrt{t} \leq x_n \leq 2$ para algún $n \in \mathbb{N}$, y comprobemos que $\sqrt{t} \leq x_{n+1} \leq 2$.

Por un lado, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{t}{2x_n} \leq 1 + \dfrac{t}{2\sqrt{t}} = 1 + \dfrac{\sqrt{t}}{2} \leq 2.$

Por otro lado, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{t}{2x_n} \geq \dfrac{\sqrt{t}}{2} + \dfrac{t}{4} \geq \dfrac{\sqrt{t}}{2} + \dfrac{\sqrt{t}}{2} = \sqrt{t},$

donde hemos usado que $1 < t \Rightarrow t < t^2 \Rightarrow \sqrt{t} < t$.

Alternatívamente, podemos usar que $(a+b)^2 \geq 4ab$ para tener que

$$x_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{t}{x_n}\right)^2 \geq t \Rightarrow x_{n+1} \geq \sqrt{t},$$

y demostrar a continuación que $x_{n+1} \leq 2$ usando esa información.

Veamos ahora que $\{x_n\}$ es decreciente ($x_{n+1} \leq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$). Para esto, basta tener en cuenta que $0 < \sqrt{t} < x_n \Rightarrow t < x_n^2$.

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{t}{x_n}\right) \leq \frac{1}{2}(x_n + x_n) = x_n.$$

Como $\{x_n\}$ está minorada y es decreciente, entonces $\{x_n\} \to L$.

Pasando al límite la identidad $x_{n+1} = \left(x_n + \frac{t}{x_n}\right)$ tenemos

$$2L = L + \frac{t}{L} \Rightarrow L^2 = t \Rightarrow L = \sqrt{t}, \text{ o } L = -\sqrt{t}.$$

Como teníamos $x_n \geq \sqrt{t} \ \forall n \in \mathbb{N}$, ha de tenerse necesariamente

$$\boxed{L = \sqrt{t}}$$

Tema 3 Series de números reales

2a) $\sum_{n \geq 2} x_n$, $x_n = \log \frac{n}{n+1}$

$$x_n = \log \frac{n}{n+1} = \log n - \log(n+1) = -\log(n+1) - (-\log n)$$

Entonces $\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \left(-\log(k+1) - (-\log k)\right) = -\log(n+1)$.

Por tanto, $\sum_{n \geq 1} \log \frac{n}{n+1} \longrightarrow -\infty$.

2b) $\sum_{n \geq 1} x_n$, $x_n = \frac{1}{n(n+2)}$. $x_n = \frac{1/2}{n} + \frac{-1/2}{n+2} = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n}\right)$

Entonces,

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{-1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k}\right) = \frac{-1}{2} \sum_{k=1}^{n} (y_{k+2} - y_k),$$

siendo

$$y_k = \frac{1}{k} \quad \forall k \geq 1.$$

Vemos que $\sum_{k=1}^{n} (y_{k+2} - y_k) = y_3 - y_1 + y_4 - y_2 + y_5 - y_3 + \cdots + y_{n+1} - y_{n-1}$
$+ y_{n+2} - y_n = y_{n+2} + y_{n+1} - y_1 - y_2.$

Entonces,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+2)} = \left\{ \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} - 1 - \frac{1}{2} \right) \right\} \to \frac{3}{4}.$$

5 d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}-1}{3n^2+4}$ Observamos que el término general

Asintótico (comportamiento parecido en ∞)

$$a_n = \frac{\sqrt{n}-1}{3n^2+4} \approx \frac{1}{n^{3/2}},$$

así que vamos a usar el criterio de comparación por paso al límite con $b_n = 1/n^{3/2}$.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(\sqrt{n}-1)\, n^{3/2}}{3n^2+4} = \frac{n^2 - n^{3/2}}{3n^2-4} \longrightarrow 1/3.$$

Por el criterio de comparación por paso al límite, $\sum_{n\geq 1} x_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} 1/n^{3/2}$ converge, que sí lo hace porque $3/2 > 1$.

7a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha (n+1)}$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

Llamamos $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha (n+1)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Claramente $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Comparamos con la serie $\sum_{n\geq 1} b_n$, $b_n = \dfrac{1}{n^{\alpha+1}} > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1} + n^\alpha} = \frac{1}{1 + 1/n} \longrightarrow 1.$$ Por el criterio de comparación por paso al límite,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha (n+1)} \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \text{ converge} \Leftrightarrow 1+\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > 0.$$

7b) $$\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\alpha} = \sum_{n\geq 1} \frac{\left(\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\right)^{\alpha}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^{\alpha}} =$$

$$= \sum_{n\geq 1} \underbrace{\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^{\alpha}}}_{a_n} .$$ Comparamos con $\sum_{n\geq 1} \underbrace{\frac{1}{n^{\alpha/2}}}_{b_n}$.

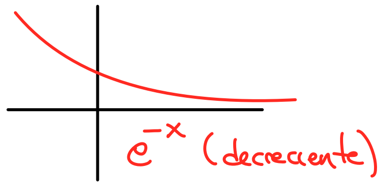
$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{\alpha/2}}{\left((n+1)^{1/2}+n^{1/2}\right)^{\alpha}} = \frac{1}{\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1/2}+1\right)^{\alpha}} \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} > 0$$

Entonces, la serie converge $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$ converge $\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} > 1$

$\Leftrightarrow \alpha > 2$.

7c) $\sum_{n\geq 1} a_n, \quad a_n = \frac{e^{\alpha n}}{n^2+1}$. Si $\alpha > 0$, $\{a_n\} \not\to 0$, luego la serie no converge

Si $\alpha < 0$, entonces $e^{\alpha n} < e^{0} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,



luego $$\frac{e^{\alpha n}}{n^2+1} < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}.$$

La serie $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ converge, luego $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{\alpha n}}{n^2+1}$ converge por comparación.

9a) $\sum_{n\geq 0} x_n, \quad x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$. $\{x_n\} \not\to 0$, luego la serie no converge.

9b) $\sum_{n\geq 3} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2-4}}$ Veamos en primer lugar que la serie no converge absolutamente:

$$\sum_{n\geq 3} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2-4}} \right| = \sum_{n\geq 3} \frac{1}{\sqrt{n^2-4}} .$$ Comparamos con $\sum_{n\geq 1} 1/n$.

$$\frac{1/\sqrt{n^2-4}}{1/n} = \frac{n}{\sqrt{n^2-4}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{n^2}}} \longrightarrow 1, \text{ luego } \sum_{n\geq 3} \frac{1}{\sqrt{n^2-4}} \text{ no converge}$$

porque $\sum_{n\geq 1} 1/n$ no converge

Veamos que sí es convergente por el criterio de Leibniz.

$\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2-4}}\right\} \longrightarrow 0$, así que solo necesitamos ver que es decreciente.

Sea $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-4}}$ $n \in \mathbb{N}$. De forma manifiesta tenemos:

$0 < n < n+1 \Rightarrow n^2 < (n+1)^2 \Rightarrow n^2-4 < (n+1)^2-4$. Como $n \geq 3$, entonces

$$0 < n^2-4 < (n+1)^2-4 \Rightarrow \sqrt{n^2-4} < \sqrt{(n+1)^2-4} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2-4}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2-4}}$$

$\Rightarrow a_n > a_{n+1}$ $\forall n \geq 3$.

10. Sea $a_n \geq 0$ con $\{a_n\} \to L > 1$. Probar que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_1 \cdots a_n}$ es convergente.

Sea $A_n = \frac{1}{a_1 \cdots a_n} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} a_k}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Aplicamos el criterio del cociente:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{a_1 \cdots a_n}{a_1 \cdots a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1}} \longrightarrow \frac{1}{L} < 1$$

entonces la serie converge.

11. a) Si $a_n > 0$ y $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n^2$ converge

Verdadero. Si $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge $\Rightarrow \{a_n\} \to 0 \Rightarrow$ tomando $\varepsilon = 1$ encontramos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < 1$ para $n \geq n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n^2 < a_n \ \forall n \geq n_0$. Por comparación, $\sum_{n\geq 1} a_n^2$ converge.

b) $a_n > 0$ y $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ diverge.

Verdadero; $\frac{1}{a_n} \to +\infty$ luego no tiende a cero.

c) $\{a_n\} \to 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n$ converge

Falso: $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\} \to 0$ pero $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

d) $a_n > 0$, $\{a_n\}$ monótona y no acotada $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n^n}$ converge

$\{a_n\} \to +\infty \Rightarrow \left\{ \frac{1}{a_n} \right\} \to 0$. Usamos el criterio de la raíz:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_n^n}} = \frac{1}{a_n} \to 0 \Rightarrow \text{la serie converge.}$$

e) $a_n > 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \left(\frac{a_n}{2a_n+1} \right)^n$ converge

Verdadero; $a_n < a_n + 1/2 = \frac{1}{2}(2a_n+1) \Rightarrow \frac{a_n}{2a_n+1} < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \left(\frac{a_n}{2a_n+1} \right)^n < \left(\frac{1}{2} \right)^n$, por lo tanto converge por comparación con

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$