Universidad Autónoma de Madrid

Apuntes de Cálculo I

Año académico 2025–2026

Ana Primo ana.primo@uam.es
Sergio Cruz sergio.cruz@uam.es

Índice general

Capítulo 1

Los números reales y sus propiedades

Comprender el conjunto de los números reales es el primer paso esencial en el estudio del Análisis Matemático. Lo presentaremos a partir de sus subconjuntos más relevantes, sin dar una definición concreta de *número real*, porque lo importante no es tanto qué es un real como qué propiedades cumple el conjunto de los reales. En este primer tema estudiaremos su estructura y propiedades fundamentales, que serán conceptos matemáticos básicos para los capítulos posteriores.

1.1 Subconjuntos notables. Suma y producto de números reales.

El ejemplo más sencillo de números reales son los números que utilizamos para contar: $1, 2, 3, \ldots$. Llamamos a este conjunto **números naturales**, y lo denotaremos mediante $\mathbb{N}$. Distinguimos dos tipos de números naturales: aquellos que pueden escribirse de la forma $2k$, con $k \in \mathbb{N}$, reciben el nombre de *pares*, mientras que los de la forma $2k - 1$ se llaman *impares*.

A partir de esta simple definición podemos deducir una primera propiedad de los números naturales.

Proposición 1.1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces, n es par $\iff$ n^2 es par. Equivalentemente, n es impar $\iff$ n^2 es impar.

Demostración

Por un lado, es fácil ver que los números pares tienen cuadrado par, y los impares tienen cuadrado impar:

$$(2k)^2 = 4k^2 = 2\,(2k^2), \qquad (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2\,(2k^2 - 2k + 1) - 1.$$

Para obtener el recíproco basta observar que un número natural no puede ser par e impar a la vez, por lo que la paridad de n^2 determina inequívocamente la de n. ■

Nota: En disciplinas como la lógica, la teoría de conjuntos y la informática es común definir $\mathbb{N} = \{\mathbf{0}, 1, 2, 3, \ldots\}$. Ambas convenciones son válidas; lo importante es especificar cuál se está usando. En este curso optamos por no considerar el cero como natural, ya que simplifica la aritmética elemental y evita excepciones innecesarias.

Los números naturales presentan algunas deficiencias. Por ejemplo, no son un conjunto cerrado para operaciones aritméticas elementales como la *resta* o la *división*. Parte de estas se remedian extendiendo el sistema al conjunto de los **números enteros**, formado por los números naturales con signo y el cero:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Curiosidad: $\mathbb{Z}$ viene del alemán *Zahl*, "número".

Un sistema más amplio de números se obtiene tomando cocientes de enteros, es decir, números de la forma $\frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. Estos son los denominados **números racionales**, y el conjunto de todos ellos se denota por $\mathbb{Q}$ (de "*quotient*", cociente).

Calculando la expresión decimal de un número racional dividiendo el numerador por el denominador, se obtiene un número entero o un número decimal exacto o periódico: 0.2, -0.35, $0.\overline{3} = 0.333\dots$, $4.99\overline{89} = 4.99898989\dots$

También es cierto el recíproco: cualquier número decimal de este tipo puede escribirse como una fracción de números enteros.

$$2.3\overline{1} = \frac{231 - 23}{90} = \frac{104}{45}$$

En el conjunto $\mathbb{Q}$ tenemos una operación llamada *suma*, que a cada par (a, b) de números racionales asocia un único número racional, la suma de a con b, indicada por $a + b$. Asimismo, disponemos de una segunda operación llamada *producto*, que a cada par (a, b) asocia un único número racional, el producto de a con b, indicado por $a \cdot b$ o, simplemente, ab. Estas operaciones tienen las siguientes propiedades:

Propiedades de la suma. Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{Q}$ se cumplen:

(P1) Propiedad asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

(P2) Propiedad conmutativa: $a + b = b + a$.

(P3) Existencia de elemento neutro: $a + 0 = 0 + a = a$.

(P4) Existencia de elemento opuesto: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Propiedades del producto. Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{Q}$ se cumplen:

(P5) Propiedad asociativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

(P6) Propiedad conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$.

(P7) Existencia de elemento unidad: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (con $1 \neq 0$).

(P8) Existencia de elemento inverso: si $a \neq 0$, entonces $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

(P9) Propiedad distributiva respecto de la suma: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Es fácil comprobar que los elementos neutros de la suma y del producto son únicos. Además, para cada número racional el elemento opuesto es único y, si es distinto de cero, también el inverso. Dado que $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{Q}$, **el 0 no tiene inverso multiplicativo** y $\frac{1}{0}$ **no tiene sentido**.

Verificar cada una de estas afirmaciones es un buen ejercicio para el lector.

Podemos comprobar fácilmente que $\mathbb{Q}$ es un conjunto cerrado para la suma y el producto, esto es, el resultado de sumas y productos de números racionales es también un número racional.

Proposición 1.2. Si $a, b \in \mathbb{Q}$, entonces $a + b \in \mathbb{Q}$, $a \cdot b \in \mathbb{Q}$, y si $b \neq 0$, entonces $a/b \in \mathbb{Q}$.

Demostración

Escribiendo $a = \frac{p}{q}$ y $b = \frac{r}{s}$, con $p, r \in \mathbb{Z}$ y $q, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, se tiene

$$a + b = \frac{ps + rq}{qs} \in \mathbb{Q}, \qquad ab = \frac{pr}{qs} \in \mathbb{Q}.$$

Además, si $r \neq 0$ ($q \neq 0$),

$$\frac{a}{b} = \frac{p/q}{r/s} = \frac{ps}{qr} \in \mathbb{Q}.$$

En todos los pasos hemos usado que $\mathbb{Z}$ es cerrado para la suma y el producto. ■

Lectura en clave algebraica:

- En $\mathbb{N}$, la suma no tiene neutro ni opuestos (fallan (P3) y (P4)), y con el producto no hay inversos multiplicativos (falla (P8)); por eso $(\mathbb{N}, +)$ es un *semigrupo conmutativo.*
- En $\mathbb{Z}$, con $+$ y $\cdot$, obtenemos un *anillo conmutativo con unidad* (de hecho, un *dominio de integridad*); no es un cuerpo porque (P8) falla salvo para ± 1.
- En $\mathbb{Q}$, con $+$ y $\cdot$, sí tenemos un *cuerpo*; más aún, es un *cuerpo ordenado* (lo veremos enseguida), aunque no es *completo.*

Desde la Antigüedad, la escuela pitagórica ya constató esta falta de completitud de $\mathbb{Q}$, o existencia de "huecos", al mostrar que la diagonal de un cuadrado de lado 1 tiene longitud $\sqrt{2}$, que no es un número racional.

¡Atención! Si $a > 0$, a tiene dos raíces cuadradas: $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$, pero $\sqrt{a}$ denota siempre la raíz positiva. Por ejemplo, 4 tiene dos raíces cuadradas: -2 y 2, pero $\sqrt{4} = 2$.
¡Escribir $\sqrt{4} = \pm 2$ **no es correcto**!

Proposición 1.3. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Demostración

Supongamos por reducción al absurdo que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, y por tanto puede escribirse como una fracción irreducible $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ y $\mathrm{mcd}(p, q) = 1$.

Entonces $p^2 = 2q^2$. Usando la Proposición 1.1 obtenemos que p también es par, lo que nos permite escribir $p = 2m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Sustituyendo, $4m^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2$, así que q también es par. Por tanto p y q son ambos pares, lo cual contradice que $\mathrm{mcd}(p, q) = 1$. Por tanto, $\sqrt{2}$ no es racional. ■

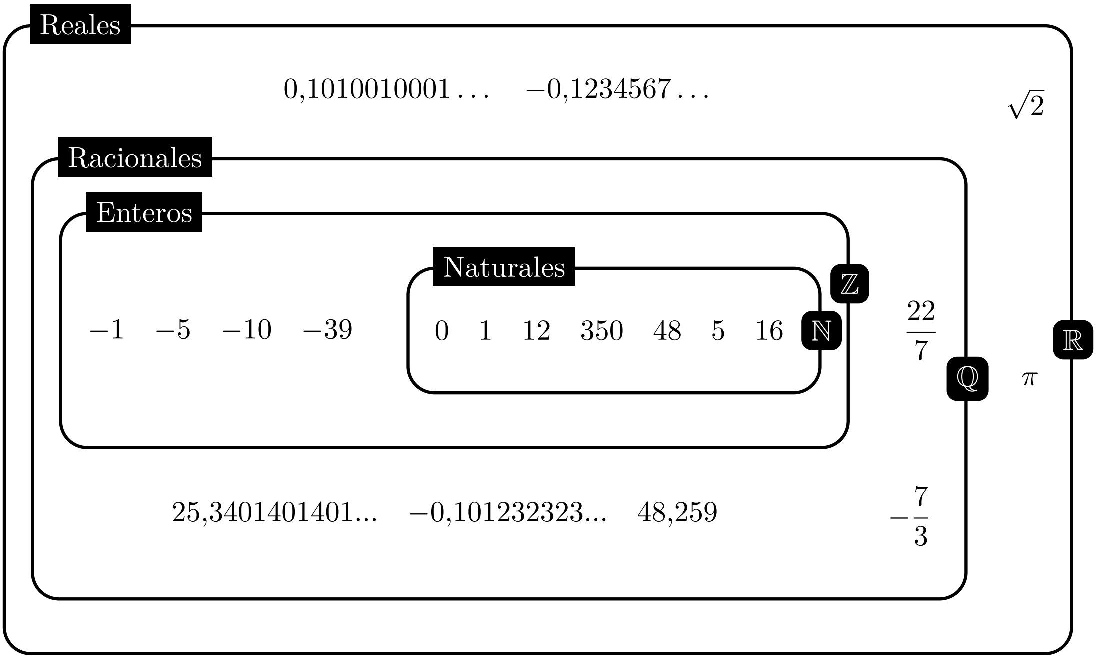
El conjunto de los **números irracionales**, $\mathbb{I}$, está compuesto por los números que no son racionales. Dicho de otra forma, son los números que no pueden escribirse como fracciones de números enteros. Su expresión decimal es infinita y no periódica: $0{,}246810\ldots$, $\pi = 3{,}1415926\ldots$, $e = 2{,}7182818\ldots$, $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$.

En general, si $n \in \mathbb{N}$ no es un cuadrado perfecto, entonces $\sqrt{n}$ es irracional. Además, si $a \in \mathbb{Q}$ y $b \in \mathbb{I}$, entonces $a + b$ es irracional y ab también (si $a \neq 0$). Por tanto, números como $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $1 - \sqrt{3}$, $-\sqrt{7}$, $2\sqrt{2}$, $\ldots$ son irracionales.

Esto nos permite ver al conjunto de los **números reales** como la unión (disjunta) de los números racionales y los irracionales:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

> **Marco algebraico**: El sistema $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ tiene estructura de *cuerpo conmutativo* (verifica las 9 propiedades vistas anteriormente y 3 adicionales que veremos a continuación) y, además, es *completo*.



En la Proposición 1.3 vimos que la ecuación $x^2 = 2$ no admite soluciones en $\mathbb{Q}$; de forma equivalente, el polinomio $x^2 - 2$ carece de raíces racionales.

Este ejemplo sugiere distinguir, dentro de $\mathbb{R}$, aquellos números que sí pueden aparecer como ceros de polinomios con coeficientes enteros. Definimos el conjunto de los **números algebraicos** por

$$\mathbb{A} = \{\, x \in \mathbb{R} : \ \exists\, p \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\} \text{ tal que } p(x) = 0 \,\}.$$

De forma manifiesta se tiene $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{R}$.

El complemento $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$, necesariamente contenido en $\mathbb{I}$, recibe el nombre de **números trascendentes**. Algunos ejemplos famosos son $\pi = 3.1415\ldots$ y $e = 2.7182\ldots$, aunque demostrarlo requiere herramientas que veremos en temas sucesivos. Como veremos, el estudio de $\mathbb{R}$ está íntimamente ligado al concepto de *límite*.

¡Ojo! No todos los polinomios admiten raíces reales. Por ejemplo, no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + 1 = 0$. Para resolver esa ecuación hay que salir de $\mathbb{R}$ y considerar los *números complejos* $\mathbb{C}$, que no forman parte del temario de este curso.

Por otra parte, los polinomios con coeficientes enteros de grado impar proporcionan ejemplos sencillos de números algebraicos. Esto es una consecuencia del siguiente resultado:

Proposición 1.4. Si $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tiene *grado impar*, entonces posee al menos una raíz real.

Idea de la demostración

Las raíces no reales de un polinomio con coeficientes reales aparecen en *pares conjugados*. Por tanto, un polinomio de grado impar no puede tener todas sus raíces no reales; queda al menos una real.

Por ejemplo, la ecuación $x^5 + x + 1 = 0$ tiene al menos una raíz real. ■

1.2 Orden de los números reales.

Además de estas propiedades básicas de la suma y el producto, presentaremos ahora las relativas a las *desigualdades*, que nos permiten comparar números reales y que desempeñan un papel fundamental en el cálculo infinitesimal. Con el propósito de simplificar las ideas, nos restringimos en primer lugar a los números racionales.

Definición 1.5. En $\mathbb{Q}$, definimos el **conjunto de números positivos** como

$$P = \left\{ \frac{p}{q} \ : \ p, q \in \mathbb{N} \text{ o bien } -p, -q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Para $a \in \mathbb{Q}$, escribimos $a \in P \iff a > 0$.

Con esta noción, definimos una **relación de orden** en $\mathbb{Q}$ mediante P:

$$\begin{aligned}
a < b &\iff b - a \in P, \\
a > b &\iff b < a, \\
a \leq b &\iff b - a \in P \cup \{0\} \quad (\text{equivalentemente, } a < b \text{ o } a = b), \\
a \geq b &\iff a > b \text{ o } a = b \quad (\text{equivalentemente, } a - b \in P \cup \{0\}).
\end{aligned}$$

Propiedades de P.

(P10) Ley de tricotomía: para cada $a \in \mathbb{Q}$ se verifica exactamente una de las siguientes alternativas: $a = 0$, $a \in P$ o $-a \in P$.

(P11) Cerradura (o estabilidad) de la suma: si $a, b \in P$, entonces $a + b \in P$.

(P12) Cerradura (o estabilidad) del producto: si $a, b \in P$, entonces $a \cdot b \in P$.

De las propiedades de P se deducen fácilmente las reglas básicas para operar con desigualdades. Trabajaremos con la relación binaria $\leq$, que es una *relación de orden* porque cumple las siguientes propiedades para todo $a, b, c \in \mathbb{Q}$:

- *Reflexiva:* $a \leq a$.
- *Antisimétrica:* si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

- *Transitiva:* si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

Demostración de la transitividad

Por hipótesis, $b - a \in P \cup \{0\}$ y $c - b \in P \cup \{0\}$. Sumando y restando b, se tiene $c - a = (c - b) + (b - a) \in P \cup \{0\}$, ya que si ambos son positivos la suma es positiva por la propiedad (P11), y si al menos uno de los dos sumandos es cero entonces el resultado se tiene trivialmente.

Verificar las otras dos propiedades se propone como ejercicio para el lector. ■

Nótese que la relación $<$ es transitiva pero no reflexiva. Además, $\leq$ es un *orden total*: dados $a, b \in \mathbb{Q}$ cualesquiera, siempre ocurre $a \leq b$ o bien $b \leq a$.

Las consecuencias que usaremos con más frecuencia son:

$$
\begin{aligned}
a \leq b &\implies a + c \leq b + c, \\
a \leq b, \quad 0 \leq c &\implies a \cdot c \leq b \cdot c, \\
a \leq b &\implies -a \geq -b, \\
0 < a \leq b &\implies \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 1.6 (Para el lector)**.** Si $a < b$ y $b < 0$, entonces $a < 0$ y, por tanto, $ab > 0$.

Solución

De $a < b$ y $b < 0$ se sigue $a < b < 0$, luego $a < 0$. Así, $-a \in P$ y $-b \in P$; por la cerradura del producto en P, $(-a)(-b) \in P$, es decir, $ab > 0$. ■

1.3 Valor absoluto.

Definición 1.7. Sea $a \in \mathbb{R}$. Definimos el valor absoluto de a mediante la fórmula

$$
|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0, \end{cases} \qquad \text{o equivalentemente} \qquad |a| = \sqrt{a^2}.
$$

En particular, $|a| \in P \cup \{0\}$ y se cumple trivialmente $a \leq |a|$.

Propiedades del valor absoluto. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se cumplen:

(1) $|a| \geq 0$ y $|a| = 0 \iff a = 0$; además $|-a| = |a|$ y $|a|^2 = a^2$.

(2) $|a \cdot b| = |a|\,|b|$ y, si $b \neq 0$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

(3)

$$
\text{Para } x \in \mathbb{R}: \quad \begin{cases} |x| \leq a & \iff -a \leq x \leq a, \\ |x| > a & \iff x > a \text{ o } x < -a. \end{cases}
$$

Representación en la recta real (para $a > 0$):

(4) **Desigualdad triangular:** $|a + b| \leq |a| + |b|$, y la igualdad se da si, y solo si, a y b tienen el mismo signo o uno de ellos es cero.

Como paso previo a la demostración de la desigualdad triangular, necesitamos el siguiente resultado:

Lema 1.8. Si $x, y \geq 0$, entonces $x^2 \geq y^2 \Rightarrow x \geq y$.

Demostración

$x^2 \geq y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow (x+y)(x-y) \geq 0$. Multiplicamos la anterior desigualdad por $(x+y)^{-1}$, que es una cantidad positiva (¿por qué?), para obtener $x - y \geq 0$, como queríamos demostrar. ■

Demostración de la desigualdad triangular

Como $|a + b| = \sqrt{(a+b)^2}$, es más sencillo comparar los cuadrados:

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \ \leq \ a^2 + b^2 + 2\,|a|\,|b| = (|a| + |b|)^2.$$

Usando el Lema 1.8 concluimos $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Supongamos ahora que se da la igualdad, esto es, $|a + b| = |a| + |b|$.
Elevando al cuadrado y simplificando, llegamos a que

$$ab = |a|\,|b| \quad \Longleftrightarrow \quad ab \geq 0,$$

es decir, a y b tienen el mismo signo (o alguno de ellos es 0). El recíproco se puede verificar de forma inmediata.

■

(5) **Desigualdad triangular inversa:** $\big|\, |a| - |b| \,\big| \ \leq \ |a - b|$.

Demostración

Por la desigualdad triangular,

$$|a| = |a + b - b| \leq |a - b| + |b| \quad \Rightarrow \quad |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Intercambiando a y b,

$$|b| = |b + a - a| \leq |a - b| + |a| \quad \Rightarrow \quad |b| - |a| \leq |a - b|.$$

Es decir, $-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$, lo que equivale a $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$. ■

1.4 Supremo e ínfimo. Postulado del continuo.

Definición 1.9. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no vacío y $x \in \mathbb{R}$.

- Diremos que x es una *cota superior* de A si $a \leq x$ para todo $a \in A$.
- Diremos que x es una *cota inferior* de A si $a \geq x$ para todo $a \in A$.
- Si A tiene alguna cota inferior (resp. superior), diremos que está *acotado inferiormente* o *minorado* (resp. *acotado superiormente* o *mayorado*). Si se satisfacen ambas, diremos que A es *acotado*.

Definición 1.10. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no vacío y mayorado. Llamamos *supremo* de A a la menor de sus cotas superiores. Equivalentemente, $x = \sup A$ si y sólo si:

(1) x es cota superior de A;

(2) para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $x - \varepsilon \leq a \leq x$ (*cualquier cantidad por debajo de x deja de ser cota superior*).

Si además $\sup A \in A$, entonces $\sup A = \max A$ y se llama *máximo* de A.

De forma análoga, definimos:

Definición 1.11. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no vacío y minorado. Llamamos *ínfimo* de $A \subset \mathbb{R}$ a la mayor de sus cotas inferiores. Equivalentemente, $x = \inf A$ si y sólo si:

(1) x es cota *inferior* de A;

(2) para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $x \leq a \leq x + \varepsilon$.

Si además $x \in A$, recibe el nombre de *mínimo* de A, y se denota por $\min A$.

Cuando encontramos un mayorante o minorante dentro de un conjunto, la condición (2) de supremo e ínfimo se verifica trivialmente con a igual a dicha cota. Esto nos proporciona el siguiente atajo para encontrar, si los hay, el máximo y el mínimo de un conjunto A.

Proposición 1.12. Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Si $\boxed{x \in A}$ es una cota superior (resp. cota inferior) de A, entonces $x = \max A$ (resp. $x = \min A$).

Postulado de continuidad o Axioma del continuo o de Dedekind

(P13) Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y mayorado (resp. minorado), entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x = \sup A$ (resp. $x = \inf A$). Dicho de otro modo, el conjunto de los mayorantes de A (resp. minorantes) tiene mínimo (resp. máximo).

Podemos convencernos de forma sencilla que $\mathbb{Q}$ no satisface la propiedad (P13). Consideramos el conjunto A formado por las aproximaciones decimales sucesivas de $\sqrt{2}$:

$$A = \{1, 1.4, 1.41, 1.414, \dots\}.$$

Se cumple $A \subset \mathbb{Q}$ y $a \leq 2$ para todo $a \in A$, es decir, A está mayorado en $\mathbb{Q}$. Sin embargo, podemos ver que no admite supremo racional.

Demostración

Supongamos que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $\sup A = q$. Por construcción, $a \leq \sqrt{2}$ para todo $a \in A$, por lo tanto $q < \sqrt{2}$ por definición de supremo (la igualdad no puede darse ya que $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ y $q \in \mathbb{Q}$). Entonces, existe una primera posición decimal $k \in \mathbb{N}$ de forma que q es menor que la truncatura de $\sqrt{2}$ hasta el $k-$ésimo decimal, esto es,

$$q < \frac{\lfloor 10^k \cdot \sqrt{2} \rfloor}{10^k} = 1.\underbrace{414213\ldots7}_{k \text{ decimales}} \in A \quad (\lfloor x \rfloor \equiv \text{parte entera de } x).$$

lo que contradice que q sea el supremo de A. ■

Proposición 1.13. (Propiedad arquimediana) $\mathbb{N}$ no está mayorado en $\mathbb{R}$. Equivalentemente, dado $x \in \mathbb{R}$ puede encontrarse $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.

Demostración

Supongamos que $\sup \mathbb{N} = z \in \mathbb{R}$. Entonces, $z - 1$ no es un mayorante de $\mathbb{N}$, lo que nos da un $m \in \mathbb{N}$ tal que $z - 1 \leq m < z$. Como entre $z - 1$ y z puede haber a lo sumo un número natural, deducimos que $n \leq m$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que m sería un máximo de $\mathbb{N}$, lo cual es imposible, ya que $m < m + 1 \in \mathbb{N}$. ■

Ejemplo

Problema. Sea $A = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$. Veamos que A es acotado y calculemos $\sup A$ e $\inf A$.

Resolución. Por un lado, $0 < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, por lo que A está minorado e $\inf A \geq 0$. Por otro lado, como se tiene $n \geq 1$ y $m \geq 1$, entonces

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq 2,$$

por lo que A está mayorado y $\sup A \leq 2$. Dado que $2 \in A$ (para $n = m = 1$), entonces 2 es el máximo de A por la Proposición 1.12.

Veamos ahora que $\inf A = 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Debemos encontrar $a \in A$ tal que

$$0 \leq a = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Por la propiedad arquimediana de $\mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{2}{\varepsilon}$, lo que nos da $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, tomando $a = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ se verifica que

$$0 < a < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

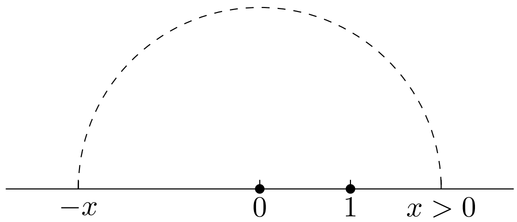
Así, $\inf A = 0$.

Hemos visto que un conjunto de racionales acotado superiormente (resp. inferiormente) no tiene por qué tener sup (resp. ínf) *racional*. En $\mathbb{R}$, en cambio, esto siempre ocurre. Esta diferencia caracteriza a los reales y se resume diciendo que $\mathbb{R}$ es *completo*.

Definición 1.14. Por extensión de estas propiedades intuitivas de $\mathbb{Q}$, podemos definir $\mathbb{R}$ como un conjunto numérico provisto de operaciones internas $+$ y $\cdot$ que satisfacen (P1–P9), junto con un subconjunto $\mathbb{R}_+$ (que juega el papel de P) que verifica (P10–P12), y que, además, cumple el postulado de continuidad (P13).

Claramente, $\mathbb{R}$ así definido no es vacío, pues $0, 1 \in \mathbb{R}$ y a partir de estos y las operaciones elementales comentadas anteriormente pueden construirse infinitos elementos ($\mathbb{Q}$).

El axioma del continuo nos permite identificar los números reales $\mathbb{R}$ con los puntos de una recta. Para visualizar esto, dibujamos una recta horizontal y fijamos el 0 en un punto que llamaremos *origen.* Asociamos el 1 con otro punto a su derecha y tomamos el segmento de extremos 0 y 1 como unidad de longitud. Así, todo $x > 0$ se sitúa a la derecha del origen a distancia x, mientras que su opuesto $-x$ es el punto simétrico respecto del origen.



Adoptando este punto de vista, se tiene que el valor absoluto mide la distancia entre dos puntos:

$$d(a, b) = |a - b| = |b - a| \geq 0.$$

Esta noción conduce de forma natural al concepto de *intervalo*: subconjuntos de $\mathbb{R}$ que, en la representación geométrica de la recta real, se identifican con segmentos o semirrectas, con extremos abiertos o cerrados según el caso.

Definición 1.15. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Se definen

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{\, x \in \mathbb{R} : a < x < b \,\} && \text{(intervalo abierto)},\\
[a, b] &= \{\, x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \,\} && \text{(intervalo cerrado)},\\
(a, b] &= \{\, x \in \mathbb{R} : a < x \leq b \,\} && \text{(semiabierto o semicerrado)},\\
[a, b) &= \{\, x \in \mathbb{R} : a \leq x < b \,\} && \text{(semiabierto o semicerrado)}.\\
(-\infty, a) &= \{\, x \in \mathbb{R} : x < a \,\} && \text{(semirrecta abierta)},\\
(-\infty, a] &= \{\, x \in \mathbb{R} : x \leq a \,\} && \text{(semirrecta cerrada)},\\
(a, +\infty) &= \{\, x \in \mathbb{R} : x > a \,\} && \text{(semirrecta abierta)},\\
[a, +\infty) &= \{\, x \in \mathbb{R} : x \geq a \,\} && \text{(semirrecta cerrada)},
\end{aligned}$$

La demostración de la siguiente propiedad, que relaciona la noción de distancia introducida anteriormente con los intervalos recién definidos, se deja como ejercicio para el lector:

Proposición 1.16. Sean $x, a \in \mathbb{R}$ y $r > 0$. Se tiene

$$|x - a| < r \iff x \in (a - r, a + r), \qquad |x - a| \leq r \iff x \in [a - r, a + r].$$

Convención de notación: Cuando pueda haber ambigüedad con los paréntesis (por ejemplo, si (x, y) denota pares ordenados en el plano), escribiremos los intervalos abiertos con *corchetes hacia fuera*:

$$]a, b[\quad \text{en lugar de} \quad (a, b),$$

y, de forma análoga, los semiabiertos como $[a, b[$ y $]a, b]$. Ambas notaciones son equivalentes; sólo adoptaremos $]\cdot, \cdot[$ para evitar confusiones.

1.5 Densidad de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ en $\mathbb{R}$.

El objetivo de esta sección es demostrar la siguiente idea intuitiva: por pequeño que se tome un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$, siempre aparecen infinitos números racionales e infinitos irracionales. Claramente, los enteros $\mathbb{Z}$ no verifican esta propiedad $\mathbb{R}$: por ejemplo, $(0, 1) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.

Dividiremos la demostración de esto en varios pasos sencillos.

Proposición 1.17. Dados $a, b \in \mathbb{Q}$ con $a < b$, existen infinitos $q \in \mathbb{Q}$ tales que $a < q < b$.

Demostración

Basta tomar el promedio $q = \dfrac{a+b}{2}$. Puesto que $a < b$, se cumple

$$a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} < \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = q < \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b.$$

Repitiendo el procedimiento con a y q o b y q se obtienen infinitos racionales distintos entre a y b. ■

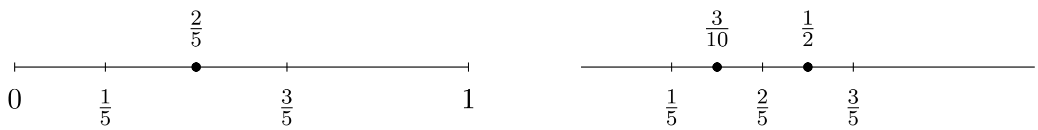
Ejemplo

Problema. Encontrar un número racional entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{3}{5}$.
Resolución. El promedio sirve:

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\right) = \frac{2}{5} < \frac{3}{5}.$$

Además, podemos encontrar más puntos tomando promedios sucesivos:

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\right) = \frac{3}{10}, \qquad \frac{2}{5} < \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{2} < \frac{3}{5}.$$



A continuación, demostramos que entre dos racionales cualesquiera también hay infinitos irracionales. La idea de la demostración es sumar un irracional muy pequeño al punto intermedio.

Lema 1.18. Sean $n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Q}$ con $q \neq 0$ y $r \in \mathbb{I}$. Entonces:

(1) Si n no es un cuadrado perfecto, entonces $\sqrt{n}$ es irracional. En particular, para todo número primo p, $\sqrt{p} \in \mathbb{I}$.

(2) $q \cdot r \in \mathbb{I}$.

(3) $q + r \in \mathbb{I}$.

Demostración

El item (1) se demuestra de manera análoga a la Proposición 1.3, y la omitimos para mayor brevedad. Demostramos por tanto los puntos (2) y (3).

En primer lugar, si qr fuera racional, entonces por la Proposición 1.2 también lo sería $r = \frac{qr}{q}$. De igual forma, si $q + r$ fuera racional, entonces $r = (q + r) - q$ sería racional. Ambas conclusiones contradicen la hipótesis $r \in \mathbb{I}$. ■

Proposición 1.19. Dados $a, b \in \mathbb{Q}$ con $a < b$, existen infinitos $s \in \mathbb{I}$ tales que $a < s < b$.

Demostración

Sea $m = \frac{a+b}{2}$ y tomemos un número primo p. Observamos que

$$0 < \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{p}}{p} < 1,$$

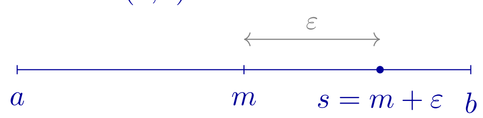
Ahora, definimos

$$\varepsilon = (b - m)\,\frac{\sqrt{p}}{p}.$$

Por el Lema 1.18, se tiene $\varepsilon \in \mathbb{I}$. Además, $0 < \varepsilon < b - m$. Finalmente, definimos $s = m + \varepsilon$, y comprobamos que es el número que buscamos:

$$a < m < s = m + \varepsilon < m + (b - m) = b.$$

Además, $s \in \mathbb{I}$ por el Lema 1.18. Repitiendo el procedimiento con distintos primos p se obtienen infinitos irracionales en (a, b).



■

Nota: Demostrar que el conjunto de los números primos es infinito puede hacerse mediante una sencilla reducción al absurdo, usando el algoritmo de la división Euclídea.

En el tercer paso, demostramos que entre dos irracionales cualesquiera siempre podemos encontrar un racional.

Proposición 1.20. Si $r, s \in \mathbb{I}$ con $r < s$, entonces existen infinitos racionales $q \in \mathbb{Q}$ tales que

$r < q < s$.

Demostración

El conjunto de los números naturales no está mayorado en $\mathbb{R}$, por lo que es posible encontrar un natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(s-r) > 1$. Entonces $ns > nr + 1$, lo que implica que el intervalo (nr, ns) tiene longitud estrictamente mayor que uno. Esto nos garantiza la existencia de un entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que $rn < k < sn$.

Para concluir, basta tomar $q = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$. Los infinitos valores posibles se obtienen al tomar otros naturales $m \geq n$ (obteniendo por tanto distintos k). ■

Ejemplo

Problema. Hallar un número racional entre $\sqrt{5}$ y $\sqrt{6}$.
Resolución. Buscamos $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\sqrt{5} < \frac{k}{n} < \sqrt{6}\,.$$

La desigualdad anterior equivale a $5n^2 < k^2 < 6n^2$. Tomando $n = 5$ se tiene

$$5n^2 = 125 \quad \text{y} \quad 6n^2 = 150,$$

y como $144 = 12^2$ verifica $125 < 144 < 150$, obtenemos

$$\sqrt{5} = \frac{\sqrt{125}}{5} < \frac{12}{5} < \frac{\sqrt{150}}{5} = \sqrt{6}.$$

Así, $\boxed{q = \frac{12}{5}}$ es un racional entre $\sqrt{5}$ y $\sqrt{6}$.

Alternativamente, podemos proceder como sigue: tomamos $n = 3$ y escribimos

$$\sqrt{5} = \frac{\sqrt{45}}{3}, \qquad \sqrt{6} = \frac{\sqrt{54}}{3}.$$

Buscamos ahora un cuadrado perfecto entre 45 y 54; vale 49, luego

$$\sqrt{5} < \frac{\sqrt{49}}{3} = \frac{7}{3} < \sqrt{6}.$$

Así, $\boxed{\frac{7}{3}}$ es un racional entre $\sqrt{5}$ y $\sqrt{6}$.

Ya tenemos todos los ingredientes necesarios para demostrar el principal resultado de esta sección, que es la densidad de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ en $\mathbb{R}$.

Teorema 1.21. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, existen *infinitos* números *racionales* e *infinitos irracionales* en el intervalo (a, b).

Demostración

Si a y b son ambos racionales, podemos aplicar los Lemas 1.17 y 1.18. Si $a \in \mathbb{Q}$ y $b \in \mathbb{I}$, entonces el punto medio $m = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{I}$, por lo que tomando el nuevo intervalo (m, b) (o (a, m), según corresponda), podemos reducirnos al caso de dos extremos irracionales.

En este escenario, la existencia de infinitos racionales viene dada por el Lema 1.20. Luego, podemos encontrar infinitos irracionales aplicando el Lema (1.18) a los racionales recién encontrados. ■

Nota: Como consecuencia particular de esta propiedad, existen infinitos números reales entre dos números reales distintos cualesquiera. Por tanto, ningún real tiene *sucesor inmediato*, como sí ocurre en los enteros.

1.6 Principio de inducción.

Llamaremos *demostración* a un encadenamiento de afirmaciones cuya validez es fácil de comprobar en cada paso, que parte de una situación inicial (la *hipótesis*) y concluye en el resultado que queremos (*la tesis*). En este tema hemos visto dos tipos principales de demostraciones:

- **Directa:** se deduce la tesis a partir de las hipótesis con reglas ya conocidas.
- **Por reducción al absurdo:** se supone falsa la tesis y se llega a una contradicción. Por ejemplo, la Proposición 1.3, en la que probábamos que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Introducimos ahora un nuevo tipo de argumento que nos permite demostrar la validez de propiedades o fórmulas que dependen de un número natural $n \in \mathbb{N}$.

Sea $P(n)$ una afirmación que depende de $n \in \mathbb{N}$. Una demostración por inducción consiste en dos pasos principales:

(1) **Caso base:** $P(n_0)$ es verdadera (típicamente $n_0 = 1$).

(2) **Paso inductivo:** si $P(n)$ es verdadera (esto se llama *hipótesis de inducción*), entonces también lo es $P(n+1)$.

Con estas dos comprobaciones, $P(n)$ resulta verdadera para todo $n \geq n_0$.

Nota: Intuitivamente, podemos compararlo con subir una escalera: si el primer escalón se puede pisar, y sabemos pasar de cada escalón al siguiente, entonces podemos subir la escalera indefinidamente.

Principio de inducción: Sea $P(n)$ una proposición para $n \in \mathbb{N}$ y sea $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $P(n_0)$ es verdadera y, dado un $n \geq n_0$ (fijo pero arbitrario), de $P(n)$ se sigue $P(n+1)$, entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq n_0$.

Ejemplo

Problema. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Resolución. Planteamos una demostración por inducción.

Comprobamos la veracidad de la **etapa base**; en este caso, $n = 1$:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

Para verificar el **paso inductivo**, supongamos que la igualdad es cierta para algún $n \in \mathbb{N}$, y buscamos demostrar que se verifica también para $n+1$:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (\textit{hipótesis de inducción}).$$

Entonces

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

que es precisamente la fórmula para $n+1$.

Nota: La fórmula anterior también puede demostrarse de forma directa. Llamamos $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$. Escribiendo también S_n al revés y sumando término a término, tenemos:

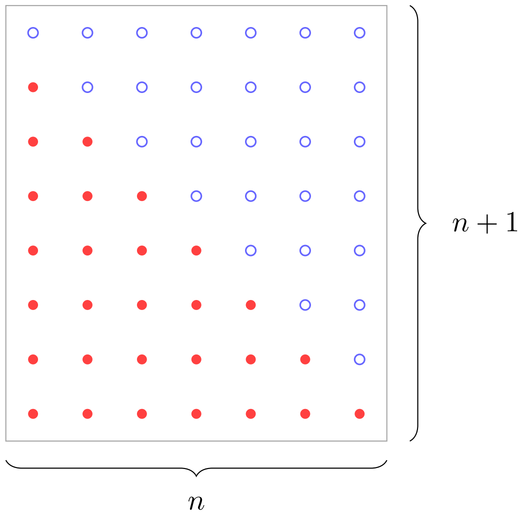
$$\begin{cases} S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n, \\ S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad 2S = \underbrace{(n+1) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ veces}} = n(n+1),$$

de modo que $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

También puede hacerse una demostración basada en un dibujo, pero hay que tener cuidado con estas: **¡no podemos sacar conclusiones sobre lo que el dibujo nos parece!**

Podemos comprobar que el número $1 + 2 + \cdots + n$ aparece como la cantidad de puntos de un triángulo escalonado con filas de longitudes $1, 2, \ldots, n$.

Dos copias de ese triángulo forman un rectángulo con $n \cdot (n+1)$ puntos, luego la mitad vale exactamente $\frac{n(n+1)}{2}$.



Variantes del principio de inducción A veces, tendremos un caso base para $n_0 \neq 1$, es decir, debemos demostrar $P(n)$ sólo para $n \geq n_0$, donde n_0 es un natural dado (no necesariamente 1). En esta situación, comprobamos:

- $P(n_0)$ es verdadera (caso base).
- Si $P(n)$ se verifica para algún $n \geq n_0$, entonces $P(n+1)$ también (paso inductivo).

Ejemplo

Problema. Probar que, para todo natural $n \geq 10$, se cumple $2^n \geq n^3$.
Resolución. Empezamos comprobando el caso base, correspondiente a $n = 10$:

$$2^{10} = 1024 \geq 1000 = 10^3.$$

Paso inductivo. Supongamos cierta la desigualdad para algún $n \geq 10$: $2^n \geq n^3$. Entonces

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n^3.$$

Por otra parte, sacando factor común n^3 y usando que $n \geq 10$,

$$\begin{aligned}(n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &\leq n^3\left(1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000}\right) = \frac{331}{1000} n^3 \leq 2n^3.\end{aligned}$$

Luego $2^{n+1} \geq 2n^3 \geq (n+1)^3$, y queda probado el paso inductivo.

A veces, el paso inductivo requiere conocer simultáneamente $P(n-1)$ y $P(n)$. En ese caso, verificamos:

- $P(n_0)$ y $P(n_0+1)$ son verdaderas (dos casos base).
- Para $n \geq n_0 + 1$, si $P(n-1)$ y $P(n)$ son verdaderas, entonces $P(n+1)$ es verdadera.

Ejercicio 1.22. Demostrar por inducción que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

El siguiente ejemplo muestra otra variación del mismo tipo de razonamiento, en el que damos saltos de cuatro en cuatro números naturales.

Ejemplo

Problema. Probar que, si $n \in \mathbb{N}$ no es múltiplo de 4, entonces $S_n = 1^n + 2^2 + 3^n + 4^n$ es un múltiplo de 10.

Resolución. En la etapa base, comprobaremos que la afirmación es cierta para $n = 1, 2, 3$. En efecto, $S_1 = 10$, $S_2 = 30$ y $S_3 = 100$.

A continuación, veamos que, si la afirmación es cierta para un $n \in \mathbb{N}$, entonces también lo es para $n + 4$. Partimos de una sencilla identidad:

$$a^{n+4} - a^n = a^n(a^2 + 1)(a^2 - 1) \quad \forall a > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, podemos escribir

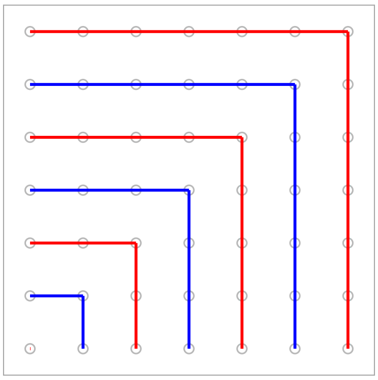
$$\begin{aligned} S_{n+4} - S_n &= 1^{n+4} - 1^n + 2^{n+4} - 2^n + 3^{n+4} - 3^n + 4^{n+4} - 4^n \\ &= 15 \cdot 2^n + 80 \cdot 3^n + 255 \cdot 4^n = 10(\underbrace{3 \cdot 2^{n-1} + 8 \cdot 3^n + 102 \cdot 4^{n-1}}_{k_1 \in \mathbb{N}}). \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción, $S_n = 10k_0$ con $k_0 \in \mathbb{N}$, lo que nos da

$$S_{n+4} = S_n + 10k_1 = 10(k_0 + k_1),$$

como se pretendía demostrar.

Demostración gráfica: Partimos de un cuadrado $n \times n$ de puntos. Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, la capa que convierte el cuadrado $(k-1) \times (k-1)$ en el cuadrado $k \times k$ tiene exactamente $2k - 1$ puntos: la fila superior de longitud k y la columna derecha de longitud $k - 1$. Sumando todas las capas se obtiene n^2.

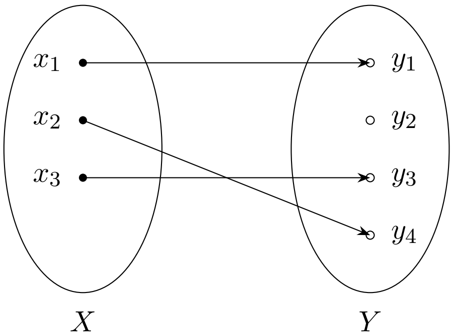


1.7 Numerabilidad

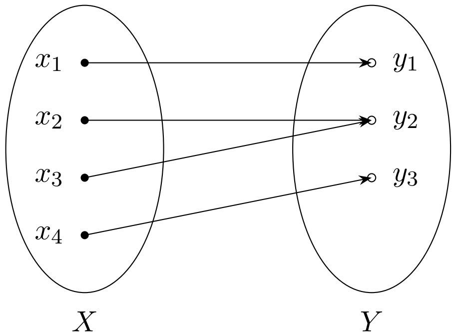
Finalmente, presentamos herramientas que nos permiten comparar de forma rigurosa la cantidad de elementos que hay en algunos de los conjuntos numéricos que hemos introducido.

Definición 1.23. Sean X, Y conjuntos. Una *aplicación* (o función) es una relación $f \subset X \times Y$ tal que, para cada $x \in X$, existe un único $y \in Y$ con $f(x) = y$.

- Decimos que f es **inyectiva** (uno-a-uno) si $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$. Equivalentemente, cada $y \in Y$ tiene *a lo sumo* una preimagen.
- Decimos que f es **sobreyectiva** si para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Dicho de otra forma, cada y tiene *al menos* una preimagen.
- f se dice **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.



Aplicación **inyectiva** pero **no sobreyectiva**



Aplicación **sobreyectiva** pero **no inyectiva**

Definición 1.24. Llamamos *cardinal* de un conjunto X al número de elementos de X y lo denotamos por $\#X$ o $\mathrm{card}(X)$.

Para conjuntos finitos, una aplicación inyectiva $X \to Y$ implica $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(Y)$, y una biyectiva $X \leftrightarrow Y$ implica $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$. Podemos usar este hecho para definir la noción de *tener la misma cantidad de elementos* para dos conjuntos cualesquiera.

Definición 1.25. Decimos que dos conjuntos X e Y son *equinumerosos* si existe una biyección entre ellos.

Proposición 1.26. Si $X \subset Y$, entonces $\#X \leq \#Y$.

Demostración

De forma clara, la aplicación *inclusión*

$$I : X \to Y$$
$$I(x) = x$$

es inyectiva, lo que nos da directamente el resultado. ■

Definición 1.27. Un conjunto X es *numerable* si existe una aplicación inyectiva $X \to \mathbb{N}$. En particular, todo conjunto finito es numerable. El cardinal de cualquier conjunto infinito y numerable se denota por $\aleph_0$ (el menor cardinal infinito).

Proposición 1.28. $\mathbb{N} \cup \{0\}$ es numerable y $\#(\mathbb{N} \cup \{0\}) = \aleph_0$.

Demostración

Dado que $\mathbb{N} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces $\#(\mathbb{N} \cup \{0\}) \geq \aleph_0$. Por otro lado, es inmediato comprobar que la aplicación $n \mapsto n + 1$ de $\mathbb{N} \cup \{0\}$ en $\mathbb{N}$ es inyectiva, lo que nos da la otra desigualdad. ■

Proposición 1.29. $\mathbb{Z}$ es numerable. De hecho, $\#\mathbb{Z} = \aleph_0$.

Demostración

Dado que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, tenemos $\#\mathbb{Z} \geq \#\mathbb{N} = \aleph_0$ por la proposición anterior. Veamos ahora la otra desigualdad, que se sigue de la existencia de una aplicación inyectiva $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.

Consideramos $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dada por $f(k) = -2k$ si $k \leq 0$ y $f(k) = 2k - 1$ si $k \geq 1$. Así:

$$0 \mapsto 0, \quad 1 \mapsto 1, \quad -1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 3, \quad -2 \mapsto 4, \quad 3 \mapsto 5, \quad \ldots$$

Supongamos que, para $n, m \in \mathbb{Z}$ se tiene $f(n) = f(m)$. Dado que $f(k) = 0 \Leftrightarrow k = 0$, entonces necesariamente n y m son ambos positivos o ambos negativos. Vemos que:

(1) Si $n, m \leq -1$, entonces $f(n) = f(m) \Leftrightarrow -2n = -2m \Leftrightarrow n = m$.

(2) Si $n, m \geq 1$, entonces $f(n) = f(m) \Leftrightarrow 2n - 1 = 2m - 1 \Leftrightarrow n = m$.

Consecuentemente, f es inyectiva y $\#Z \leq \aleph_0$. ■

Proposición 1.30. $\mathbb{Q}$ es numerable. De hecho, $\#\mathbb{Q} = \aleph_0$.

Idea de la demostración

Usando el *método de Cantor*, nos convencemos de que existe una aplicación inyectiva entre $\mathbb{N}$ y los números racionales positivos. Consideramos la cuadrícula de racionales positivos:

$$\frac{p}{q} \quad (p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}),$$

y recorrámosla por *diagonales* según $p + q = 1, 2, 3, \ldots$, omitiendo las fracciones no reducidas (es decir, sólo aceptamos p/q con $\mathrm{mcd}(p, q) = 1$).

$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$
$\frac{1}{2}$	$\cancel{\frac{2}{2}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$

El procedimiento enumera cada racional una única vez, de modo que obtenemos una biyección. Luego, repetimos este procedimiento con los enteros negativos y los racionales negativos, y relacionamos el 0 consigo mismo.

Concluimos que $\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{Z} = \aleph_0$. ■

Es posible demostrar, aunque no lo haremos en este curso, que si un conjunto X es infinito y numerable, entonces la existencia de una aplicación inyectiva $X \to \mathbb{N}$ es suficiente para garantizar la existencia de una biyección $X \leftrightarrow \mathbb{N}$.

Proposición 1.31. Todo conjunto numerable es finito o equinumeroso a $\mathbb{N}$.

Nos centramos ahora en probar la existencia de conjuntos no numerables. El ejemplo más importante es $\mathbb{R}$, pero tenemos multitud de ellos: ningún intervalo abierto de $\mathbb{R}$ lo es.

Proposición 1.32. $\#(0,1) = \#(-1,1) = \#\mathbb{R}$.

Demostración

Por un lado, es fácil comprobar que $f : (0,1) \to (-1,1)$ dada por $f(x) = 2x - 1$ es una biyección entre $(0,1)$ y $(-1,1)$, cuya inversa es $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$. Esto nos da la primera igualdad.

Por otro lado, consideramos

$$\varphi : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \frac{x}{1-|x|}.$$

Es fácil comprobar que φ es biyectiva y que su inversa es

$$\varphi^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1), \qquad \varphi^{-1}(y) = \frac{y}{1+|y|}.$$

Por tanto, $\#(-1,1) = \#\mathbb{R}$. ■

Proposición 1.33. $\mathbb{R}$ no es numerable.

Demostración

La Proposición 1.32 nos dice que la cardinalidad de $\mathbb{R}$ es igual a la del intervalo $(0,1)$, así que basta comprobar que este no es numerable. Supongamos, por absurdo, que $(0,1)$ es numerable y enumeramos sus elementos mediante su única expansión decimal sin 9 periódicos:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}\dots, \\ x_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}\dots, \\ x_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}\dots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

con $a_{ij} \in \{0,1,\dots,9\}$. Definimos un número real tomando la diagonal de las expresiones decimales anteriores y sumándole uno:

$$x = 0.b_1b_2b_3\dots, \qquad \text{con } b_i = \begin{cases} a_{ii}+1 & \text{si } a_{ii} < 9, \\ 0 & \text{si } a_{ii} = 9. \end{cases}$$

Claramente $x \in (0,1)$, por lo que $x = x_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Pero, por construcción, el $k-$ésimo decimal de x y el de x_k son diferentes, lo cual contradice la hipótesis de que $(0,1)$ es numerable. ■

Otro ejemplo de conjunto no numerable será el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$, al que llamamos *partes de* $\mathbb{N}$. Esto es consecuencia de la Proposición 1.31, junto a la siguiente observación:

Proposición 1.34. Si $\mathcal{P}(A)$ denota el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto A, entonces ninguna aplicación $f : A \to \mathcal{P}(A)$ puede ser sobreyectiva.

Demostración

Sea $f : A \to \mathcal{P}(A)$ una aplicación. Para cada $a \in A$ podemos preguntarnos si a pertenece o no al conjunto $f(a)$. Con esa idea construimos el conjunto

$$B = \{ a \in A : a \notin f(a) \}.$$

Veamos que B no puede ser imagen de ningún elemento de A, es decir, $f(a) \neq B$ para todo $a \in A$. Razonamos como sigue:

- Si $a \in B$, entonces por definición $a \notin f(a)$, así que $f(a) \neq B$.
- Si $a \notin B$, entonces por definición $a \in f(a)$, y de nuevo $f(a) \neq B$.

En ambos casos obtenemos que $f(a) \neq B$ para todo $a \in A$. Por tanto, el conjunto B no está en la imagen de f. ■

Enunciamos sin demostrar el siguiente resultado, pues requiere de herramientas que escapan a los contenidos de este tema.

Proposición 1.35. $\#\mathbb{R} = \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$. Este cardinal se conoce como *cardinal del continuo.*

La **Hipótesis del Continuo** (HC), formulada por Georg Cantor, afirma que no existe ningún conjunto cuya cardinalidad sea estrictamente mayor que la de $\mathbb{N}$ pero estrictamente menor que la de $\mathbb{R}$. Es decir, la HC dice que

$$\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \aleph_1,$$

donde $\aleph_1$ es el siguiente cardinal inmediatamente posterior a $\aleph_0 = \mathrm{card}(\mathbb{N})$.

Un resultado fundamental de la teoría de conjuntos es que la HC es **indecidible**: ni puede probarse ni refutarse a partir de los axiomas usuales de la teoría de conjuntos (los axiomas de Zermelo–Fraenkel con el Axioma de Elección, ZFC). Esto significa que existen dos teorías matemáticas igualmente coherentes: ZFC + HC y ZFC + ¬HC. Por tanto, según se adopte una u otra convención, se obtiene una visión distinta de la jerarquía de los conjuntos infinitos. En cualquier caso, estos resultados muestran los límites de lo que puede alcanzarse mediante la deducción axiomática.

Anexos del capítulo

1.A Resolución de inecuaciones con valor absoluto

Ejemplo

Problema. Dado $y \in \mathbb{R}$, hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x + 8| = |3x - y|$.

Resolución. Por definición de valor absoluto, equivale a resolver dos ecuaciones y unir sus conjuntos de soluciones:

$$\begin{cases} x+8=3x-y \;\Rightarrow\; x=\dfrac{y+8}{2}, \\ x+8=-(3x-y)=y-3x \;\Rightarrow\; x=\dfrac{y-8}{4}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Ejemplo

Problema. Dado $y \geq 0$, encontrar los valores de x tales que $|x-3| \leq y$.
Resolución. $-y \leq x-3 \leq y \iff 3-y \leq x \leq 3+y$. Es decir,

$$\{x \in \mathbb{R} : \; |x-3| \leq y\} = [\,3-y,\; 3+y\,].$$

(Son los puntos cuya distancia al 3 es menor o igual que y.)

Ejemplo

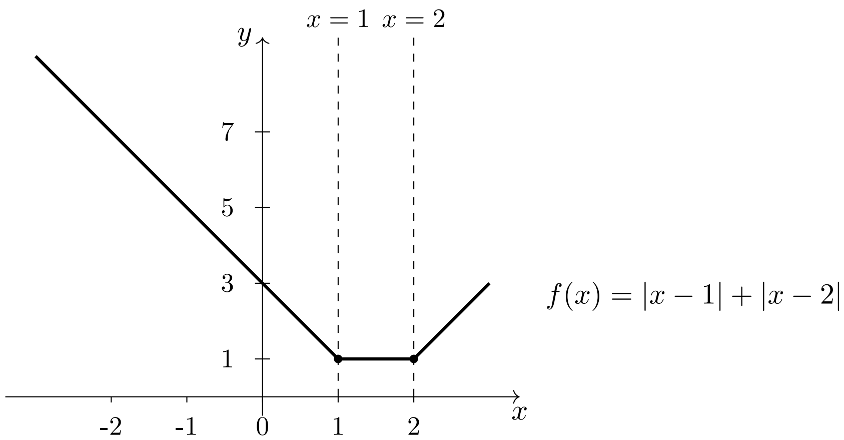
Problema. Resolver $|x-1|+|x-2|>1$ para $x \in \mathbb{R}$.
Resolución. Estudiamos la inecuación por tramos:

$$\begin{array}{lll} x \leq 1: & |x-1|=1-x,\; |x-2|=2-x & \Rightarrow\; 3-2x>1 \iff x<1, \\ 1 \leq x \leq 2: & |x-1|=x-1,\; |x-2|=2-x & \Rightarrow\; 1>1 \text{ (no hay soluciones)}, \\ x \geq 2: & |x-1|=x-1,\; |x-2|=x-2 & \Rightarrow\; 2x-3>1 \iff x>2. \end{array}$$

Solución:

$$(-\infty,1) \;\cup\; (2,\infty).$$

La función $f(x)=|x-1|+|x-2|$ es lineal a trozos, así que también podemos recurrir a una representación geométrica de su gráfica:



Capítulo 2

Sucesiones de números reales

En este tema aparece por primera vez una de las ideas centrales del Análisis Matemático: la *convergencia*. Nos centraremos primero en la convergencia de sucesiones de números reales, que más adelante servirá como herramienta esencial en el estudio de las funciones reales de variable real.

Intuitivamente, una sucesión de números reales es una lista ordenada de números reales indexada en los naturales:

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$$

Definición 2.1. Una sucesión es una aplicación

$$S : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto S(n) = x_n.$$

A menudo identificamos la sucesión con su imagen $S(\mathbb{N}) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, a la que denotamos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o simplemente $\{x_n\}$ si no hay lugar a confusión. La principal ventaja de esta notación es su brevedad: por ejemplo, la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ es la aplicación $S : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $S(n) = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero escribiendo $\{\frac{1}{n}\}$ ya sabemos a qué sucesión nos referimos.

Si $\{x_n\}$ es una sucesión, llamamos al n-ésimo término x_n el *término general* de la sucesión, pues nos permite reconstruirla completamente. En algunos casos, x_n viene dado mediante una *fórmula recursiva*.

Ejemplos:

(1) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \{x_n\} = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \dots\right\}.$

(2) $x_1 = 1,\ x_n = \dfrac{1}{1 + x_{n-1}} \quad \forall n \geq 2 \;\Rightarrow\; \{x_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \dots\right\}.$

(3) (Sucesión de Fibonacci) $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad \forall n \geq 3,$

$\Rightarrow \quad \{x_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}.$

La sucesión de Fibonacci y la razón áurea: La sucesión de Fibonacci se define mediante la recurrencia

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \qquad n \geq 3, \qquad \text{con } x_1 = 1 \text{ y } x_2 = 1.$$

El término general x_n puede expresarse en función de n gracias a la **fórmula de Binet**:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right),$$

donde φ es la *razón áurea*, que satisface $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

Idea de la demostración: buscamos soluciones de la forma $x_n = r^n$, con $r > 0$. Sustituyendo en la recurrencia se obtiene

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2} \Rightarrow r^2 = r + 1.$$

La llamada *ecuación característica* $r^2 - r - 1 = 0$ tiene por soluciones

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}.$$

Puede verse (con herramientas que escapan a los contenidos de este curso) que la solución general de la recurrencia es una combinación lineal

$$x_n = \alpha\varphi^n + \beta\psi^n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo las condiciones iniciales $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, podemos determinar α y β:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \psi^n\right).$$

2.1 Sucesiones convergentes

Definición 2.2. Decimos que una sucesión $\{x_n\}$ está **acotada** cuando su imagen $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$. Equivalentemente, si existe $M > 0$ tal que

$$|x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\ M \text{ no depende de } n\ ).$$

Ejemplo

Problema. Demostrar que la sucesión $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\} = \{0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \dots\}$ es acotada.

Resolución. Usando las propiedades del valor absoluto, podemos ver que

$$|x_n| = \left|1 + \frac{(-1)^n}{n}\right| \leq 1 + \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = 1 + \frac{1}{n} \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La siguiente definición es una de las más importantes en matemáticas, y también una de las más difíciles de asimilar para quienes acaban de iniciarse en esta disciplina. La enunciamos formalmente, y después haremos comentarios con la esperanza de facilitar su comprensión.

Definición 2.3. Sea $\{x_n\}$ una sucesión y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que $\{x_n\}$ **converge** a L si:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ \text{ tal que } \ [n \geq n_0 \ \Rightarrow \ |x_n - L| < \varepsilon].$$

En tal caso, se dice que L es el límite de $\{x_n\}$ y escribimos

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L, \quad \text{o bien} \quad \{x_n\} \to L \quad (n \to +\infty).$$

Conviene subrayar que el número natural n_0 que aparece en la definición depende casi siempre del $\varepsilon > 0$ considerado. Para probar que $\{x_n\} \to L$ hay que dar una regla que, a cada $\varepsilon > 0$, le asigne un número natural n_0 tal que se cumpla $|x_n - L| < \varepsilon$ siempre que $n \geq n_0$.

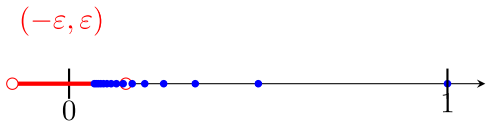
La condición $|x_n - L| < \varepsilon$ es más estricta cuanto más pequeño sea ε, y equivale a

$$L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon.$$

En otras palabras, por muy pequeño que sea ε, el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ contiene a todos los términos de la sucesión a partir de cierto punto.

Interpretación gráfica:

L es el límite de $\{x_n\}$ si, por pequeño que sea $\varepsilon > 0$, existe un n_0 tal que todos los términos de la sucesión con $n \geq n_0$ quedan dentro del intervalo $(L - \varepsilon,\ L + \varepsilon)$.



Desde el punto de vista geométrico, la desigualdad $|x_n - L| < \varepsilon$ expresa que la distancia entre x_n y L en la recta real es menor que ε. De este modo, la convergencia $\{x_n\} \to L$ significa que podemos acercar los términos de la sucesión a L tanto como queramos, basta con tomar n suficientemente grande (dependiendo de ε). Así, los términos de la sucesión se aproximan a L de forma cada vez más precisa.

Definición 2.4. Decimos que $\{x_n\}$ es **convergente** cuando tiene un límite $L \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.5. El límite de una sucesión, si existe, es único.

Demostración

Supongamos que $\{x_n\} \to L_1$ y $\{x_n\} \to L_2$, y veamos que necesariamente se tiene $L_1 = L_2$. Sea $\varepsilon > 0$. Por la definición de convergencia, existen $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$|x_n - L_1| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq m_1, \qquad |x_n - L_2| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq m_2.$$

Tomando $n \geq m = \max\{m_1, m_2\}$, se tiene

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - x_n + x_n - L_2| \leq |L_1 - x_n| + |x_n - L_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, la propiedad arquimediana nos permite concluir que $|L_1 - L_2| \leq 0$, lo cual implica que $|L_1 - L_2| = 0$, es decir, $L_1 = L_2$. ■

Ejemplo

Problema. Demostrar que la sucesión $\{1/n\}$ converge a $L = 0$.

Resolución. Sea $\varepsilon > 0$. Por la propiedad arquimediana, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > 1/\varepsilon$. Entonces, para todo $n \geq m$ se cumple

$$\left|\,\frac{1}{n} - 0\,\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Ejemplo

Problema. Probar que la sucesión $\{n\}$ no es convergente.

Resolución. Supongamos, por contradicción, que $\{n\} \to L$ para algún $L \in \mathbb{R}$. Tomamos $\varepsilon = 1$. Entonces existiría $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m$,

$$|n - L| < 1 \quad \Rightarrow \quad n < L + 1.$$

Esto implica que $L + 1$ sería un mayorante de $\mathbb{N}$, lo cual contradice la propiedad arquimediana. Por tanto, $\{n\}$ no converge.

Proposición 2.6. Si $\{x_n\}$ es convergente, entonces $\{x_n\}$ está acotada.

Demostración

Sea $\{x_n\} \to L$. Por la definición de convergencia, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - L| < 1 \qquad \text{para todo } n \geq m.$$

Entonces, para $n \geq m$,

$$|x_n| \leq |x_n - L| + |L| < 1 + |L|.$$

Por otra parte, el conjunto $\{|x_n| : n < m\}$ tiene máximo por ser finito. Sea pues $M = \max\{|x_n| : n < m\}$, que depende de m pero no de n. En consecuencia,

$$|x_n| \leq \max\{\, 1 + |L|,\ M\} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

y la sucesión $\{x_n\}$ está acotada. ■

La implicación recíproca es falsa: la sucesión $\{(-1)^n\}$ está acotada pero no es convergente.

Idea útil (colas acotadas). Si para cierto $m \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{x_n : n \geq m\}$ es acotado, entonces la sucesión completa $\{x_n\}$ es acotada. En efecto, si $|x_n| \leq M_1$ para $n \geq m$ y $M_2 = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{m-1}|\}$, entonces

$$|x_n| \leq \max\{M_1, M_2\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La sucesión $(-1)^n$ no converge, pero al fijarnos solo en sus términos de índice par o, alternativamente, en los de índice impar, obtenemos sucesiones que sí lo hacen. Este ejemplo muestra la idea de que, seleccionando ciertos términos de una sucesión, podemos construir una nueva, llamada *subsucesión* o *sucesión parcial* de la original.

Definición 2.7. Sea $S : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una sucesión y sea $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una aplicación estrictamente creciente, esto es, para $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$ se tiene $\sigma(n) < \sigma(m)$. Llamamos a la sucesión $S \circ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida por $n \mapsto S(\sigma(n))$, una **subsucesión** o **sucesión parcial** de S.

Si $S = \{x_n\}$, entonces denotamos $\{x_{\sigma(n)}\}$ a la subsucesión.

Ejemplo:

Las aplicaciones $n \mapsto 2n$, $n \mapsto 2n-1$ y $n \mapsto 2^n$ son estrictamente crecientes, lo que nos da tres subsucesiones notables:

$$\begin{aligned} \{x_{2n}\} &= \{x_2, x_4, x_6, \dots\} && \text{(subsucesión de los términos en posición par)}, \\ \{x_{2n-1}\} &= \{x_1, x_3, x_5, \dots\} && \text{(subsucesión de los términos en posición impar)}, \\ \{x_{2^n}\} &= \{x_2, x_4, x_8, \dots\} && \text{(subsucesión de los términos en posición potencia de 2)}. \end{aligned}$$

Vemos ahora que la convergencia de una sucesión implica la convergencia de todas sus parciales.

Proposición 2.8. Si $\{x_n\} \to L$ y $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una subsucesión, entonces $\{x_{\sigma(n)}\} \to L$.

Lema 2.9. Si $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, entonces $\sigma(n) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración

Procedemos por inducción. Para $n = 1$, como $\sigma(1) \in \mathbb{N}$, se tiene necesariamente $\sigma(1) \geq 1$. Supongamos ahora que $\sigma(n) \geq n$. Como σ es estrictamente creciente, se cumple

$$\sigma(n+1) > \sigma(n) \geq n,$$

luego $\sigma(n+1) \geq n+1$. Por inducción, concluimos que $\sigma(n) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Demostración de la Proposición 2.8

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{x_n\} \to L$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - L| < \varepsilon \qquad \text{para todo } n \geq m.$$

Además, por el Lema 2.9, si $n \geq m$ entonces

$$\sigma(n) \ \geq \ n \ \geq \ m.$$

Por tanto, para $n \geq m$ se verifica

$$|x_{\sigma(n)} - L| < \varepsilon.$$

Nótese que para cada $\varepsilon > 0$ podemos usar el mismo m que proporciona la convergencia de la sucesión de partida. ■

Como consecuencia de este resultado y de la unicidad del límite, si existen dos subsucesiones tales que

$$\{x_{\sigma_1(n)}\} \to L_1, \qquad \{x_{\sigma_2(n)}\} \to L_2, \qquad L_1 \neq L_2,$$

entonces $\{x_n\}$ no tiene límite.

Ejemplo

Problema. Estudiar la convergencia de $\{x_n\} = \{2 + (-1)^n\}$.
Resolución. Estudiemos las subsucesiones:

$$\{x_{2n}\} = \{2 + (-1)^{2n}\} = \{3, 3, 3, \dots\} \quad \Rightarrow \quad \{x_{2n}\} \to 3,$$

$$\{x_{2n-1}\} = \{2 + (-1)^{2n-1}\} = \{1, 1, 1, \dots\} \quad \Rightarrow \quad \{x_{2n-1}\} \to 1.$$

Dado que los límites de las dos subsucesiones difieren, concluimos que $\{x_n\}$ no tiene límite.

En general, la convergencia de unas pocas subsucesiones de $\{x_n\}$ a un mismo límite no implica que $\{x_n\}$ sea convergente o que tenga el mismo límite. Basta pensar en una sucesión del tipo

$$\{x_n\} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es potencia de 2} \\ 0 & \text{si } n \text{ es potencia de 3} \\ n & \text{en otro caso} \end{cases} = \{1, 0, 0, 0, 5, 6, 7, 0, 0, 10, \dots\}.$$

Es fácil comprobar que $\{x_{2^n}\}$ y $\{x_{3^n}\}$ convergen a 0, pero $\{x_n\}$ no es convergente.

Sin embargo, existen excepciones notables que podemos utilizar:

Ejercicio: Sea $\{x_n\}$ una sucesión. Si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\{x_{2n}\} \to L$ y $\{x_{2n-1}\} \to L$, entonces $\{x_n\} \to L$.

Recogemos en el siguiente resultado las principales propiedades de las operaciones que podemos realizar con sucesiones convergentes, que serán reglas básicas para el cálculo de límites.

Proposición 2.10. Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones de números reales y $L, L_1, L_2 \in \mathbb{R}$.

(1) $\{x_n\} \to L \iff \{|x_n - L|\} \to 0$. En particular, $\{x_n\} \to 0 \iff \{|x_n|\} \to 0$.

(2) Si $\{x_n\} \to L$, entonces $\{|x_n|\} \to |L|$.

(3) (Suma) Si $\{x_n\} \to L_1$ y $\{y_n\} \to L_2$, entonces $\{x_n + y_n\} \to L_1 + L_2$.

(4) Si $\{x_n\}$ está acotada e $\{y_n\} \to 0$, entonces $\{x_n y_n\} \to 0$.

(5) (Producto) Si $\{x_n\} \to L_1$ y $\{y_n\} \to L_2$, entonces $\{x_n y_n\} \to L_1 L_2$.

(6) (Inverso) Si $x_n \in \mathbb{R}^*$ para todo n y $\{x_n\} \to L \in \mathbb{R}^*$, entonces $\{1/x_n\} \to 1/L$.

(7) (Cociente) Si $\{y_n\} \to L_2$ y $\{x_n\} \to L_1 \neq 0$, entonces $\{y_n/x_n\} \to L_2/L_1$.

Demostración

(1) Es inmediato de la definición de límite: $\{x_n\} \to L$ significa que $|x_n - L| \to 0$.

(2) Por la desigualdad triangular inversa, se cumple

$$||x_n| - |L|| \leq |x_n - L|.$$

Si el segundo tiende a 0, también lo hace el primero, y por tanto $|x_n| \to |L|$. El recíproco es falso (ejemplo: $x_n = (-1)^n$).

(3) Si $\{x_n\} \to L_1$ y $\{y_n\} \to L_2$, dado $\varepsilon > 0$ se encuentran $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que, si $n \geq \text{máx}\{m_1, m_2\}$, entonces

$$|x_n - L_1| < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad |y_n - L_2| < \varepsilon/2$$

Entonces

$$|(x_n + y_n) - (L_1 + L_2)| \leq |x_n - L_1| + |y_n - L_2| < \varepsilon.$$

(4) Si $\{x_n\}$ está acotada, existe $K \geq 0$ tal que $|x_n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que $\{y_n\} \to 0$, entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq m$, se cumple $|y_n| < \varepsilon/K$. Por tanto, si $n \geq m$:

$$|x_n y_n| \leq K|y_n| < \varepsilon.$$

Esto demuestra que $\{x_n y_n\} \to 0$.

(5) Para el producto, escribimos

$$x_n y_n - L_1 L_2 = (x_n - L_1)(y_n - L_2) + (x_n - L_1)L_2 + (y_n - L_2)L_1.$$

El primer término tiende a 0 por el punto anterior (producto de acotada y convergente a 0), y los otros dos tienden a 0 directamente. Concluimos $x_n y_n \to L_1 L_2$.

(6) Puesto que

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{L}\right| = \frac{|x_n - L|}{|x_n||L|},$$

bastará ver que $1/x_n$ es acotada y aplicar el punto (6). En efecto, dado que $\{x_n\} \to L \neq 0$, podemos tomar $\varepsilon = |L|/2 > 0$ para encontrar un $m \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq m$, entonces $|x_n - L| < |L|/2$. Esto nos da:

$$\begin{aligned} |x_n| &= |L - (L - x_n)| \geq ||L| - |x_n - L|| = |L| - |x_n - L| \\ &\geq |L| - \frac{|L|}{2} = \frac{|L|}{2}. \end{aligned}$$

Tomando inversos, resulta

$$\frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|L|} \qquad n \geq m,$$

lo cual nos dice que $\{1/x_n\}$ es acotada.

(7) Finalmente, $\{y_n/x_n\} = \{y_n\} \cdot \{1/x_n\}$ y aplicando los resultados de producto e inverso obtenemos $y_n/x_n \to L_2/L_1$.

■

Ejemplo

Problema. Estudiar la convergencia de la sucesión

$$a_n = \frac{n^2 - n}{2 - n^2}.$$

Resolución. Hemos visto que la sucesión n no converge, por lo que en principio no podemos usar directamente las reglas anteriores. Para sortear el problema, dividimos numerador y denominador por n^2:

$$\frac{n^2-n}{2-n^2} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\frac{2}{n^2}-1}.$$

Ahora, cuando $n \to \infty$ tenemos

$$\frac{1-\frac{1}{n}}{\frac{2}{n^2}-1} \longrightarrow \frac{1}{-1} = -1.$$

Por tanto, la sucesión converge a -1.

Discutimos a continuación la relación entre la convergencia de sucesiones y el orden de los números reales. De forma más intuitiva: ¿si conocemos una desigualdad entre los límites de dos sucesiones convergentes, podemos asegurar desigualdades entre sus términos a partir de cierto punto? ¿Y viceversa? La respuesta es afirmativa y se recoge en la siguiente proposición.

Proposición 2.11. Sean $\{x_n\} \to L_1$ y $\{y_n\} \to L_2$ dos sucesiones convergentes.

(1) Si $L_2 < L_1$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $y_n < x_n$ para todo $n \geq m$.

(2) Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq m$, entonces $L_1 \leq L_2$.

Demostración

(1) Supongamos que $L_2 < L_1$, y sea $\varepsilon = \frac{L_1 - L_2}{2} > 0$. Por la definición de límite, existen $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$|x_n - L_1| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq m_1, \qquad |y_n - L_2| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq m_2.$$

Tomando $m = \text{máx}\{m_1, m_2\}$, para todo $n \geq m$ se cumple

$$y_n < L_2 + \varepsilon = \frac{L_1+L_2}{2} = L_1 - \varepsilon < x_n.$$

(Recuerda que si $z_n \to L$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ se encuentra un $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$, se tiene $L - \varepsilon < z_n < L + \varepsilon$.)

(2) Razonemos por reducción al absurdo: si se tuviese $L_2 < L_1$, aplicando el resultado anterior existiría $m \in \mathbb{N}$ tal que $y_n < x_n$ para todo $n \geq m$. Esto significaría que $x_n \leq y_n$ sólo podría cumplirse en un número finito de índices n, contradiciendo la hipótesis. Por tanto, necesariamente $L_1 \leq L_2$.

■

Observación importante: Es importante resaltar que la hipótesis estricta $x_n < y_n$ para todo $n \geq m$ no implica $L_1 < L_2$. Basta considerar, por ejemplo, $x_n = 0$, $y_n = 1/n$, donde $x_n < y_n$ siempre, pero $L_1 = L_2 = 0$.

Proposición 2.12 (Teorema del sándwich)**.** Sean $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ sucesiones tales que existe un $m \in \mathbb{N}$ de forma que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \geq m$. Si $\{x_n\} \to L$ y $\{z_n\} \to L$, entonces también $\{y_n\} \to L$.

Demostración

Observamos que el punto (2) de la Proposición 2.11 no puede aplicarse directamente, puesto que no sabemos si $\{y_n\}$ es convergente. Razonamos de la siguiente manera: dado $\varepsilon > 0$, existen $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$|x_n - L| < \varepsilon \quad (n \geq m_1), \qquad |z_n - L| < \varepsilon \quad (n \geq m_2).$$

Tomando $m = \max\{m, m_1, m_2\}$, para todo $n \geq m$ tenemos

$$L - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < L + \varepsilon.$$

Por tanto $|y_n - L| < \varepsilon$ para todo $n \geq m$, y concluimos que $\{y_n\} \to L$. ■

Ejemplo

Problema. Probar que

$$x_n = \frac{(-1)^n\, n}{n^2+1} \quad \text{converge a } 0.$$

Resolución. Observamos primero que

$$0 \leq |x_n| = \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n},$$

ya que $n^2 + 1 \geq n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{\frac{1}{n}\} \to 0$, del teorema del sándwich (con $\{x_n\} = \{0\}$ y $\{z_n\} = \{1/n\}$) se sigue que

$$|x_n| \to 0 \quad \Longrightarrow \quad x_n \to 0.$$

Ejemplo

Problema. (Hoja 2, ejercicio 3) Calcular

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}.$$

Resolución. Para cada k se tiene $n^2 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$. Cuando el denominador es mayor, la fracción es menor, y viceversa, de modo que

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(n+k)}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n}(n+k)}{n^2}.$$

Calculamos la suma del numerador:

$$\sum_{k=1}^{n}(n+k) = n \cdot n + \sum_{k=1}^{n} k = n^2 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

Sustituyendo:

$$\frac{3}{2} \leftarrow \frac{\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k} \leq \frac{\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n}{n^2} \to \frac{3}{2}.$$

Por el criterio del sándwich,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k} = \frac{3}{2}.$$

Concluimos esta sección viendo que el supremo y el ínfimo de un conjunto A son puntos de $\mathbb{R}$ a los que se puede llegar mediante sucesiones de elementos de A.

Proposición 2.13. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío.

(1) Si A está mayorado, existe una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A tal que $\{x_n\} \to \sup A$.

(2) Si A está minorado, existe una sucesión $\{y_n\}$ de elementos de A tal que $\{y_n\} \to \inf A$.

Demostración de (1)

Supongamos que A está mayorado y sea $s = \sup A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como $s - \frac{1}{n}$ no es cota superior de A, existe $x_n \in A$ verificando

$$s - \tfrac{1}{n} < x_n \leq s.$$

Así obtenemos una sucesión $\{x_n\} \subset A$ que converge a s usando el Teorema del sándwich. El caso del ínfimo se razona de manera análoga. ■

2.2 Sucesiones monótonas

Vamos a introducir ahora una propiedad fundamental de las sucesiones: la *monotonía*. Veremos que, si una sucesión es monótona y está acotada, necesariamente converge. Este hecho proporciona un criterio muy útil para estudiar la convergencia de sucesiones sin necesidad de calcular explícitamente su límite.

A partir de aquí deduciremos el teorema de Bolzano–Weierstrass, que constituye uno de los resultados más relevantes sobre sucesiones, y que además conduce al teorema de completitud de $\mathbb{R}$, ofreciendo así una caracterización precisa de las sucesiones convergentes.

Definición 2.14. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ es:

- **Creciente** si $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Decreciente** si $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Monótona** si es creciente o decreciente.

Una sucesión constante es a la vez creciente y decreciente. Las sucesiones $\{n\}$ y $\{-1/n\}$ son crecientes; $\{-n\}$ y $\{1/n\}$ son decrecientes. La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es monótona. Además, $\{x_n\}$ es decreciente $\iff$ $\{-x_n\}$ es creciente, por lo que podremos reducirnos a considerar sucesiones crecientes cuando demostremos propiedades relacionadas con la monotonía.

Proposición 2.15. Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Más precisamente:

(i) Si $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, entonces $\{x_n\} \to \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.

(ii) Si $\{x_n\}$ es decreciente y minorada, entonces $\{x_n\} \to \inf\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Demostración

Supongamos que $\{x_n\}$ es creciente y mayorada y sea $\beta = \sup\{x_k : \ k \in \mathbb{N}\}$. Dado $\varepsilon > 0$, por la definición de supremo existe $m \in \mathbb{N}$ con $\beta - \frac{\varepsilon}{2} \leq x_m \leq \beta$. Como la sucesión es creciente, para todo $n \geq m$:

$$\beta - \varepsilon < \beta - \frac{\varepsilon}{2} \leq x_m \leq x_n \leq \beta < \beta + \varepsilon,$$

de donde sigue que $|x_n - \beta| < \varepsilon$ y por tanto $x_n \to \beta$. El caso decreciente/minorada es análogo, o bien se aplica lo anterior a $\{-x_n\}$. ■

Ejemplo: Para $x \in \mathbb{R}$ con $|x| < 1$, se tiene $\{x^n\} \to 0$.

Sea $y = |x| \in [0, 1)$. Como $|x^n| = |x|^n = y^n$ y $0 \leq y^{n+1} \leq y^n$ para todo n, la sucesión $\{y^n\}$ es decreciente y minorada, luego converge. Si $\{y_n\} \to L$, también $\{y^{n+1}\} \to L$ por ser una subsucesión, y de la relación $y^{n+1} = y^n \cdot y$ obtenemos que $L = Ly$.

Como $y \neq 1$, se deduce $L = 0$.

Entonces, $\{|x^n|\} \to 0$, lo que implica que $\{x^n\} \to 0$.

Observación: Si $|x| > 1$, es fácil ver que $\{x^n\}$ no está acotada, por lo que no puede ser convergente. El caso $|x| = 1$ es sobradamente conocido.

Ejemplo

Problema. Sea $\{a_n\}$ una sucesión con $a_1 > 3$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$. Demostrar que es convergente y calcular su límite.

Resolución. (1) En primer lugar, veamos que $\{a_n\}$ así definida es una sucesión **minorada**. Para ello, probamos por inducción que $a_n > 3$ para todo n.

La etapa base es inmediata, ya que $a_1 > 3$. Supongamos ahora que $a_n > 3$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3} > \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = \sqrt{9} = 3.$$

Queda $a_n > 3$ para todo n.

(2) Comprobemos ahora que $\{a_n\}$ es **monótona decreciente**. Veamos directamente que $a_{n+1} < a_n$ para todo n. Como $a_n > 3 > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la desigualdad $a_{n+1} < a_n$ equivale a

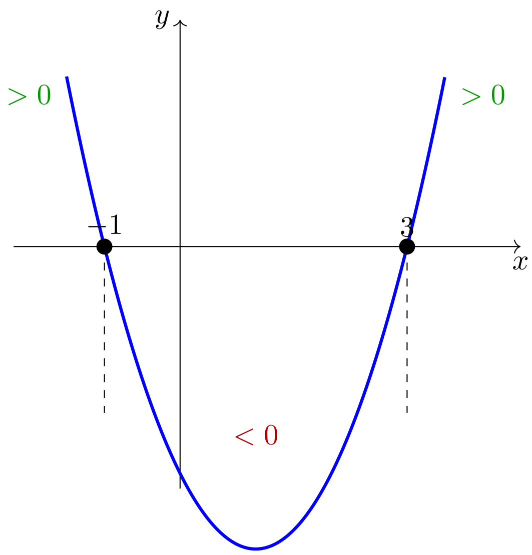
$$\sqrt{2a_n + 3} < a_n \iff 2a_n + 3 < a_n^2 \iff a_n^2 - 2a_n - 3 > 0.$$

El polinomio $p(x) = x^2 - 2x - 3$ tiene raíces -1 y 3, y $p(x) > 0$ para $x < -1$ o $x > 3$. Como ya sabemos que $a_n > 3$, se cumple $p(a_n) > 0$ y por tanto $a_{n+1} < a_n$.

(3) Convergencia y límite. La sucesión es *decreciente* y *minorada* por 3, luego es convergente. Sea $L = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Como $\{a_{n+1}\}$ es una subsucesión de $\{a_n\}$, también se tiene $\{a_{n+1}\} \to L$. Tenemos entonces la igualdad:

$$L^2 = 2L + 3 \iff (L - 3)(L + 1) = 0.$$

Como $a_n > 3$ para todo n, no puede tenerse $L = -1$, por lo que se deduce $L = 3$.



Las sucesiones monótonas aparecen con mucha más frecuencia de lo que podría parecer. El siguiente resultado lo pone de manifiesto y sirve de paso previo para el teorema central sobre convergencia de sucesiones reales.

Lema 2.16. Toda sucesión de números reales admite una sucesión parcial monótona.

Demostración

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y consideremos el conjunto

$$A = \{\, n \in \mathbb{N} : x_n \geq x_{n+k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\,\},$$

que detecta los términos que son mayores o iguales que todos los que les siguen. Distinguimos dos casos:

(1) Supongamos que A es **infinito**. Empezamos viendo que podemos construir una aplicación estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \to A$. Esto es, que podemos numerar los elementos de A de forma creciente.

Como todo subconjunto de $\mathbb{N}$ tiene mínimo, podemos definir $\sigma(1) = \min A$. Ahora, daremos una fórmula recursiva que nos permita obtener $\sigma(n+1)$ a partir de $\sigma(n)$:

$$\sigma(n+1) = \min \underbrace{\{a \in A : a > \sigma(n)\}}_{\neq\emptyset \text{ porque } A \text{ es infinito}}.$$

La sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ es parcial de $\{x_n\}$, y como $\sigma(n) \in A$ se tiene $x_{\sigma(n)} \geq x_{\sigma(n)+k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Tomando $k = \sigma(n+1) - \sigma(n)$ obtenemos $x_{\sigma(n)} \geq x_{\sigma(n+1)}$, luego $\{x_{\sigma(n)}\}$ es decreciente.

(2) Si A es **finito** (posiblemente $A = \emptyset$), entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$A \subset \{n \in \mathbb{N} : n < m\}.$$

Intuitivamente, a partir del índice m siempre aparece más adelante un término mayor, lo que permite construir una sucesión parcial creciente.

Definimos por inducción una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$ así: tomamos $\sigma(1) = m$ y, dado $n \geq 2$, tomamos

$$\sigma(n+1) = \sigma(n) + \min\{\, k \in \mathbb{N} : x_{\sigma(n)+k} > x_{\sigma(n)}\}.$$

Entonces $\sigma(n+1) > \sigma(n) \geq m$ y $x_{\sigma(n)} < x_{\sigma(n+1)}$, por lo que $\{x_{\sigma(n)}\}$ es creciente.

En cualquiera de los dos casos obtenemos una sucesión parcial monótona de $\{x_n\}$. ■

Teorema 2.17 (Teorema de Bolzano–Weierstrass)**.** Toda sucesión acotada de números reales admite una sucesión parcial convergente.

Demostración

Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada. Por el lema anterior, existe una sucesión parcial monótona $\{x_{\sigma(n)}\}$. Al ser $\{x_n\}$ acotada, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto $|x_{\sigma(n)}| \leq K$ para todo n. Así, $\{x_{\sigma(n)}\}$ es monótona y acotada, luego es convergente por el resultado previo. ■

Nota: Hasta ahora, hemos visto la siguiente cadena de implicaciones:

$$\begin{array}{l}
\{x_n\} \text{ monótona y acotada} \\
\quad\Downarrow \\
\{x_n\} \text{ convergente} \\
\quad\Downarrow \\
\{x_n\} \text{ acotada} \\
\quad\Downarrow \\
\{x_n\} \text{ admite una subsucesión convergente.}
\end{array}$$

Sin embargo, ninguna de estas implicaciones es reversible:

(1) Para ver que $(iv) \not\Rightarrow (iii)$ basta tomar

$$x_n = n\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

ya que $x_{2n-1} = 0$ y $x_{2n} = n$. Así, $\{x_n\}$ admite una subsucesión convergente y otra no acotada, por lo que $\{x_n\}$ tampoco está acotada.

(2) Ya se comentó que existen sucesiones acotadas que no convergen, es decir, $(iii) \not\Rightarrow (ii)$.

(3) Finalmente, la sucesión $\{(-1)^n/n\}$ converge a 0, pero no es monótona, así que $(ii) \not\Rightarrow (i)$.

Hasta ahora hemos visto condiciones necesarias (como la acotación) o suficientes (monotonía junto con acotación) para garantizar la convergencia de una sucesión. Sin embargo, ninguna de ellas es a la vez necesaria y suficiente. Nuestro objetivo será encontrar un criterio que permita decidir si una sucesión es convergente sin necesidad de conocer de antemano su posible límite.

Definición 2.18. Una sucesión $\{x_n\}$ se llama *sucesión de Cauchy* cuando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$p, q \geq m \implies |x_p - x_q| < \varepsilon.$$

Es decir, una sucesión de Cauchy es aquella cuyos términos están arbitrariamente cerca unos de otros para índices suficientemente grandes. Es fácil comprobar que toda sucesión convergente verifica esta propiedad, pues todos sus términos están tan cerca como se quiera del valor del límite. Que la afirmación recíproca sea también cierta caracteriza a la completitud de $\mathbb{R}$.

Proposición 2.19 (Completitud de $\mathbb{R}$)**.** Una sucesión de números reales $\{x_n\}$ converge si, y sólo si, es de Cauchy.

Demostración

$\boxed{\text{Convergente} \Rightarrow \text{Cauchy.}}$ Supongamos $x_n \to L \in \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } n \geq m.$$

Entonces, para $p, q \geq m$,

$$|x_p - x_q| \leq |x_p - L| + |L - x_q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

luego $\{x_n\}$ es de Cauchy.

$\boxed{\text{Cauchy} \Rightarrow \text{convergente.}}$ Sea ahora $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy. Primero probamos que está acotada. Tomando $\varepsilon = 1$ en la definición de Cauchy, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_p - x_q| < 1 \quad \text{para cualesquiera } p, q \geq m.$$

En particular, con $q = m$ y $p = n \geq m$,

$$|x_n| \leq |x_n - x_m| + |x_m| < 1 + |x_m|,$$

de modo que $\{x_n\}$ es acotada.

Por el teorema de Bolzano–Weierstrass, existe una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que converge a algún $L \in \mathbb{R}$. Veamos que entonces también se tiene $\{x_n\} \to L$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{x_n\}$ es de Cauchy, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$p, q \geq m_1 \implies |x_p - x_q| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.1}$$

Como $\{x_{\sigma(n)}\} \to L$, existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq m_2 \implies |x_{\sigma(n)} - L| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2}$$

Tomemos $m = \text{máx}\{m_1, m_2\}$, y sea $n \geq m$. Puesto que $\sigma(n) \geq n \geq m$, aplicando (2.1) con $p = n$ y $q = \sigma(n)$ y luego (2.2), obtenemos

$$|x_n - L| \leq |x_n - x_{\sigma(n)}| + |x_{\sigma(n)} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto, $\{x_n\} \to L$, como queríamos. ■

Ejemplo

Problema. Consideremos la sucesión definida por

$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vamos a demostrar que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que no es convergente.

Resolución.

- Comenzamos viendo por inducción que $x_n \in \mathbb{Q}$ para todo n.

  El caso $n = 1$ es claro. Si $x_n \in \mathbb{Q}$, entonces también $2/x_n \in \mathbb{Q}$ y su media aritmética $\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) = x_{n+1} \in \mathbb{Q}$.
- Demostremos ahora que se cumplen las estimas $\sqrt{2} \leq x_n \leq 2$ para todo n.

  Para $n = 1$ tenemos $\sqrt{2} < 2 = x_1 \leq 2$. Supongamos que $\sqrt{2} \leq x_n \leq 2$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces

  $$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{x_n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} < 2.$$

  Por otro lado,

  $$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{2}{2}\right) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} > \sqrt{2}$$

  Queda probado que $\sqrt{2} \leq x_{n+1} \leq 2$.
- Comprobamos que $\{x_n\}$ es monótona decreciente: como $x_n \geq \sqrt{2} > 0$, se tiene ${x_n}^2 \geq 2$ y

  $$\frac{2}{x_n} \leq \frac{{x_n}^2}{x_n} = x_n \implies x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \leq \frac{1}{2}(x_n + x_n) = x_n.$$

Por ser $\{x_n\}$ decreciente y minorada, existe $L \in \mathbb{R}$, $L \geq \sqrt{2}$, de forma que $\{x_n\} \to L$. En particular, $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

- Por último, calculamos el valor de L. Pasando al límite en la relación de recurrencia,

  $$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{2}{L}\right) \implies 2L = L + \frac{2}{L} \implies L^2 = 2.$$

  Como $L \geq \sqrt{2}$, se obtiene $L = \sqrt{2}$.

Conclusión. $\{x_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{Q}$ decreciente y acotada, por tanto convergente en $\mathbb{R}$. Toda sucesión convergente es de Cauchy, y esta noción es independiente del límite, luego $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$. Sin embargo, su único límite posible es $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, luego $\{x_n\}$ no converge en $\mathbb{Q}$.

2.3 Sucesiones divergentes

En este curso, llamamos sucesión *divergente* a cualquier sucesión que no sea convergente. Es menester señalar que en algunos textos, esta terminología se reserva para un tipo concreto de sucesiones no convergentes, que son las que tienden a $+\infty$ o $-\infty$.

Definición 2.20. Una sucesión $\{x_n\}$ se dice *divergente* cuando no es convergente.

Entre las sucesiones divergentes, señalamos los dos tipos más interesantes:

Definición 2.21. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales.

- Decimos que $\{x_n\}$ *diverge a* $+\infty$ si, para todo $K > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m \implies x_n > K$. En tal caso escribimos $\{x_n\} \to +\infty$.
- Análogamente, decimos que $\{x_n\}$ *diverge a* $-\infty$ si, para todo $K < 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m \implies x_n < K$. En tal caso escribimos $\{x_n\} \to -\infty$.

Conviene insistir en que ∞, $+\infty$ y $-\infty$ son solo *símbolos* para indicar que una sucesión diverge hacia los positivos o los negativos. Escribir $\{x_n\} \to +\infty$ no significa que la sucesión sea convergente ni que tenga límite $+\infty$. Las nociones de sucesión convergente y de límite real no cambian por introducir estas definiciones. Por ello deben evitarse expresiones como "$\{x_n\}$ converge a $+\infty$" o "$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$", que pueden inducir confusión y no aportan claridad.

Estudiamos ahora la relación entre las sucesiones que divergen a $\pm\infty$ con los demás tipos de sucesiones que hemos visto.

Proposición 2.22. Sea $\{x_n\}$ una sucesión y $\{x_{\sigma(n)}\}$ una subsucesión de $\{x_n\}$.

(i) Si $\{x_n\} \to +\infty$, entonces $\{x_{\sigma(n)}\} \to +\infty$.

(ii) Si $\{x_n\} \to -\infty$, entonces $\{x_{\sigma(n)}\} \to -\infty$.

Demostración

(1) Sea $K \in \mathbb{R}$. Como $\{x_n\} \to +\infty$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m \Rightarrow x_n > K$. La aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $\sigma(n) \geq m$ para todo $n \geq n_0$. Por tanto, para $n \geq n_0$ se tiene $x_{\sigma(n)} > K$, y queda probado que $\{x_{\sigma(n)}\} \to +\infty$.

(2) Si $\{x_n\} \to -\infty$, entonces $\{-x_n\} \to +\infty$. Aplicando (i) a la sucesión $\{-x_n\}$ obtenemos $\{-x_{\sigma(n)}\} \to +\infty$, es decir, $\{x_{\sigma(n)}\} \to -\infty$. ■

Proposición 2.23. Si $\{x_n\}$ creciente y no mayorada, entonces $\{x_n\} \to +\infty$. De la misma manera, si $\{x_n\}$ es decreciente y no minorada, entonces $\{x_n\} \to -\infty$. Por tanto, toda sucesión monótona es convergente o tiende a infinito.

Demostración

Si $\{x_n\}$ es creciente y no mayorada, dado $K \in \mathbb{R}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m > K$, pero entonces, para $n \geq m$ se cumple $x_n \geq x_m > K$, y de aquí $\{x_n\} \to +\infty$.

De modo análogo, si $\{x_n\}$ es decreciente y no minorada, entonces $\{-x_n\}$ es creciente y no mayorada, luego $\{-x_n\} \to +\infty$, y por tanto $\{x_n\} \to -\infty$. ■

El criterio anterior nos permite dar ejemplos de sucesiones que divergen a $\pm\infty$:

- Si $x \in \mathbb{R}$ con $x > 1$, la sucesión $\{x^n\}$ es creciente y no está mayorada, luego $\{x^n\} \to +\infty$.
- Si $x < -1$, entonces $\{|x^n|\} = \{|x|^n\} \to +\infty$. Sin embargo, la sucesión no tiende ni a $+\infty$ ni a $-\infty$, pues oscila de signo.

Ejemplo

Problema. Demostrar que $\{\sqrt{n}\} \to +\infty$.

Resolución. Creciente. Como $0 < n < n+1$, tomando raíces cuadradas queda $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$, luego es creciente.

No mayorada. Razonamos por reducción al absurdo: si existiera $M \in \mathbb{R}$ tal que $\sqrt{n} \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $n \leq M^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual contradice la propiedad arquimediana.

Por tanto, la sucesión es creciente y no está mayorada; en consecuencia,

$$\{\sqrt{n}\} \longrightarrow +\infty.$$

El siguiente criterio nos permite deducir que una sucesión que diverge a $\pm\infty$ comparándola con otra con el mismo comportamiento. Puede entenderse como un resultado análogo al Teorema del sándwich para este tipo de sucesiones divergentes.

Proposición 2.24. Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones de números reales tales que existe un $m \in \mathbb{N}$ de forma que $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq m$. Entonces:

$$\{x_n\} \to +\infty \implies \{y_n\} \to +\infty, \qquad \{y_n\} \to -\infty \implies \{x_n\} \to -\infty.$$

Ejemplo

Problema. Consideremos la sucesión

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \left\{1,\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}},\ \dots\right\}.$$

Demostrar que $\{x_n\} \to +\infty$.

Resolución. Para $1 \leq k \leq n$ se cumple $\sqrt{k} \leq \sqrt{n}$, luego

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Sumando para $k = 1, \dots, n$,

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Como $\{\sqrt{n}\} \to +\infty$, por comparación se obtiene $\{x_n\} \to +\infty$.

Finalmente, resumimos el álgebra del $\pm\infty$ en la siguiente proposición.

Proposición 2.25. Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones de números reales.

(1) Si $\{x_n\} \to +\infty$ y $\{y_n\}$ está minorada, entonces $\{x_n + y_n\} \to +\infty$. En particular, la segunda condición se tiene si $\{y_n\} \to L$ o $\{y_n\} \to +\infty$.

(2) Si $\{x_n\} \to -\infty$ y $\{y_n\}$ está mayorada, entonces $\{x_n + y_n\} \to -\infty$. En particular, la segunda condición se tiene si $\{y_n\} \to L$ o $\{y_n\} \to -\infty$)

(3) Si $\{x_n\} \to +\infty$ y existen $\alpha > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que, para $n \geq m$, se cumple $y_n > \alpha > 0$, entonces $\{x_n y_n\} \to +\infty$. En particular, la segunda condición se tiene si $\{y_n\} \to L > 0$ o $\{y_n\} \to +\infty$.

(4) Si $\{x_n\} \to -\infty$ y existen $\alpha > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que, para $n \geq m$, se cumple $y_n > \alpha > 0$, entonces $\{x_n y_n\} \to -\infty$.

(5) Sea $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{x_n\} \to 0 \iff \left\{\frac{1}{|x_n|}\right\} \to +\infty$.

Demostración

(1) Supongamos $\{x_n\} \to +\infty$ y $\{y_n\}$ está minorada. Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $y_n \geq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $K \in \mathbb{R}$. Como $\{x_n\} \to +\infty$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m \implies x_n > K - \alpha$. Entonces, para $n \geq m$, se cumple $x_n + y_n > K - \alpha + \alpha = K$, lo que prueba que $\{x_n + y_n\} \to +\infty$.

(2) La demostración es análoga a (1).

(3) Sea $K \in \mathbb{R}$. Como $\{x_n\} \to +\infty$, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq q$ se cumple $x_n > K/\alpha$. Definimos $m = \max\{p, q\}$. Entonces, para $n \geq m$, se tiene simultáneamente $y_n > \alpha$ y $x_n > K/\alpha$, luego

$$x_n y_n > \tfrac{K}{\alpha}\alpha = K,$$

lo que prueba que $\{x_n y_n\} \to +\infty$.

(4) Demostración análoga a (3).

(5) Supongamos que $\{x_n\} \to 0$, y sea $K \in \mathbb{R}^+$. Como $\{x_n\} \to 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m \implies |x_n| < \frac{1}{K}$. Entonces, para $n \geq m$ se cumple

$$\frac{1}{|x_n|} > K,$$

lo que muestra que $\{\frac{1}{|x_n|}\} \to +\infty$.

Recíprocamente, supongamos que $\{1/|x_n|\} \to +\infty$. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $K = 1/\varepsilon$. Por hipótesis, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m \implies |1/x_n| > K = 1/\varepsilon$. Esto equivale a $|x_n| < \varepsilon$, lo que prueba que $\{x_n\} \to 0$.

■

Las situaciones no contempladas en la discusión anterior se conocen como **indeterminaciones**, que es un término que se usa para denotar que no existe un criterio general que nos permita decidir el comportamiento de la situación en ese caso. Tenemos principalmente dos indeterminaciones, una para la suma y otra para el producto:

$$[\infty - \infty] \quad [0 \cdot \infty],$$

si bien la indeterminación para el producto puede aparecer en dos variantes aparentemente diferentes: [0 / 0] y [∞/∞].

Es interesante observar que **cualquier sucesión** puede expresarse en forma de las dos indeterminaciones mencionadas anteriormente:

- Dada una sucesión $\{z_n\}$, podemos escribir $z_n = x_n + y_n$, con $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\} \to -\infty$. Basta definir $x_n = z_n + |z_n| + n$ e $y_n = z_n - x_n$, de modo que $x_n \geq n \to +\infty$ e $y_n \leq -n \to -\infty$.
- De igual forma, cualquier sucesión $\{z_n\}$ puede escribirse como $z_n = x_n y_n$, con $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\} \to 0$. Por ejemplo, tomando $x_n = n(|z_n| + 1)$ e $y_n = z_n / x_n$, se cumple $x_n \geq n \to +\infty$ y $|y_n| \leq 1/n \to 0$.

2.4 Criterios de convergencia de sucesiones

El siguiente tema tiene un enfoque práctico, pues presentaremos dos criterios para resolver tipos concretos de indeterminaciones.

Para las indeterminaciones del tipo [∞/∞], es útil el siguiente criterio ideado por el matemático austriaco O. Stolz, cuya demostración es altamente técnica y preferimos omitir.

Teorema 2.26 (Criterio de Stolz)**.** Sea $\{\rho_n\}$ una sucesión de números positivos, estrictamente creciente y no mayorada (es decir, $0 < \rho_n < \rho_{n+1}$, y $\{\rho_n\} \to +\infty$).

Entonces, para toda sucesión $\{x_n\}$ y todo $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, se tiene

$$\left\{ \frac{x_{n+1} - x_n}{\rho_{n+1} - \rho_n} \right\} \longrightarrow L \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \frac{x_n}{\rho_n} \right\} \longrightarrow L.$$

Ejemplo

Problema. Demostrar que, para cualesquiera $x \in \mathbb{R}$ con $|x| > 1$ y $p \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{x^n} = 0.$$

Resolución. En primer lugar nos damos cuenta de que basta con tratar el caso $x > 1$, pues

$$\left| \frac{n^p}{x^n} \right| = \frac{n^p}{|x|^n}$$

y $|x| > 1$. Haremos una demostración por inducción en $p \in \mathbb{N}$, aplicando el criterio de Stolz con $\rho_n = x^p$ (que es positiva, estrictamente creciente y no mayorada).

Etapa base $p = 1$. Tomamos $x_n = n$. Entonces

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\rho_{n+1} - \rho_n} = \frac{(n+1) - n}{x^{n+1} - x^n} = \frac{1}{x^n(x-1)} \longrightarrow 0,$$

y por Stolz se concluye $\dfrac{n}{x^n} \to 0$.

Paso inductivo. Supongamos cierto para un $p \in \mathbb{N}$, es decir, $\dfrac{n^p}{x^n} \to 0$. Tomamos ahora $x_n = n^{p+1}$. Entonces

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\rho_{n+1} - \rho_n} = \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{x^{n+1} - x^n} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{n^p} \cdot \frac{n^p}{x^n}.$$

Usando el binomio de Newton, podemos ver que $(n+1)^{p+1} = n^{p+1} + (p+1)n^p + R(n)$, donde $R(n)$ es un polinomio de grado $< p$. Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{n^p} = \frac{(p+1)n^p + R(n)}{n^p} = p+1.$$

Por otro lado, el tercer factor tiende a 0 por hipótesis de inducción. Por tanto, el producto también tiende a 0. Aplicando de nuevo el criterio de Stolz, concluimos que

$$\left\{ \frac{n^{p+1}}{x^n} \right\} \to 0.$$

Ahora, si $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales positivos, vamos a estudiar el comportamiento de la sucesión $\{\sqrt[n]{x_n}\}$. Esto anticipa un nuevo tipo de indeterminación, la del tipo $[\infty^0]$, que estudiaremos con más atención una vez que hayamos introducido las funciones *logaritmo* y *exponencial*.

Teorema 2.27 (Criterio de la raíz para sucesiones)**.** Sea $\{x_n\}$ una sucesión con $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, se tiene

$$\left\{ \frac{x_{n+1}}{x_n} \right\} \to L \implies \{\sqrt[n]{x_n}\} \to L.$$

Ejemplo

Problema. Probar que $\sqrt[n]{n!} \longrightarrow +\infty$.
Resolución. Consideramos $x_n = n!$, con $x_n > 0$. Entonces

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \longrightarrow +\infty.$$

Por el criterio de la raíz para sucesiones, concluimos que

$$\sqrt[n]{n!} \longrightarrow +\infty.$$

Nota: $n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{k} k = n \cdot (n-1)!$

Capítulo 3

Series

Al estudiar una sucesión de números reales $\{x_n\}$ surge de forma natural una nueva idea: la de *sumar todos sus términos*. Para ello podemos considerar las sumas finitas

$$x_1, \quad (x_1+x_2), \quad (x_1+x_2+x_3), \ \dots, \ (x_1+x_2+\cdots+x_n), \ \dots$$

Si esta nueva sucesión converge, es plausible interpretar su límite como la *suma infinita* de los términos de $\{x_n\}$ a la que queríamos dar sentido.

Definición 3.1. Dada una sucesión de números reales $\{x_n\}$, la *serie de término general* $\{x_n\}$ es la sucesión de *sumas parciales*

$$\{S_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{n} x_k\right\},$$

y la denotaremos simplemente $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$.

Con esta definición queda claro que las series no son un objeto nuevo; son sucesiones cuyo término general se obtiene sumando los términos de otra sucesión. Por tanto, podemos hablar de nociones como convergencia, acotación y monotonía de series simplemente trasladando las correspondientes definiciones para sucesiones.

Definición 3.2. Decimos que la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ es *convergente* si $\{S_n\}$ converge; en tal caso llamamos a su límite la *suma de la serie*, y lo denotamos por

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

que recuerda la idea de que estamos sumando los infinitos términos de la sucesión $\{x_n\}$.

En el estudio de una serie intervienen dos sucesiones, así que conviene fijar una notación que indique claramente a cuál nos estamos refiriendo. La sucesión cuyos términos estamos sumando, $\{x_n\}$, la llamaremos *término general* de la serie, y los propios términos de la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ se denotarán las *sumas parciales* $\{S_n\}$. Como ya hemos mencionado, al límite de la serie lo llamaremos *suma* de la serie, también para diferenciarlo del posible límite de $\{x_n\}$, del que hablaremos enseguida.

Por tanto, si decimos que $\sum_{n\geq 1} x_n$ es una serie de términos no-negativos, nos referimos a que $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta propiedad se traduce inmediatamente en que la sucesión de sumas parciales es creciente.

3.1 Ejemplos de series

Acabamos de ver que toda serie es, por definición, una sucesión. Además, el recíproco también es cierto: cualquier sucesión puede verse como una serie. Por tanto, series y sucesiones no son más que dos puntos de vista diferentes para estudiar el mismo concepto matemático. La utilidad del primero quedará de manifiesto más adelante.

Dada una sucesión $\{y_n\}$, adoptamos por convenio $y_0 = 0$ y definimos

$$x_n = y_n - y_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) = y_1 + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \cdots y_n = y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así, estudiar la sucesión y_n equivale a estudiar la serie $\sum_{n\geq 1}(y_n - y_{n-1})$.

Merece la pena dar un nombre a las series cuyo estudio se reduce a considerar una única sucesión en la forma que hemos discutido anteriormente.

Definición 3.3. Diremos que una serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ es *telescópica* si su término general puede escribirse de la forma

$$x_n = y_{n+1} - y_n \quad \forall n \geq 1.$$

para alguna sucesión $\{y_n\}$. En ese caso, el estudio de $\sum_{n\geq 1} x_n$ equivale al de $\{y_{n+1} - y_1\}$.

Ejemplo

Problema. Estudiar la convergencia de la *serie de Mengoli*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Resolución. Observamos que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Por tanto, las sumas parciales son

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Luego $\{S_n\} \to 1$ y la serie es convergente con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Si bien series y sucesiones son conceptos equivalentes, muchos de los ejemplos de sucesiones más importantes que aparecerán en el Análisis Matemático vienen en forma de series. A menudo, no hay una forma cómoda de obtener una fórmula general para la sucesión de sumas parciales de una serie, por lo que nos centraremos en la información sobre la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ que podamos obtener a través de su término general $\{x_n\}$.

Un primer hecho básico es que, si $\{x_n\}$ no converge a 0, la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ no puede ser convergente. De forma equivalente:

Proposición 3.4. Si la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ es convergente, entonces $\{x_n\} \to 0$.

Demostración

Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ la sucesión de sumas parciales. Si la serie converge, entonces $\{S_n\} \to S \in \mathbb{R}$. Para $n \geq 1$, podemos escribir

$$x_{n+1} = S_{n+1} - S_n \longrightarrow S - S = 0,$$

luego $\{x_n\} \to 0$. ■

En términos de sucesiones, tendríamos que necesariamente la sucesión de diferencias $\{y_n - y_{n-1}\} \to 0$ (o equivalentemente $\{y_{n+1} - y_n\} \to 0$). Es natural preguntarse por el recíproco, esto es, si $\{y_{n+1} - y_n\} \to 0$ implica que $\{y_n\}$ es convergente. Esta es una pregunta interesante sobre sucesiones que no nos habríamos hecho de no haber adoptado el punto de vista de las series.

Naturalmente, el recíproco es falso: $\{x_n\} \to 0$ no es suficiente para que $\sum_{n\geq 1} x_n$ sea convergente. Veremos enseguida un ejemplo importante.

Proposición 3.5. La serie armónica

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

diverge positivamente.

Demostración

Sea $\{H_n\}$ la sucesión de sumas parciales, esto es,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Como $\frac{1}{k} > 0$, la sucesión $\{H_n\}$ es creciente. Probamos que no está acotada mostrando, por inducción en $n \in \mathbb{N}$, que

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

Para $n = 1$ es claro:

$$H_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}.$$

Supuesto cierto para n, entonces

$$H_{2^{n+1}} = H_{2^n} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \left(1 + \frac{n}{2}\right) + (2\cdot 2^n - 2^n)\cdot \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n+1}{2}.$$

Concluimos que $H_{2^n} \to +\infty$, por lo que $\{H_n\}$ no está acotada. Como además es $\{H_n\}$ creciente, tenemos también $H_n \to +\infty$. ■

Fijado $x_0 \in \mathbb{R}$, puede interesar que las sumas parciales de una serie arranquen en x_0, esto es, en

$n = 0$. Denotamos por $\sum_{n\geq 0} x_n$ a la serie cuyas sumas parciales son

$$\widetilde{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}, \quad n \geq 1.$$

En vista de la identidad anterior, está claro que $\sum_{n\geq 0} x_n = \sum_{n\geq 1} x_{n-1}$, y se cumple

$$\widetilde{S}_{n+1} = x_0 + S_n, \quad n \geq 1,$$

de donde es claro que la convergencia de $\sum_{n\geq 0} x_n$ equivale a la de $\sum_{n\geq 1} x_n$, y si ambas son convergentes se tiene además

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{S}_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n-1} = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Definición 3.6. Dado $a \in \mathbb{R}$, llamamos *serie geométrica de razón a* a

$$\sum_{n\geq 0} a^n = 1 + a + a^2 + \cdots$$

cuyo término general es $\{a^n\}$.

Como $a^n \to 0$ sólo si $|a| < 1$, una condición necesaria de convergencia es $|a| < 1$. Vemos inmediatamente que el recíproco también es cierto:

Proposición 3.7. Si $|a| < 1$, la serie geométrica de razón a es convergente y

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Demostración

Para $n \in \mathbb{N}$ y $a \neq 1$, la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica es de sobra conocida, y puede demostrarse fácilmente por inducción:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1-a^n}{1-a}.$$

Si $|a| < 1$ entonces $\{a^n\} \to 0$, y por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{1}{1-a}.$$

■

También resulta útil poder cortar los primeros términos de una serie. Fijado $p \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n\geq p+1} x_n$ no es más que la sucesión de sumas parciales

$$\widehat{S}_n = \sum_{k=p+1}^{p+n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_{k+p},$$

de modo que estamos considerando la serie $\sum_{n\geq 1} x_{n+p}$. Las sumas parciales de $\sum_{n\geq p+1} x_n$ y $\sum_{n\geq 1} x_n$ satisfacen la relación

$$\widehat{S}_n = \sum_{k=p+1}^{p+n} x_k = S_{p+n} - S_p,$$

de donde es evidente que $\sum_{n\geq p+1} x_n$ converge si, y sólo si, converge $\sum_{n\geq 1} x_n$, y en tal caso, sus sumas verifican

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{k=1}^{p} x_k \; + \sum_{n=p+1}^{\infty} x_n.$$

En resumidas cuentas, el carácter de una serie (convergente o divergente) no cambia al eliminar un número finito de términos.

Ejercicio: Demostrar que si $\sum_{n\geq 1} x_n$ es convergente, entonces las colas

$$\left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

forman una sucesión que converge a 0.

Una sencilla consecuencia del álgebra de sucesiones convergentes nos permite ampliar fácilmente nuestro catálogo de series convergentes.

Proposición 3.8. Sean $\sum_{n\geq 1} x_n$ y $\sum_{n\geq 1} y_n$ series convergentes y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces la serie $\sum_{n\geq 1}(\alpha x_n + \beta y_n)$ es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Demostración

Para $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad Y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k, \qquad Z_n = \sum_{k=1}^{n}(\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha X_n + \beta Y_n.$$

Como $\{X_n\}$ y $\{Y_n\}$ convergen, también converge $\{Z_n\}$ y

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = \alpha \lim_{n\to\infty} X_n + \beta \lim_{n\to\infty} Y_n.$$

Esto prueba la convergencia de $\sum_{n\geq 1}(\alpha x_n + \beta y_n)$ y la identidad anunciada. ■

Ejemplo

Problema. Demostrar que la siguiente serie es convergente y calcular su suma

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^{n-1}+3^{n+1}}{5^n}.$$

Resolución. Por linealidad de las series y la fórmula de la geométrica:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^{n-1}+3^{n+1}}{5^n} = \frac{1}{5}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{9}{5}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{5}} + \frac{9}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}+\frac{9}{2} = \frac{29}{6}.$$

3.2 Criterios de convergencia para series de términos no negativos

En lo que sigue trabajaremos con series de la forma $\sum_{n\geq 1} a_n$ con $a_n \geq 0$. Este tipo de series son sucesiones crecientes, ya que $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que simplifica su estudio. De hecho, hemos visto que una sucesión creciente solo puede ser convergente o divergir a $+\infty$, dependiendo de si está mayorada o no.

$$\sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge } \iff \{S_n\} \text{ está mayorada.}$$

Por tanto, de la convergencia de una serie podemos deducir la de muchas otras a las que esta mayora.

Proposición 3.9 (Criterio de comparación)**.** Sean $\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ dos series con $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$. Supongamos que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq p$. Entonces,

$$\sum_{n\geq 1} b_n \text{ convergente } \implies \sum_{n\geq 1} a_n \text{ convergente.}$$

Demostración

Por ser $\sum_{n\geq 1} b_n$ convergente, está mayorada, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sumando término a término la desigualdad $0 < a_{k+p} \leq b_{k+p}$ para $k = 1, \ldots, n$, se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+p} \leq \sum_{k=1}^{n} b_{k+p} \leq \sum_{k=1}^{n+p} b_k \leq M.$$

Al estar mayorada, la serie $\sum_{n\geq 1} a_{n+p} = \sum_{n\geq p+1} a_n$ es convergente, lo que equivale a la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$. ■

Si bien el anterior criterio de comparación tiene utilidad en sí mismo, su principal función es permitirnos demostrar el siguiente, que es más potente y práctico.

Proposición 3.10 (Criterio de comparación por paso al límite)**.** Sean $a_n \geq 0$ y $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \geq 0.$$

(1) Si $L > 0$, $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge.

(2) Si $L = 0$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

Demostración

(1) Tomando $\varepsilon = L/2$, encontramos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$,

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \frac{L}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{L}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3L}{2} b_n.$$

Aplicamos el criterio de comparación entre $\sum_{n\geq 1} \frac{L}{2} b_n$ y $\sum_{n\geq 1} a_n$, y luego entre $\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\sum_{n\geq 1} \frac{3L}{2} b_n$, teniendo en cuenta que multiplicar una sucesión por una constante positiva no afecta a su convergencia.

(2) Tomemos $\varepsilon = 1$. Entonces existe n_0 tal que, para $n \geq n_0$, $\frac{a_n}{b_n} < 1$, es decir, $0 \leq a_n \leq b_n$. Si $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge, también lo hace $\sum_{n\geq 1} a_n$ por el primer criterio de comparación.

■

Nota: Si $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to +\infty$, entonces $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\} \to 0$. Aplicando el punto (2) intercambiando los papeles de $\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$, tenemos:

$$\text{si} \quad \sum_{n\geq 1} a_n \quad \text{converge} \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} b_n \quad \text{converge.}$$

Por contrarrecíproco, esta afirmación es equivalente a

$$\text{si} \quad \sum_{n\geq 1} b_n \quad \text{diverge} \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n \quad \text{diverge.}$$

Ejemplo

Problema. Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^2+3n+4}.$$

Resolución. Tomamos $b_n = \dfrac{1}{n}$. Entonces

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{n}{n^2+3n+4}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{n^2+3n+4} \longrightarrow 1 \ (> 0).$$

Por el criterio de comparación por paso al límite, la serie dada converge si y sólo si lo hace $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, que es la armónica y diverge. Luego $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^2+3n+4}$ diverge positivamente.

Ejemplo

Problema. Para $p \in \mathbb{N}$ con $p \geq 2$, la *serie armónica con exponente* p es convergente.

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}.$$

Resolución. En primer lugar, veamos que podemos reducirnos al caso $n = 2$: si $p \geq 2$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces de $n^p \geq n^2$ se sigue que

$$0 < \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Por el *criterio de comparación*, si $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge entonces también lo harán las de exponente p para todo $p \geq 2$.

Sea $b_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Sabemos que la serie de Mengoli $\sum_{n\geq 1} b_n$ es convergente, y se verifica

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n(n+1)}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} \longrightarrow 1 \ (> 0).$$

Por el *criterio de comparación por paso al límite*, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Observación. Que la convergencia de dos series sea *equivalente* no significa en absoluto que tengan la misma *suma*. Los criterios de comparación miran el comportamiento *asintótico* (para n grandes), mientras que la suma depende de *todos* los sumandos, incluidos los primeros. En particular, por comparación, las series

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

son asintóticas la una a la otra (su carácter es equivalente), pero sus sumas no coinciden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(La segunda igualdad requiere herramientas más avanzadas; por ejemplo, series de Fourier.)

Teorema 3.11 (Criterio de la raíz para series)**.** Sea $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\{\sqrt[n]{a_n}\} \to L \geq 0$.

(1) Si $L > 1$, entonces $\{a_n\} \nrightarrow 0$, y la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge positivamente.

(2) Si $L < 1$, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente.

Demostración

(1) Comprobemos que si $\{a_n\} \to 0$, entonces necesariamente $L \leq 1$. En efecto, si $a_n \to 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq m$, se tiene $0 \leq a_n < 1$, luego

$$\sqrt[n]{a_n} < 1 \quad \forall n \geq m.$$

Pasando al límite, tenemos $L \leq 1$, como se buscaba.

(2) Tomando $\varepsilon > 0$ de forma que $0 \leq L + \varepsilon < 1$ (por ejemplo, $\varepsilon = \frac{1-L}{2}$), encontramos un $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq m$, se tiene

$$|\sqrt[n]{a_n} - L| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} < (L+\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad a_n < (L+\varepsilon)^n.$$

La serie geométrica $\sum_{n\geq 1}(L+\varepsilon)^n$ converge, ya que $0 < L+\varepsilon < 1$, de modo que también lo hace $\sum_{n\geq 1} a_n$ por el primer criterio de comparación.

■

Nota: Si $L = 1$, el criterio anterior no decide:

$$\left\{\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right\} \to 1 \text{ y } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \text{ diverge,} \qquad \left\{\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}\right\} \to 1 \text{ y } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge.}$$

La combinación del criterio anterior junto al criterio de la raíz para sucesiones nos da el siguiente:

Proposición 3.12 (Criterio del cociente o de d'Alembert)**.** Sea $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que

$$\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} \to L \geq 0.$$

(1) Si $L > 1$, entonces $a_n \not\to 0$, luego la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge.

(2) Si $L < 1$, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente.

Ejemplo

Problema. Fijados $q \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$ con $x > 1$, la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^q}{x^n}.$$

es convergente.

Resolución. Sea $a_n = \dfrac{n^q}{x^n}$. Entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^q}{n^q\, x} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^q \longrightarrow \frac{1}{x} < 1.$$

Por el *criterio del cociente*, la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente.

En particular, $\{a_n\} = \{\frac{n^q}{x^n}\} \to 0$, que es un resultado de sucesiones que tuvimos que demostrar por inducción usando el criterio de Stolz.

Aunque *a priori* puedan parecernos criterios equivalentes, no es difícil comprobar que el *criterio de la raíz* puede decidir casos en los que el del *cociente* no lo hace. Consideremos

$$\sum_{n\geq 1} a_n, \qquad a_n = \frac{3+(-1)^n}{2^n}.$$

Para $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{3+(-1)^n}}{2} = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{2}}{2} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \frac{\sqrt[n]{4}}{2} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

En ambos casos $\{\sqrt[n]{a_n}\} \to \dfrac{1}{2} < 1$, luego, por el *criterio de la raíz*, la serie es convergente. Sin embargo,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3+(-1)^{n+1}}{2\,(3+(-1)^n)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \frac{1}{4} & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases}$$

de modo que el *criterio del cociente* no puede aplicarse.

Ejemplo

Problema. Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Resolución. Sea $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$. Claramente $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y podemos considerar el cociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left((n+1)!\right)^2 (2n)!}{(2n+2)!\,(n!)^2} = \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} \longrightarrow \frac{1}{4} < 1.$$

Por el criterio del cociente, la serie es convergente.

Proposición 3.13 (Criterio de condensación de Cauchy)**.** Sea $\{a_n\}$ una sucesión *decreciente* con $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\sum_{n\geq 1} a_n \quad \text{converge} \iff \sum_{n\geq 0} 2^n a_{2^n} \text{ converge}$$

Demostración

Consideramos las sumas parciales de cada serie:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k\, a_{2^k} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Empezamos mostraremos por inducción que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$A_{2^n-1} \;\leq\; B_n \;\leq\; 2\,A_{2^{n-1}}. \tag{1}$$

A partir de esta cadena de desigualdades deduciremos fácilmente que $\{A_n\}$ está mayorada si y solo si lo está $\{B_n\}$.

Etapa base $n = 1$. Se tiene $A_1 = a_1 \le a_1 = B_1 \le 2a_1 = 2A_1$.
Paso inductivo. Supongamos que 1 es cierta para n. Por ser $\{a_n\}$ decreciente, se tiene que $j \le 2^n \le k \Rightarrow a_k \le a_{2^n} \le a_j$, y deducimos que:

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \;\le\; 2^n a_{2^n} = 2\cdot 2^{n-1} a_{2^n} \le\; 2 \sum_{j=2^{n-1}+1}^{2^n} a_j, \tag{2}$$

donde hemos usado que la suma del primer miembro tiene 2^n sumandos, y la del último tiene 2^{n-1}. Usando la hipótesis de inducción y (2) tenemos

$$A_{2^{n+1}-1} = A_{2^n-1} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \le A_{2^n-1} + 2^n a_{2^n} \le B_n + 2^n a_{2^n} = B_{n+1},$$

y también

$$B_{n+1} = B_n + 2^n a_{2^n} \le 2A_{2^n-1} + 2^n a_{2^n} \le 2\left(A_{2^n-1} + \sum_{j=2^{n-1}+1}^{2^n} a_j\right) = 2A_{2^n}.$$

Como $\{A_n\}$ y $\{B_n\}$ son crecientes, $A_n \le A_{2^n-1} \le B_n$, luego $\{A_n\}$ está mayorada si lo está $\{B_n\}$. Recíprocamente, si $\{A_n\}$ está mayorada, entonces también lo está su subsucesión A_{2^n-1}, y por tanto B_n. ■

Idea de la demostración

La clave son las dos estimaciones que se obtienen de la monotonía decreciente de $\{a_n\}$:

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \;\le\; 2^n a_{2^n}, \qquad 2^n a_{2^n} \;\le\; 2 \sum_{j=2^{n-1}+1}^{2^n} a_j.$$

La primera *condensa*: en el bloque de 2^n sumandos sustituimos cada uno por el mayor del bloque, a_{2^n}. La segunda *descondensa*: repartimos el único término $2^n a_{2^n}$ en una suma de 2^{n-1} términos, cada uno $\ge a_{2^n}$.
El mecanismo se visualiza comprobando el caso $n = 4$:

$$\begin{aligned} A_{15} &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + (a_8 + a_9 + \cdots + a_{15}) \\ &\le a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 \;=\; B_4 \\ &\le 2\big(a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8)\big) \;=\; 2A_8. \end{aligned}$$

En la primera desigualdad cada bloque se *condensa* mayorando por su primer término; en la segunda, $8a_8$ se *descondensa* mayorando por $a_5 + a_6 + a_7 + a_8$ (y análogamente $4a_4$ por $(a_3 + a_4)$ y $2a_2$ por $a_1 + a_2$).

Esto ejemplifica por qué $A_{2^n-1} \le B_n \le 2A_{2^n-1}$ y, por tanto, la equivalencia de convergencia. ■

La convergencia de la serie armónica de exponente $p \in \mathbb{N}$ podría haberse estudiado aplicando un único criterio, de la siguiente manera:

Ejemplo

Problema. Estudiar la convergencia de la serie armónica con exponente p,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}, \qquad p \in \mathbb{N}.$$

Resolución. Aplicamos la condensación a $a_n = \dfrac{1}{n^p}$ (sucesión decreciente y positiva):

$$\sum_{n\geq 0} 2^n a_{2^n} = \sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{(2^n)^p} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2^{\,p-1}}\right)^n.$$

Es una geométrica de razón $1/2^{p-1}$. Converge si $p > 1$ y diverge si $p = 1$. Por el criterio de condensación, la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$ converge para $p > 1$ y diverge (positivamente) para $p = 1$.

Ejemplo

Problema. Para $q \in \mathbb{N}$, estudiar la convergencia de

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt[q]{n}}.$$

Resolución. Sea $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt[q]{n}}$. Entonces $a_n > 0$ y $\{a_n\}$ es decreciente, por lo que podemos aplicar el *criterio de condensación*. Calculamos

$$2^n a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n \sqrt[q]{2^n}} = \frac{1}{\sqrt[q]{2^n}} = \left(\frac{1}{2^{1/q}}\right)^n.$$

La serie condensada $\sum_{n\geq 0} 2^n a_{2^n}$ es geométrica de razón $2^{-1/q} < 1$, luego es convergente. Por el criterio de condensación, también converge la serie inicial

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt[q]{n}}.$$

(Equivalente a la serie armónica de exponente $1 + \frac{1}{q} > 1$.)

3.3 Criterios de convergencia para series de signo variable

Hasta ahora hemos estudiado series de términos no negativos. Pasamos al caso general, y consideramos series $\sum_{n\geq 1} x_n$ con $x_n \in \mathbb{R}$.

En primer lugar, nos damos cuenta de que el caso realmente nuevo es cuando aparecen infinitos términos positivos e infinitos términos negativos, ya que:

(1) Si el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n < 0\}$ es finito, existe $m \in \mathbb{N}$ de forma que $x_n \geq 0$ para $n \geq m$, y

sabemos que la convergencia de $\sum_{n\geq 1} x_n$ equivale entonces a la de

$$\sum_{n\geq m} x_n,$$

que es de términos no negativos.

(2) De forma análoga, si $\{n \in \mathbb{N} : x_n > 0\}$ es finito, estudiamos entonces la $\sum_{n\geq 1}(-x_n)$, que se encuentra en las condiciones del punto (1).

Cuando $\sum_{n\geq 1} x_n$ tiene infinitos términos positivos e infinitos negativos, resulta natural comparar la serie con $\sum_{n\geq 1} |x_n|$, lo que nos lleva a la siguiente noción:

Definición 3.14. Dada una serie de números reales $\sum_{n\geq 1} x_n$, diremos que es *absolutamente convergente* cuando la serie de valores absolutos

$$\sum_{n\geq 1} |x_n|$$

es convergente.

Como la nomenclatura sugiere, toda serie absolutamente convergente es convergente. Este hecho es una consecuencia del Teorema de completitud de $\mathbb{R}$.

Teorema 3.15. Toda serie absolutamente convergente es convergente. Más aún, si $\sum_{n\geq 1} |x_n|$ converge, entonces $\sum_{n\geq 1} x_n$ también converge y

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Demostración

Consideremos las sumas parciales de ambas series: $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ y $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ para $n \in \mathbb{N}$. Para $p, q \in \mathbb{N}$ con $q < p$,

$$|S_p - S_q| = \left|\sum_{k=q+1}^{p} x_k\right| \leq \sum_{k=q+1}^{p} |x_k| = \sigma_p - \sigma_q = |\sigma_p - \sigma_q|.$$

Nótese que la desigualdad anterior es obvia cuando $p = q$ y, si $p < q$, basta intercambiar las etiquetas de p y q. Por tanto, es válida para todo $p, q \in \mathbb{N}$.

Sabemos que $\{\sigma_n\}$ converge, luego es de Cauchy. Por la desigualdad anterior, $\{S_n\}$ también es de Cauchy y, por completitud de $\mathbb{R}$, converge. Es decir, la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ es convergente.

Finalmente, como $|S_n| \leq \sigma_n$ para todo n y $\sigma_n \to \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$, pasamos al límite y obtenemos

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

■

El recíproco no es cierto, y para entender por qué estudiaremos las *series alternadas* y el *criterio de Leibniz*, que proporciona numerosos ejemplos de series convergentes que no lo son absolutamente.

Definición 3.16. Llamamos *serie alternada* a cualquier serie de la forma

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n \qquad \text{o} \qquad \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1} a_n,$$

donde $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por ejemplo, la serie

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

recibe el nombre de *serie armónica alternada.* Claramente, esta serie no es absolutamente convergente, ya que $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge, pero veremos enseguida que sí es convergente.

Proposición 3.17 (Criterio de Leibniz)**.** Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente con $\{a_n\} \to 0$. Entonces la serie alternada

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$$

es convergente.

Demostración

Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$. Vamos a demostrar que S_n es convergente probando que S_{2n-1} y S_{2n} convergen al mismo límite.

Usando que a_n es decreciente y $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\begin{aligned} S_{2n-1} &\leq S_{2n-1} + \underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{\geq 0} = S_{2n+1} \\ &\leq S_{2n+1} + a_{2n+2} = S_{2n+2} = S_{2n} \underbrace{-a_{2n+1} + a_{2n+2}}_{\leq 0} \leq S_{2n}. \end{aligned}$$

En resumidas cuentas, hemos visto que $S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}$. Por tanto, $\{S_{2n-1}\}$ es creciente y $\{S_{2n}\}$ es decreciente. En particular,

$$S_1 \leq S_{2n-1} \leq S_{2n} < S_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por ser sucesiones monótonas y acotadas, son convergentes, pero es claro que

$$\{S_{2n} - S_{2n-1}\} = \{a_{2n}\} \longrightarrow 0.$$

Esto nos da que S_{2n} y S_{2n-1} tienen el mismo límite, y por tanto S_n también converge a dicho límite (recuérdese el ejercicio de la página 28). ■

Anexos del capítulo

3.A Convergencia incondicional

Complementamos este capítulo discutiendo sobre la pregunta que nos hicimos al principio: ¿es realmente correcto interpretar la suma de una serie convergente como la suma de todos los términos de una sucesión?

Hemos visto que en algunos casos la suma de una serie presenta ciertas propiedades de distributividad y de asociatividad. Nos preguntamos ahora por la posible conmutatividad en un sentido muy general: si permutamos de cualquier forma los sumandos de una serie, ¿se mantiene la convergencia y la suma de la serie sigue siendo la misma? Vamos a comentar algunos resultados acerca de esta cuestión, sin entrar en las demostraciones.

Definición 3.18. Una *permutación* de los números naturales es una aplicación biyectiva $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Dadas una sucesión $\{x_n\}$ y una permutación π de los números naturales, podemos formar la sucesión $\{x_{\pi(n)}\}$, que consiste en reordenar los términos de $\{x_n\}$ según π.

Pues bien, si la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ es convergente y la suma de series verificase la propiedad conmutativa, la serie *reordenada* $\sum_{n\geq 1} x_{\pi(n)}$ debería ser convergente y tener la misma suma que la serie de partida. En principio esto no está nada claro, ya que es difícil relacionar las sumas parciales de ambas series.

Definición 3.19. Se dice que una serie de números reales $\sum_{n\geq 1} x_n$ es *incondicionalmente convergente* cuando, para cualquier permutación π de los números naturales, la serie reordenada

$$\sum_{n\geq 1} x_{\pi(n)}$$

es convergente.

Es claro que toda serie incondicionalmente convergente es convergente, pues basta tomar $\pi(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De hecho, se tiene la siguiente equivalencia:

Teorema 3.20. Sea $\sum_{n\geq 1} x_n$ una serie de números reales. Entonces, $\sum_{n\geq 1} x_n$ es incondicionalmente convergente si, y solo si, es absolutamente convergente. En tal caso:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

para toda permutación $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Como se ha dicho, no vamos a exponer con detalle la demostración de esta equivalencia, pero sí vamos profundizar en un hecho que aparece tácitamente en el resultado anterior: si $\sum_{n\geq 1} x_n$ converge pero no lo hace absolutamente, podemos reordenar sus términos para formar una sucesión divergente. Pero peor aún, incluso para las reordenaciones que dan lugar a series convergentes, la suma que se obtiene depende de la permutación de los números naturales que usemos. Este resultado se debe al matemático alemán Bernhard Riemann y puede enunciarse como sigue.

Teorema 3.21 (Teorema de Riemann)**.** Sea $\sum_{n\geq 1} x_n$ una serie convergente, que no converja absolutamente, y fijemos $s \in \mathbb{R}$. Entonces existen permutaciones π_+, π_- y π_s de los números naturales, tales que $\sum_{n\geq 1} x_{\pi_+(n)} \to +\infty$, $\sum_{n\geq 1} x_{\pi_-(n)} \to -\infty$ y la serie $\sum_{n\geq 1} x_{\pi_s(n)}$ converge, con

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi_s(n)} = s.$$

Dicho de forma más intuitiva, toda serie convergente que no converja absolutamente, puede reordenarse para que diverja positivamente, para que diverja negativamente, y también para que converja a cualquier número real que queramos.

Como conclusión general, podemos decir que si la serie *converge absolutamente*, está justificado pensar que la suma de la serie responde a la idea intuitiva de sumar todos los términos de $\{x_n\}$. En particular, este es el caso de las series convergentes de términos no negativos. Sin embargo, cuando $\sum_{n\geq 1} x_n$ es convergente, pero no absolutamente convergente, esa idea intuitiva debe manejarse con precaución.

Capítulo 4

Funciones reales de una variable real

4.1 Introducción

En muchos contextos científicos es necesario describir la forma en que una magnitud depende de otra. Una manera sistemática de hacerlo es mediante el concepto de *función*.

Históricamente, la idea de función surgió en el siglo XVII al estudiar relaciones entre cantidades variables en física y geometría. Por ejemplo, Galileo describía la posición de un cuerpo en movimiento como dependiente del tiempo, y en el siglo XVIII Leibniz y Euler consolidaron el término *función* para referirse a una regla que asigna a cada valor de una variable otro valor determinado.

La primera función de la ciencia.

A comienzos del siglo XVII, la física empezó a orientarse hacia la observación y la experimentación. Uno de los primeros grandes descubrimientos fue comprender que el mismo principio que explica muchos de los fenómenos terrestres es el que también gobierna los movimientos de los planetas en el cielo: la *Gravitación Universal*. En ese contexto, Galileo Galilei (Pisa 1564 – Florencia 1642) fue el primero en plantear que los fenómenos naturales podían analizarse cuantitativamente: midiendo magnitudes y relacionándolas mediante leyes matemáticas.

La caída de los cuerpos.

Galileo cuestionó la idea, heredada de Aristóteles, de que los cuerpos más pesados caen más rápido. Según narra la tradición, dejó caer dos esferas, una de hierro y otra de madera, desde la torre de Pisa, observando que llegaban al suelo al mismo tiempo. Concluyó que, en ausencia de resistencia del aire, todos los cuerpos caen con la misma aceleración. Sin embargo, comprobarlo con precisión era difícil en una época en la que no existían cronómetros como los que conocemos; la caída era demasiado rápida para medir los tiempos con exactitud.

Para superar esa dificultad, Galileo ideó un experimento más controlable: hacer rodar una esfera por un plano inclinado. Así suavizaba la acción de la gravedad, consiguiendo que el movimiento fuese más lento. Variando la inclinación del plano, podía comparar los resultados y extrapolarlos al caso de la caída vertical.

Galileo colocó pequeñas campanillas a lo largo de la rampa, de modo que sonaran al paso de la esfera. Ajustó su posición hasta lograr que sonaran a intervalos de tiempo iguales, que medía con una clepsidra (reloj de agua). Después midió las distancias entre las campanillas, es decir, los espacios recorridos por la esfera en intervalos iguales de tiempo.

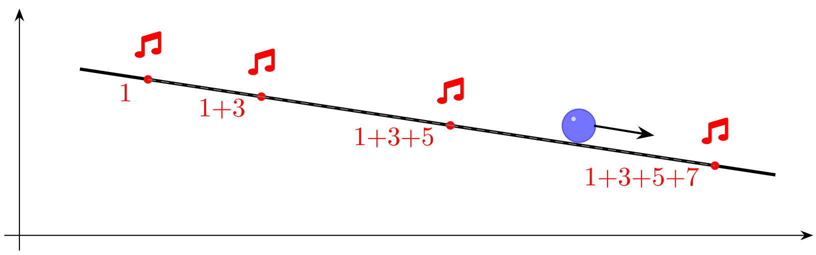
Según los resultados del experimento, esas distancias seguían la progresión 1, 3, 5, 7, . . . , lo que indicaba que el cuerpo recorre espacios cada vez mayores, pero con una regularidad precisa. De hecho, la misma conclusión podía obtenerse cambiando la inclinación del plano y la masa de la esfera. Sumando esos incrementos, Galileo obtuvo

$$\begin{aligned} d(1) &= 1, \\ d(2) &= 1 + 3 = 4, \\ d(3) &= 1 + 3 + 5 = 9, \\ d(4) &= 1 + 3 + 5 + 7 = 16, \end{aligned}$$

es decir, distancias proporcionales al cuadrado del tiempo transcurrido:

$$d(t) = C\,t^2.$$

Galileo había descubierto la primera relación funcional entre dos magnitudes físicas: la distancia recorrida por un cuerpo en caída (o en un plano inclinado) y el tiempo transcurrido. Esa expresión, aunque simple, representa un cambio radical en la forma de entender la naturaleza: a partir de entonces, describir un fenómeno significaría encontrar la función que relaciona sus variables.



Las funciones permiten, por tanto, expresar de manera precisa la *dependencia* que existe entre dos magnitudes reales. Algunos ejemplos cotidianos son:

(1) La altura de una persona en función de su edad.

(2) El número de ejemplares de una especie en un determinado hábitat en función del tiempo.

De forma general, el concepto de función recoge la idea de que un conjunto de datos puede depender de otro. En su formulación moderna, una función es una ley o correspondencia que asocia a cada elemento de un conjunto un único elemento de otro.

Definición 4.1. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos. Llamamos *función real de variable real* a cualquier aplicación $f : A \to B$, esto es, una correspondencia que asigna a cada elemento $x \in A$ un **único** elemento $f(x) \in B$.

Para definir una función suele usarse la siguiente notación, que especifica el dominio de definición de una función f, así como la *ecuación* que nos permite obtener $f(x)$ a partir de x.

$$f\colon A \to B, \qquad x \mapsto f(x) = \cdots \qquad \text{o} \qquad f\colon A \to B, \qquad f(x) = \cdots$$

Puesto que sólo vamos a trabajar con este tipo de funciones, cuando usemos la palabra *función*, nos referimos siempre a una función real de variable real.

Definición 4.2. El conjunto $f(A)$ de los valores que toma y se llama *imagen* o *recorrido* de f.

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ para algún } x \in A\}$$

Dado que toda aplicación $f : A \to B$ es en particular una aplicación $f : A \to \mathbb{R}$, siempre podemos escribir lo segundo. Especificar que una función f devuelve valores en B es una forma de enfatizar la propiedad $f(A) \subset B$. Por ejemplo, la función *parte entera de* x suele denotarse como $\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, ya que $\lfloor x\rfloor \in \mathbb{Z}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Nótese que si elegimos $B = f(A)$, f se convierte automáticamente en una aplicación **sobreyectiva**.

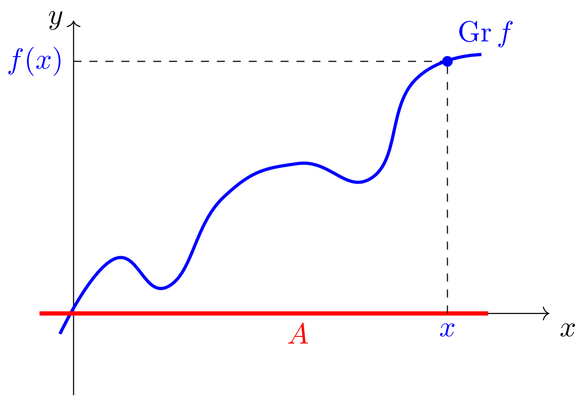
Toda función real queda completamente determinada por su *gráfica*, que es el siguiente subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Gr} f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

Si representamos este conjunto en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, los puntos (x, y) que forman $\operatorname{Gr} f$ son aquellos que cumplen dos condiciones: la abscisa x es un punto de A y la ordenada y es su imagen por f. En resumidas cuentas:

$$\operatorname{Gr} f = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A,\ y = f(x) \,\}.$$

Por definición de función, para cada $x \in A$ la recta vertical que pasa por $(x, 0)$ contiene **un único punto de la gráfica**, el que verifica $y = f(x)$. Si $x \notin A$, dicha recta no corta a la gráfica de f.

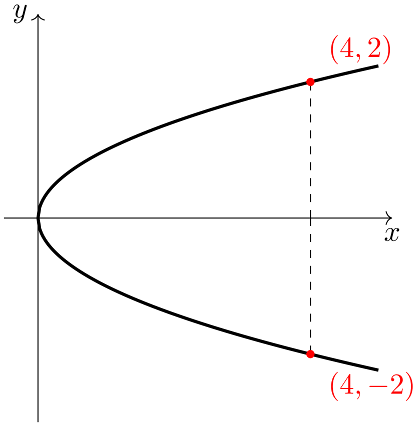


Geométricamente, al proyectar $\operatorname{Gr} f$ sobre el eje de abscisas se obtiene el conjunto A donde f está definida y, para cada $x \in A$, $f(x)$ es el único $y \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y) \in \operatorname{Gr} f$.

Esto motiva la notación $y = f(x)$ para $x \in A$ a la hora de definir funciones. Bajo ese punto de vista, a x se le llama *variable independiente*, e y se dice que es la *variable dependiente*. En términos de relaciones entre magnitudes, es conveniente pensar en x como en un *dato* y en y como en un *resultado*. La función f juega el papel del modelo que nos permite predecir el resultado y a partir del dato x.

Date cuenta: La relación $y^2 = x$ en $\mathbb{R}^2$ **no define** la gráfica de una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ya que existen valores de x con dos imágenes. Por ejemplo, para $x = 4$, tenemos $y = 2$

e $y = -2$.



En cambio, $x \mapsto \sqrt{x}$ y $x \mapsto -\sqrt{x}$ sí son funciones (definidas por ejemplo en $[0, +\infty)$).

Definición 4.3. Dada una relación $y = f(x)$, llamamos *dominio natural* o *dominio maximal* de f al mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ donde puede definirse f, y lo denotamos por

$$\mathrm{Dom}(f) = \{\, x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

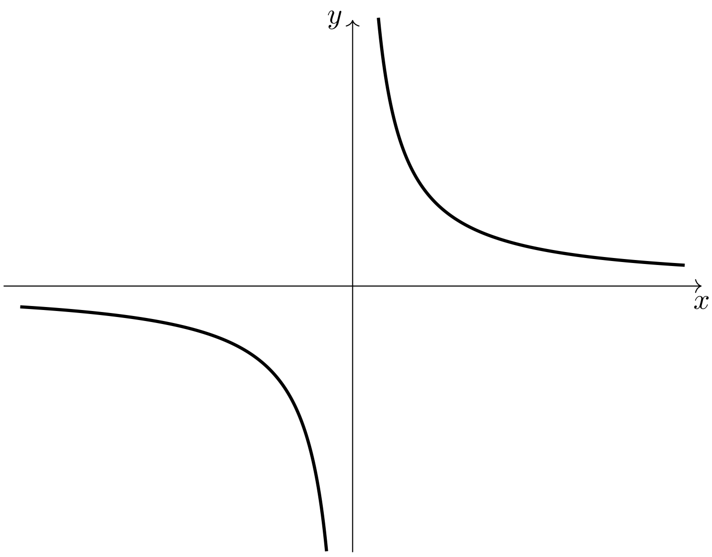
Ejemplos.

(1) Si f es una función *polinómica*, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, ya que podemos sumar, multiplicar y elevar a potencias naturales cualquier número real.

(2) Llamamos función racional a cualquier función f de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, siendo p y q funciones polinómicas. Se tiene

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}.$$

La función racional $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ puede definirse para todo $x \in \mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Su representación gráfica es una *hipérbola* de dos ramas.

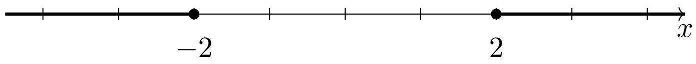


(3) Para $n \in \mathbb{N}$, el dominio maximal de una *función radical* de la forma $f(x) = \sqrt[2n]{g(x)}$ son los puntos donde el radicando g es no negativo:

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 0\}.$$

Si $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, entonces

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 > 0\} = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty).$$



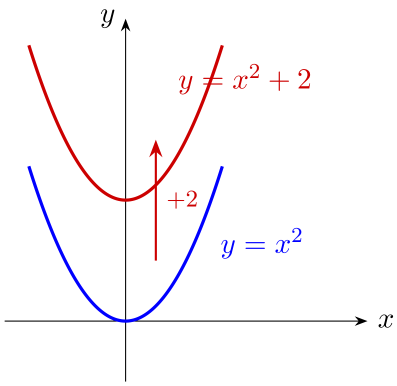
Conocida la gráfica de una función, es fácil obtener la de funciones similares obtenidas mediante *transformaciones elementales* de la original, como son las traslaciones, las dilataciones y las reflexiones.

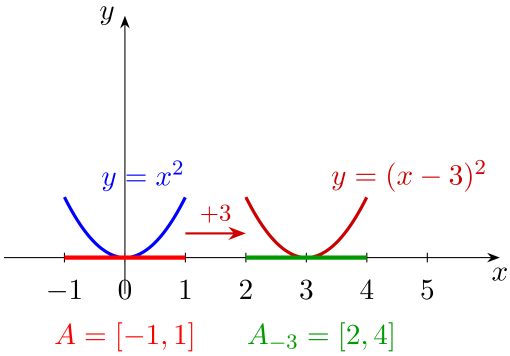
Definición 4.4. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Dado $c \in \mathbb{R}$, llamamos

$$A_c = \{z \in \mathbb{R} : z + c \in A\} = \{x - c : x \in A\}.$$

(1) La **traslación horizontal** de c unidades de f es la función $g : A_c \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = f(x+c)$. Si $c > 0$, se trata de una traslación a la izquierda, y si $c < 0$, una traslación a la derecha.

(2) La **traslación vertical** de c unidades de f es la función $g : A \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = f(x) + c$. Si $c > 0$, estamos trasladando la función f hacia arriba, y si $c < 0$, hacia abajo.





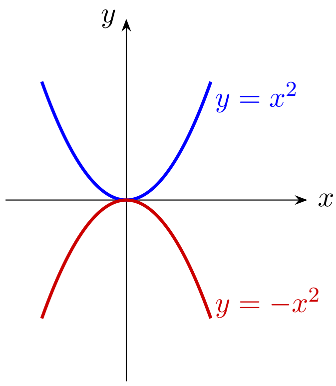
Definición 4.5. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Dado un $c \in \mathbb{R}^*$, llamamos

$$cA = \{cx : x \in A\}.$$

(1) La **reflexión respecto al eje** x de f es la función $g : A \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = -f(x)$.

(2) La **reflexión respecto al eje** y de f es la función $g : -A \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = f(-x)$.

(3) La **reflexión respecto al origen** de f es la función $g : -A \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = -f(-x)$.



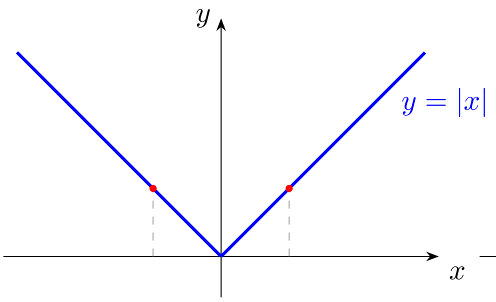
Reflexión respecto al eje x: cada punto $(x, y) \in \mathrm{Gr}(f)$ se transforma en $(x, -y) \in \mathrm{Gr}(g)$.

Las funciones que permanecen invariantes ante las transformaciones (1) o (3) tienen gráficas simétricas, lo que se traducirá en propiedades analíticas útiles a la hora de calcular sus integrales.

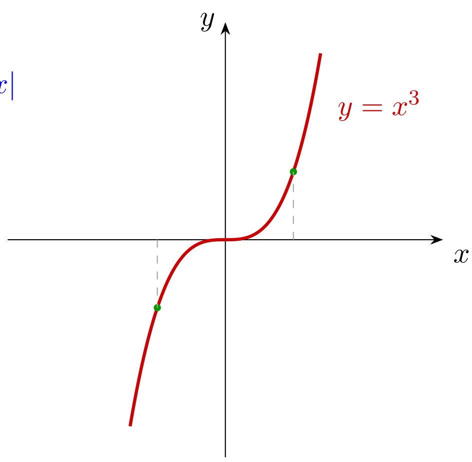
Definición 4.6. Sea $A \subset \mathbb{R}$ tal que $-A = A$. Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es

(1) **simétrica par** si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in A$.

(2) **simétrica impar** si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in A$.



Función par: $|-x| = |x|$



Función impar: $(-x)^3 = -x^3$

Las gráficas de las funciones pares tienen la propiedad de que al plegarlas a lo largo del eje y, las mitades a ambos lados del origen son coincidentes. Análogamente, si plegamos la gráfica de una función impar a lo largo de ambos ejes, las mitades a ambos lados del $(0, 0)$ resultan coincidentes.

Finalmente, discutimos las transformaciones que consisten en *modificar la escala* de la variable o de la función.

Definición 4.7. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $c > 0$.

Si $c > 1$:

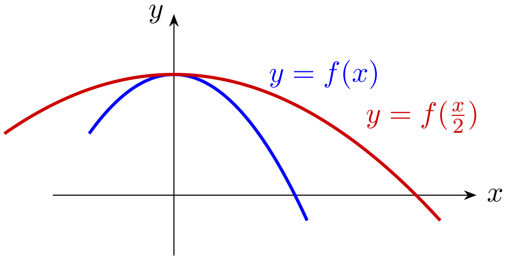
(1) La **contracción horizontal** de razón c es la función $g : \frac{1}{c}A \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(cx)$.

(2) La **dilatación vertical** de razón c es la función $g : A \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = cf(x)$.

Si $c < 1$:

(3) La **dilatación horizontal** de razón c es la función $g : \frac{1}{c}A \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(cx)$.

(4) La **contracción vertical** de razón c es la función $g : A \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = cf(x)$.



Dilatación horizontal de razón 1/2.

En general, una función puede obtenerse combinando varias de las transformaciones anteriores. Por ejemplo, si partimos de $f(x) = x^2$, podemos representar la gráfica de la función

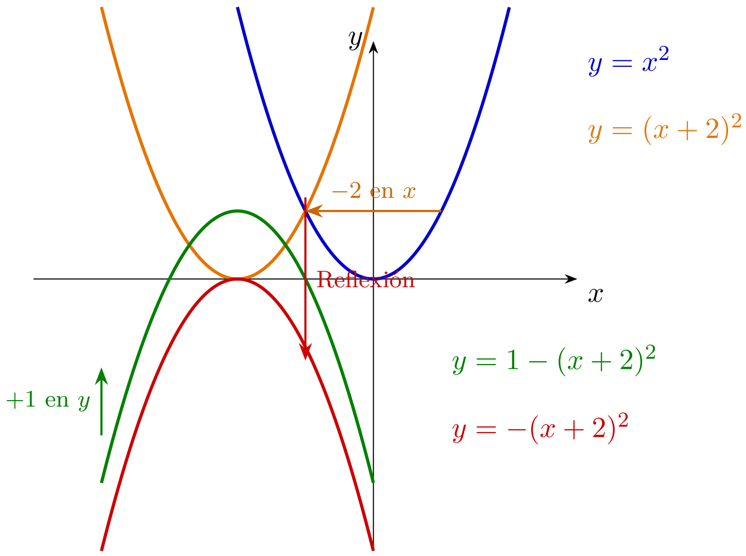
$$g(x) = 1 - (x+2)^2,$$

su gráfica se obtiene aplicando sucesivamente:

(1) una traslación 2 unidades a la izquierda $(x + 2)$;

(2) una reflexión respecto al eje x (signo negativo delante del cuadrado);

(3) una traslación 1 unidad hacia arriba (el $+1$ final).



Composición de transformaciones: traslación, reflexión y traslación vertical.

Enumeramos a continuación las operaciones algebraicas que podemos hacer con dos funciones definidas en un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ no vacío. Para ello, definimos $\mathcal{F}(A)$ como el conjunto de todas las funciones $f : A \to \mathbb{R}$.

Definición 4.8. Para cualesquiera $f, g \in \mathcal{F}(A)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos las siguientes operaciones:

(1) **Suma:** $f + g \in \mathcal{F}(A)$, siendo $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in A$.

(2) **Producto:** $fg \in \mathcal{F}(A)$, siendo $(fg)(x) = f(x)\,g(x)$, $\forall x \in A$.

(3) **Producto por escalares:** $\alpha f \in \mathcal{F}(A)$, siendo $(\alpha f)(x) = \alpha\, f(x)$, $\forall x \in A$.

(4) **Cociente:** Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, entonces $f/g \in \mathcal{F}(A)$, con

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad \forall x \in A.$$

Las propiedades de la suma y producto de números reales se traslada inmediatamente a la de funciones. La suma de funciones es asociativa y distributiva, y tiene como elemento neutro a la función $x \mapsto 0$ para todo $x \in A$. Además, toda $f \in \mathcal{F}(A)$ tiene una función opuesta, $-f$. El producto por su parte es asociativo, conmutativo y distributivo respecto de la suma, y además posee el elemento neutro $x \mapsto 1$ para todo $x \in A$. Así pues, $(\mathcal{F}(A), +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

Para $\alpha \in \mathbb{R}$, a menudo interpretaremos α como la función que vale constantemente α, esto es, $f_\alpha : A \to \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = \alpha$. En particular, escribimos $f = 0$ para decir que $f(x) = 0$ para todo $x \in A$, y por $f \neq 0$ entendemos que existe un $x \in A$ tal que $f(x) \neq 0$.

Entonces, el producto por escalares no es más que un caso particular del producto de funciones, aunque conviene resaltar que (1) y (3) dotan a $\mathcal{F}(A)$ de estructura de *espacio vectorial* (de dimensión infinita).

Si $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, f tiene una inversa para el producto; la función $1/f$. Sin embargo, salvo en el caso trivial en que A es un solo punto, esta condición es más fuerte que $f \neq 0$. Por tanto $\mathcal{F}(A)$, en general, no es un cuerpo.

Preferimos evitar la notación f^{-1} para referirnos a la función $1/f$, ya que esta se reserva para la función inversa respecto a la composición de funciones.

Definición 4.9. Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A) \subset B$. Definimos la composición de f con g como la función $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ dada por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad \forall x \in A.$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Ejemplo: consideremos la función valor absoluto $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $V(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para cualquier función $f : A \to \mathbb{R}$ se tiene trivialmente que $f(A) \subset \mathbb{R}$, lo que nos permite considerar la función compuesta

$$(V \circ f)(x) = V(f(x)) = |f(x)|, \qquad \forall x \in A,$$

que se suele denotar por $|f|$.

Ejemplo

Problema. Consideremos las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = |x|$, $g(x) = x^3 - x$. Comprobemos que $(f \circ g) \neq (g \circ f)$.

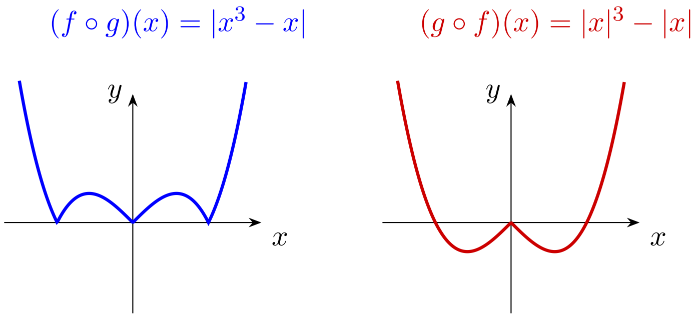
Resolución. Calculamos:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = |x^3 - x|, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = |x|^3 - |x|.$$

A primera vista las expresiones son parecidas, pero no coinciden. Por ejemplo, para $x = -\frac{1}{2}$:

$$(f \circ g)(-\tfrac{1}{2}) = |(-\tfrac{1}{2})^3 + \tfrac{1}{2}| = \tfrac{3}{8}, \qquad (g \circ f)(-\tfrac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2})^3 - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{3}{8}.$$

Si representamos ambas composiciones vemos de forma más clara las diferencias:

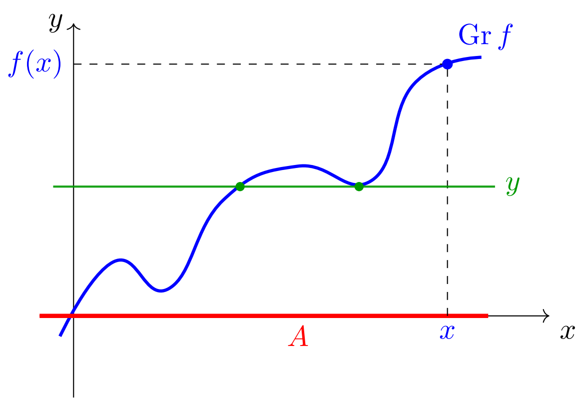


En conclusión, el orden en que se componen las funciones es esencial: aunque ambas composiciones tengan sentido, generalmente $(f \circ g) \neq (g \circ f)$.

Definición 4.10. Sea $f : A \to \mathbb{R}$. Recordamos que f es **inyectiva** si nunca toma el mismo valor en dos puntos distintos del conjunto A, es decir, si se verifica que

$$x, y \in A, \quad f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; x = y.$$

Si $f : A \to B$ es una función inyectiva, entonces la ecuación $y = f(x)$ tiene una única solución (en x), lo que se traduce gráficamente en que cada recta horizontal a altura $y \in f(A)$ interseca a Gr f en un solo punto.



Gráfica de una función no inyectiva.

Definición 4.11. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función inyectiva. Entonces f puede considerarse como una aplicación biyectiva de A sobre $f(A)$, y podemos definir su **función inversa**

$$f^{-1} : f(A) \to A,$$

asociando a cada $y \in f(A)$ el único $x \in A$ que cumple $f(x) = y$, es decir,

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{tal que} \quad f(x) = y.$$

Obsérvese que tiene sentido considerar las composiciones $f^{-1} \circ f$ y $f \circ f^{-1}$, y se verifica, por definición:

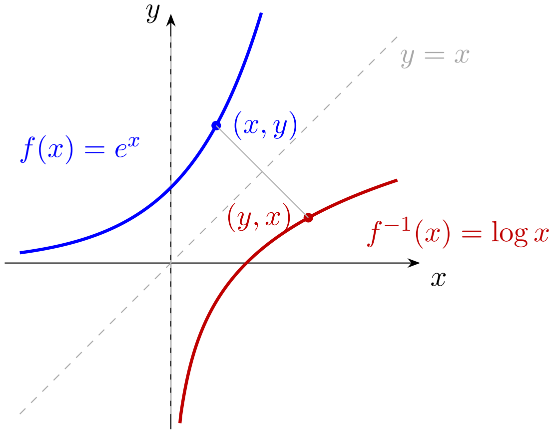
$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in A, \qquad \text{y} \qquad (f \circ f^{-1})(y) = y \quad \forall y \in f(A).$$

Las igualdades anteriores suelen leerse diciendo que $f^{-1} \circ f$ es la **función identidad** en A, y $f \circ f^{-1}$ la identidad en $f(A)$. Además, f^{-1} también es inyectiva y su inversa es la función original, es decir,

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Cuando f^{-1} existe, su gráfica es la imagen especular de la gráfica de f respecto a la bisectriz del primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$, esto es, la recta de ecuación $y = x$.

Para comprobarlo, basta darse cuenta de que $y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x$. En particular, si el punto (x, y) pertenece a la gráfica de f, entonces el punto (y, x) pertenece a la gráfica de f^{-1}.



Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la recta $y = x$.

La simetría deja claro que la inversa no siempre existe como función. Por ejemplo, si $f(x) = 2$, su gráfica es la recta horizontal $y = 2$; reflejada respecto a $y = x$ se obtiene la recta vertical $x = 2$, que no es la gráfica de ninguna función $y = h(x)$.