

Problemas resueltos de Cálculo I

Sergio Cruz Blázquez sergio.cruz@uam.es

Tema 1: Los números reales

5a) Demostrar que $2^n > n^2$ para todo $n \geq 5$.

Lo hacemos por inducción. Etapa base: $n=5$ $2^5 = 32 > 5^2 = 25$ ✓

Paso inductivo: suponemos que $2^n > n^2 \forall n \geq 5$, y queremos ver que $2^{n+1} > (n+1)^2$. Razonamos como sigue:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < 2^n + 2n + 1 \quad \begin{array}{l} \text{hipótesis de ind.} \\ \text{factor común } 2^n \end{array} = 2^n \left(1 + \frac{2n}{2^n} + \frac{1}{2^n} \right) = (*)$$

Puesto que $2^n > n^2$, entonces $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n^2}$, y de ahí se sigue que

$$(*) = 2^n \left(1 + \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right) = 2^n \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right).$$

De igual forma, como $n \geq 5$, entonces $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{5}$, y nos queda:

$$2^n \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \leq 2^n \underbrace{\left(1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{25} \right)}_{< 2} < 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$$

4c) Probar que $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1}$, para $n \geq 2$

Por comodidad, resumimos $P(n)$ usando sumatorios:

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Date cuenta; hacemos inducción sobre n , no k !

Etapas base: $n=2$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=2}^3 \frac{1}{k} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \\ \sum_{k=1}^3 \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \end{aligned} \right\} \checkmark$$

Paso inductivo: Suponemos que $\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, y buscamos

llegar a que

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Vamos a partir de esta

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} \\ &= \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} + \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}}_{\text{añadimos lo que necesitamos}} - \underbrace{\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}}_{\text{lo restamos para que quede igual}} + \frac{1}{2n+1} = \end{aligned}$$

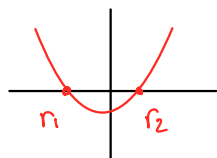
$$\begin{aligned} &= \sum_{k=n}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} \\ &\quad \downarrow \\ &\quad \text{sacamos el } n\text{-ésimo término del sumatorio} \end{aligned}$$

2c) Encontrar los valores de x que satisfacen: $|x^2 - 5x + 6| < 2$.

Como $2 > 0$, podemos usar la propiedad $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$, y resolver:

$$-2 < x^2 - 5x + 6 < 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} -2 < x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 8 > 0 \\ x^2 - 5x + 6 < 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 0 \end{array} \right.$$

(dos desigualdades)



$ax^2 + bx + c$, $a > 0$
positivo en $]-\infty, r_1[\cup]r_2, +\infty[$
negativo en $]r_1, r_2[$

$x^2 - 5x + 8$ no tiene raíces reales, así que es siempre positivo, la 1ª ecuación se verifica para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 4. \text{ Entonces, } x^2 - 5x + 4 < 0 \Leftrightarrow x \in]1, 4[.$$

2b) $|x+1| \leq |x-1|$. No elevamos al cuadrado, es más fácil distinguir casos:

Si $x < -1$, $-x-1 \leq -x+1 \Leftrightarrow -1 \leq 1$ Se cumple siempre

Si $-1 \leq x \leq 1$, $x+1 \leq -x+1 \Leftrightarrow 2x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

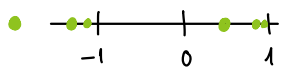
Los puntos $x \in [-1, 0]$ satisfacen la ecuación.

Si $x > 1$, $x+1 < x-1 \Rightarrow 1 < -1$, no se verifica nunca.

Juntando toda la información: $x \in]-\infty, 0]$.

8d) Decidir si el conjunto $\{(-1)^n - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado y calcular, si existen, su supremo y su infimo. (A)

Vemos cómo son los puntos del conjunto A: $\{-2, \frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots\}$



Esto nos hace pensar que A es acotado, su infimo es -2 y su supremo es 1.

Por un lado; $n \geq 1 \Rightarrow 1/n \leq 1 \Rightarrow -1/n \geq -1$. Esto nos da

$$(-1)^n - \frac{1}{n} \geq -1 - 1 = -2.$$

Como $-2 \in A$ y es una cota inferior, tenemos que $-2 = \min A$.

Veamos ahora que $1 = \sup A$. Empezamos viendo que 1 es una cota superior:

$$(-1)^n - 1/n \leq 1 - 1/n \leq 1$$

Ahora, comprobamos que $\forall \varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$1 - \varepsilon \leq (-1)^n - 1/n \leq 1$$

Por la propiedad arquimediana de \mathbb{R} , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 \leq \varepsilon$, lo que nos da $1 - \varepsilon \leq (-1)^{n_0} - 1/n_0$. Si tomamos $n_1 \in \mathbb{N}$ como un natural par $\geq n_0$, tenemos

$$1 - \varepsilon \leq (-1)^{n_1} - 1/n_1 = 1 - 1/n_1 \leq 1,$$

como queríamos.

$$7a) \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\} = \left\{ \frac{n-1}{n} : n \geq 2 \right\} = \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \geq 2 \right\} = A.$$

Mayorado: $1 - \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces A está mayorado.

Minorado. $n \geq 2 \Rightarrow 1/n \leq 1/2 \Rightarrow -1/n \geq -1/2 \Rightarrow 1 - 1/n \geq 1 - 1/2 = 1/2$.

Como $1/2$ es una cota inferior y $1/2 \in A \Rightarrow \min A = 1/2$.

Veamos ahora que $\sup A = 1$, pero no es un máximo ($1 \notin A$).

Dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $a \in A$ ($1 - 1/n$ con $n \geq 2$) tal que

$$1 - \varepsilon \leq 1 - 1/n \leq 1. \quad (-\varepsilon \leq -1/n \Rightarrow \varepsilon \geq 1/n \Rightarrow 1/\varepsilon \leq n)$$

Tomamos $n \geq \max\{2, 1/\varepsilon\}$, y vemos que se tiene

$$n > 1/\varepsilon \Rightarrow 1/n \leq \varepsilon \Rightarrow -1/n \geq -\varepsilon \Rightarrow \underbrace{1 - 1/n}_{\in A} \geq 1 - \varepsilon$$

Tema 2: Sucesiones de números reales

Ejercicio 6 a) $\left\{ \frac{1}{n!} \right\}$ Tenemos que $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 \geq n$, lo que nos da:

$$0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0, \text{ por lo que } \left\{ \frac{1}{n!} \right\} \rightarrow 0.$$

b) $\left\{ \frac{2 \cos(3n) + 5 \sin(n^2)}{n+1} \right\}$. Tomamos valor absoluto:

$$0 \leq \frac{|2 \cos(3n) + 5 \sin(n^2)|}{n+1} \leq \frac{2|\cos(3n)| + 5|\sin(n^2)|}{n+1} \leq \frac{7}{n+1} \rightarrow 0$$

$$\text{Entonces, } \left\{ \frac{2 \cos(3n) + 5 \sin(n^2)}{n+1} \right\} \rightarrow 0.$$

c) $\left\{ \frac{(-1)^{n+1} + 2^{-n} + \cos(n!)}{\sqrt{n}} \right\}$ Tomamos valor absoluto:

$$0 \leq \left| \frac{(-1)^n + 2^{-n} + \cos(n!)}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{2 + 2^{-n}}{\sqrt{n}} = \frac{2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt{n}} \leq \frac{5/2}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

→ Sucesión decreciente, la podemos acotar por el primer término

$$\text{Por tanto } \left\{ \frac{(-1)^{n+1} + 2^{-n} + \cos(n!)}{\sqrt{n}} \right\} \rightarrow 0$$

$$7c) \sqrt{n^2+1} - n = \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{n^2+1 - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}$$

$$\sqrt{n^2+1} \rightarrow +\infty \text{ (porción de } \sqrt{n}) \text{ y } n \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} \rightarrow 0.$$

$$7d) \underbrace{n \sqrt{n^2+1} - n^2}_{\text{Racionalizamos}} = \frac{n^2(n^2+1) - n^4}{n\sqrt{n^2+1} + n^2} = \frac{n^2}{n\sqrt{n^2+1} + n^2} = \text{dividimos por } n^2 \text{ numerador y denominador}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \rightarrow 1/2$$

$$7f) \quad a_n = \frac{6^n}{5^n + (-6)^n} = \frac{1}{\frac{5}{6} + (-1)^n} \cdot \frac{1}{6^n}$$

$$a_{2n} = \frac{1}{1 + (\frac{5}{6})^{2n}} \rightarrow 1$$

$$a_{2n-1} = \frac{1}{(\frac{5}{6})^n - 1} \rightarrow -1$$

La sucesión no converge, ya que tiene dos subsucesiones que convergen a distintos límites.

8a) Lo hacemos de dos formas:

$$\begin{aligned} \text{Por un lado, } \sqrt[n]{2n^3} &= e^{\frac{1}{n} \log(2n^3)} = e^{\frac{1}{n} \log 2 + \frac{3}{n} \log n} = \\ &= e^{\frac{\log 2}{n}} e^{\frac{3 \log n}{n}} \rightarrow e^0 \cdot e^0 = 1. \end{aligned}$$

Alternativamente, si $\{a_n\} = 2n^3$, vemos que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)^3}{2n^3} \rightarrow 1$,
luego $\sqrt[n]{2n^3} \rightarrow 1$ por el criterio de la raíz.

8f) Llamamos $a_n = \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$ ($\rightarrow 1$) y $b_n = n$

Estudiamos la sucesión $b_n(a_n - 1) = n \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 2 + \frac{1}{n} \rightarrow 2$,
luego $a_n^{b_n} \rightarrow e^2$

10. a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_n = a_n + b_n \leq \underbrace{A+B}_{\text{no depende de } n} \Rightarrow A+B$ es una

cota superior de $\{C_n\} \Rightarrow C \leq A+B$ (C es la menor cota superior).

b) Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son crecientes $\Rightarrow \{a_n\} \rightarrow A$ y $\{b_n\} \rightarrow B$

Pero entonces $\{c_n\}$ también es creciente $\Rightarrow \{c_n\} \rightarrow C$

$$(c_n = a_n + b_n \leq a_{n+1} + b_{n+1} = c_{n+1})$$

Por las propiedades y la unicidad del límite,

$$C \leftarrow \{c_n\} = \{a_n + b_n\} \rightarrow A + B \Rightarrow A + B = C.$$

c) Falso, $\{a_n\} = (-1)^n$ $\sup a_n = 1$
 $\{b_n\} = (-1)^{n+1}$ $\sup b_n = 1$
 $\{a_n + b_n\} = \{0\}$ $\sup c_n = 0.$

13. $a_0 = 1, a_1 = 2, a_n = \frac{3}{2}a_{n-1} - \frac{1}{2}a_{n-2}$ para cada $n \geq 2$.

a) Demostremos por inducción que $\{a_n\}$ es creciente de la siguiente manera:

Etapas base: $a_0 < a_1$ ($1 < 2$ ✓)

Paso inductivo: Suponiendo que $a_{n-1} < a_n$ para algún n , probemos que $a_n < a_{n+1}$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3}{2}a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1}) > 0$$

b) Comprobemos ahora que $a_n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hacemos una inducción empezando en $n = 2$:

Etapas base: $a_0 = 1 < 3, a_1 = 2 < 3, a_2 = \frac{5}{2} < 3.$ ✓

Paso inductivo: Suponiendo que $a_n < 3$ para algún $n \geq 2$, veamos que $a_{n+1} < 3$.

$$a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} < \frac{9}{2} - \frac{1}{2}a_{n-1}$$

Como $\{a_n\}$ es creciente, $a_{n-1} \geq a_1 = 2 \quad \forall n \geq 2$, por lo que $-a_n \leq 2$. Esto nos da:

$$a_{n+1} < \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{7}{2} \quad (= 3.5)$$

No importa cuanto aumentemos la etapa base, siempre nos da una cota estrictamente mayor a 3...

(Es fácil demostrar otras cotas como que $a_n < 5$, pero calcular el límite es muy complicado usando la ley de recurrencia).

12. Sea $1 < t \leq 4$, y sea $\{x_n\}$ la sucesión definida mediante

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{t}{x_n} \right) = \frac{1}{2} \frac{x_n^2 + t}{x_n}$$

a) $\sqrt{t} \leq x_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Empezamos con la cota superior:

Lo hacemos por inducción, teniendo en cuenta que

Etapla base: $\sqrt{t} \leq \sqrt{4} = 2 = x_1 \leq 2$ ✓

Paso inductivo: Supongamos que $\sqrt{t} \leq x_n \leq 2$ para algún $n \in \mathbb{N}$, y comprobemos que $\sqrt{t} \leq x_{n+1} \leq 2$.

Por un lado, $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{t}{2x_n} \leq 1 + \frac{t}{2\sqrt{t}} = 1 + \frac{\sqrt{t}}{2} \leq 2$.

Por otro lado, $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{t}{2x_n} \geq \frac{\sqrt{t}}{2} + \frac{t}{4} \geq \frac{\sqrt{t}}{2} + \frac{\sqrt{t}}{2} = \sqrt{t}$,

donde hemos usado que $1 < t \Rightarrow t < t^2 \Rightarrow \sqrt{t} < t$.

Alternativamente, podemos usar que $(a+b)^2 \geq 4ab$ para tener que

$$x_{n+1}^2 = \frac{1}{4} \left(x_n + \frac{t}{x_n} \right)^2 \geq t \Rightarrow x_{n+1} \geq \sqrt{t},$$

y demostrar a continuación que $x_{n+1} \leq 2$ usando esa información.

Veamos ahora que $\{x_n\}$ es decreciente ($x_{n+1} \leq x_n \forall n \in \mathbb{N}$). Para esto, basta tener en cuenta que $0 < \sqrt{t} < x_n \Rightarrow t < x_n^2$.

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{t}{x_n} \right) \leq \frac{1}{2} (x_n + x_n) = x_n.$$

Como $\{x_n\}$ está minorada y es decreciente, entonces $\{x_n\} \rightarrow L$.

Pasando al límite la identidad $x_{n+1} = \left(x_n + \frac{t}{x_n} \right)$ tenemos

$$2L = L + \frac{t}{L} \Rightarrow L^2 = t \Rightarrow L = \sqrt{t}, \text{ o } L = -\sqrt{t}.$$

Como teníamos $x_n \geq \sqrt{t} \forall n \in \mathbb{N}$, ha de tenerse necesariamente

$$L = \sqrt{t}$$

Tema 3 Series de números reales

2a) $\sum_{n \geq 2} x_n, \quad x_n = \log \frac{n}{n+1}$

$$x_n = \log \frac{n}{n+1} = \log n - \log(n+1) = -\log(n+1) - (-\log n)$$

$$\text{Entonces } \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n (-\log(k+1) - (-\log k)) = -\log(n+1).$$

$$\text{Por tanto, } \sum_{n \geq 1} \log \frac{n}{n+1} \longrightarrow -\infty.$$

2b) $\sum_{n \geq 1} x_n, \quad x_n = \frac{1}{n(n+2)}. \quad x_n = \frac{1/2}{n} + \frac{-1/2}{n+2} = \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} \right)$

$$\text{Entonces, } \sum_{k=1}^n x_k = \frac{-1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k} \right) = \frac{-1}{2} \sum_{k=1}^n (y_{k+2} - y_k),$$

siendo

$$y_k = \frac{1}{k} \quad \forall k \geq 1.$$

Vemos que $\sum_{k=1}^n (y_{k+2} - y_k) = y_3 - y_1 + y_4 - y_2 + y_5 - y_3 + \dots + y_{n+1} - y_{n-1} + y_{n+2} - y_n = y_{n+2} + y_{n+1} - y_1 - y_2.$

Entonces,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+2)} = \left\{ \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} - 1 - \frac{1}{2} \right) \right\} \rightarrow \frac{3}{4}.$$

5d) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n} - 1}{3n^2 + 4}$ Observamos que el término general

Asintótico (comportamiento parecido en ∞)

$$a_n = \frac{\sqrt{n} - 1}{3n^2 + 4} \sim \frac{1}{n^{3/2}},$$

así que vamos a usar el criterio de comparación por paso al límite con $b_n = 1/n^{3/2}$.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(\sqrt{n} - 1) n^{3/2}}{3n^2 + 4} = \frac{n^2 - n^{3/2}}{3n^2 + 4} \rightarrow 1/3.$$

Por el criterio de comparación por paso al límite, $\sum_{n \geq 1} x_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} 1/n^{3/2}$ converge, que sí lo hace porque $3/2 > 1$.