

## Estatística

*Sérgio Manuel Salazar dos Santos, N<sup>o</sup>: 1020881*

26 de Dezembro de 2019

# Conteúdo

A	Introdução . . . . .	3
B	O conjunto de dados . . . . .	3
C	Metodologia Estatística . . . . .	6
	C.1    Índice de Confiança tempo médio TEE . . . . .	6
	C.2    Verificar diferença de valores num intervalo . . . . .	6
	C.3    Verificar diferenças entre as regiões . . . . .	7
	C.4    Ajuste distribuição teórica à Empírica . . . . .	8
	C.5    Relação Erro Tipo 1 e 2 da alínea 3.3 . . . . .	8
D	Resultados e interpretação . . . . .	11
E	Conclusões . . . . .	11

## **Resumo**

Este trabalho consiste no estudo de Estatística das Entregas Expresso em duas regiões **A** e **B**, as variáveis em estudo é o tempo de demora das entregas e a variável de número de encomendas entregues num determinado unidade de tempo [u.t.]. Nestas situações foram retiradas 120 e 90 amostras nas duas regiões respectivamente. A primeira é uma distribuição contínua, o tempo, e a segunda uma distribuição discreta.

As matérias abordadas vão ser **Amostragem**, **Estimação de parâmetros** e **Testes de Hipóteses**

# 1 Introdução

As variáveis consideradas são:

- Região (REG): variável nominal com dois níveis  
Região A  
Região B
- Tempo de entrega (TEE), por encomenda: Variável expressa em u.t.
- Número de encomendas entregues (NEE) por u.t.

Admitindo que a amostra disponível é uma amostra aleatória representativa das populações.

Neste relatório esta-se a trabalhar com duas grandezas precisamente o tempo (TEE) e quantidade por u.t (NEE), temos recolhidos 120 registos **TEE** na qual pela regra de sturges  $c = \text{int}(1 + 3.3\log(n))$ , determina-se que é necesario sete [7] classes.

Podemos obter a amplitude de cada classe  $h = b - a$  e sua marca  $x_i = \frac{a+b}{2}$ .

## 2 O conjunto de dados

### Tratamento dos dados da Variável Aleatória

$X_{iA}$  - "Variável aleatória que representa o tempo de demora na Região **A** da entrega de uma encomenda Expresso em u.t."  $i=1,2,3, \dots, 120$

$X_{iB}$  - "Variável aleatória que representa o tempo de demora na Região **B** da entrega de uma encomenda Expresso em u.t."  $i=1,2,3, \dots, 120$

Abaixo o resultado da tabela TEE:

Recorrendo ao excell obteve-se os seguintes resultados.

$h_i$	CLASSE	MARCA	$n_{iA}$	$n_{iB}$	$\frac{n_{iA}}{h_i}$	$\frac{n_{iB}}{h_i}$	$f_{iA}$	$f_{iB}$	$F_{iA}$	$F_{iB}$	$e_{iA}$
$-\infty$	< 5		0	0							1,1812
4	[5,10[	7,5	8	1	2	0,25	0,0667	0,0083	0,0667	0,0083	5,9871
4	[10,15[	12,5	16	18	4	4,5	0,1333	0,15	0,2	0,1583	18,8942
4	[15,20[	17,5	40	28	10	7	0,3333	0,2333	0,5333	0,3917	33,6282
4	[20,25[	22,5	25	41	6,25	10,25	0,2083	0,3417	0,7417	0,7333	33,7887
4	[25,30[	27,5	26	22	6,5	5,5	0,2167	0,1833	0,9583	0,9167	19,1663
4	[30,35[	32,5	4	8	1	2	0,0333	0,0667	0,9917	0,9833	6,1316
5	[35,40]	37,5	1	2	0,2	0,4	0,0083	0,0167	1	1	1,1044
$+\infty$	>40		0	0							0,1183
			n=120	n=120							

$n_i$  - frequência absoluta     $f_i$  - frequência relativa     $F_i$  - frequência acumulada

Média aritmetica dados classificados

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^c x_i n_i = \sum_{i=1}^c x_i f_i$$

Variância de uma amostra dados classificados

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^c (x_i - \bar{x})^2 n_i$$

Estatística	$X_A$	$X_B$
Mínimo	7,5	7,5
$Q_1$ :1º Quartil	17,5	17,5
$m_d$ : mediana	17,5	22,5
$Q_3$ :3º Quartil	27,5	27,5
Máximo	37,5	37,5
$\bar{X}$ : Média	20,0417	21,5417
$s$ : desvio-padrão	6,4494	6,0909
$m_o$ : moda	17,5	22,5
Tamanho amostral $[n]$	120	120

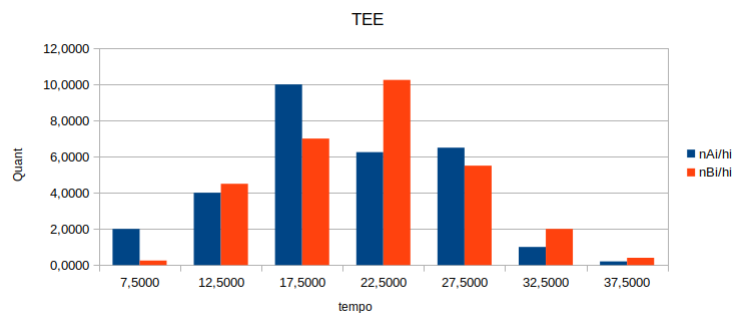


Figura 1: TEE

A mediana pode ser obtida pela frequência acumulativa quando esta é igual a 50%, ou seja,  $F_i(\text{Mediana}) = 0,5$

### Linearização mediana **TEE**

Regiao **A**:

$$0.2 \Rightarrow 12.5$$

$$0.5333 \Rightarrow 17.5$$

∴

Midiana A =

$$12.5 + 0.9 \times (17.5 - 12.5) = 17$$

com:

$$\text{skew} = -0,1051 \text{ e kurt} = -0,4016$$

Regiao **B**:

$$0.3917 \Rightarrow 17.5$$

$$0.7333 \Rightarrow 22.5$$

∴

Midiana B =

$$17.5 + 0.317 \times (22.5 - 17.5) = 19.085$$

com :

$$\text{skew} = 0,1119 \text{ e kurt} = -0,1835$$

Na prática, considera-se que a qualidade da aproximação é suficientemente boa quando  $n \geq 30$ .  
Pode-se tomar que  $\delta \cong s$ .

$$\bar{x}_{A_0} = 20,0417 \quad \bar{x}_{B_0} = 21,5417$$

$$\delta_A = 6,4494 \quad \delta_B = 6,0909$$

$$\begin{cases} \mu \\ \delta = s \end{cases} \Rightarrow \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \sim N\left(\mu; \frac{\delta^2}{n}\right)$$

### Tratamento dos dados da Segunda Variável Aleatória

$Y_{iA}$  - "Variável aleatoria que representa o numero de encomendas entregues pela Expresso na Regiao **A** por u.t."  
 $i=1,2,3, \dots, 90$

$Y_{iB}$  - "Variável aleatoria que representa a numero de encomendas entregues pela Expresso na Regiao **B** por u.t."  
 $i=1,2,3, \dots, 90$

Abaixo o resultado da tabela NEE:

$Y_i$	$n_{iA}$	$n_{iB}$	$f_{iA}$	$f_{iB}$	$F_{iA}$	$F_{iB}$	$e_{iB}$
< 3	0	0					1,2765
3	6	3	0,0667	0,0333	0,0667	0,0333	2,8549
4	8	6	0,0889	0,0667	0,1556	0,1	5,3855
5	19	13	0,2111	0,1444	0,3677	0,2444	8,6724
6	15	7	0,1667	0,0778	0,5333	0,3222	11,9216
7	13	19	0,1444	0,2111	0,6778	0,5333	13,9899
8	11	15	0,1222	0,1667	0,8	0,7	14,0145
9	6	8	0,0667	0,0889	0,8667	0,7889	11,9847
10	5	11	0,0556	0,1222	0,9222	0,9111	8,7490
11	4	3	0,0444	0,0333	0,9667	0,9444	5,4522
12	0	2	0	0,0222	0,9667	0,9667	2,9005
13	2	1	0,0222	0,0111	0,9889	0,9778	1,3172
14	1	0	0,0111	0	1	0,9778	0,5106
15	0	1	0	0,0111	1	0,9889	0,1690
16	0	1	0	0,0111	1	1	0,0477
>16	0	0					0,0330

Estatística	$Y_A$	$Y_B$
Mínimo	3	3
$Q_1$ : 1º Quartil	5	6
$m_d$ : mediana	6	7
$Q_3$ : 3º Quartil	8	9
Máximo	14	16
$\bar{Y}$ : Média	6,6111	7,5111
$s$ : desvio-padrão	2,3112	2,5140
$m_o$ : moda	5	7
Tamanho amostral [n]	90	90

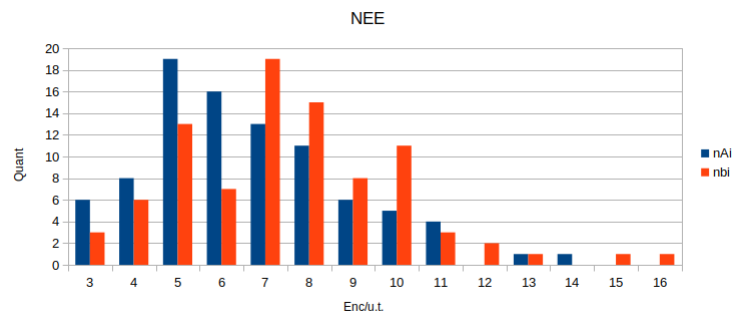


Figura 2: NEE

Na Região **A** a Média > Mediana > Moda  
com skew = 0.74553 e kurt = 0.49789

Na Região **B** a Média > Mediana = Moda  
com skew = 0.67659 e kurt = 1.01076

$$\begin{aligned}\bar{y}_{A_0} &= 6,6111 & \bar{y}_{B_0} &= 7,5111 \\ \delta_A &= 2,3112 & \delta_B &= 2,5140\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \\ \delta \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} \sim N\left(\mu; \frac{\delta^2}{n}\right)$$

### 3 Metodologia Estatística

#### 3.1 Índice de Confiança tempo médio TEE

Estimação do tempo médio para as regiões **A** e **B** com um índice de confiança de 95%.

$$IC_{1-\alpha} = [A, B]; \text{ para } 1 - \alpha = 0.95, \alpha = 0.05, \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$\text{Zona crítica } Z_c = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \Phi^{-1}(0.975) \cong 1.96$$

$$P(A \leq \mu \leq B) = 1 - \alpha$$

$$\Delta = Z_c \times \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

$$A = \bar{x} - \Delta \quad \text{and} \quad B = \bar{x} + \Delta$$

$\therefore$

$$IC_{A_{0.95}} = [18.8877, 21.1956] \quad \text{and} \quad IC_{B_{0.95}} = [20.4519, 22.6314]$$

Pode-se estimar que o tempo médio  $[\mu]$  de entrega na população esta dentro dos intervalos acima mencionados com 95% de confiança.

#### 3.2 Verificar diferença de valores num intervalo

Verificar se os dados permitem afirmar que existe diferença significativa entre a % de períodos com menos de 6 entregas por u.t. na região **A** e na região **B**. Responda com base num intervalo de confiança de 97%.

Distribuição discreta:

$$\bar{y}_{A_0} = 6,6111 \quad \bar{y}_{B_0} = 7,5111 \quad n = 90$$

$$\delta_A = 2,3112 \quad \delta_B = 2,5140$$

$$P(Y_A < 6) = P(Y_A \leq 5) = F_{i_B}(5) \cong 0,3677 \quad \text{e} \quad P(Y_B < 6) = P(Y_B \leq 5) = F_{i_B}(5) \cong 0,2444$$

$$\hat{P}_A - \hat{P}_B \sim N\left(p_A - p_B; \frac{p_A q_A}{n_A} + \frac{p_B q_B}{n_B}\right) \quad \Delta = z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \sqrt{\frac{\hat{p}_A \hat{q}_A}{n_A} + \frac{\hat{p}_B \hat{q}_B}{n_B}} \quad q = (1 - p)$$

$$IC_{97\%}(\hat{P}_A - \hat{P}_B) = [(\hat{p}_A - \hat{p}_B) - \Delta; (\hat{p}_A - \hat{p}_B) + \Delta]$$

$$\hat{P}_A - \hat{P}_B \sim N(0,1233; 0,02788) \quad z_{(1-\frac{\alpha}{2})} = \phi^{-1}(0,985) = 2,1701$$

Recorrendo a calculadora casio  $fx-9860GII$ :

$$\Delta = InvNorm(0.985) \sqrt{\frac{0.3677(1-0.3677)}{90} + \frac{0.2444(1-0.2444)}{90}} \cong 0.3677$$

$\therefore$

$$IC_{97\%}(\hat{P}_A - \hat{P}_B) = [(\hat{p}_A - \hat{p}_B) - 0,3624; (\hat{p}_A - \hat{p}_B) + 0,3624]$$

A Diferença de proporções é 36,24%.

### 3.3 Verificar diferenças entre as regiões

Testar se a região (REG) tem um efeito estatisticamente significativo sobre TEE e NEE ao nível de diferença de médias. Considerando uma significância de 5%. Use o critério do valor de prova para fundamentar a decisão.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_A - \mu_B = 0 \\ H_1 : \mu_A - \mu_B < 0 \end{cases}$$

Condição TEE:

$$\begin{cases} \mu = 0 \\ \delta = s \end{cases} \implies \bar{X} = \bar{X}_A - \bar{X}_B \sim N\left(0, \frac{\delta_A^2}{n_A} + \frac{\delta_B^2}{n_B}\right) ; \quad \frac{\delta_A^2}{n_A} + \frac{\delta_B^2}{n_B} \cong 0.6558$$

$$P(\bar{X}_{H_0} \leq C) = 0.05 \implies RC_X ]-\infty, -1.332] \quad \bar{x}_A - \bar{x}_B = -1.5 \in RC_X$$

$$z_0 = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\frac{\delta_A^2}{n_A} + \frac{\delta_B^2}{n_B}}} \cong -1.8523 \quad RC_z = ]-\infty, -1.6448] \quad pvalue = P(Z < z_0) = 0.032$$

Condição NEE:

$$\begin{cases} \mu = 0 \\ \delta = s \end{cases} \implies \bar{Y} = \bar{Y}_A - \bar{Y}_B \sim N\left(0, \frac{\delta_A^2}{n_A} + \frac{\delta_B^2}{n_B}\right) ; \quad \frac{\delta_A^2}{n_A} + \frac{\delta_B^2}{n_B} \cong 0.1296$$

$$P(\bar{Y}_{H_0} \leq C) = 0.05 \implies RC_Y ]-\infty, -0.5921] \quad \bar{y}_A - \bar{y}_B = -0.9 \in RC_Y$$

$$z_0 = \frac{\bar{y}_A - \bar{y}_B}{\sqrt{\frac{\delta_A^2}{n_A} + \frac{\delta_B^2}{n_B}}} \cong -2.5 \quad RC_z = ]-\infty, -1.6448] \quad pvalue = P(Z < z_0) = 0.0062$$

A Hipotese de proximidade entre as regiões é falsa, ambos os criterios estão dentro da região de rejeição logo a hipotese imposta é falsa. O valor de prova também reforça a ideia pois a percentagem de favorecimento é quase nulo.



### 3.4 Ajuste distribuição teórica à Empírica

Ajuste uma distribuição teórica à distribuição empírica das variáveis TEE na região A (considerando as classes definidas) e NEE na região B. Verifique a qualidade do ajuste ao nível de 5%.

k-numero de classes ; m-numero de parâmetros

TEE Região A:

k=6 , m=2 e  $\alpha=0.05$

$$\begin{cases} H_0 : X \sim N(20.0417, 6.4494^2) \\ H_1 : X \approx N(20.0417, 6.4494^2) \end{cases}$$

$$q_0 = \sum_{i=1}^n \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i} \sim \chi^2_{(k-m-1)}$$

$$RC_{\chi^2} = [InvChiCD(0.05, 3), +\infty] \rightarrow RC_{\chi^2} = [7.8147, +\infty]$$

$$q_0 = 7.2234 < 7.8147$$

NEE Região B:

k=8 , m=2 e  $\alpha=0.05$

$$\begin{cases} H_0 : X \sim N(7.5111, 2.5140^2) \\ H_1 : X \approx N(7.5111, 2.5140^2) \end{cases}$$

$$q_0 = \sum_{i=1}^n \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i} \sim \chi^2_{(k-m-1)}$$

$$RC_{\chi^2} = [InvChiCD(0.05, 5), +\infty] \rightarrow RC_{\chi^2} = [11.0705, +\infty]$$

$$q_0 = 8.5532 < 11.0705$$

Ambas as condições propostas são aceitáveis como distribuições com um grau de confiança de 95%, pois estão fora da região de rejeição.

### 3.5 Relação Erro Tipo 1 e 2 da alínea 3.3

Apresente um gráfico expressando a relação entre o erro tipo I ( $\alpha$ ) e a potência do teste ( $1-\beta$ ), para valores hipotéticos das verdadeiras diferenças de médias calculadas anteriormente no ponto 3.3.

## Distribuição normal Diferença.

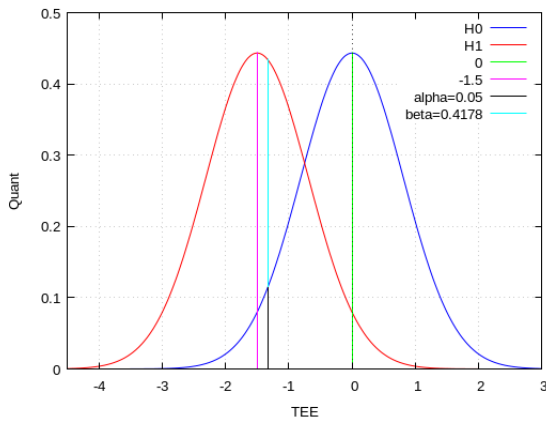


Figura 3: TEE Diferença

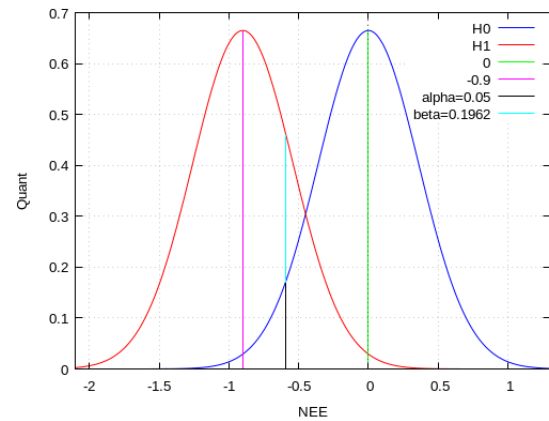


Figura 4: NEE Diferença

## Continuação de 3.3

TEE Região A:

$$\begin{cases} H_0 : \bar{X}_{H_0} \sim N(0, 0.6558) \\ H_1 : \bar{X}_{H_1} \sim N(-1.5, 0.6558) \end{cases}$$

$$\beta = P(\text{Aceitar } H_0 | H_0 \text{ Falsa})$$

$$\beta = (\bar{X}_{H_1} > -1.332)$$

$$\beta = \text{NormCD}(-1.332, 99999999, \sqrt{0.6558}, -1.5) = 0.4178$$

Potência do teste

$$1 - \beta = P(\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ Falsa}) = 0.5822$$

NEE Região B:

$$\begin{cases} H_0 : \bar{Y}_{H_0} \sim N(0, 0.1296) \\ H_1 : \bar{Y}_{H_1} \sim N(-0.9, 0.1296) \end{cases}$$

$$\beta = P(\text{Aceitar } H_0 | H_0 \text{ Falsa})$$

$$\beta = (\bar{Y}_{H_1} > -0.5921)$$

$$\beta = \text{NormCD}(-0.5921, 99999999, \sqrt{0.1296}, -0.9) = 0.1962$$

Potência do teste

$$1 - \beta = P(\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ Falsa}) = 0.8038$$

Sem tempo para fazer grafico relação  $\alpha$  com  $\beta$ .

Hipoteses na qual as amostras reflectem:

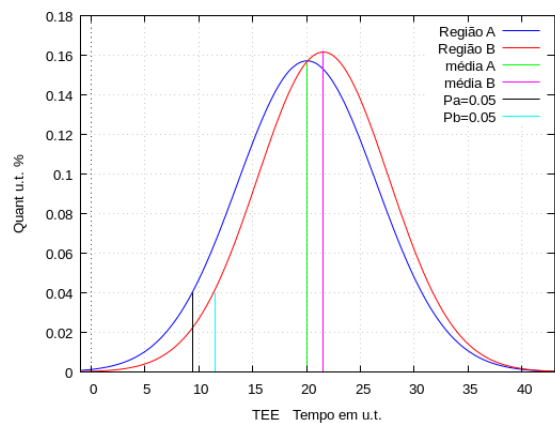


Figura 5: TEE Normal

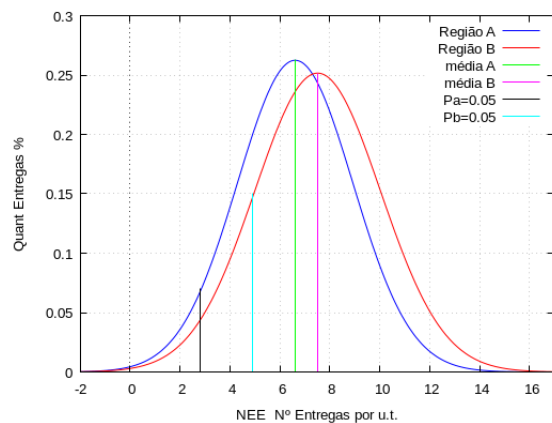


Figura 6: NEE Normal

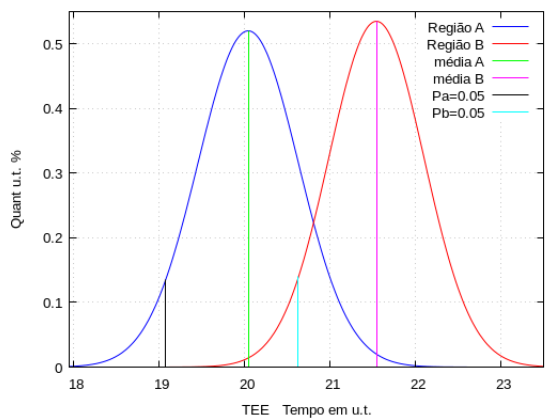


Figura 7: TEE Normal Média

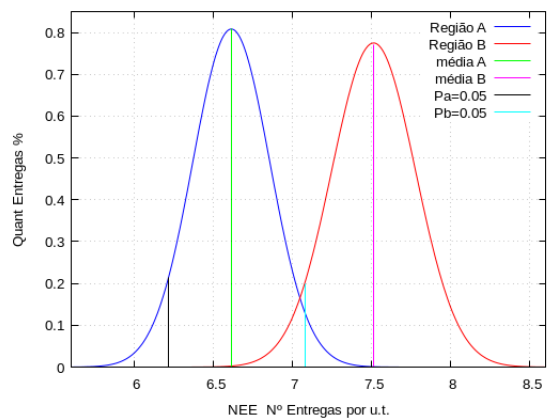


Figura 8: NEE Normal Média

## 4 Resultados e interpretação

A mediana é o ponto de equilíbrio da distribuição nos informa o ponto na qual o peso em ambos os lados é igual, em conjunto com a média e a moda nos pode dar mais informação sobre sua identidade, sobre sua calda e sua forma. Neste trabalho temos quatro distribuições Normais que diferem uma das outras, ou seja cada região tem um comportamento que lhe é próprio.

Algumas deduções estão descritas nos problemas propostos, mas tudo indica que o objectivo é obter uma média representativa dos acontecimentos de forma a poder inferir com uma certa incerteza, o procedimento de normalizar os dados empiricos presuppõe sempre uma perda de alguma informação residual, mas nesta situação como são variáveis imprevisíveis dependendo de muitas variáveis seria melhor ter criterios mais rigorosos e maior numero de amostras.

Comparando o histograma com a distribuição normal hipotetica da para perceber muitas diferenças.

## 5 Conclusões

Este relatório foi feito recorrendo ao excell do libreoffice, em conjunto com a calculadora Casio fx-9860GII e o WxMaxima, portanto todos os resultados não estão apresentados no excell devido aos calculos auxiliares terem sido feitos apart.

A ortographia do relatorio pode ter erros também suas soluções, os exercicios propostos são muito abrangentes e o tempo definido curto para sua exploração mais detalhada, sendo que podia ser muito mais elaborado e feito mais testes para ter um estudo mais aprofundado.

Muitas das questões levam a ter dúvidas de forma a aprofundar a matéria, dando a sensação na qual não conseguimos obter uma completa percepção no seu todo.

O relatório é um estudo acerca da estatistica das variáveis aleatórias expressas ao redor da **Distribuição Normal** em que sua Média = Mediana = Moda, é uma distribuição simetrica, quando estamos a analizar valores discretos e continuos no mundo real isto não acontece devido a não ser simetrico podendo ter varios casos diferentes, e quanto menor o numero de amostras da população maior a dificuldade de se poder inferir e estimar valores.

Fazer o estudo de uma população para poder inferir seu comportamento através de tiros no escuro, ou seja, hipóteses tomadas como verdades e comparar com os resultados de forma a poder tirar uma decisão das suas preposições.

No caso do  $\chi^2$  podermos averiguar qual o grau de proximidade da distribuição proposta para representar nossos dados, para podermos depois analizar o desconhecido pelo já adquirido, sempre com uma margem de incerteza.

Fazer inferencias acerca de uma população atravez de amostras há sempre a possibilidade de erro, neste caso são dois os tipos identificados. O primeiro tipo é quando se rejeita a hipótese imposta quando ela é verdade, e a segunda aceitar uma hipótese que é falsa, sendo que a segunda no meu ver é mais grave, dado que errar e estar tudo bem é sempre uma boa surpresa, caso contrario um desastre.

Mais uma nota que o pré-requisito o relatório ser inferior a 10 páginas, tera de se retirar o titulo a Lista de figuras, bibliografia e indexação.

# Lista de Figuras

1	TEE . . . . .	4
2	NEE . . . . .	5
3	TEE Diferença . . . . .	9
4	NEE Diferença . . . . .	9
5	TEE Normal . . . . .	10
6	NEE Normal . . . . .	10
7	TEE Normal Média . . . . .	10
8	NEE Normal Média . . . . .	10
[]		

# Bibliografia

- [1] *Probabilidades e estatística Volume 1*. McGraw-Hill, 1990.
- [2] *Probabilidades e Processos Estocásticos*. Universidade de Aveiro, 2002.

1