Instituto Superior de Engenharia do Porto

Estatística (ESTAT)

2019/2020

LEEC

C2A – Distribuições de probabilidade (1ª parte)
Variáveis aleatórias
Distribuições discretas

Luís Afonso 2019/2020. lma@isep.ipp.pt

VARIÁVEL ALEATÓRIA

Def 1: Uma variável aleatória (v.a) é uma função que a cada acontecimento A do espaço do amostragem S de uma experiência aleatória faz corresponder um número real X(A). Usaremos sempre letras maíusculas para designar as v.a.'s.

EXEMPLO 1.

Sejam X e Y as v.a's que representam, respectivamente, o número de caras e o número de mudanças de face, em 3 lançamentos de uma moeda.

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$
CCC	3	0
CCE	2	1
CEC	2	2
CEE	1	1
ECC	2	1
ECE	1	2
EEC	1	1
EEE	0	0

Definições

X-v.a."Número de caras"

Y- v.a. "Número de mudanças de face"

C – "Saída de cara";E-"Saída de coroa"

TIPOS DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Def 2: Uma v.a. **X** diz-se **discreta** se os valores que pode assumir (o seu contradomínio) C_X for numerável ou infinitamente numerável.

No caso anterior as v.a's temos $C_X = \{0,1,2,3\}$ e $C_Y=\{0, 1,2\}$. Por conseguinte X e Y são v.a's **discretas.**

Seja Z v.a. –"nº de acessos a uma página da internet durante um ano"

Neste caso $C_Z=\{0,1,2,3,4,...\}$. Consequentemente Z é também uma v.a. discreta pois o seu contradomínio é infinitamente numerável

As v.a's discretas estão muitas vezes associadas a **processos de contagem.**

Def 3: Uma v.a. diz-se **contínua** se os valores que pode assumir (o seu contradomínio) C_X não for numerável.

Exemplo: X-"atraso de um autocarro (minutos)"

$C_X=[0,+\infty[$

As v.a's contínuas estão geralmente associadas a **processos de medição.**

DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS: CONCEITOS GERAIS

Def 4: Seja X uma v.a. discreta podendo assumir os valores $x_1, x_2, ,\ldots x_i$ com probabilidades $P(X=x_i)=p_i; i=1,2,3,\ldots,$. Então, o quadro de distribuíção de probabilidade dado por:

x_i	x_1	x_2	...	x_k	...
$p_i=P(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_k	...

Propriedades:

$$\boldsymbol{P1)\ p_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, k, \ldots}$$

$$\boldsymbol{P2)\ \sum_{i=1} p_i = 1}$$

Def 5: A função de probabilidade é uma função que associa a cada valor x de X a sua probabilidade $f(x) = P(X = x)$ e tem as seguintes propriedades:

$$(i) f(x) \geq 0 \qquad (ii) \sum_{x} f(x) = 1$$

Nota: Atendendo ao quadro de distribuição

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} p_i & se\, x = x_i \\ 0 & se\, x \neq x_i \end{cases}$$

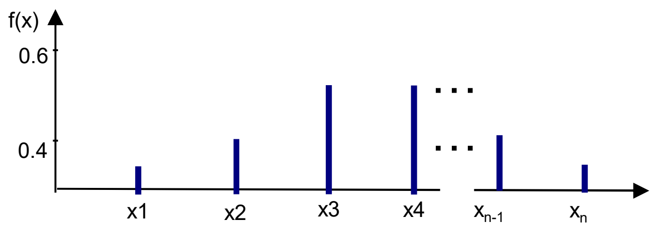
DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS: CONCEITOS GERAIS

Def 6: Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade f(x). A sua **função de distribuição** acumulada F é a função real de variável real dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_k \leq x} P(X = x_k)$$

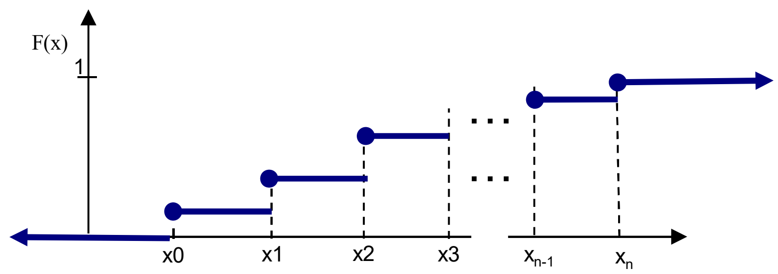
Propriedades:

1. Se $x \leq y$, *então* $F(x) \leq F(y)$ (*F(x) é* uma função crescente, em sentido geral)



2. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$



4. $f(x_k) = F(x_k) - F(x_{k-1})$

onde x_{k-1} e x_k são dois valores consecutivos possíveis da v.a. X

DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS: CONCEITOS GERAIS

Seja X uma v.a. Discreta podendo com quadro de distribuição de probabilidade ou função de probabilidade f(x)

x_i	x_1	x_2	...	x_m	...
$p_i=P(X=x_i)$	p_1	p_2	...	P_m	...

Def 7: Esperança Matemática, valor médio ou valor esperado

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i = \sum_{i=1}^{k} x_i f(x_i)$$

(Medida de localização)

Def 8: Variância

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 p_i$$

(Medida de dispersão)

Def 9: Desvio padrão

$$\sigma = +\sqrt{V(X)}$$

k – número de valores distintos que a v.a pode tomar .

DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS: CONCEITOS GERAIS

Valor médio μ: Algumas propriedades

i) $E[X] = k,\ k\ constante$

ii) $E[k\ X] = k\ E[X]$

iii) $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

Variância σ²: Algumas propriedades

$i)\ V(X) \geq 0$

$ii)\ V(k) = 0, k\ constante$

$iii)\ V(k\ X) = k^2 V(X)$

$iv)\ V(X) = E\left[X^2\right] - \mu^2, \qquad onde\ \ E\left[X^2\right] = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 f(x_i)$

v) $V\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} V[X_i]\ se\ \ X_1, X_2, \dots, X_n\ são\ v.a.'s\ indep.$

DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS: CONCEITOS GERAIS

Exemplo 2a. Numa rifa com bilhetes numerados de 0 a 999 existem
10 terceiros prémios de 50€, 3 segundos prémios de 100€, Um grande prémio de 1000€

Considerando X – "Ganho obtido comprando um bilhete (euros)"
o quadro de distribuição de probabilidade é

Valores possíveis → | x_i | 0 | 50 | 100 | 1000 |
|---|---|---|---|---|

Probabilidades → | p_i | 0.986 | 0.01 | 0.003 | 0.001 |

x_i	0	50	100	1000
p_i	0.986	0.01	0.003	0.001

p_1=P(X=1000)=1/1000

A probabilidade de ser obtido um prémio superior a 50 euros é

P(X>50)=P(X=100)+P(X=1000)=0.004

O valor esperado, ou ganho esperado na compra de um bilhete é

$$\mu = E(X) = \sum_i x_i p_i = 0 \times 0.986 + 50 * 0.01 + 100 * 0.003 + 1000 * 0.001 = 1.8€$$

A variância e o desvio padrão são

$$\sigma^2 = E[X^2] - \mu^2 = 1055 - 1.8^2 = 1051.76\,€^2 \qquad \sigma = \sqrt{1051.76} = 32.43€$$

pois

$$E[X^2] = \sum_i x^2{}_i p_i = 50^2 * 0.01 + 100^2 * 0.003 + 1000^2 * 0.001 = 1055$$

DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS: CONCEITOS GERAIS

Exemplo 2b.

Dois arqueiros A e B estão uma competição. A probabilidade de cada um acertar no alvo é P(A)=0.7, P(B)=0.4. Cada um dos arqueiros disparou uma seta.

Considere a v.a. X –"Número de setas que atingem o alvo"

a) Calcule a função de probabilidade da v.a. X, *f(x)*.

b) Determine a função de distribuição de distribuição da v.a X.

c) Calcule o valor esperado e o desvio padrão da v.a. X.

DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS: CONCEITOS GERAIS

Resolução:

$A -$ Arqueiro A acerta no alvo; $P(A) = 0.7$

B $-$ Arqueiro B acerta no alvo; $P(B) = 0.4$

X – "Número de setas que atinge o alvo"

Nota: A v.a X pode tomar os valores {0,1,2}. Logo é discreta.

$$P(X = 0) = P\left(\bar{A}\bar{B}\right) = P\left(\bar{A}\right)P\left(\bar{B}\right) = 0.3 \times 0.6 = 0.18$$
$$P(X = 1) = P\left(A\bar{B} \cup \bar{A}B\right) = P(A)P\left(\bar{B}\right) + P\left(\bar{A}\right)P(B) = 0.7 \times 0.6 + 0.3 \times 0.4 = 0.54$$
$$P(X = 2) = P(AB) = P(A) \times P(B) = 0.7 \times 0.4 = 0.28$$

a) Calcule a função de probabilidade da v.a. X, *f(x)*.

Temos que $f(x) = P(X = x)$ é $a\ função\ real\ de\ variável\ real$

R: $f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0.18, & x = 0, \\ 0.54, & x = 1, \\ 0.28, & x = 2, \\ 0, & outros\ casos \end{cases}$

DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS: CONCEITOS GERAIS

b) Determine a função de distribuição de distribuição da v.a X.

$Se\ x < 0\ vem\ P(X \leq x) = F(0) = 0$
$Se\ 0 \leq x < 1\ vem\ F(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) = f(0) = 0.18$
$Se\ 1 \leq x < 2\ vem\ F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.18 + 0.54 = 0.72$
$Se\ x \geq 2\ vem\ F(x) = 1$

R: $F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & se \quad x < 0, \\ 0.18, & se \quad 0 \leq x < 1, \\ 0.72, & se \quad 1 \leq x < 2, \\ 1, & se \quad x \geq 2. \end{cases}$

c) Calcule o valor esperado e o desvio padrão do número de setas que atingem o alvo.

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{2} x f(x) = 0 \times 0.18 + 1 \times 0.54 + 2 \times 0.28 = 1.1$$

$$V(X) = E\left(X^2\right) - \mu^2 = \left(\sum_{x=0}^{2} x^2 f(x)\right) - 1.1^2$$

$$= 0^2 \times 0.18 + 1^2 \times 0.54 + 2^2 \times 0.28 - 1.1^2 = 0.45$$

$$\sigma = +\sqrt{V(X)} \approx 0.6708$$

R:$\mu = 1.1;\ \sigma \approx 0.6708$

MODELOS DISCRETOS

As distribuições de v.a. discreta teóricas que vamos estudar são

0) **Distribuição de Bernoulli**

   É a distribuição que conta o número de sucessos numa única prova.

1) **Distribuição Binomial**

   É uma distribuição que está associada, dentro de certas condições, à contagem do número de sucessos em n provas.

2) **Distribuição de Poisson**

   É uma distribuição que está associada, dentro de certas condições, à contagem do número de sucessos que ocorrem num determinado intervalo de tempo/espaço.

DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI

Prova de Bernoulli

É uma experiência aleatória que serve de base a várias distribuições teóricas. Só pode ter um de dois resultados: "sucesso", caso ocorra um determinado acontecimento A, ou "insucesso", caso não ocorra A. Exemplo: Lançar uma moeda e verificar se sai cara (sucesso) ou coroa (insucesso).

Na prática existem muitas situações de interesse que constituem provas de Bernoulli:

- Verificar se uma peça é boa ou defeituosa;
- Observar se o resultado de um exame médico para detecção de uma doença é positivo ou negativo;
- Verificar se um paciente submetido a um tratamento durante um período de tempo fixo, se cura ou não da doença;
- Observar se no lançamento de um dado ocorre ou não a face 5.

DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI

Def 7:**Distribuição de Bernoulli**

É a distribuição associada à contagem do número de sucessos que ocorrem numa única prova de Bernoulli. Representa-se simbolicamente $X \sim B_e(p)$ onde p é a probabilidade de ocorrer "sucesso".

Por conseguinte uma v.a com distribuição $B_e(p)$ só pode tomar um de dois valores: 0 – se ocorrer "insucesso" ou 1 ,caso ocorra sucesso.

Quadro e Função de probabilidade

x_i	0	1
p_i	1-p	p

$$f(x) = \begin{cases} 1-p, & x = 0, \\ p, & x = 1, \\ 0 & outros\ casos \end{cases}$$

O valor médio:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i p_i = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

Variância:

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{2} x^2{}_i p_i - \mu^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

Def 8: **Distribuição Binomial:**

Seja X uma v.a que representa o número de sucessos numa sucessão de n provas repetidas, onde

i) As provas são todas de Bernoulli (sucesso ou insucesso).

ii) As provas são independentes. (O resultado obtido numa das provas não afeta as restantes)

iii) A probabilidade de sucesso é igual em todas as provas. Denotamos por p a probabilidade de obter sucesso.

Diz-se então que X tem distribuição Binomial de parâmetros n e p e representa-se simbolicamente $X \sim B_i(n,p)$

n – Número de provas.

p – Probabilidade de ocorrer “sucesso” numa única prova.($0 \leq p \leq 1$)

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Exemplo:

Seja X – “número de faces 6 obtidas em 4 lançamentos de um dado não viciado”

Designando por p a probabilidade de ocorrer sucesso (sair um 6) e por q a probabilidade de insucesso (não sair um 6). Deste modo q=1-p.

Calculemos a probabilidade do número de “seis” obtido nos 4 lançamentos ser igual a k:onde k=0,1,2,3,4.

Definindo:

A-"Saír 6 (sucesso)"; $p = P(A) = 1/6$

Ā-"não saír 6 (insucesso)"; $q = 1 - p = P(\overline{A}) = 5/6$

Provas independentes (ii)
Prob de sucesso igual em todas as provas(iii)

$$P(X=0) = P(\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}) = P(\overline{A})\cdot P(\overline{A})\cdot P(\overline{A})\cdot P(\overline{A}) = q^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$P(X=1) = P(A\overline{A}\overline{A}\overline{A}) + P(\overline{A}A\overline{A}\overline{A}) + P(\overline{A}\overline{A}A\overline{A}) + P(\overline{A}\overline{A}\overline{A}A) + P(\overline{A}\overline{A}\overline{A}A) = 4P(A)^1 P(\overline{A})^3 = 4p^1q^{4-1} = 4\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$P(X=2) = \binom{4}{2} P(A)^2 P(\overline{A})^{4-2} = \binom{4}{2} p^2 q^{4-2} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

P(X=3)=?

Por conseguinte, só necessitamos de uma fórmula para responder ao pedido.

$$P(X=x) = \binom{4}{x} p^x q^{4-x} = \frac{4!}{x!(4-x)!}\left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{4-x}, \quad x = 0,1,2,3,4$$

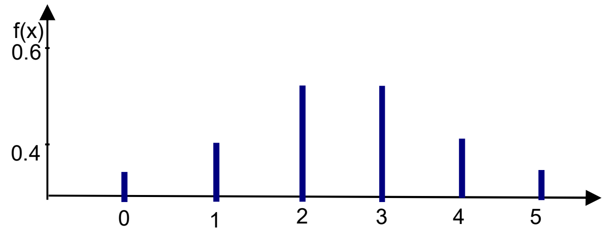
DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Generalizando o exemplo anterior para n provas (lançamentos) e tendo em conta que a v.a. satisfaz os requisitos (i –ii-iii) do diapositivo 11, então podemos afirmar que X tem distribuição Binomial.

Se $X \sim B_i(n,p)$ e notando que *q=1-p então:*

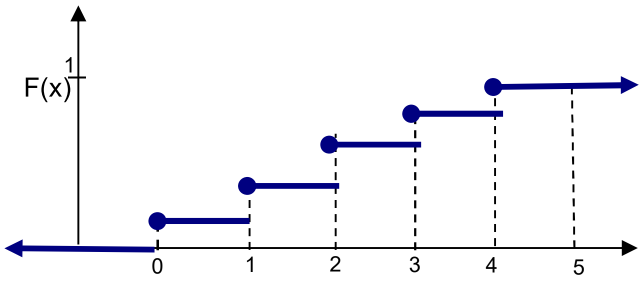
1. Função de probabilidade

$$\boldsymbol{f(x) = P(X = x)} = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & , \quad x = 0,1,2,\dots,n \\ 0 & , \quad x \neq 0,1,2,\dots,n \end{cases}$$



2. Função de distribuição de probabilidade

$$\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x)} = \sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\boldsymbol{x}} \binom{n}{k} p^k q^{n-x}, \boldsymbol{x = 0, 1, 2, \dots, n}$$



3. Valor médio e variância

$$E(X) = np \quad e \ V(X) = npq$$

Prova:

$\boldsymbol{Sejam\ X_i \sim B_e(p): i = 1, 2, \dots, n}$

$$\boldsymbol{ent\text{ã}o, X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B_i(n,p)}$$

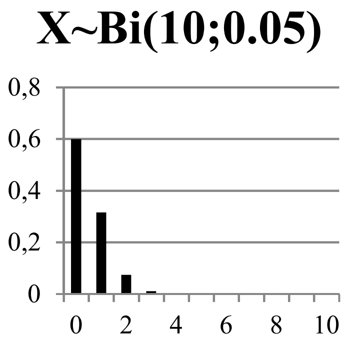
$\boldsymbol{Nota: E(X_i) = p, V(X_i) = pq: i = 1, 2, \dots, n}$

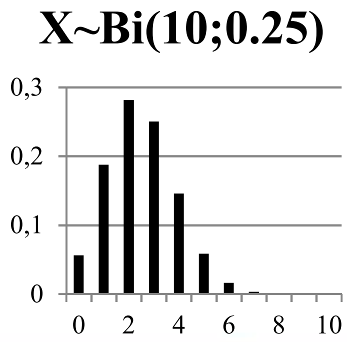
Pelas propriedades da média e variância obtém-se:

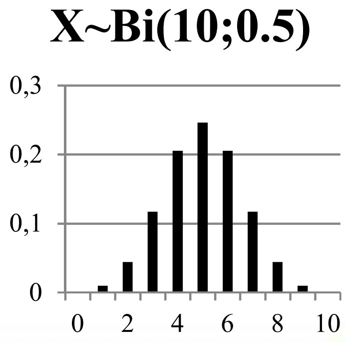
$$\mu = E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$$

$$\sigma^2 = V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = np(1-p) = npq$$

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL







n	x	p 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
10	0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0725	0,0403	0,0207	0,0098
	2	0,0746	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1757	0,1209	0,0763	0,0439
	3	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2522	0,2150	0,1665	0,1172
	4	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2377	0,2508	0,2384	0,2051
	5	0,0001	0,0015	0,0085	0,0264	0,0584	0,1029	0,1536	0,2007	0,2340	0,2461
	6	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0689	0,1115	0,1596	0,2051
	7	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0212	0,0425	0,0746	0,1172
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0043	0,0106	0,0229	0,0439
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0042	0,0098
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010
11	0	0,5688	0,3138	0,1673	0,0859	0,0422	0,0198	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1	0,3293	0,3835	0,3248	0,2362	0,1549	0,0932	0,0518	0,0266	0,0125	0,0054
	2	0,0867	0,2131	0,2866	0,2953	0,2581	0,1998	0,1395	0,0887	0,0513	0,0269
	3	0,0137	0,0710	0,1517	0,2215	0,2581	0,2568	0,2254	0,1774	0,1259	0,0806
	4	0,0014	0,0158	0,0536	0,1107	0,1721	0,2201	0,2428	0,2365	0,2060	0,1611
	5	0,0001	0,0025	0,0132	0,0388	0,0803	0,1321	0,1830	0,2207	0,2360	0,2256
	6	0,0000	0,0003	0,0023	0,0097	0,0268	0,0566	0,0985	0,1471	0,1931	0,2256
	7	0,0000	0,0000	0,0003	0,0017	0,0064	0,0173	0,0379	0,0701	0,1128	0,1611
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0037	0,0102	0,0234	0,0462	0,0806
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018	0,0052	0,0126	0,0269
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0021	0,0054
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0005
12	0	0,5404	0,2824	0,1422	0,0687	0,0317	0,0138	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
	1	0,3413	0,3766	0,3012	0,2062	0,1267	0,0712	0,0368	0,0174	0,0075	0,0029

$X \sim B_i(n; p)$

$\tilde{X} \sim B_i(n; 1-p)$

$P(X = x) = P(\tilde{X} = n - x)$

Consulta para 0<p ≤ 0.5

$X \sim B_i(10; 0.3)$

$a) P(X = 2)_{\begin{cases} n=10 \\ p=0.3 \\ x=2 \end{cases}} = 0.2335$

Consulta quando 0.5<p<1

$X \sim B_i(10; 0.6) \Leftrightarrow \tilde{X} \sim B_i(10; 1-0.6)$

$b) P(X = 2) = P(\tilde{X} = 10 - 2)_{\begin{cases} n=10 \\ p=0.4 \\ x=8 \end{cases}} = 0.0106$

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Exemplo 3. Um aluno vai responder a um teste constituído por 10 grupos. Em cada grupo existem 4 opções de resposta. O aluno não sabe a matéria e responde "à sorte".

a) Calcule a probabilidade do aluno não acertar em nenhuma das questões.

b) Calcule a probabilidade de acertar no mínimo em 2 e em menos de 4 das questões.

c) Calcule a probabilidade de acertar em mais de metade das questões

d) Calcule o valor esperado de respostas certas

Resolução:

X – "número de respostas certas em 10"

Como a v.a. Representa o número de sucessos em n provas idênticas e independentes de Bernoulli, segue-se que $X \sim Bi(10;p)$

Note-se que p é a probabilidade de sucesso numa prova $p=1/4=0.25$

$X \sim Bi(10,0.25)$

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

a) Calcule a probabilidade do aluno não acertar em nenhuma das questões.

$$X \sim B_i(10;0.25)$$

$$f(x) = P(X = x) = \binom{10}{x} 0.25^x (1-0.25)^{10-x}, x = 0,1,2,\ldots,10$$

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0.25^0 0.75^{10} = 0.0563$$

b) Calcule a probabilidade de acertar no mínimo em 2 e em menos de 4.

$$P(2 \le X < 4) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0.5319$$

$$P(X = 2)_{\begin{cases} n=10 \\ p=0.25 \\ x=2 \end{cases}} = 0.2816 \text{ (consulta na tabela/máquina)}$$

$$P(X = 3)_{\begin{cases} n=10 \\ p=0.25 \\ x=3 \end{cases}} = 0.2503 \text{ (consulta na tabela/máquina)}$$

c) Calcule a probabilidade de acertar em mais de metade das questões.

$$P(X > 5) = 1 - P(X \le 5) = 1 - \sum_{x=0}^{5} P(X = x) = 0.0197$$

$$P(X \le 5)_{tabela \begin{cases} n=10 \\ p=0.25 \\ x=6 \end{cases}} = 0.9803 \text{ (consulta na tabela/máquina)}$$

d) Calcule o valor esperado de respostas certas.

$$E(X) = n \cdot p = 10 * 0.25 = 2.5$$

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Processo de Poisson

- Um processo de Poisson refere-se ao número de acontecimentos que ocorrem num intervalo (tempo ou espaço) e que tem as propriedades:

  - A probabilidade de que ocorram x acontecimentos num intervalo de tempo depende apenas do número x e da duração t do intervalo de tempo (não depende do início da contagem)

  - O nº de eventos que ocorrem em intervalos de tempo distintos são independentes (não tem memória)

  - A probabilidade de ocorrer um evento num intervalo muito pequeno é proporcional ao comprimento do intervalo

  - A probabilidade de ocorrer mais do que um evento num intervalo muito pequeno é nula

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Distribuição de Poisson

Pode ser usada para modelizar a ocorrência de acontecimentos raros (acontecimentos com probabilidade de ocorrência baixa).

Os Acontecimentos de interesse (raros) ocorrem com uma taxa média de ocorrência (λ) em intervalos de tempo ou dentro de um espaço limitado.

- Exemplos:
  - Nº de chamadas a um pronto socorro durante a madrugada.
  - O número de defeitos de um tecido por m^2
  - O número de autocarros que chegam à paragem num minuto.
  - O número de acessos a uma página da internet durante o período de uma hora

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Def 10:Distribuição de Poisson

Diz-se que uma v.a. Tem distribuição de Poisson de parâmetro λ>0 se e só se a sua função de probabilidade é

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, & x \in \{0,1,2,...\} \\ 0, & x \notin \{0,1,2,...\} \end{cases}$$

representa-se simbolicamente X~Po(λ)

Função de distribuição de probabilidade

$$F(x) = P(X \leq x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^{k}}{k!}, \, x \in \{0,1,2,...\}, \lambda > 0$$

Valor médio e variância: Pode mostrar-se que o valor médio e a variância são dados, respectivamente, por $\mu = E(X) = \lambda$ **e** $\sigma^2 = V(X) = \lambda$

razão porque se usa, muitas vezes ,a notação X~Po(μ)

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

$\boldsymbol{Se\ X \sim P_o(\lambda)\ então\ E(X) = \lambda}$ **e** $\mathrm{V}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\lambda}$

Demonstração:

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{+\infty} x f(x) = \sum_{x=1}^{+\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

Fazendo $y = x - 1$

$$E(X) = \sum_{y=0}^{+\infty} (y+1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^{y+1}}{(y+1)!}$$

$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{+\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda e^0 = \lambda$

pois sabe-se que o desenvolvimento em série de potências de e^{λ} é dado por:

$$e^{\lambda} = \sum_{y=0}^{+\infty} \frac{\lambda^y}{y!}$$

Utilizando um raciocínio análogo pode mostrar-se que

$$E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

Aplicando as propriedades da variância resulta que

$\mathrm{V}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}^2) - \boldsymbol{\mu}^2 = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda.$

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Teorema:

Se X representa o número de acontecimentos que ocorrem num intervalo de amplitude unitária I e tem distribuição Po(μ) então a v.a que representa o nº de eventos que ocorrem num intervalo de amplitude α tem distribuição Po(αμ).

Exemplo

Suponhamos que a v.a X que representa o número de chamadas que chega a uma central telefónica durante 1 hora tem distribuição de Poisson de média 11.0 chamadas/hora.

Ou seja, X~Po(11.0)

Então a v.a Y-"Número de chamadas que chega durante meia hora " tem distribuição Po(5.5)

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Exemplo 5

Sabe-se que o número de chamadas que chega a uma central telefónica durante 1 hora tem distribuição de Poisson de média 11.0 chamadas/hora.

a) Calcule a probabilidade de durante um hora chegar apenas uma chamada

X-"Número de chamadas, por hora";X~$P_0(11)$

$$P(X=x)=e^{-11}\frac{11^x}{x!}, \quad x=0,1,2,3,...$$

$$R: P(X=1)=e^{-11}\frac{11^1}{1!} \underset{tabela\begin{cases}\mu=11\\x=1\end{cases}}{=} 0.0002$$

b) Calcule a probabilidade de chegarem mais de 6 e menos de 11 chamadas durante uma hora.

$$R: P(6<X<11)=P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=0.3813$$

ou (Valores obtidos na tabela/máquina)

$$R: P(6<X<11)=P(6<X\leq 10)=P(X\leq 10)-P(X\leq 6)=0.3813$$

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Exemplo 5

c) Calcule a probabilidade de durante 15 minutos não chegar nenhuma chamada.

Y-"Número de chamadas, num período de 15 minutos";$X \sim P_0(2.8)$

$$R: P(Y=0) = e^{-2.8}\frac{2.8^0}{0!} =_{tabela\begin{cases}\mu=2.8\\x=0\end{cases}} 0.0608$$

x	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8
0	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608
1	0,2572	0,2438	0,2306	0,2177	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703
2	0,2700	0,2681	0,2652	0,2613	0,2565	0,2510	0,2450	0,2384
3	0,1890	0,1966	0,2033	0,2090	0,2138	0,2176	0,2205	0,2225
4	0,0992	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557
5	0,0417	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872
6	0,0146	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407
7	0,0044	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0139	0,0163
8	0,0011	0,0015	0,0019	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057
9	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018
10	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

x	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8
0	0,0450	0,0408	0,0369	0,0334	0,0302	0,0273	0,0247	0,0224

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Distribuição de Poisson como aproximação à distribuição binomial

Pode mostrar-se que

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda=np}} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \qquad \lambda = np \ fixo$$

consequentemente

$X \sim B_i(n;p)$ tende para $X_a \sim P_o(np)$ quando n cresce e p decresce

A qualidade da aproximação é tanto melhor quanto mais pequeno for p e maior for n (Em geral utiliza-se a aproximação se np<5)

Exemplo. Seja X~Bi(100,0.05), calcule P(X=4) usando tabelas.

$$X \sim B_i(100;0.05) \approx X_a \sim P_o(100*0.05)$$

$$P(X=4) \approx P(X_a=4)_{\begin{cases}\mu=5\\ x=4\end{cases}} = 0.1755$$