Instituto Superior de Engenharia do Porto

Estatística (ESTAT)

2019/2020

LEEC

C1 – Introdução e revisões de teoria de probabilidades

Luís Afonso ISEP-DMA: lma@isep.ipp.pt

Objectivo da disciplina

Dotar os alunos de conhecimentos fundamentais e estruturantes sobre distribuições de probabilidade, amostragem e métodos estatísticos inferênciais de apoio aos processos de decisão.

Programa da disciplina

1. Revisões de Teoria de Probabilidades
2. Distribuições de Probabilidade
3. Amostragem
4. Estimação de Parâmetros
5. Testes de Hipóteses paramétricos
6. Teste do Qui-quadrado

Conteúdos de apoio ás aulas

Diapositivos das aulas teóricas
Fichas de exercícios/aplicações a resolver nas aulas TP

Bibliografia recomendada:

1) Pedrosa A.C, Gama S.M, Introdução Computacional à probabilidade e Estatística, Porto Editora. ISBN 972-0-06056-5
2) Montgomery and Runger, Applied Statistics and probability for Engineers, 4th Ed. John Wiley and Sons, 2007
3) Guimarães R.C, Sarsfield Cabral J.A., Estatística, Mc-Graw Hill.

Ciência Estatística

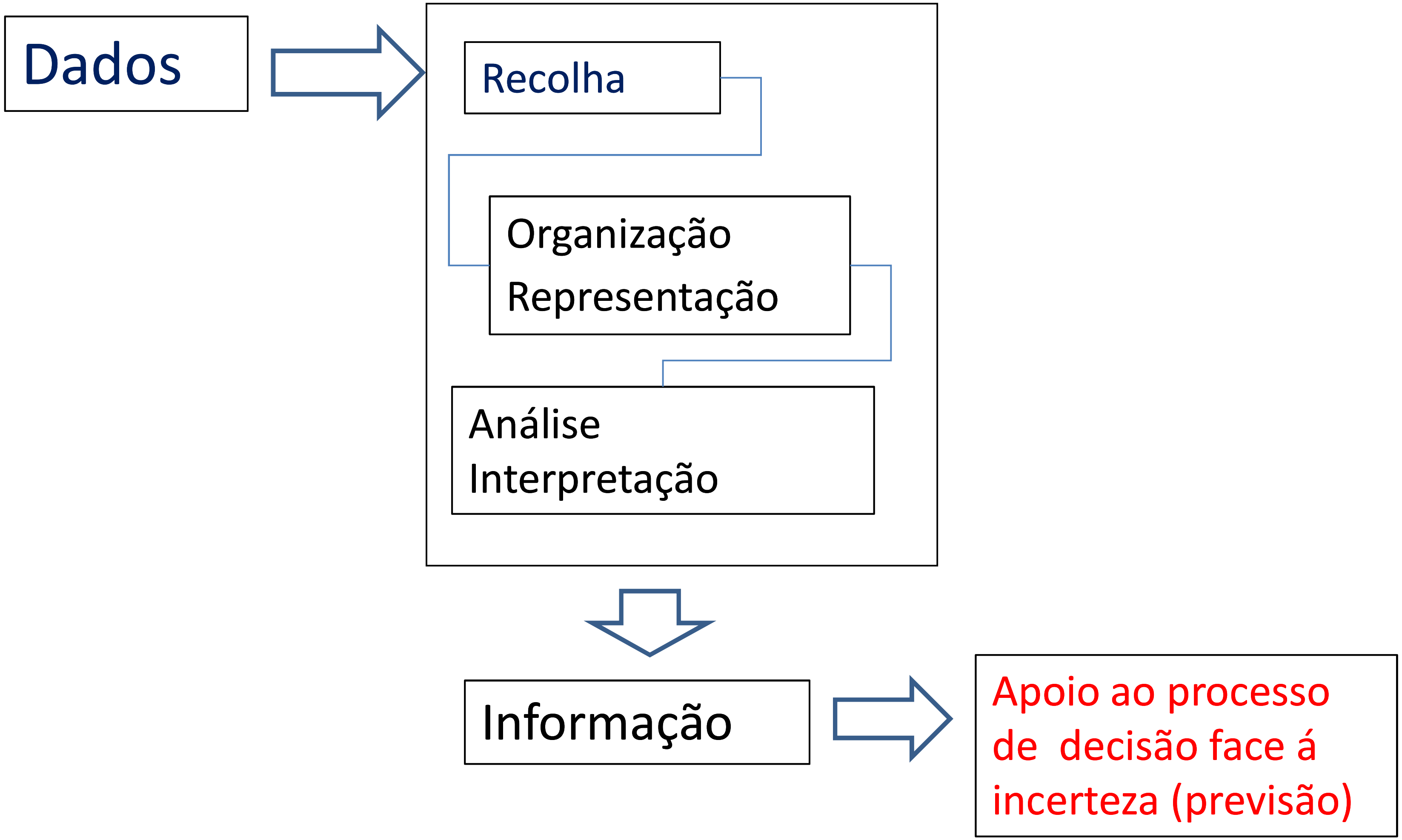
Traduz-se num conjunto de métodos para recolher, representar, analisar e interpretar dados de fenómenos aleatórios (dados estatísticos) com vista a auxiliar o processo de tomada de decisões.

Alguns ramos da estatística

Estatística Descritiva/análise exploratória de dados – preocupa-se com a organização e descrição dos dados experimentais.

Estatística Inferêncial - que, a partir da observação de alguns dados experimentais permite a análise e a interpretação dos dados com o objectivo de generalizar e prever resultados, servindo-se para isso da teoria das probabilidades e suas extensões.

A Ciência Estatística. Conjunto de métodos



Sub-áreas da estatística

Obtenção de dados estatísticos

Amostragem, planeamento de experiências

Descrição dos dados estatísticos

Estatística descritiva, Análise Exploratória de dados

Modelização matemática

Teoria de probabilidades e extensões.

Inferência (Estatística Indutiva) e previsão

Conceitos fundamentais. Dados estatísticos

Dados estatísticos

Qualitativos

Nominais

(cor dos olhos, raça)

Ordinais

{Escolaridade (prim., secund., sup.)
Qualidade (boa, media, má)}

Quantitativos

(valores numéricos obtidos
por contagem ou medição)

Discretos

valores obtidos por contagem

Contínuos

valores obtidos por um processo
de medição.

Conceitos fundamentais. População e Amostra

População

Conjunto de todos os elementos (pessoas, objectos, etc.) que possuem pelo menos uma característica em comum.

Amostra

É um subconjunto da população

Conceitos fundamentais. Parâmetro e Estatística

Parâmetro – é uma medida numérica que descreve uma característica da população.

- (média das alturas de todos os alunos do ISEP)

Estatística – é uma medida numérica que descreve uma característica da amostra.

- (média das alturas dos elementos desta turma)

1. Teoria de Probabilidades

Conceitos fundamentais

A necessidade de analisar fenómenos ou experiências não determinísticas – desconhecimento sobre o resultado conduz *a seguinte definição

Def 1: Experiência Aleatória. É a experiência que verifica as seguintes condições:

i) Pode ser repetida em condições análogas .

ii) É conhecido o conjunto de todos os resultados da experiência.

iii) Em cada realização da experiência não se sabe quais dos resultados possíveis irá ocorrer.

1. Teoria de Probabilidades

Experiência aleatória

Exemplos de experiências aleatórias

1. Lançar uma moeda
2. Lançar um dado
3. Fazer dois lançamentos de uma moeda
4. Extrair duas peças ao acaso de um lote de 100
5. Lançar uma moeda até saír cara
6. Ligar uma lanterna a bateria até que a luz se extinga
7. Contagem do número de acessos a uma página da internet durante 1 hora.

1. Teoria de Probabilidades

Def 2: Espaço de Amostragem, espaço de resultados ou espaço amostral

É o conjunto de todos os resultados possiveis da experiência aleatória. Denota-se pela letra S ou Ω

Exemplo 1. Descrição dos espaços de amostragem

$$1)S = \{C, \overline{C}\}$$

$$2)S = \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6\}$$

$$3)S = \{C_1C_2, C_1\overline{C}_2, \overline{C}_1C_2, \overline{C}_1\overline{C}_2\}$$

$$4)S = \{(A_i, A_j) : i = 1,2,...,100,\ j = 1,2,...,100\}$$

$$5)S = \{C, \overline{C}C, \overline{C}\overline{C}C, ...\}$$

$$6)\Re^{+}$$

$$7)S = \{0,1,2,3,...\}$$

Nota – S diz-se:

discreto - caso #S seja finito ou infinito numerável;

contínuo – se #S for infinito não numerável.

1. Teoria de Probabilidades

Def 3: Acontecimento

Um acontecimento A é um subconjunto do espaço de amostragem S. Trata-se do subconjunto de S formado por todos os acontecimentos elementares que ocorrem quando ocorre A.

Acontecimento elementar

É constituido apenas por um elemento.

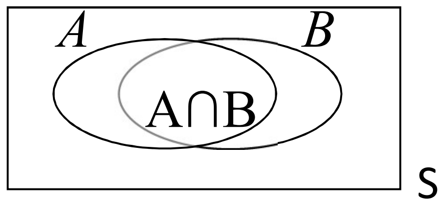
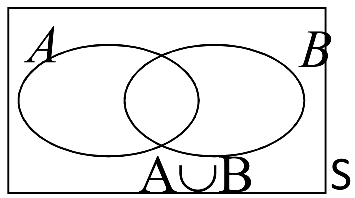
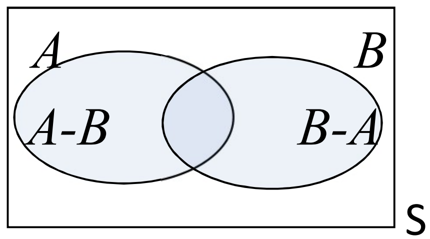
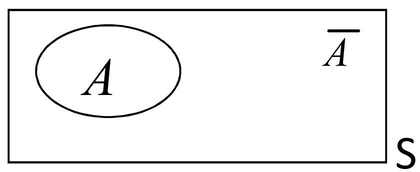
Acontecimento composto

Ocorre quando algum dos econtecimentos elementares que o compõem ocorre.

1. Teoria de Probabilidades

Algebra de Acontecimentos. Operações

Sejam: S o espaço de resultados de uma e.a. e A e B dois eventos.

Operação	Notação	Descrição verbal	Diagrama de Venn
Intersecção	$A \cap B$	Realização simultânea de A e B	
Reunião	$A \cup B$	Realização de A ou B, i.e., de pelo menos um dos dois eventos	
Diferença	A\B=A-B B\A=B-A	Realização de A sem que se realize B Realização de B sem que se realize A	
Complementar	$\bar{A}$	Não realização de A	

1. Teoria de Probabilidades

Acontecimentos.

Exemplo 2. Consideremos a <u>experiência aleatória </u>que consiste no lançamento de uma moeda seguido de um dado.

a) Descreva o espaço de amostragem

$$C - \text{"} Sai\ cara \text{"}$$

$$D_i - \text{"} Saida\ de\ i\ \ pontos\ no\ dado \text{"} : i = 1, 2, ..., 6$$

$$S = \{CD_1, CD_2, ..., CD_6, \bar{C}D_1, \bar{C}D_2, ..., \bar{C}D_6\}$$

b) Descreva os acontecimentos

A-”Saida de cara”, B – “Saida de nº par menor que 3”, $A \cap B$, $A \cup B$

$$A - \{CD_1, CD_2, ...CD_6\}$$

$$B = \{CD_2, \bar{C}D_2\}$$

$$A \cap B = \{CD_2\}; A \cup B = \{CD_1, CD_2, ..., CD_6, \bar{C}D_2\}$$

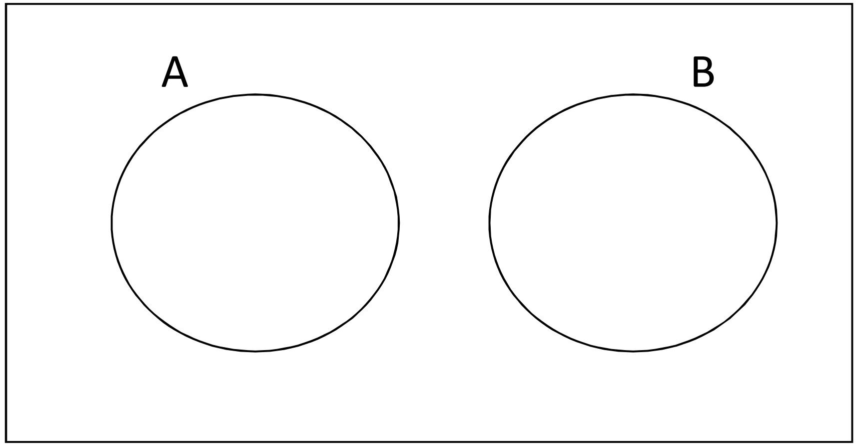
1. Teoria de Probabilidades

Def 4: Acontecimentos mutuamente exclusivos

Dois acontecimentos A e B de um mesmo espaço amostral dizem-se mutuamente excluisvos, incompativeis ou disjutos sse

$$A \cap B = \emptyset$$

ou seja, A e B não têm acontecimentos elementares (pontos) em comum.



1. Teoria de Probabilidades

Acontecimentos:Propriedades algébricas

- Comutativa
  $$A \cap B = B \cap A$$
  $$A \cup B = B \cup A$$
- Associativa
  $$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
  $$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
- Distributiva
  $$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
  $$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
- Elemento neutro
  $$A \cap S = A$$
  $$A \cup \emptyset = A$$
- Elemento absorvente
  $$A \cap \emptyset = \emptyset$$
  $$A \cup S = S$$
- Leis de Morgan
  $$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
  $$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

1. Teoria de Probabilidades

Probabilidade

Pode ser entendida como a verosimelhança, possibilidade ou de credibilidade da ocorrência de um evento.

Def 5: Axiomas da teoria de probabilidades

Seja S um espaço de amostragem. Sejam A_i, i=1,2,… eventos quaisquer de S. Chama-se probabilidade de A, P(A), ao número real associado a A que mede a verosimilhança com que A ocorre e satisfaz os seguintes axiomas:

A1) $P(A) \geq 0$
A2) $P(S)=1$
A3) $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$ para quaisquer acontecimentos $A_1, A_2, \ldots$, mutuamente exclusivos, i.e., $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$

1. Teoria de Probabilidades

Probabilidade. Algumas propriedades elementares

$P1) P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

$\quad Como\ S = A \cup \overline{A}\ e\ P(S) = P(A \cup \overline{A}) = 1,\ resulta\ de\ A3\ que$

$\quad P(A) + P(\overline{A}) = 1$

$P2) P(\varnothing) = 0$

$P3) P(A) \leq 1 \quad e\ consequentemente\ 0 \leq P(A) \leq 1$

$P4) P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B)$

$P5) se\ A \subseteq B, então\ P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A)$

$P6) se\ A \subseteq B, então\ P(A) \leq P(B)$

$P7)\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

1. Teoria de Probabilidades

Cálculo de probabilidades. Def. de Laplace

Def 6 – Probabilidade clássica de Laplace

Considere-se uma e.a. com espaço de resultados S com as seguintes particularidades: S é constituído por

- n acontecimentos elementares distintos (#S=n)
- igualmente prováveis e em
- número finito.

Considere-se ainda que a realização do acontecimento A passa pela ocorrência de m elementares que constituem A, ou seja #A=m. Então

$$P(A)=\frac{\text{nº de casos favoráveis à ocorrência de A}}{\text{nº de casos possíveis}}=\frac{\#A}{\#S}=\frac{m}{n}$$

1. Teoria de Probabilidades

Definição clássica. Exemplo

Exemplo 3. Considere o jogo que consiste no lançamento de dois dados e cálculo da soma dos pontos. Calcule a probabilidade de obter soma 4

$$S = \{D_1D_1, \dots, D_6D_6\}$$

S_4 − "Obter soma 4"

S_4={D_1D_3, D_3D_1, D_2D_2)

P(S_4)=3/36≈0.0833

Qual o número em que apostaria?

1. Teoria de Probabilidades

Probabilidade. Definição frequencista

Def 7: A probabilidade da ocorrência de um acontecimento A é valor para o qual tende a frequencia relativa da sua realização (f_A) à medida que o número de repetições da experiência (N) aumenta.

$$f_A = \frac{n_A}{N} \rightarrow P(A) \;\; quando \; n \rightarrow \infty$$

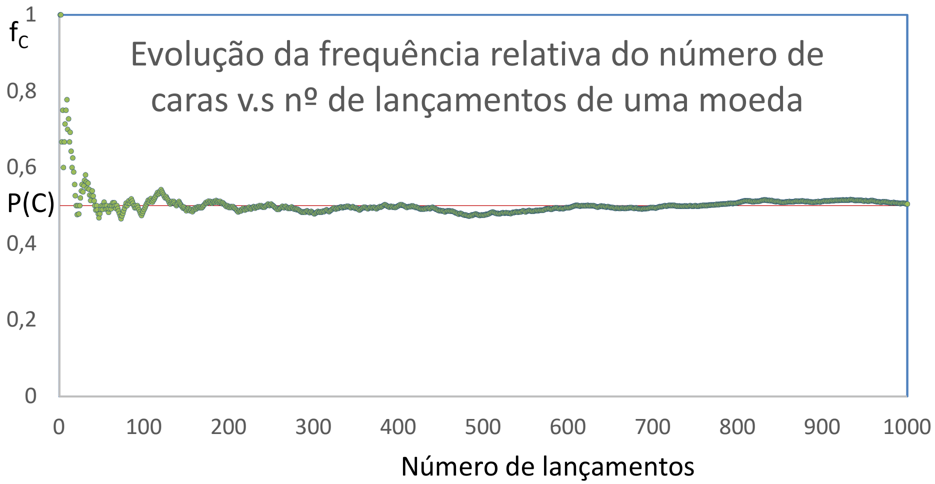
N representa o número de repetições (em condições semelhantes) da experiência aleatória;

n_A representa o número de vezes que o acontecimento A ocorreu nas N realizações da experiência.

f_A é a frequência relativa da ocorrência do acontecimento A

1. Teoria de Probabilidades

Exemplo: Lançamento de uma moeda. Interpretação frequencista



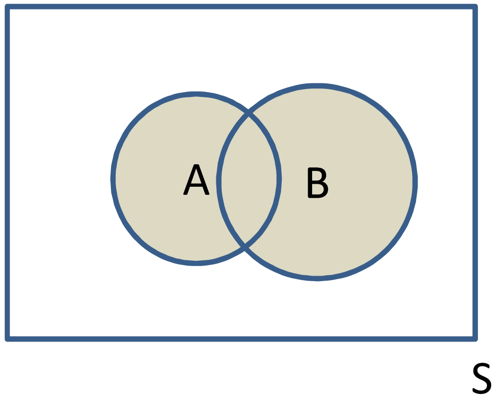
C – "Sair cara"
P(C)=0,5

N	res	Nc	Fc
1	1	1	1
2	1	2	1
3	0	2	0,666667
4	1	3	0,75
5	0	3	0,6
6	1	4	0,666667
7	1	5	0,714286
8	1	6	0,75
9	1	7	0,777778
10	0	7	0,7
20	1	10	0,5
40	0	21	0,525
100	1	49	0,49
1000	1	504	0,504
…		…	…
infinito			0,5

Nc – número total de cara obtido
Fc=Nc/N – frequência relativa
res : Se sai cara res=1 senão res=0

1. Teoria de Probabilidades

Regra da adição



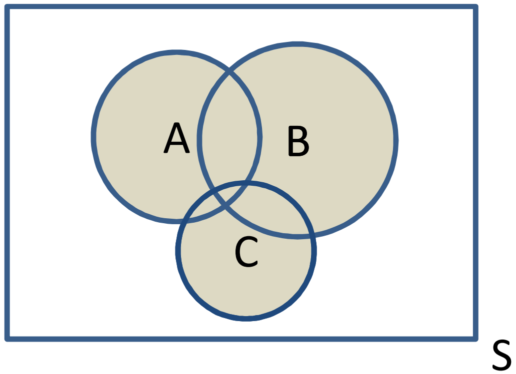
Reunião de dois acontecimentos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Reunião de 3 acontecimentos

$$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) = \ldots$$

$$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$



1. Teoria de Probabilidades

Regra da Adição. Exemplo

Exemplo 4: Numa faculdade estudam 700 alunos dos quais 356 alunos trabalham com linux, 124 trabalham com linux e windows e 430 trabalham com windows.

a) Calcule a probabilidade de um aluno, e.a, entre todos os que estudam na faculdade trabalhar com algum destes sistemas operativos.

$$R: P(W \cup L) = P(W) + P(L) - P(W \cap L) = \frac{430}{700} + \frac{356}{700} - \frac{124}{700} \approx 0.9457$$

b) Qual a % de alunos que usam apenas linux?

$$R: P\left(L \cap \overline{W}\right) = P(L) - P(L \cap W) = \frac{356}{700} - \frac{124}{700} \approx 0.3314; R: 33{,}14\%$$

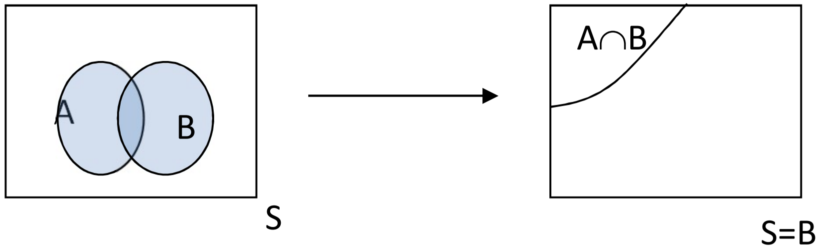
1. Teoria de Probabilidades

Probabilidade condicionada.

Probabilidade condicionada

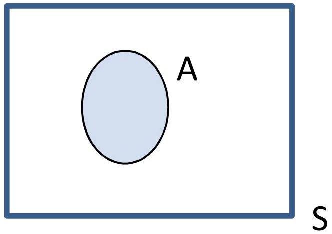
Def 8: A probabilidade condicionada de A dado B designa-se P(A|B) e é dada por:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}, \quad \text{onde } P(B)>0.$$



A probabilidade do evento A sabendo que o evento B ocorreu designa-se por P(A|B). O efeito de saber "à priorí" que B ocorreu traduz-se no facto de B se tornar o novo espaço amostral.

$$P(A)=P(A|S)=\frac{P(A\cap S)}{P(S)}=P(A)$$



1. Teoria de Probabilidades

Probabilidade condicionada. Exemplo

Exemplo 5

Considerando o exemplo 4, calcule a probabilidade de um estudante trabalhar com o linux sabendo que trabalha com windows.

$$R : P(L \mid W) = \frac{P(L \cap W)}{P(W)} = \frac{124/700}{430/700} \approx 0.2883$$

1. Teoria de Probabilidades

Probabilidade Condicionada. Independência

Seja B um evento com probabilidade de ocorrência positiva.

-Se o facto de se saber que B ocorreu não fornecer qualquer informação acerca da possibilidade da ocorrência de um evento A, dizemos que A e B são acontecimentos independentes.

-Nos casos em que o conhecimento da ocorrência de B fornecer informação adicional sobre a ocorrência de A, dizemos que os acontecimentos são dependentes.

Def 8 – Acontecimentos independentes

Dois acontecimentos A e B dizem-se independentes sse

$$P(A \cap B)=P(A)P(B).$$

Consequências

Sejam A e B eventos independentes tais que $P(A)>0$ e $P(B)>0$. Então:

$P(A|B)=P(A)$;

$P(B|A)=P(B)$;

Se $A \cap B= \emptyset$ e $P(A)>0$ e $P(B)>0$, A e B são independentes? R: Não

1. Teoria de Probabilidades
Regra da multiplicação

Para o cálculo da probabilidade da ocorrência simultânea de sequências de acontecimentos as regras seguintes revestem-se da maior importância.

Def 9 – Regra da multiplicação

A probabilidade da ocorrência simultânea de dois acontecimentos é dada por:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

ou

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

Generalizando para uma sequência de n acontecimentos, resulta

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\ldots.P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

1. Teoria de Probabilidades

Regra da multiplicação. Exemplo

Exemplo 6. Calcule a probabilidade de não saír a bola nº 13 num jogo que consiste em retirar 5 bolas, sem reposição, de uma tômbola com bolas numeradas de 1 a 50.

Resolução:

Seja A_i o acontecimento "Não saír bola nº 13 na i-ésima extracção":i,1,2,...,50,

então:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = P(A_1)\, P(A_2 |\, A_1)\, P(A_3 |\, A_1 \cap A_2) \ldots P(A_5\, |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) =$$

$$= \frac{49}{50}\frac{48}{49}\frac{47}{48}\frac{46}{47}\frac{45}{46} \approx 0.9$$

1. Teoria de Probabilidades
Teorema da probabilidade total (TPT)

Teorema 2- teorema da probabilidade total

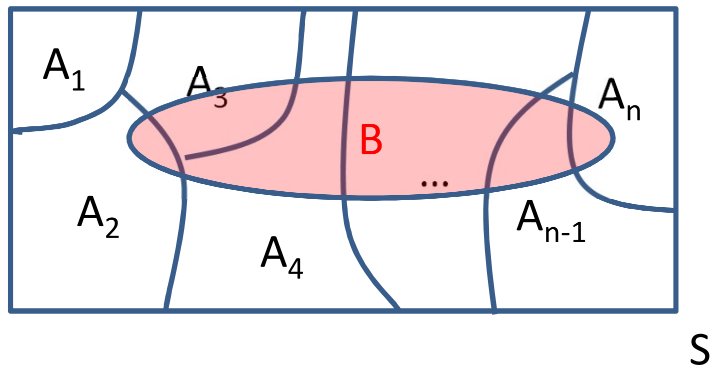
Se os acontecimentos A_1, A_2, ...A_n formam uma partição do espaço de amostragem S, ou seja,

i) $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$

ii) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$

então, sendo B uma acontecimento de S é

$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_1) + \ldots + P(B \cap A_n)$



1. Teoria de Probabilidades
Regra da multiplicação. Exemplo

Exemplo 7 – Um artigo é produzido em 3 fábricas: 1, 2 e 3. Sabe-se que a fábrica 1 produz o dobro das peças de cada uma das fábricas 2 e 3. Além disso, 2% das peças produzidas pela fábrica 1 e 2% das que são produzidas na fábrica 2 são defeituosas. A fábrica 3 produz 4% de peças defeituosas. Todas as peças são colocadas no mesmo armazém. Tira-se uma peça ao acaso.

a) Qual é a probabilidade dessa peça ser defeituosa?

b) Se a peça for defeituosa, qual a probabilidade de ter sido produzida na fábrica 1?

Definições:

D – "a peça é defeituosa" e F_i – "a peça provém da fábrica i", i=1, 2, 3.

Dados do problema:

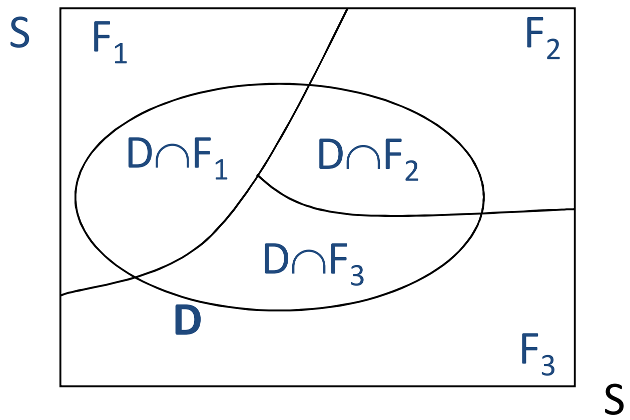
$P(F_1)=2P(F_2)$, $P(F_2)=P(F_3)$, $P(D|F_1)=P(D|F_2)=0.02$ e $P(D|F_3)=0.04$.

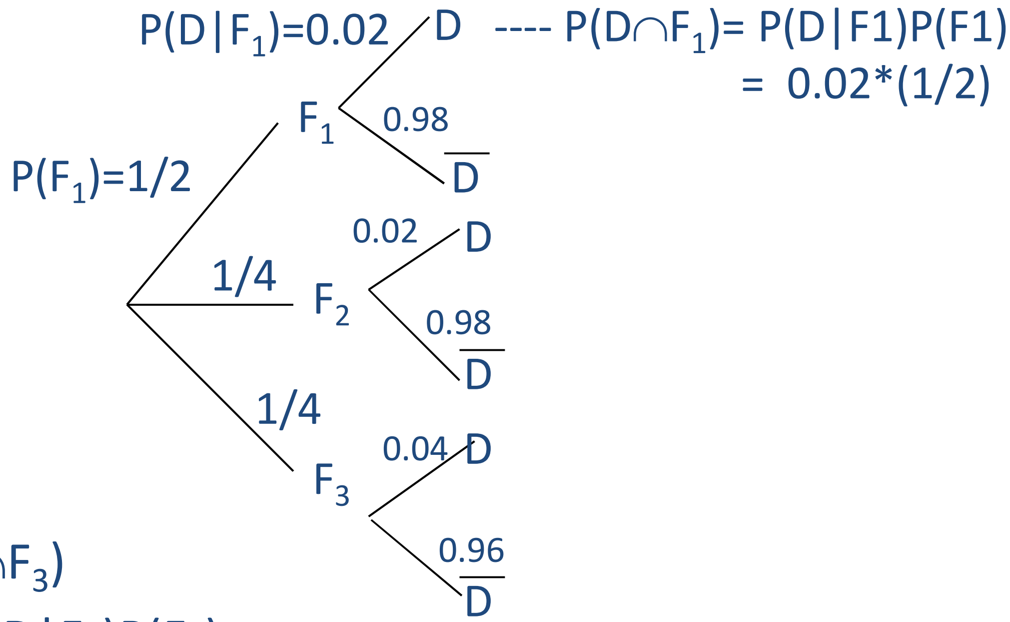
a) Probabilidade pedida: $P(D)=?$

1. Teoria de Probabilidades
Regra da multiplicação. Exemplo

Exemplo 7 - Continuação

Sendo $P(F_1)=2P(F_2)$, $P(F_2)=P(F_3)$ e como $P(F_1)+P(F_2)+P(F_3)=1$,vem que $P(F_1)=1/2$ e $P(F_2)=P(F_3)=1/4$.





1. R: $P(D)=P(D\cap F_1)+ P(D\cap F_2)+ P(D\cap F_3)$

$=P(D|F_1)P(F_1)+ P(D|F_2)P(F_2)+ P(D|F_3)P(F_3)$

$=0.02x0.5+0.02x0.25+0.04x0.25=0.025$ (aplicação do TPT)

1. Teoria de Probabilidades
Regra da multiplicação. Exemplo

Exemplo 7 - Continuação

b) R: $P(F_1|D)=?$

Pela definição de probabilidade condicionada e pelo teorema da probabilidade total obtemos

$$P(F_1 \mid D) = \frac{P(F_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D \mid F_1)P(F_1)}{\mathrm{P}(\mathrm{D} \mid \mathrm{F}_1)\mathrm{P}(\mathrm{F}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{D} \mid \mathrm{F}_2)\mathrm{P}(\mathrm{F}_2) + \mathrm{P}(\mathrm{D} \mid \mathrm{F}_3)\mathrm{P}(\mathrm{F}_3)}$$

$$= \frac{0.02 \times 0.5}{0.025} = 0.40.$$

1. Teoria de Probabilidades
Teorema de Bayes

O cálculo que acabamos de efectuar é uma aplicação do Teorema de Bayes.

Teorema 3 - Teorema de Bayes

Se os eventos B_1, B_2,…, B_r constituem uma partição de S, então para qualquer evento A de S,

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_k)P(A \mid B_k)}{\sum_{i=1}^{r} P(B_i)P(A \mid B_i)}, \quad k = 1,2,\ldots,r$$