Instituto Superior de Engenharia do Porto

Estatística

2019/2020

LEEC

C5 – Testes de Hipóteses

Testes de Hipóteses

Definição

Um teste de Hipóteses é um processo estatístico usado para sustentar uma decisão estatística do tipo afirmativo ou negativo sobre o tipo de distribuição de uma ou mais populações, ou dos parâmetros que caracterizam a sua distribuição (testes paramétricos) a partir de uma ou mais amostras dessas populações.

Testes de hipóteses

Definição: Hipótese estatística

Uma hipótese estatística é uma conjectura sobre a distribuição de uma ou mais populações.

- H_0: Hipótese nula é a hipótese que consideramos inverosímil (=)

- H_1: Hipótese alternativa é a hipótese que consideramos verosímil e que se pretende verificar (>, <, ≠). É a hipótese que contraria a hipótese nula, ou fundamental.

Testes paramétricos unilaterais e testes bilaterais

Teste bilateral

- H0: $\theta = \theta_0$
- H1: $\theta \neq \theta_0$

θ- Parâmetro em estudo

Teste unilateral à direita

- H0: $\theta = \theta_0$
- H1: $\theta > \theta_0$

Teste unilateral à esquerda

- H0: $\theta = \theta_0$
- H1: $\theta < \theta_0$

Estatística de Teste

Para se optar entre as duas hipóteses H_0 e H_1 é necessário quantificar a informação contida na amostra, usando uma estatística de teste.

Uma estatística de teste é uma função das observações amostrais cujo valor vai determinar a conclusão do teste estatístico.

Regra de decisão estatística

A regra de decisão estatística é o princípio que determina a conclusão a retirar (rejeitar ou não H_0) a partir da comparação do valor da estatística de teste com um ou mais valores críticos.

Os valores críticos determinam intervalos de valores da estatística de teste que conduz à rejeição de H_0.

Este conjunto de valores denomina-se por região crítica (RC) ou de rejeição.

Tipos de erros de inferência

Os Erros de inferência ocorrem quando se tira uma conclusão errada num teste estatístico a partir da informação contida na amostra e da região de rejeição.

Hipótese / Decisão	**H0 verdadeira**	**H0 falsa**
Aceitar H0	**Decisão correcta** prob=1-α	**Erro tipo II** prob=β
Rejeitar H0	**Erro tipo I** Prob=α **Nível de Significância**	**Decisão correcta** Prob=1-β **Potência do teste**

Erros de Inferência

Nível de significância do teste α é a probabilidade ou risco de se cometer um erro do tipo I.

Erro Tipo I:

α=P(Erro Tipo I)=P(rejeitar H0| H0 verdadeira)

(valor fixado antes de se efetuar o teste. Tipicamente 5%)

Erro Tipo II:

β = P(Erro Tipo II)= P(aceitar H_0| H_0 falsa)

A potência do teste 1-β é a probabilidade de rejeitar H_0 quando H_0 é falsa:

1-β =P(rejeitar H_0| H_0 falsa)

Teste de média para uma população

(σ conhecido ou σ desconhecido mas $n \geq 30$)

- A estatística teste a utilizar é a média amostral

$$\overline{X} \sim N\left(\mu \ , \frac{\sigma^2}{n} \right)$$

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim \quad N(0,1)$$

- Nota: para σ desconhecido mas $n \geq 30$ considera-se $\sigma^2 \approx s^2$

Teste de médias

(σ conhecido ou σ desconhecido mas $n \geq 30$)

Procedimento

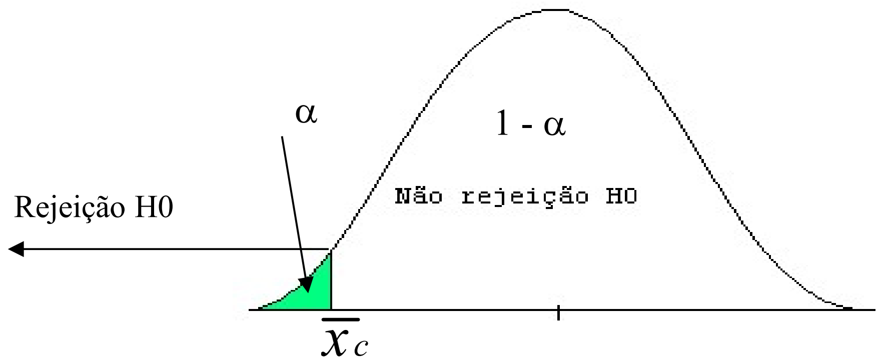
- Fixar α (nível de significância) do teste
- Formulação do teste
  - Definir a hipótese nula H0: $\mu = \mu 0$
  - Definir a hipótese alternativa H1: $\mu \neq \mu 0$ ou $\mu < \mu 0$ ou $\mu > \mu 0$
- Identificação da Estatística de teste

$$\overline{X} \sim N\left(\mu , \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

- Determinação da região de rejeição (ou crítica)
- Decisão: rejeitar H0 se $\bar{x}_0$ estiver na região de rejeição ou não rejeitar H0 no caso contrário.

Teste unilateral à esquerda: H0: μ = μ 0

H1: μ < μ 0



Determinação da Região crítica nas mesmas unidades

$\bar{X}_{H_0} \sim N(\mu_0; \frac{\sigma^2}{n})$

$$P(\bar{X}_{H_0} < \bar{x}_c) = \alpha \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\bar{x}_c - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \alpha \Leftrightarrow \frac{\bar{x}_c - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = -z_{1-\alpha}$$

$com \quad z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$

$\bar{x}_c = \mu_0 - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$RC_X =]-\infty, \mu_0 - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

Decisão

se $\bar{x}_{obs} \in RC$ então Rejeita−se H_0 senão não se rejeita H_0

Determinação da Região crítica em unidades reduzidas

$RC_Z =]-\infty, -z_{1-\alpha}]$

$onde\ z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$

Cálculo de z_{obs}

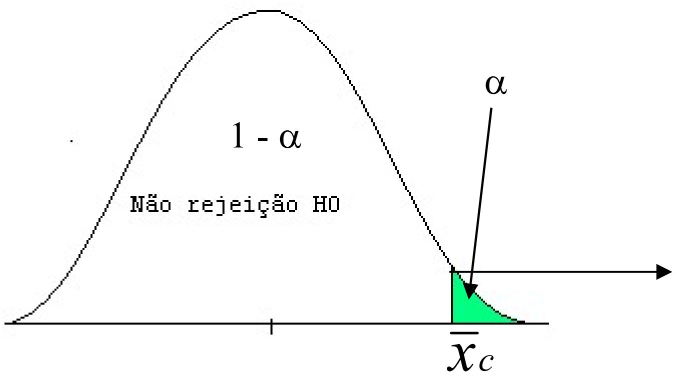
$$z_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Decisão

se $z_{obs} \in RC$ então Rejeita−se H_0 senão não se rejeita H_0

Teste unilateral à direita: H0: μ = μ 0

H1: μ > μ 0



Determinação da Região crítica nas mesmas unidades

$\bar{X}_{H_0} \sim N(\mu_0; \frac{\sigma^2}{n})$

$P(\bar{X}_{H_0} < \bar{x}_c) = 1 - \alpha \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\bar{x}_c - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow \frac{\bar{x}_c - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

$= z_{1-\alpha}$

$com \quad z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$

$\bar{x}_c = \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$RC_X = [\mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty[$

Decisão

se $\bar{x}_{obs} \in RC$ então Rejeita−se H_0 não se rejeita H_0

Determinação da Região crítica em unidades reduzidas

$RC_Z = [z_{1-\alpha}, +\infty[$

$onde\ z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$

Cálculo de z_{obs}

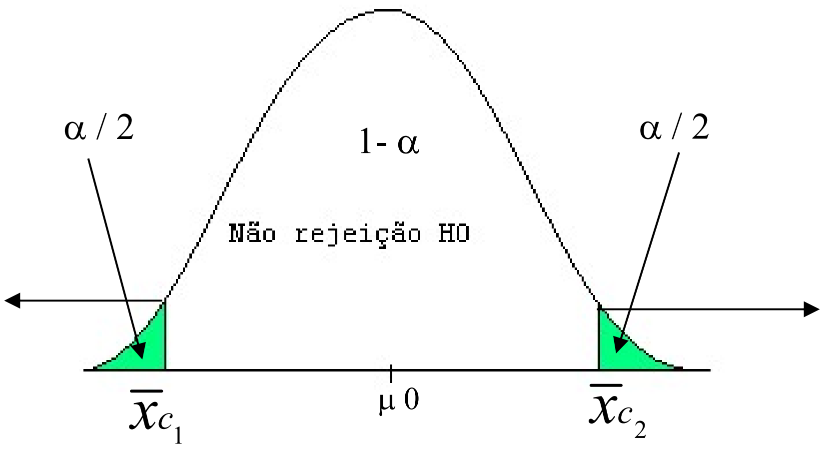
$z_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Decisão

se $z_{obs} \in RC$ então Rejeita−se H_0 senão não se rejeita H_0

Teste bilateral: H0: μ = μ 0

H1: μ ≠ μ 0



Determinação da Região crítica nas mesmas unidades

$\bar{X}_{H_0} \sim N(\mu_0; \frac{\sigma^2}{n})$

$P(\bar{X}_{H_0} < \bar{x}_c) = \alpha/2 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\bar{x}_c - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \alpha/2 \Leftrightarrow \frac{\bar{x}_c - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = -z_{1-\alpha/2}$

considerando $-z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(\alpha/2)$ vem

$\bar{x}_{c_c} = \mu_0 - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$RC_X =]-\infty, \mu_0 - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}] \cup [\mu_0 + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty[$

Decisão:

se $\bar{x}_{obs} \in RC$ então Rejeita−se H_0 senão não se re$jeira$ H_0

Determinação da Região crítica em unidades reduzidas

$RC_Z =]-\infty, -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}, +\infty]$

$onde\ z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$

Cálculo de z_{obs}

$z_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Decisão

se $z_{obs} \in RC$ então Rejeita−se H_0 senão não se rejeita H_0

Critério do valor de prova (pvalue)

Em alternativa ao critério da Região crítica pode ser usado o critério do valor de prova.
Este método tem como base a RC em unidades reduzidas RC_z.

$Para\ testes\ unilaterais$ à $direita$: $\quad pvalue = P(Z > z_0)$

$Para\ teste\ unilaterais$ à $esquerda$: $\quad pvalue = P(Z < z_0)$

$Para\ testes\ bilaterais$: $\quad pvalue = 2P(Z > |z_0|)$

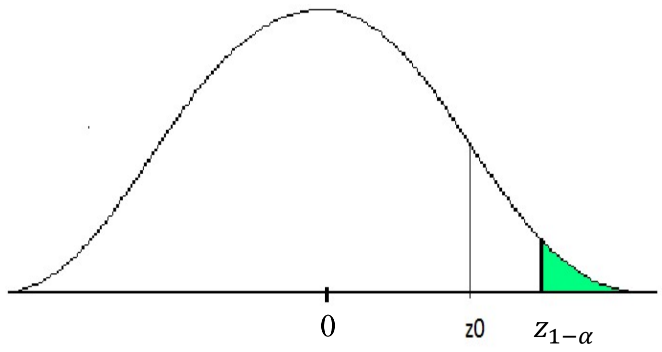
Exemplo: *Consideremos um teste unilateral à direita.*

Caso $z_o \notin RC_z$, $H0$ *não deve ser rejeitado*

Verifica-se que $pvalue = P(Z > z_0) > \alpha$

Caso $z_0 \in RC_z$, $H0$ *deve ser rejeitada e*
$pvalue = P(Z > z_0) \leq \alpha$

Z~N(0,1)



$RC_Z = [z_{1-\alpha}, +\infty[$

Critério do valor de prova:

Se valor-p ≤ α, H0 deve ser rejeitada

Se valor-p > α, H0 não deve ser rejeitada

Teste à diferença entre médias (duas populações)

Se σ_1^2, σ_2^2 conhecidas:

– A estatística teste a utilizar é a diferença de médias amostrais $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \quad N(0,1)$$

Se σ_1^2 e σ_2^2 desconhecidas: n_1 é o tamanho da amostra 1 e n_2 é o tamanho da amostra 2 e se $n_1 \geq 30$ então $\sigma_1^2 \approx s_1^2$ e $n_2 \geq 30$ então $\sigma_2^2 \approx s_2^2$

Teste à diferença entre médias
($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ conhecidas ou desconhecidas mas $n \geq 30$)

Procedimento

- Fixar α (nível de significância) do teste
- Formulação do teste
  - Definir a hipótese nula H0: $\mu 1 = \mu 2 \Leftrightarrow \mu 1 - \mu 2 = 0$
  - Definir a hipótese alternativa H1: $\mu 1 \neq \mu 2$ ou $\mu 1 < \mu 2$ ou $\mu 1 > \mu 2$
- Identificação da Estatística de teste: $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - \overbrace{(\mu_1 - \mu_2)}^{=0}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \quad N(0,1)$$

- Determinação da região de rejeição (ou crítica)
- Decisão: rejeitar H0 se $\overline{x}_1 - \overline{x}_2$ pertencer à região de rejeição ou não rejeitar H0 no caso contrário.

Teste à diferenças de médias (RC em unidades originais)

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)|_{H_0} \sim N(0, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

Teste Bilateral

$$Estatística\ teste: \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

1. Formulação do teste

$$H_o: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

2. ID da estatística de teste

$$sob\ H0: (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)|_{H_0} \sim N(0, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

3. Determinação da região crítica

$$RC_X =]-\infty, c_1] \cup [c_2, +\infty[$$

onde,

$$c_1 = -z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$c_2 = z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2|_{H_0} < c_1) = \alpha/2 \qquad z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$$

Decisão

Se $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \in RC_X$ então a hipótese H0 deve ser rejeitada

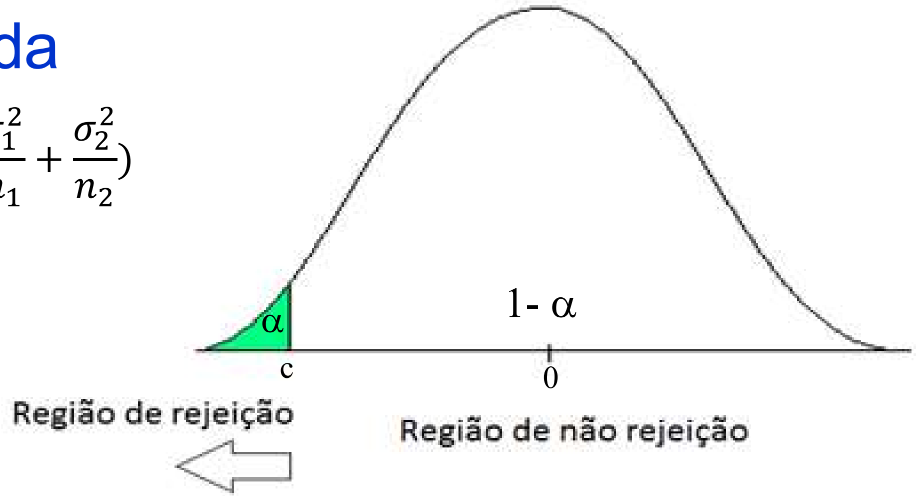
Se $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \notin RC_X$ então a hipótese H0 não deve ser rejeitada

Teste à diferenças de médias (RC em unidades originais)

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)|_{H_0} \sim N(0, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

Teste unilateral à esquerda

$$Estatística\ teste: \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$



1. Formulação do teste

$$H_o: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$$

2. ID da estatística de teste

$$sob\ H0: (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)|_{H_0} \sim N(0, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

3. Determinação da região crítica

$$RC_X =]-\infty, c]$$

onde,

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2|_{H_0} < c) = \alpha$$

$$c = -z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$$

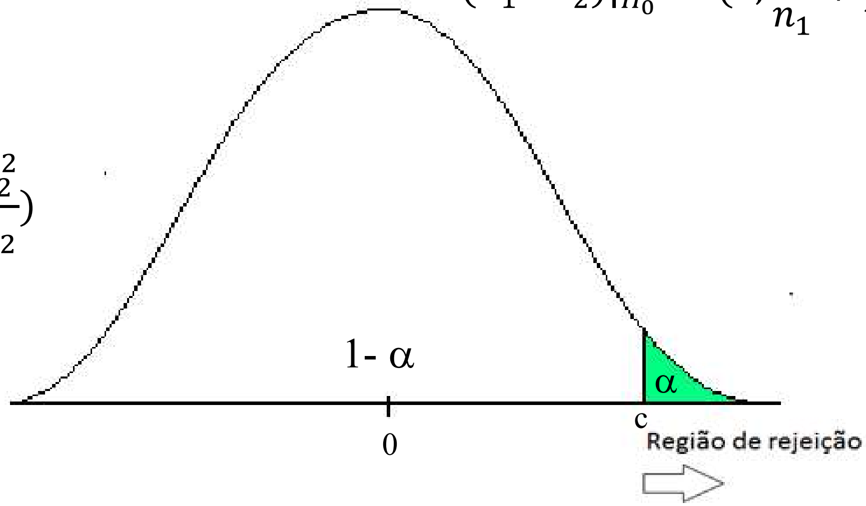
Decisão

Se $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \in RC_X$ então a hipótese H0 deve ser rejeitada

Se $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \notin RC_X$ então a hipótese H0 não deve ser rejeitada

Teste à diferenças de médias (RC em unidades originais)

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)|_{H_0} \sim N(0, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$



Teste unilateral à direita

$$Estatística\ teste\colon \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

1. Formulação do teste

$$H_o\colon \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1\colon \mu_1 - \mu_2 < 0$$

2. ID da estatística de teste

$$sob\ H0\colon (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)|_{H_0} \sim N(0, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

3. Determinação da região crítica

$$RC_X = [c, +\infty[$$

onde,

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2|_{H_0} < c) = 1 - \alpha$$

$$c = z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$$

Decisão

Se $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \in RC_X$ então a hipótese H0 deve ser rejeitada

Se $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \notin RC_X$ então a hipótese H0 não deve ser rejeitada

Teste à diferenças de médias (RC em unidades reduzidas)

Teste unilateral à esquerda

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$$
$$RC_Z =]-\infty, -z_{1-\alpha}]$$
$$onde\ \ z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$$

$$valor\_p = P(Z < z_{obs})$$

Teste unilateral à direita

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$$
$$RC_Z = [z_{1-\alpha}, +\infty[$$
$$onde\ \ z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$$

valor_p= $P(Z > z_{obs})$

Teste bilateral

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$
$$RC_Z =]-\infty, -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}, +\infty[$$
$$onde\ \ z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$$

valor_p= $2P(Z > |z_{obs}|)$

Resultado

Cálculo de z_{obs}

$$z_{obs} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - 0}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}}$$

Decisão

se $z_{obs} \in RC$ então Rejeita−se H_0 senão não se rejeita H_0

Exemplo de aplicação

O ph das garrafas de litro e meio tem distribuição normal. Segundo o fabricante da marca A o ph médio de uma garrafa é 7,0. No laboratório mediu-se o ph de 120 garrafas escolhidas aleatoriamente obtendo-se uma média de 6.8 e um desvio padrão de 2,8.

a) Poder-se-á afirmar que a água é mais ácida (ph menor)? Considere um significância de 1%. Determine a região de rejeição nas unidades originais e em unidades reduzidas.

b) Testaram-se 50 garrafas da marca B obtendo-se um ph médio de 7,1 e um desvio padrão de 2,1. Pode afirmar-se que as águas do fabricante A são , em média, mais ácidas que as águas da marca concorrente.

c) Se, na realidade, o ph da água engarrafada pelo fabricante A tem média 6,7 calcule a probabilidade de se aceitar erradamente que o ph é 6,93

Teste para proporções (uma população)

A estatística de teste a utilizar é:

$$\hat{P} = \frac{X}{n} \underset{aproximadamente}{\sim} N(p, \frac{pq}{n})$$

logo,

$$Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{pq / n}} \underset{aproximadamente}{\sim} N(0,1)$$

Teste de proporções

Procedimento

- Formulação do teste
  - Definir a hipótese nula H0: p = p0
  - Definir a hipótese alternativa H1: p ≠ p0 ou p < p0 ou p > p0
- Fixar α (nível de significância) do teste
- Identificação da estatística teste:

$$\hat{P} = \frac{X}{n} \underset{aproximadamente}{\sim} N(p, \frac{pq}{n}) \qquad Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1)$$

- Determinação da região de rejeição (ou crítica)
- Decisão: rejeitar H0 se $\hat{p}_0$ estiver na região de rejeição ou não rejeitar H0 no caso contrário.

Teste de proporções (RC em unidades originais)

Teste Bilateral

$Estatística\ teste: \hat{P} \sim N(p, \frac{pq}{n})$

1. Formulação do teste

$H_o: p = p_0$

$H_1: p \neq p_0$

2. ID da estatística de teste

$Sob\ H0: \hat{P}_{Ho} \sim N(p_0, \frac{p_0 q_0}{n})$

3. Determinação da região crítica

$RC_P =]-\infty, c_1] \cup [c_2, +\infty[$

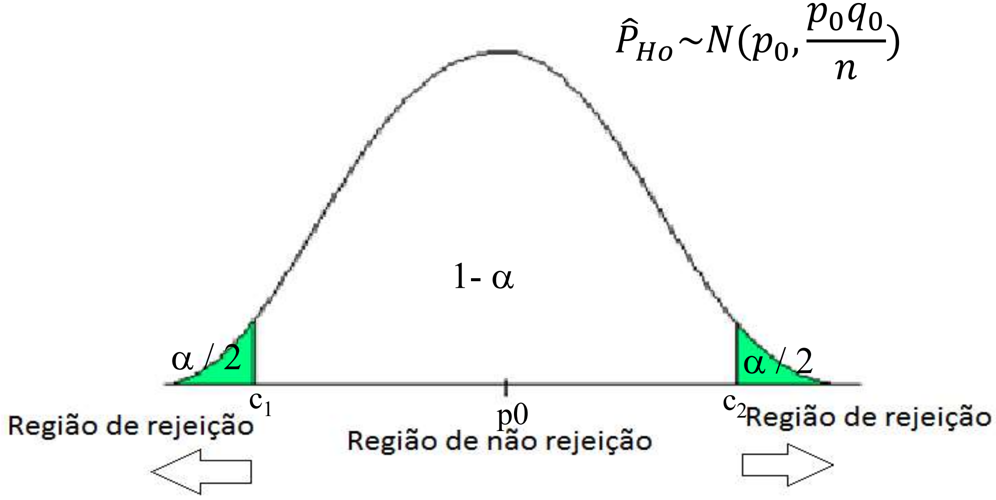
onde,

$P(\hat{P}_{Ho} < c_1) = \alpha/2$

$c_1 = p_0 - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$

$c_2 = p_0 + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$

$z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$



Decisão

Se $\hat{p}_0 \in RC_P$ então a hipótese H0 deve ser rejeitada

Se $\hat{p}_0 \notin RC_P$ então a hipótese H0 não deve ser rejeitada

Teste de proporções (RC em unidades originais)

Teste unilateral à esquerda

$Estatística\ teste: \hat{P} \sim N(p, \frac{pq}{n})$

1. Formulação do teste

$$H_o: p = p_0$$

$$H_1: p < p_0$$

2. ID da estatística de teste

$Sob\ H0: \hat{P}_{Ho} \sim N(p_0, \frac{p_0 q_0}{n})$

3. Determinação da região crítica

$$RC_P =]-\infty, c]$$

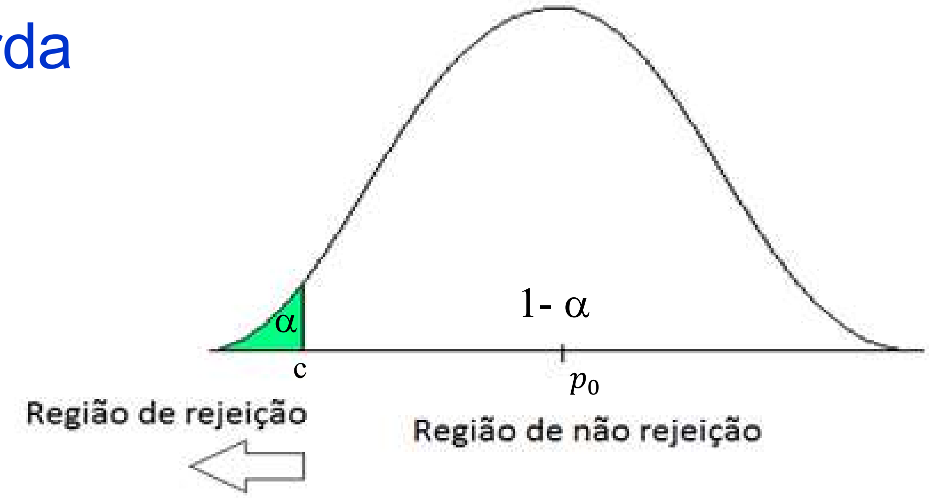
onde,

$$P(\hat{P}_{Ho} < c) = \alpha$$

$$c = p_0 - z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$$

$$z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$$

$\hat{P}_{Ho} \sim N(p_0, \frac{p_0 q_0}{n})$



Decisão

Se $\hat{p}_0 \in RC_P$ então a hipótese H0 deve ser rejeitada

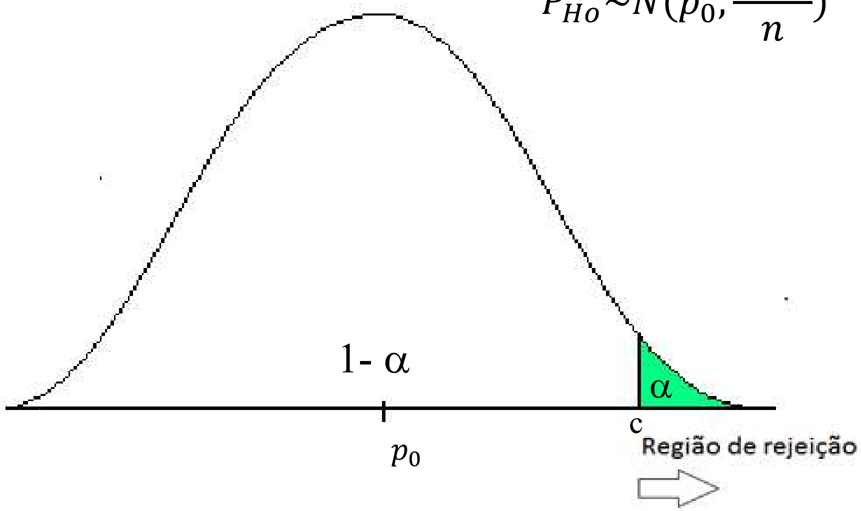
Se $\hat{p}_0 \notin RC_P$ então a hipótese H0 não deve ser rejeitada

Teste de proporções (RC em unidades originais)

$$\hat{P}_{Ho} \sim N(p_0, \frac{p_0 q_0}{n})$$

Teste unilateral à direita

$$Estatística\ teste: \hat{P} \sim N(p, \frac{pq}{n})$$



1. Formulação do teste

$$H_o: p = p_0$$

$$H_1: p > p_0$$

2. ID da estatística de teste

$$Sob\ H0: \hat{P}_{Ho} \sim N(p_0, \frac{p_0 q_0}{n})$$

3. Determinação da região crítica

$$RC_P = [c, +\infty[$$

onde,

$$P(\hat{P}_{Ho} < c) = 1 - \alpha$$

$$c = p_0 + z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$$

$$z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$$

Decisão

Se $\hat{p}_0 \in RC_P$ então a hipótese H0 deve ser rejeitada

Se $\hat{p}_0 \notin RC_P$ então a hipótese H0 não deve ser rejeitada

Teste de proporções: Região crítica em unidades reduzidas

Teste unilateral à esquerda

$H_0: p = p_0$
$H_1: p_1 < p_0$
$RC_Z =]-\infty, -z_{1-\alpha}]$
$onde\ z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$

valor_p= $P(Z < z_{obs})$

Teste unilateral à direita

$H_0: p = p_0$
$H_1: p_1 > p_0$
$RC_Z = [z_{1-\alpha}, +\infty[$
$onde\ z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$

valor_p= $P(Z > z_{obs})$

Teste bilateral

$H_0: p = p_0$
$H_1: p_1 \neq p_0$
$RC_Z =]-\infty, -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}, +\infty[$
$onde\ z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$

valor_p= $2P(Z > |z_{obs}|)$

Resultado

Cálculo de z_{obs}

$$z_{obs} = \frac{\hat{p}_o - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

Decisão

se $z_{obs} \in RC$ então Rejeita−se H_0 senão não se rejeita H_0

Teste de diferença entre proporções (duas populações)

A estatística teste a utilizar é $\hat{P}_1 - \hat{P}_2$

$$\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \underset{aproximadamente}{\sim} N\left(p_1 - p_2 , \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2} \right)$$

$$Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \underset{aproximadamente}{\sim} N(0,1)$$

Teste da diferença entre proporções

Procedimento

– Fixar α (nível de significância) do teste

– Formulação do teste

- Definir a hipótese nula H0: p1 = p2 ⇔ p1- p2 = 0
- Definir a hipótese alternativa H1: p1 ≠ p2 ou p1 < p2 ou p1 > p2

– Estatística de teste: $\hat{P}_1 - \hat{P}_2$

$$Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - \overbrace{(p_1 - p_2)}^{=0}}{\sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim \quad N(0,1)$$

onde $p \approx \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2}$

– Determinação da região de rejeição (ou crítica)

– Decisão: rejeitar H0 se $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ pertence à região de rejeição ou não rejeitar H0 no caso contrário.

Teste de diferença de proporções (RC em unidades originais)

$$\hat{P}_a - \hat{P}_b|_{Ho} \sim N\left(0, pq\left(\frac{1}{n_a}+\frac{1}{n_b}\right)\right)$$

Teste Bilateral

$$Estatística\ teste: \hat{P}_a - \hat{P}_b \sim N(pa - pb, \frac{p_a q_a}{n_a} + \frac{p_b q_b}{n_b})$$

1. Formulação do teste

$$H_o: p_a - p_b = 0$$

$$H_o: p_a - p_b \neq 0$$

2. ID da estatística de teste

$$Sob\ H0: \hat{P}_a - \hat{P}_b|_{Ho} \sim N\left(0, pq\left(\frac{1}{n_a}+\frac{1}{n_b}\right)\right)$$

$$onde, p \approx \frac{n_a \hat{p}_a + n_b \hat{p}_b}{n_a + n_b}$$

3. Determinação da região crítica

$$RC_P =]-\infty, c_1] \cup [c_2, +\infty[$$

onde,

$$P(\hat{P}_a - \hat{P}_b|_{Ho} < c_1) = \alpha/2$$

$$c_1 = -z_{1-\alpha/2}\sqrt{pq(\frac{1}{n_a}+\frac{1}{n_b})}$$

$$c_2 = +z_{1-\alpha/2}\sqrt{pq(\frac{1}{n_a}+\frac{1}{n_b})}$$

Decisão

Se $\hat{p}_a - \hat{p}_b \in RC_P$ então a hipótese H0 deve ser rejeitada

Se $\hat{p}_a - \hat{p}_b \notin RC_P$ então a hipótese H0 não deve ser rejeitada

$$z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$$

Teste de diferença de proporções (RC em unidades originais)

$$\hat{P}_a - \hat{P}_b|_{Ho} \sim N\left(0, pq\left(\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b}\right)\right)$$

Teste unilateral à esquerda

$$Estatística\ teste: \hat{P}_a - \hat{P}_b \sim N(pa - pb, \frac{p_a q_a}{n_a} + \frac{p_b q_b}{n_b})$$

1. Formulação do teste

$$H_o: p_a - p_b = 0$$

$$H_o: p_a - p_b < 0$$

2. ID da estatística de teste

$$Sob\ H0: \hat{P}_a - \hat{P}_b|_{Ho} \sim N\left(0, pq\left(\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b}\right)\right)$$

$$onde, p \approx \frac{n_a \hat{p}_a + n_b \hat{p}_b}{n_a + n_b}$$

3. Determinação da região crítica

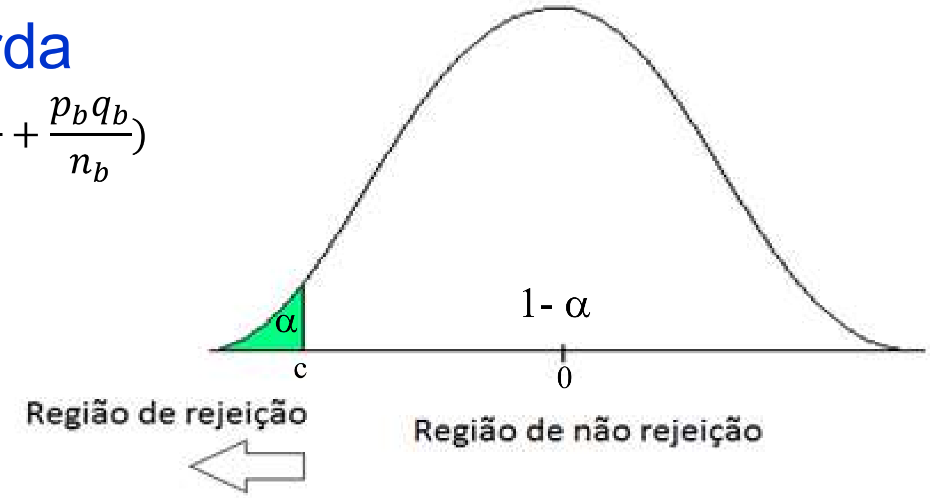
$$RC_P =]-\infty, c]$$

onde,

$$P(\hat{P}_a - \hat{P}_b|_{Ho} < c) = \alpha/2$$

$$c = -z_{1-\alpha}\sqrt{pq(\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b})}$$

$$z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$$



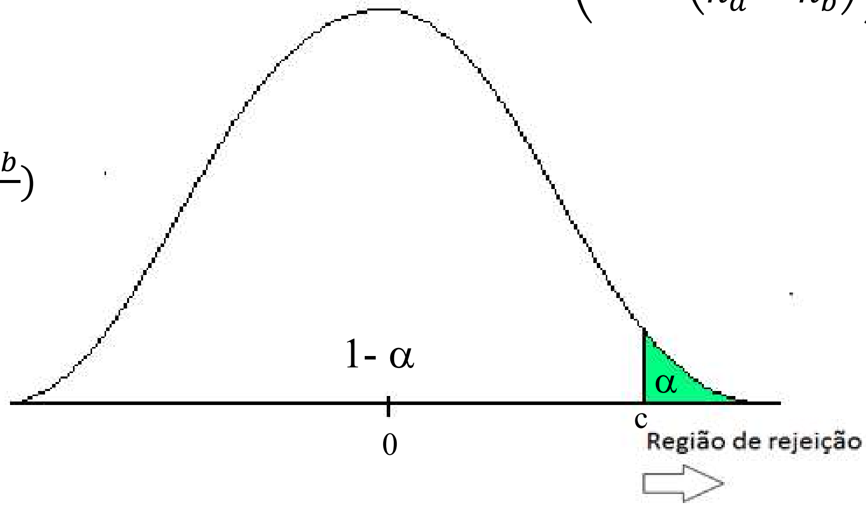
Decisão

Se $\hat{p}_a - \hat{p}_b \in RC_P$ então a hipótese H0 deve ser rejeitada

Se $\hat{p}_a - \hat{p}_b \notin RC_P$ então a hipótese H0 não deve ser rejeitada

Teste de diferença de proporções (RC em unidades originais)

$$\hat{P}_a - \hat{P}_b|_{Ho} \sim N\left(0, pq\left(\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b}\right)\right)$$



Teste unilateral à direita

$$Estatística\ teste: \hat{P}_a - \hat{P}_b \sim N(pa - pb, \frac{p_a q_a}{n_a} + \frac{p_b q_b}{n_b})$$

$$H_o: p_a - p_b = 0$$

$$H_o: p_a - p_b > 0$$

$$Sob\ H0: \hat{P}_a - \hat{P}_b|_{Ho} \sim N\left(0, pq\left(\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b}\right)\right)$$

$$onde, p \approx \frac{n_a \hat{p}_a + n_b \hat{p}_b}{n_a + n_b}$$

$$RC_P = [c, +\infty[$$

onde,

$$P(\hat{P}_a - \hat{P}_b|_{Ho} < c) = 1 - \alpha$$

$$c = z_{1-\alpha}\sqrt{pq(\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b})}$$

$$z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$$

Decisão

Se $\hat{p}_a - \hat{p}_b \in RC_P$ então a hipótese H0 deve ser rejeitada

Se $\hat{p}_a - \hat{p}_b \notin RC_P$ então a hipótese H0 não deve ser rejeitada

Teste de diferença de proporções

Teste unilateral à esquerda

$H_0: p_1 - p_2 = 0$
$H_1: p_1 - p_2 < 0$
$RC_Z =]-\infty, -z_{1-\alpha}]$
$onde\ \ z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$

valor_p= $P(Z < z_{obs})$

Teste bilateral

$H_0: p_1 - p_2 = 0$
$H_1: p_1 - p_2 \neq 0$
$RC_Z =]-\infty, -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}, +\infty]$
$onde\ \ z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$

valor_p= $2P(Z > |z_{obs}|)$

Teste unilateral à direita

$H_0: p_1 - p_2 = 0$
$H_1: p_1 - p_2 > 0$
$RC_Z = [z_{1-\alpha}, +\infty]$
$onde\ \ z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$
valor_p= $P(Z > z_{obs})$

Resultado

Cálculo de z_{obs}

$$z_{obs} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - 0}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

$$onde \quad \hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2}$$

Decisão

se z_{obs}
$\in RC$ então Rejeita−se H_0 senão não se rejeita H_0

Exemplo de aplicação.

Para testar a eficácia de um medicamento criaram-se dois grupos de controlo de 50 indivíduos portadores de determinada doença.

Ao grupo de controlo A foi administrado o medicamento. Verificou-se que, durante o tempo de controlo 42 recuperaram.

Ao grupo de controlo B foi administrado um placebo. Verificou-se que 30 recuperaram durante o tempo de controlo.

a) Pode afirmar-se que mais de 50% dos pacientes que tomam placebo recuperam? Responda considerando uma significância de 1%.

b) Pode concluir-se, com uma significância de 5%, que o medicamento é eficaz?