Instituto Superior de Engenharia do Porto

# Estatística (ESTAT)

2019/2020

LEEC

## C2B – Distribuições de probabilidade (2ª parte)
## Distribuições contínuas

Luís Afonso  lma@isep.ipp.pt

# VARIÁVEIS ALEATÓRIA CONTÌNUAS

- Uma v.a contínua pode assumir qualquer valor dentro de um intervalo de números reais. Consequentemente o conjunto de valores que pode assumir (contradomínio) é não númerável

- Não é possível listar, individualmente, todos os possíveis valores de uma variável aleatória contínua. Por conseguinte o quadro de distribuição de probabilidade/função de probabilidade é inadequada para descrever convenientemente a v.a.

- Associam-se probabilidades a intervalos da variável e não a pontos.

# FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE

Uma v.a. $X$ contínua é caracterizada pela sua função densidade de probabilidade *f(x)* com as seguintes propriedades:

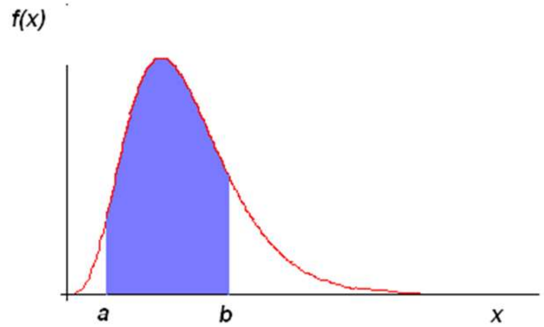
i) $f(x) \geq 0$, para todo $x$;

ii) A área sob limitada pelo eixo dos xx e a curva de $f$(x) é 1; ou seja

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

iii) P($a \leq X \leq b$) = área sob a curva de $f(x)$ e acima do eixo $x$, entre os pontos $a$ e $b$, *ou seja*

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$




iv) $P(X = x_0) = 0$, para $x_0$ constante

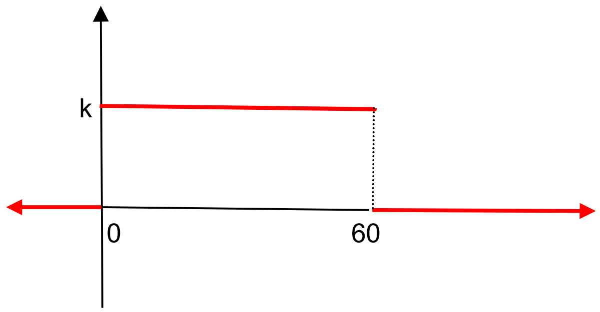
$$P(X = x_0) = P(x_0 \leq X \leq x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0$$

Assim, $P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$.

# FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE

**Exemplo 1:** Um gerador de números aleatórios produz um número real entre 0 e 60 minutos.

A v.a. X que representa o número assim obtido tem a função densidade de probabilidade representada na figura seguinte



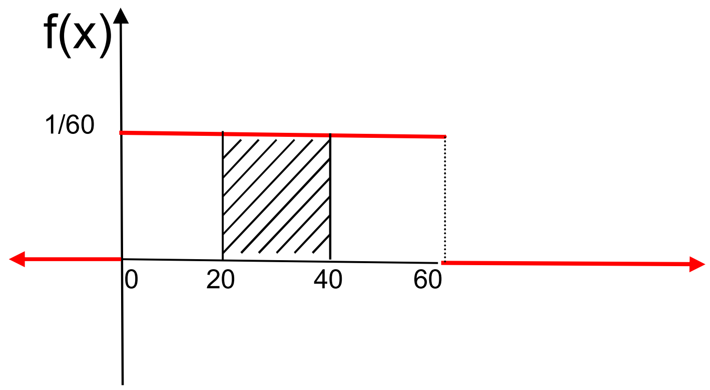

a) Determine o valor de k:

Sabe-se que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, ou seja,

$$Area = 60k = 1$$

$$k = \frac{1}{60}$$

b) Calcule P(20<X<40)




$$P(20 < X < 40) = \int_{20}^{40} f(x)dx = \int_{20}^{40} \frac{1}{60} dx \approx 0.33$$

*ou*

$$P(20 < X < 40) = Area \qquad onde \quad Area = (40 - 20) \cdot \frac{1}{60} \approx 0.33$$

# FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

**Def:** Seja X uma v.a contínua então, a função de distribuição de probabilidade *F(x)* é

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Por conseguinte, $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ nos pontos onde F(x) é derivavel.

Verifica-se também que

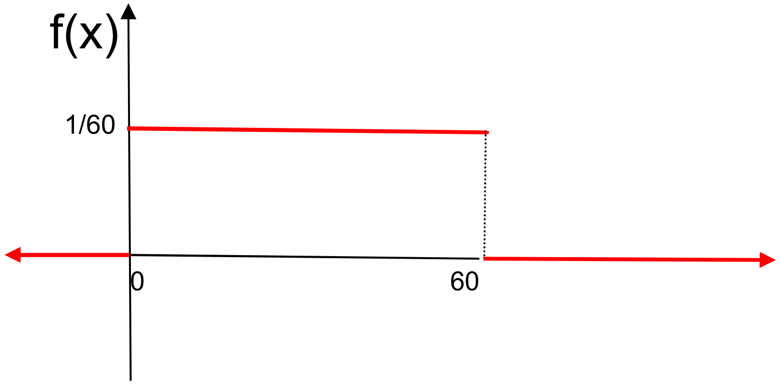
$$P(a<X<b)=P(a\leq X<b)=P(a<X\leq b)=P(a\leq X\leq b)=F(b)-F(a),$$

pois é sabido que

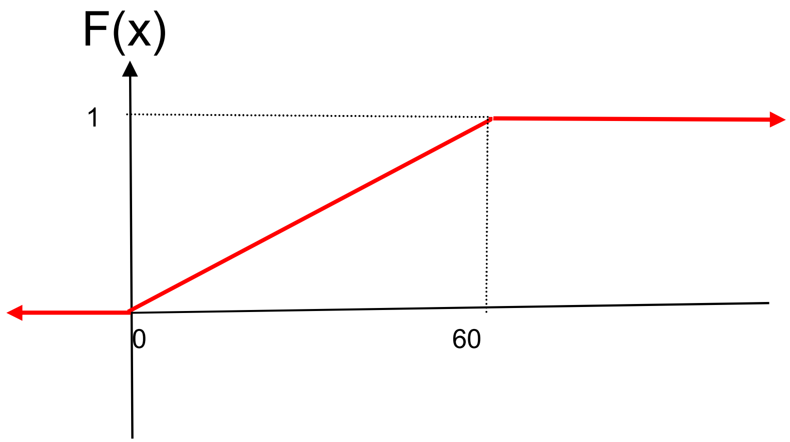
$$P(X = x_0) = 0 \quad se \quad x_0 \text{ é constante.}$$

# FUNÇÃO DISTRIBUÍÇÃO DE PROBABILIDADE

Retomando o exemplo anterior, cuja v.a. tem função densidade de probabilidade com a representação




$$f(x) = \begin{cases} 1/60 & se \quad x \in [0,6] \\ 0 & se \quad x \notin [0,60] \end{cases}$$




## Cálculo de *F*(x)

$$se \quad x < 0 \quad então\ F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

$$se \quad 0 \leq x < 60 \quad então \quad F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} \frac{1}{60} dt = \frac{1}{60} x$$

$$se \quad x \geq 60 \quad então \quad F(x) = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ \frac{1}{60} x & se \quad 0 \leq x < 60 \\ 1 & se \quad x > 60 \end{cases}$$

**Cálculo:** P(20<X<40)=F(40)-F(20)=20/60=1/3

Cálculo: P(X>10)=1-F(10)=1-(10/60)=5/6

# VALOR MÉDIO E VARIÂNCIA

Seja $X$ uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade $f(x)$, então

O valor médio é a quantidade

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

A variância é dada por

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

As propriedades são análogas às do caso discreto.

# Distribuição Uniforme – Un($a$, $b$)

A distribuição uniforme é usada para representar uma quantidade que varia aleatoriamente num intervalo [$a$, $b$] e cuja probabilidade de tomar valores num sub-intervalo de [$a$, $b$] é proporcional ao seu comprimento.

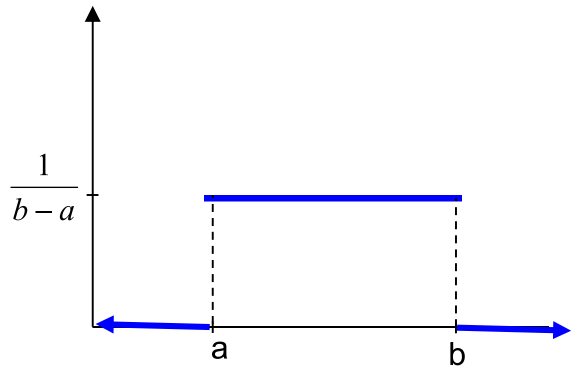
Se uma v.a. $X$ tem distribuição uniforme entre a e b, escrevemos simbolicamente, $X \sim$ Un($a$, $b$).

Como, neste caso, a probabilidade de $X$ de tomar valores num sub-intervalo de [$a$, $b$] é proporcional ao comprimento desse intervalo então a f.d.p. de $X$ é constante em [$a$, $b$]

# Distribuição Uniforme – Un($a$, $b$)

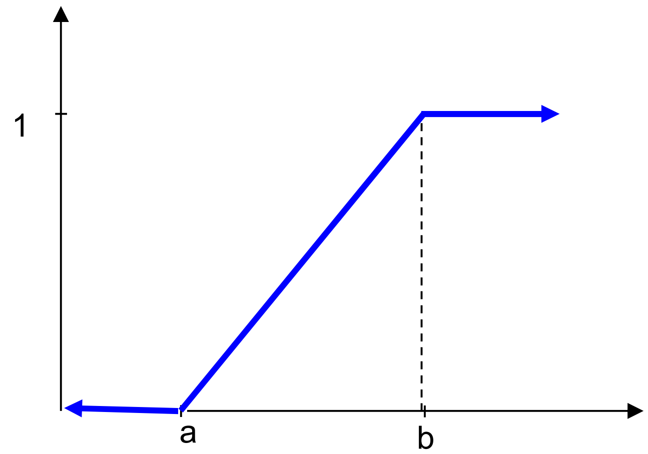
## Função Densidade de Probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$




## Função de Distribuição Acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 1, & x > b \end{cases}$$



# Distribuição Uniforme – U($a$, $b$)

## Propriedades

- Tem 2 parâmetros $a$ e $b$ (se $a$ um parâmetro de localização, $b$ - $a$ é um parâmetro de escala)
- Gama de valores: [$a$, $b$ ]
- Média:

$$E(X) = \mu = \frac{a+b}{2}$$

- Variância:

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

# Distribuição Exponencial– Exp($\lambda$)

A distribuição exponencial é usada em situações em que se consegue identificar um processo de Poisson. É usada para representar intervalos de tempo entre eventos independentes num processo de Poisson, por exemplo:

- o tempo entre a chegada de duas encomendas a um armazém
- o tempo que decorre entre duas avarias de uma máquina. Tempo de duração de uma lâmpada, etc...

# Distribuição Exponencial– Exp(λ)

Com efeito,

*Se*

Y $-$ "$\textit{número de chegadas, por unidade de tempo}$" tem distribuição $Po(\lambda)$

então

$W - $ "$\textit{número de chegadas, por } x \textit{ unidades de tempo}$" $\textit{tem distribuição}$ $Po(\lambda x)$ e

$$P(W = w) = f(w) = e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^w}{w!}$$

Considerando agora, X $-$ "$\textit{Tempo até uma chegada, em unidades de tempo}$" vem

$$P(X > x) = P(W = 0) = \mathrm{f}(0) = e^{-\lambda x}$$

$$P(T \leq x) = F(x) = 1 - e^{-\lambda}$$

A função densidade de probabilidade é

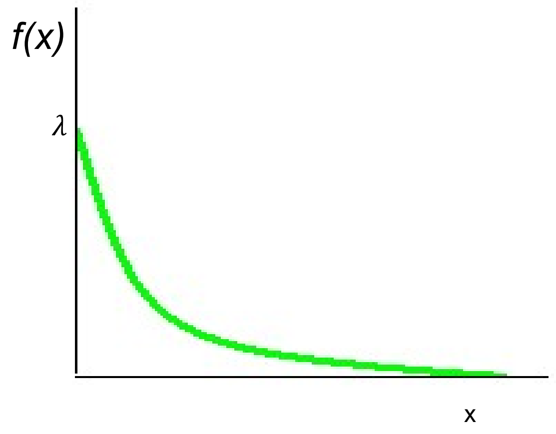
$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

# Distribuição Exponencial– Exp(λ)

Def: Se X~Exp(λ) (λ>0) então:

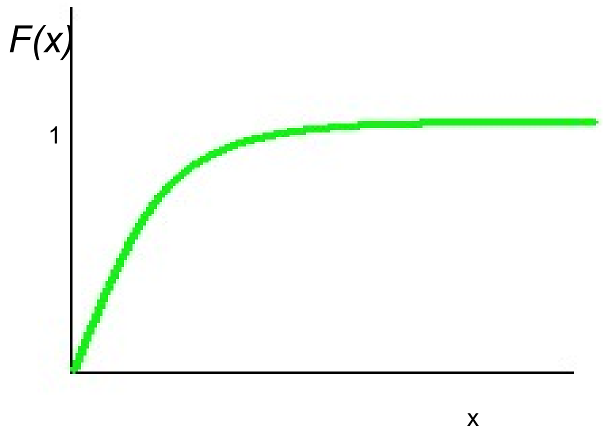
A. A função densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$




B. A função de distribuição é:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$



# Distribuição Exponencial

Algumas propriedades:

Gama de valores: [0, +∞[

Média: $E(X) = \mu = \frac{1}{\lambda}$

Variância: $V(X) = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

A distribuição exponencial não considera o "desgaste". Não tem memória,

$$P(X > s + t \mid X > s) = \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

# Distribuição Exponencial

A distribuição exponencial pode ser interpretada como o tempo de espera entre dois acontecimentos de Poisson.

$$W \sim \text{Po}(\lambda) \Rightarrow E(W) = \lambda$$

$$X \sim \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow E(X) = 1/\lambda$$

Ou seja, numa distribuição exponencial o tempo médio de espera entre dois registos sucessivos de um processo de Poisson é o inverso do ritmo médio desses registos.

# Distribuição Exponencial

## Exemplo:

O tempo de duração de um componente eletrónico A tem distribuição exponencial de média 2500 horas.

a) Calcule a percentagem de componentes cuja duração excede 2500 horas.

b) Calcule a probabilidade de um componente durar entre 2500 e 3000 horas.

c) Calcule o tempo de duração que excedido apenas por 10% dos componentes.

# Distribuição Normal – N($\mu$, $\sigma^2$)

A distribuição normal é em muitos sentidos a distribuição fundamental da teoria estatística moderna. Foi estudada inicialmente no sec XVIII quando os cientistas observaram um impressionante grau de regularidade nos erros de medição. Naquele tempo verificou-se que os padrões (distribuições) podiam ser aproximados por curvas contínuas a que chamavam “curvas normais dos erros”.

- As propriedades matemáticas das “curvas normais” foram estudadas por Abraham de Moivre (1667-1745), Pierre Laplace (1749-1827) e Karl Gauss (1777-1855).

# Distribuição Normal – N($\mu$, $\sigma^2$)

A distribuição normal pode ser usada para representar quantidades que resultam da soma de um grande número de quantidades aleatórias (Teorema do Limite Central), ou para representar características de populações associadas a medições e/ou respetivos erros associados. Trata-se de uma distribuição importante dada a sua aplicabilidade na modelização estocástica de muitos fenómenos naturais.

Def: Diz-se que uma

v.a. *X* tem distribuição normal com parâmetros média $\mu$ e variância $\sigma^2$ e representa-se simbolicamente

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

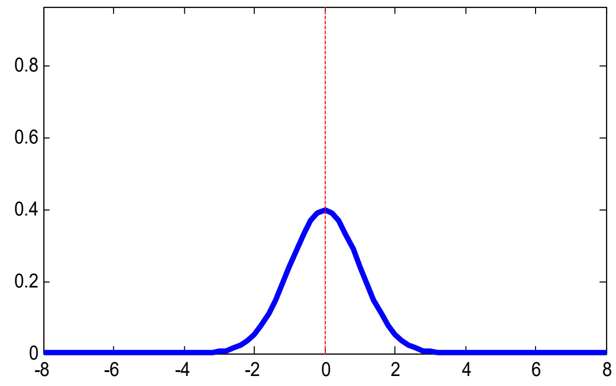
Se e só se a sua função de densidade é

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in R$$

# Distribuição Normal – N(μ, σ²)

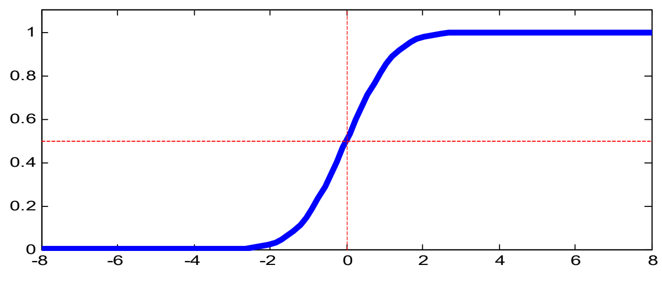
## Função Densidade de Probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in R$$




## Função de Distribuição Acumulada

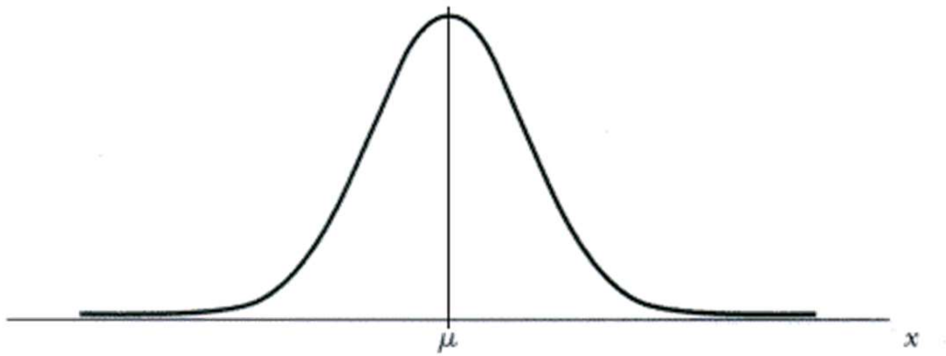
$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$



# Distribuição Normal – N($\mu$, $\sigma^2$)

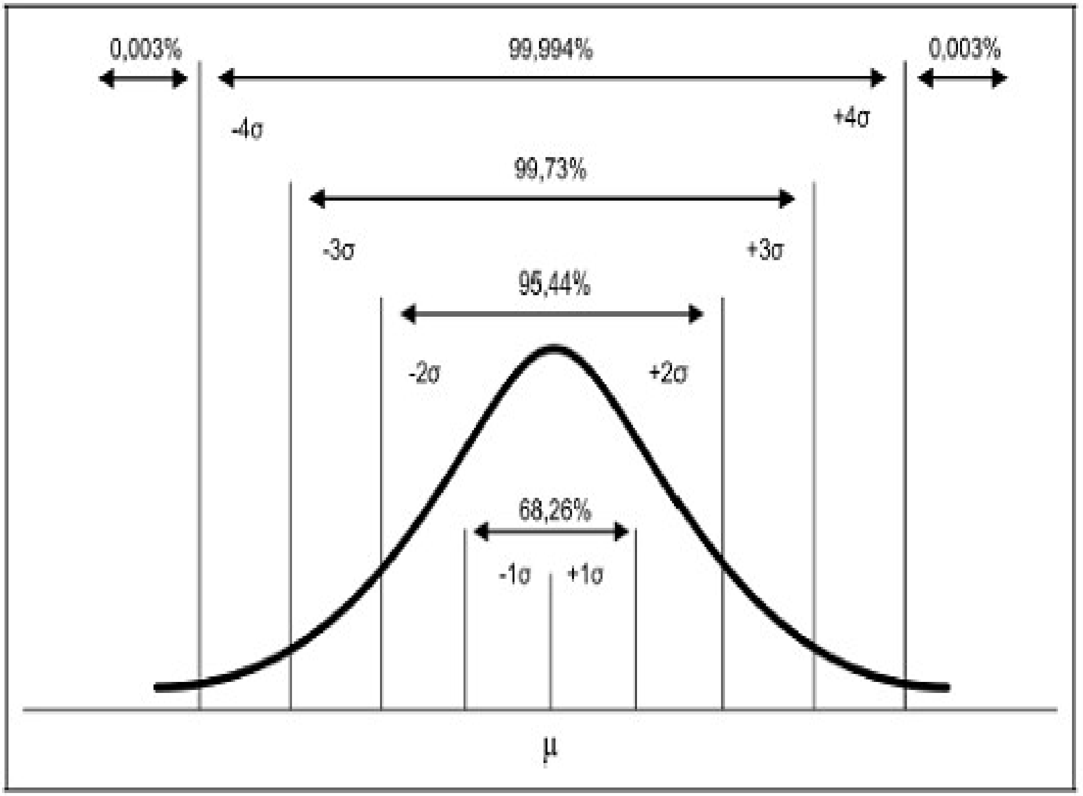
## Algumas características da f.d.p. Normal:

- O domínio é R
- Tem a forma de sino e um único máximo em $x=\mu$
- É simétrica relativamente a um eixo vertical em $x=\mu$ (média), a mediana também ocorre em $x=\mu$
- Tem dois pontos de inflexão em $x=\mu-\sigma$ e $x=\mu+\sigma$
- o eixo dos *xx* é uma assímptota



# Distribuição Normal – N($\mu$, $\sigma^2$)

- Cerca de 68% da população difere da média menos de 1 desvio padrão,
  $P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) \approx 0.6826$
- Cerca de 95% da população difere da média menos de 2 desvios padrões,
  $P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) \approx 0.9544$
- Cerca de 99.7% da população difere da média menos de 3 desvios padrões,
  $P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) \approx 0.9973$



# Distribuição Normal – N(μ, σ²)

## Propriedades

- Tem como parâmetos μ (localização), $\sigma^2$ (escala)
- Gama de valores: $x \in ]-\infty, +\infty[$, $\mu \in ]-\infty, +\infty[$, $\sigma \in ]0, +\infty[$
- Média: $E(X) = \mu$
- Variância: $V(X) = \sigma^2$
- A distribuição $Z \sim N(\mu=0, \sigma^2=1)$ é a Distribuição Normal Reduzida
- se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e tem-se

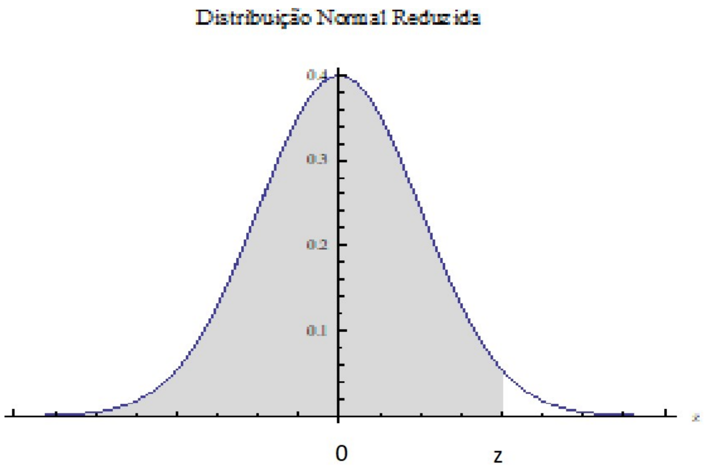
$$X = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$$

e se $Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ então $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$

# Distribuição Normal Reduzida: Cálculo de probabilidades

Se $Z \sim N(0;1)$ ou seja, Z tem distribuição normal reduzida de média 0 e variância 1,

então a sua f.d.p. é $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$




O valor de $P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

não pode ser obtido analiticamente para qualquer z. Existem, contudo, tabelas com valores obtidos por integração numérica da distribuição Normal reduzida.

$$P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \approx \Phi(z)$$

# Distribuição Normal Reduzida. Uso da Tabela

## Distribuição Normal Reduzida

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = P(Z \leq z)$$

| z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,523 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,563 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,602 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,640 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,677 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,712 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,745 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,776 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,805 |

$a) P(Z < 0.65) = \Phi(0.65) = 0.7422$

$b) P(Z > 0{,}24) = 1 - P(Z \leq 0{,}24) = 1 - \Phi(0{,}24) = 1 - 0.5948 = 0.4052$

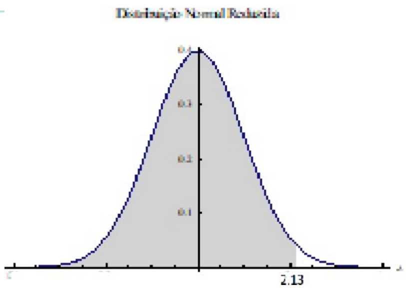
$c) P(0{,}24 < Z < 0{,}65) = \Phi(0{,}65) - \Phi(0{,}24) = 0.7422 - 0.5948 = 0.1474$

# Distribuição Normal Reduzida. Exemplo 1

Seja Z ~ $N(0;1)$

Calcule:

$a) P(Z < 2{,}13) = \Phi(2{,}13) = 0.9834$

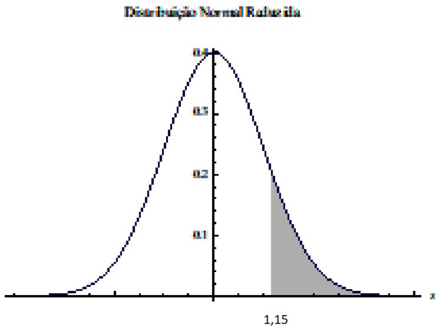



$d) Det \quad k: P(Z < k) = 0{,}9515$

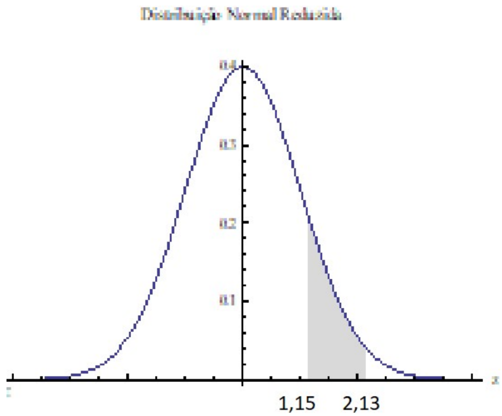
$\Phi(k) = 0{,}9515$

$k = \Phi^{-1}(0{,}9515) = 1{,}66$

$b) P(Z > 1{,}15) = 1 - P(Z \leq 1{,}15) =$
$1 - \Phi(1{,}15) = 0.1251$

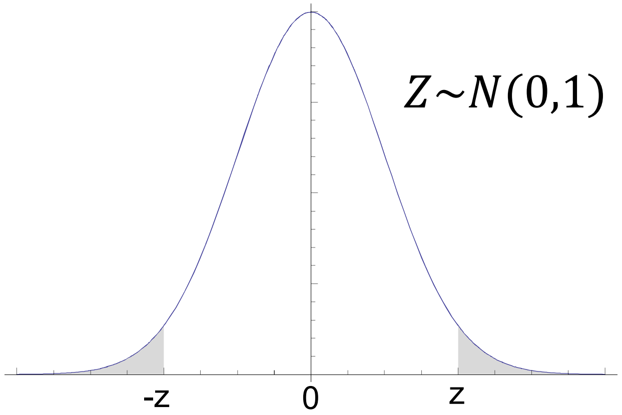



$c) P(1{,}15 < Z < 2{,}13) = P(Z < 2{,}13) - P(Z < 1{,}15) =$
$= \Phi(2{,}13) - \Phi(1{,}15) = 0{,}9834 - 0{,}8749 = 0{,}1085$



# Distribuição Normal Reduzida: Simetria e cálculo de probabilidades

## A distribuição normal reduzida é simétrica relativamente à reta z=0




$$Z \sim N(0,1)$$

$$P(Z \leq -z) = P(Z > z)$$
$$\Phi(-z) = 1 - P(Z \leq z)$$
$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

# Distribuição Normal: Cálculo de probabilidades

Suponhamos que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e que queremos calcular

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

A solução deste integral não é conhecida, apenas aproximações numéricas e tabelas de áreas sob a curva normal. Estas tabelas dão-nos os valores para a distribuição normal reduzida Z.

Teorema: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

Com o teorema anterior em mente, podemos calcular as probabilidades referentes à v.a. $X$, a partir da tabela que nos dá as probabilidades da v.a. $Z$

# Distribuição Normal: cálculo de probabilidades

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

$$P(X \leq a) = P(Z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}) = F(a) = \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

$$P(X > b) = 1 - P(X \leq b) = 1 - F(b) = 1 - \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})$$

Note-se que se utiliza *Φ* para representar *F(z)*.

$$P(a < X \leq b) = P(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}) = F(b) - F(a) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

# Distribuição Normal. Exemplo 2

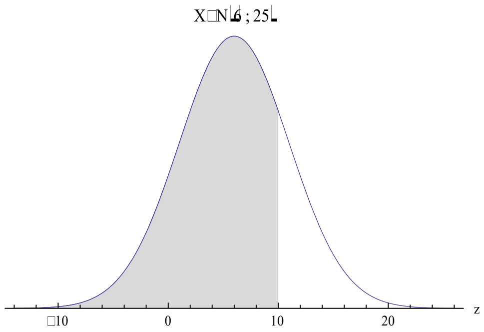
Seja X~N(6;25) , calcule

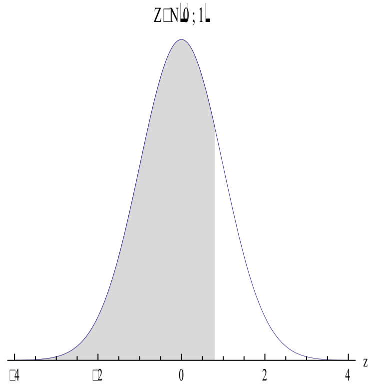
a) P(X<10)

$R: P(X < 10) = P(\frac{X-6}{5} < \frac{10-6}{5}) = P(Z < 0.8)$

$P(Z < 0.8) = \Phi(0.8) \approx 0.7881$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-6}{5} \sim N(0;1)$$




b) P(X>5)

$R: P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \Phi\left(\frac{5-6}{5}\right) = 0.5793$ $\quad Nota: P(X < a) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

c) P(5<X<10)

$R: P(5 < X < 10) = P(X < 10) - P(X \leq 5) = 0.7881 - (1 - 0.5793) = 0.3674$

d) O valor de k que é ultrapassado em 20% dos casos.

$R:\ P(X > k) = 0.2 \Leftrightarrow P(X \leq k) = 0.8 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{k-6}{5}\right) = 0.8 \Leftrightarrow \frac{k-6}{5} = \Phi^{-1}(0.8) = 0.84 \Leftrightarrow k = 10.2$

# Teoremas da aditividade da distribuição normal

- qualquer soma (ou diferença) de v.a. Normais e independentes é ainda uma v.a. Normal.

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$
$$X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

- de uma forma mais geral:

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \quad \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

- Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são *n* v.a. Normais e independentes com o mesmo valor médio $\mu$ e a mesma variância $\sigma^2$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

# Distribuição Normal. Exemplo 3

**E3.** Um aluno tem duas possibilidades de se deslocar ao ISEP e o tempo de deslocação segue uma distribuição normal. Pelo caminho A o tempo de deslocação é N(55 min;81 min$^2$) enquanto que pelo caminho B é N(60 min;9 min$^2$). O aluno dispõe de 63 minutos, no máximo para realizar a viagem de modo a não chegar atrasado.

a) Qual dos caminhos deve o aluno utilizar?

b) Supondo que o aluno escolhe ao acaso (atirando uma moeda) um caminho qual a probabilidade de se atrasar?

c) Calcule a probabilidade do tempo total acumulado em 4 viagens pelo caminho A e 6 viagens pelo caminho B exceder 10 horas.

d) Calcule a probabilidade do tempo de uma viagem pelo percurso A demorar mais do que uma viagem pelo percurso B.

# Distribuição Normal. Exemplo 3: Resolução

$X_A$ – "Tempo de conclusão do percurso A(min)"; $X_A \sim N(55;81)$

$X_B$ – "Tempo de conclusão do percurso B (min)"; $X_B \sim N(60;9)$

$X_T$ – "Tempo total de coclusão dos 10 percursos (min)"

## Resolução

a)

$$P(X_A < 63) = \Phi\left(\frac{63-55}{\sqrt{81}}\right) = \Phi(0.89) = 0.8133$$

$$;P(X_B < 63) = \Phi\left(\frac{63-60}{3}\right) = \Phi(1) = 0.8413$$

$R: B \quad pois \quad \Phi(1) > \Phi(0.89)$

b)

$R: 0.5P(X_A > 63) + 0.5P(X_B > 63) =$

$= 0.1727$

c)

$$X_T = \sum_{i=1}^{4} X_{Ai} + \sum_{i=1}^{6} X_{Bi} \sim N(4 \cdot 55 + 6 \cdot 60;\ 4 \cdot 81 \cdot 6 \cdot 9)$$

$$X_T \sim \mathrm{N}(\ 580; 19.44^2)$$

$$P(X_T > 600) = 1 - P(X_T \leq 600) = 1 - \Phi(1.03) = 0.1515$$

d)

$$P(X_A > X_B) = P(X_A - X_B > 0)$$
$$= P(W > 0) = 1 - P(W \leq 0) =$$
$$1 - \Phi\left(\frac{0-(-5)}{\sqrt{9+81}}\right) = 1 - \Phi(0.53)$$
$$= 0.2981$$

$CA: W = X_A - X_B \sim N(55-60; 81+9)$
$(Aditividade)$

# Teorema do Limite Central

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias i.i.d. (*n* v.a. independentes e igualmente distribuídas) com os valores médios $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, e variâncias $\sigma^2_1, \sigma^2_2, \ldots, \sigma^2_n$ finitas, respetivamente. Então, para *n* grande (na prática para $n \geq 30$),

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \approx N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}} \approx N(0,1)$$

# Exemplo

1. Admite-se que o erro cometido em cada operação de medição tem distribuição U(-5 mm;5 mm)

a) Caracterize a v.a. que representa o erro propagado em 100 operações de medição.

b) Calcule a probabilidade do erro propagado em 100 medições exceder 3 cm.

# Exemplo

a) Caracterize a v.a. que representa o erro propagado em 100 operações de medição.

$X_i$ − Erro cometido na i−ésima medição (mm): i = 1,2, … , 100

Y−"Erro total de 100 operações de medição"

$$Y = \sum_{i=1}^{100} X_i \sim N(100\mu; 100\sigma^2)$$

(Teorema do limite central)

Uma vez que $X \sim U(-5;5)$

$$vem \quad \mu = \frac{a+b}{2} = \frac{-5+5}{2} = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(5-(-5))^2}{12} \approx 8.33$$

$$Assim, \quad Y \sim N(100 \cdot 0 + 100 \cdot 8.33)$$

Aplicação do Teorema do limite central ($n \geq 30$)

b) Calcule a probabilidade do erro propagado em 100 medições exceder 3 cm.

$Y \sim N(0; 100 \cdot 8.33)$

$Y \sim N(0; 28.9^2)$

$$P(Y > 30) = 1 - P(Y \leq 30) = 1 - \Phi\left(\frac{30-0}{28.9}\right) = 1 - \Phi(1.04)$$

$= 0.1492$