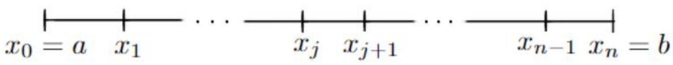
Universidad de Ingeniería y Tecnología – UTEC
Departamento de Ciencias
Cálculo de una Variable
Ciclo 2023 – I

Apellidos y nombres:
Aula:

SUMA DE RIEMANN

Los métodos de integración (tales como sustitución, integración por partes, fracciones parciales, etc.) que se aprendieron recientemente, permiten calcular las antiderivadas de una función $f(x)$. Estos métodos permiten reducir las integrales indefinidas en expresiones sencillas de relacionar a antiderivadas conocidas. Sin embargo, algunas funciones $f(x)$ no pueden reducirse a expresiones simples o se presentan situaciones donde la función se presenta en forma discreta que representa las mediciones de un experimento u otras observaciones. Es en estos casos que se necesita operar ir más allá de los métodos analíticos. Intentado aproximar numéricamente las integrales: la suma de Riemann es uno de los tantos métodos de integración numérica. Para utilizar la suma de Riemann se considera una función $f = f(x)$ definida en el intervalo $[a, b]$ que se divide en $n > 2$ subintervalos denotados por $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ tal que $j = 1, \ldots, n$ y $[a, b] = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$.



Si los intervalos I_j tienen el mismo ancho h, entonces $x_j = a + jh$, $x_{j+1} = x_j + (j+1)h$, ... , hasta $x_n = b$. Aquí se substituye la función $f(x)$ en cada subintervalo I_j por una *función constante $\bar{f}_j(x)$* que permite realizar una integral de $f(x)$ de manera aproximada, es decir

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \approx \int_{x_{j-1}}^{x_j} \bar{f}_j(x)dx$$

Si se escoge la función constante $\bar{f}_j(x) = f(x_j^*)$ tal que $f(x_j^*) = \inf_{x \in I_j} f(x)$, el método se denomina *suma de Riemann inferior*. Mientras que, al escoger la función constante $\bar{f}_j(x) = f(x_j^*)$ tal que $f(x_j^*) = \sup_{x \in I_j} f(x)$, el método se denomina *suma de Riemann superior*[1]. En cualquier caso, la aproximación integral de la función $f(x)$ en el intervalo I_j, se puede expresar como

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \approx \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x_j^*)dx = f(x_j^*)\Delta x_j$$

Finalmente la integral en todo el intervalo $[a, b]$ estaría dada por

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x_j^*)dx \\ &\approx \sum_{j=1}^{n} f(x_j^*)\Delta x_j = h\sum_{j=1}^{n} f(x_j^*) \end{aligned} \tag{1}$$

Geométricamente (1) representa la suma de las áreas de n rectángulos de ancho, o base, $\Delta x_j = h$ y altura $f(x_j^*)$ que pueden estar por encima o debajo de la función $f(x)$ dependiendo de qué tipo de suma de Riemann se escoja. La aproximación numérica de una integral comprende una amplia familia de algoritmos

[1] Tener en cuenta que la notación $f(x_j^*) = \inf_{x \in I_j} f(x)$ indica que éxiste un $x_j^* \in I_j$ tal que $f(x_j^*)$ es mínimo en dicho intervalo. De igual manera, $f(x_j^*) = \sup_{x \in I_j} f(x)$ indica que éxiste un $x_j^* \in I_j$ tal que $f(x_j^*)$ es máximo en dicho intervalo.

que permiten calcular el valor numérico de una integral definida. En esta evaluación se extenderá el modelo de Riemann considerando diferentes sustituciones de la función $f(x)$ en los intervalos I_j para aproximar la integral.

PARTE 1

A) MÉTODO DEL TRAPECIO

Sea la función $f(x)$ definida en el intervalo $[a,b]$ que se subdivide en solo 1 intervalo $I_1 = [a,b]$. Para aproximar la integral, se sustituye la función $f(x)$ por una función lineal $L(x)$ que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. A partir de ello,

A1) Escriba la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos como $L(x) = c_1(x-a) + c_2(x-b)$. Luego halle c_1 y c_2 en términos de a, b, $f(a)$ y $f(b)$, de modo que se cumpla que $L(a) = f(a)$ y $L(b) = f(b)$. **(1 punto)**

A2) Realice el gráfico de la recta $L(x)$ superpuesta con la función $f(x)$ y note que, en general, la región bajo la recta $L(x)$ corresponde a un trapecio. A partir de este gráfico, halle las bases y altura del trapecio en términos de a, b, $f(a)$ y $f(b)$. *Nota: Asuma que $f(x)$ es una curva cualquiera, y junto a ella ubique la recta $L(x)$ en función de los puntos a, b, $f(a)$ y $f(b)$.* **(0.5 puntos)**

A3) Integre $\int_a^b L(x)dx$, por integración directa, y verifique que la respuesta coincide con el área de un trapecio cuyas bases y alturas fueron hallados en A2). **(1.5 puntos)**

A4) Si se subdivide el intervalo $[a,b]$, en el que la función $f(x)$ está definida, para $n > 2$ subintervalos $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ de ancho $\Delta x_j = h$, tal que $j : 1, 2 \ldots n$. Modifique la expresión obtenida en A3), de tal manera que se puede aproximar la siguiente integral como el área de un trapecio en el intervalo $[x_{j-1}, x_j]$: **(1.5 puntos)**

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \approx \int_{x_{j-1}}^{x_j} L_j(x)dx$$

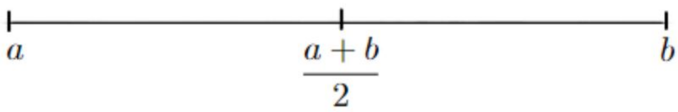
donde $L_j(x)$ es la recta que pasa por los puntos $(x_{j-1}, f(x_{j-1}))$ y $(x_j, f(x_j))$, para $j : 1, 2 \ldots n$.

A5) Sume el área de los trapecios calculados en A4) para demostrar que la integral definida en el intervalo $[a; b]$ se aproxima a: **(1.5 puntos)**

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right]} \tag{2}$$

B) MÉTODO DE SIMPSON 1/3

Sea la función $f(x)$ definida en el intervalo $[a,b]$ que se subdivide en 2 intervalos igualmente espaciados. Para aproximar la integral, se tiene que sustituir la función $f(x)$ por una función cuadrática $p(x)$ que pasa por los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ y $(m, f(m))$, donde $m = \dfrac{a+b}{2}$. A partir de ello,



B1) Suponga que la regla de correspondencia de $p(x)$ es un polinomio cuadrático de la forma

$$p(x) = c_0(x-a)(x-b) + c_1(x-a)(x-m) + c_2(x-b)(x-m) \tag{3}$$

Determine la expresión para c_2 tal que $p(a) = f(a)$. De igual manera, determine la expresión para c_1 tal que $p(b) = f(b)$ y c_0 tal que $p(m) = f(m)$. **(1 punto)**
<u>Observación</u>: Identifique que los valores de c_0, c_1 y c_2 hallados, son expresiones que garantizan que la función $f(x)$ pase por los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ y $(m, f(m))$.

B2) Calcule la integral definida $\int_a^b p(x)dx$ usando la expresión (3) y los valores de c_0, c_1 y c_2 hallados en B1). **(2 puntos)**

B3) Considere ahora que el intervalo $[a, b]$, de la función $f(x)$, es subdividido en $n > 2$ (para n par) subintervalos del mismo ancho $\Delta x_j = h$, donde $j : 1, 2 \ldots n$. Aplique la expresión demostrada en B2) a cada subintervalo de la forma $I_j = [x_{j-1}, x_{j+1}]$ para hallar la aproximación integral de **(1.5 puntos)**

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} p_j(x)dx$$

donde $p_j(x)$ es la parábola que pasa por los puntos $(x_{j-1}, f(x_{j-1}))$, $(x_j, f(x_j))$ y $(x_{j+1}, f(x_{j+1}))$, para $j : 1, 2 \ldots n-1$.

B4) Del mismo modo que en el método del Trapecio, sume los resultados obtenidos en cada subintervalo para demostrar que: **(1.5 puntos)**

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2k-1}) + f(b)\right]} \tag{4}$$

C) MÉTODO DE SIMPSON 3/8

Sea la función $f(x)$ definida en el intervalo $[a, b]$ que se subdivide en 3 intervalos igualmente espaciados. Para aproximar la integral, ahora se sustituye la función $f(x)$ por una función cúbica $q(x)$ que pasa por los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, $(m, f(m))$ y $(n, f(n))$, donde $m = \dfrac{2a+b}{3}$ y $n = \dfrac{a+2b}{3}$.

C1) Teniendo en cuenta la forma de las reglas de correspondencias propuestas en A1) y B1), proponga y determine la forma de la regla de correspondencia cúbica de $q(x)$ en términos de a, b, $f(a)$, $f(b)$, $f\left(\frac{2a+b}{3}\right)$ y $f\left(\frac{a+2b}{3}\right)$. **(1.5 puntos)**

C2) Halle, por integración directa, $\int_a^b q(x)dx$ usando la expresión hallada en C1). **(1.5 puntos)**

C3) En analogía a los items anteriores, subdivida el intervalo $[a, b]$ en $n > 2$ (para n múltiplo de 3) subintervalos del mismo ancho $\Delta x_j = h$, donde $j : 1, 2 \ldots n-2$. Aplique la expresión demostrada en C2) a cada subintervalo de la forma $I_j = [x_{j-1}, x_{j+2}]$ y halle la expresión de la aproximación integral,

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j+2}} f(x)dx \approx \int_{x_{j-1}}^{x_{j+2}} q_j(x)dx$$

donde $q_j(x)$ es la cúbica que pasa por los puntos $(x_{j-1}, f(x_{j-1}))$, $(x_j, f(x_j))$,$(x_{j+1}, f(x_{j+1}))$ y $(x_{j+2}, f(x_{j+2}))$, para $j : 1, 2 \ldots n-2$. **(1.5 puntos)**

C4) A partir de la expresión hallada en C3), demuestre que **(1.5 puntos)**

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left[f(a) + 3\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) - \sum_{j=1}^{\frac{n}{3}-1} f(x_{3j}) + f(b)\right]} \tag{5}$$

PARTE 2

D) EL NÚMERO DE NEPER

El número de Neper, denotado como e, es una constante matemática fundamental que desempeña un papel crucial en el campo del cálculo, en teoría de números, y en muchas otras áreas de las matemáticas y la ciencia. Ha sido estudiado durante el desarrollo del curso al aprender sobre la función exponencial y el logaritmo natural. Esta número trascendental (osea, que no es raíz de ningún polinomio) surge de forma natural en situaciones que involucran el crecimiento exponencial, como en problemas de interés compuesto, en la descripción de poblaciones en crecimiento, en el decaimiento radiactivo, y en muchas otras aplicaciones científicas y matemáticas. Además, es la base de los logaritmos naturales, y se utiliza en funciones exponenciales y trigonométricas complejas. El número de Neper se define de varias maneras, pero una de las definiciones más comunes es a través de una serie infinita:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots$$

Además de esa formulación, se puede demostrar de manera sencilla que está relacionada con la siguiente integral:

$$e = 3^{1/k}$$

, donde $k = \int_1^3 \frac{1}{x} dx$. A partir de esta expresión integral, determine el valor aproximado de e usando los 3 métodos descritos en la parte 1, usando en todos los casos 12 particiones.**(2 puntos)**

E) GENERACIÓN DE ENERGÍA ELÉCTRICA

Algunas empresas están considerando emplear paneles solares para apoyar al medio ambiente y también porque consideran que podría ayudarles a bajar su consumo eléctrico. Por ello, un alumno ha decidido realizar unas pruebas de potencia a un panel solar muy comercial. El panel solar empleado es uno de 500 Wp (Wp, es la unidad de medida empleada para los paneles que indica que pueden generar 500W cuando la radiación solar directa es de 1000 $\mathrm{W/m^2}$)

Esta empresa tiene distintas sedes, a usted le ha tocado la sede de Arequipa. En cada sede, se ha pedido a su ingeniero egresado de la UTEC que realice pruebas en los paneles, de tal manera, que logre recopilar datos de la potencia en función del tiempo. Los datos se encuentran en el siguiente LINK. A partir de dicha información se les pide:

E1) Realice la gráfica de la potencia en función de las horas para un día del mejor mes del año, el peor mes y un mes intermedio. **(1 punto)**

E2) ¿Qué información te generaría el área bajo la gráfica dibujada en el item E1)? Responda justificando en función del contexto. **(1 punto)**

E3) Calcular la energía (en W-h) en función del tiempo a partir de los datos que les hemos entregado, usando los métodos del trapecio y Simpson 3/8. Compare dichos resultados. **(1 punto)**

E4) Calcule la potencia promedio (en W) generada durante el periodo de funcionamiento del panel para cada uno de los meses del ítem E1). Determine dicha potencia usando los métodos de Riemann inferior y Simpson 1/3 y Simpson 3/8. Compare dichos resultados. **(1 punto)**

E5) ¿Cómo podría determinar la energía promedio generada por día a partir de la información dada? Si es que tiene la información suficiente, realice el cálculo para un día de cada mes del ítem a). **(1 punto)**

También se registró el consumo de potencia de la empresa, dicha información se considera por mes y se encuentra en el mismo LINK. A partir de dicha información:

E6) Determine, a partir del cuadro mostrado, el consumo total de energía de la empresa y el consumo promedio mensual. **(1 punto)**

El ingeniero ha definido que necesita un sistema fotovoltaico ON GRID, este tipo de instalación utiliza la energía fotovoltaica generada para disminuir el consumo de energía eléctrica en la empresa. Es decir, el sistema fotovoltaico generaría un ahorro energético que se podría monetizar, para calcular ese ahorro monetario deben considerar que el valor de la energía eléctrica es de 0.10 soles por cada kWh de energía. El sistema fotovoltaico recomendado para su aplicación es el que se muestra a continuación (los precios se muestran en soles) :

Descripción	**Cantidad**	**Costo unitario**
Panel solar de 500 Wp	28	700
Inversor de 10 kW	1	5200
Soporte para paneles (1 soporte para 4 paneles)	7	712
Cable eléctrico	1	1975
Tablero de distribución	1	1500
Servicio de instalación y transporte	1	8000

Con la tabla debe determinar el costo total del sistema.

E7) Calcule el costo total del sistema fotovoltaico a instalar (solo considere lo que tiene en la tabla). **(1 punto)**

E8) Calcule la energía y el costo que ahorraría el sistema fotovoltaico instalado durante un año. Para esto emplee uno de los tres meses que ha seleccionado en E1). Justifique la razón por la que escoge dicho dicho mes. **(1 punto)**

E9) Calcule, de forma aproximada, el retorno de la inversión. Para esto se deberá analizar cuánto ha costado el sistema y cuánto se ahorra anualmente. Cuando ambos valores se equilibren, ahí se dará el retorno de la inversión. Si bien es básico, este cálculo sirve para definir si la inversión vale la pena o no. **(1 punto)**

Considere que: si el retorno de la inversión se da en menos de 5 años, la inversión tiene potencial de ganancia. Si se encuentra entre 5 y 10 años, se necesita analizar otros aspectos. En cambio, si fuese mayor a 10 años no es recomendable hacer una inversión.

E10) Con el dato anterior ¿Invertiría usted en la compra del sistema fotovoltaico? Justifique su respuesta. **(1 punto)**