



**Universidad de Sevilla**  
**Escuela Politécnica Superior**



Trabajo Fin de Grado  
Ingeniería Electrónica Industrial

*La caracterización integral de las  
semiaplicaciones de Poincaré y su aplicación a  
circuitos electrónicos: El Memristor*

**Autor:** Sergio R. Durán Martín

**Tutor:** Dr. Victoriano Carmona Centeno

**Departamento:** Matemática Aplicada II



## Resumen

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

**Palabras clave:** robótica educativa, robot modular, STM32, FreeRTOS, interfaz gráfica, impresión 3D.

## Abstract

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

**Keywords:** educational robotics, modular robot, STM32, FreeRTOS, graphic interface, 3D printing.

# Índice general

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introducción</b>  | <b>4</b>  |
| <b>2</b> | <b>Descripción del Circuito</b>                            | <b>5</b>  |
| 2.1      | Resistencia negativa                                       | 6         |
| 2.2      | Memristor  | 8         |
| 2.3      | Variables de estado  | 12        |
| 2.4      | Superficies invariantes                                    | 15        |
| <b>3</b> | <b>Sistemas Dinámicos Continuos</b>                        | <b>19</b> |
| 3.1      | Sistemas lineales planos                                   | 20        |
| 3.2      | Sistemas lineales a trozos bizonales                       | 27        |
| <b>4</b> | <b>Semiaplicaciones de Poincaré</b>                        | <b>33</b> |
| 4.1      | Caracterización integral de la semi-aplicacion de Poincare | 37        |
| <b>5</b> | <b>Bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite</b>                | <b>46</b> |
| <b>6</b> | <b>Oscilación Periódica en el circuito</b>                 | <b>52</b> |
| <b>7</b> | <b>TÍTULO CAPÍTULO 7</b>                                   | <b>54</b> |
| <b>8</b> | <b>TÍTULO CAPÍTULO 8</b>                                   | <b>56</b> |

# Capítulo 1

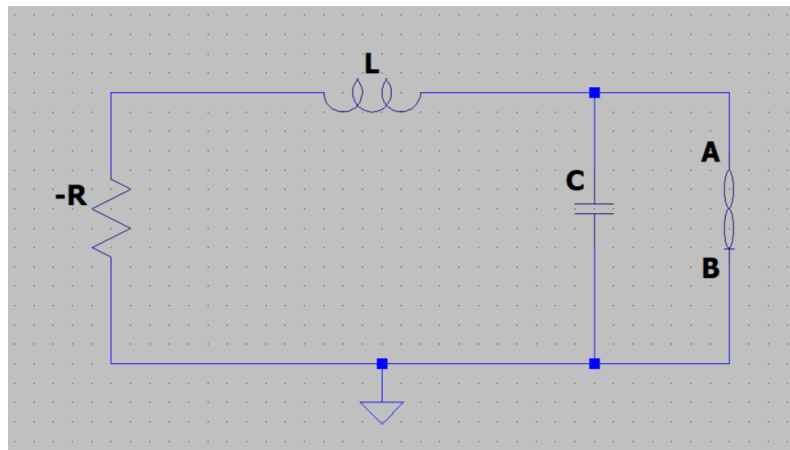
## Introducción

Contenido del capítulo de introducción. Contenido del capítulo 1.

# Capítulo 2

## Descripción del Circuito

El circuito que se ha estudiado es un oscilador con resistencia negativa al que se le ha añadido un componente muy interesante y que está siendo muy estudiado en estos últimos tiempos, el memristor, ver [Fig. 2.1](#).



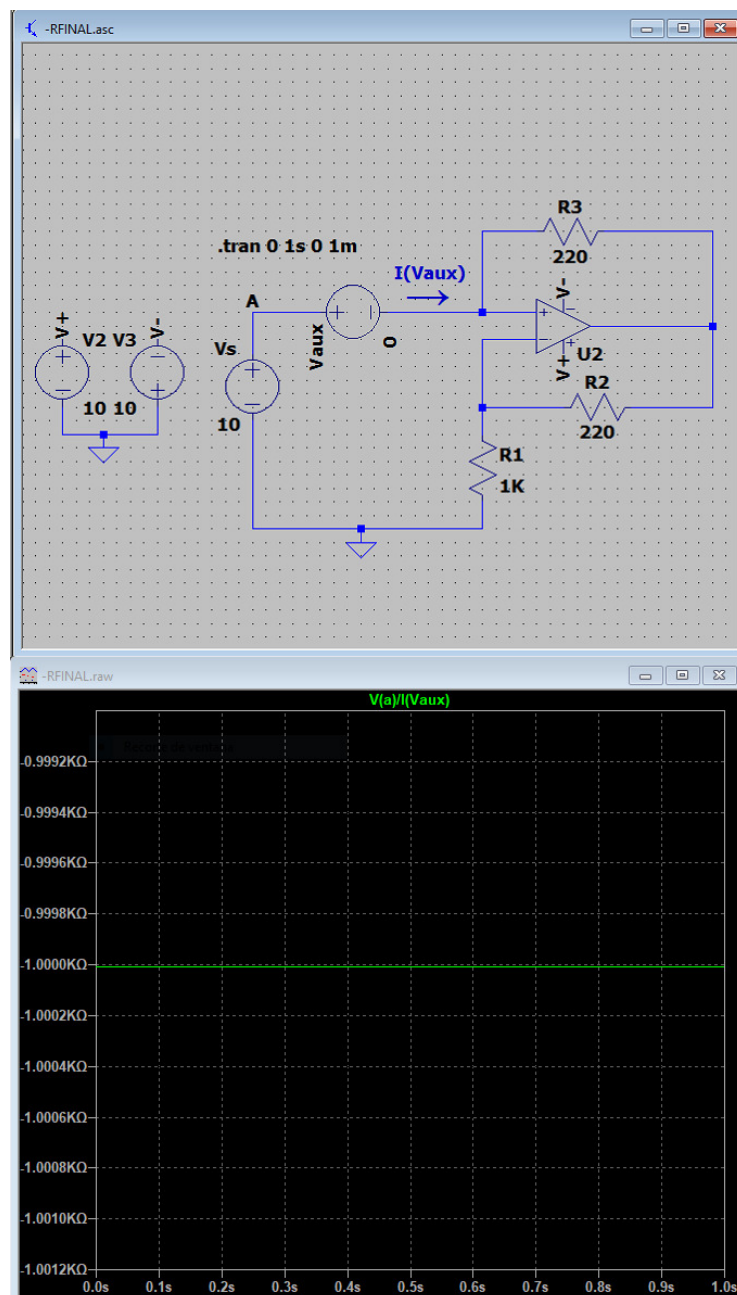
**Figura 2.1** : Oscilador RLC con R negativa y Memristor.

Como se puede ver no existe una fuente de señal en el circuito y esto se debe a que el análisis hecho busca encontrar una oscilación periódica tan solo proporcionando condiciones iniciales a la bobina y el condensador, esto gracias al comportamiento de la resistencia negativa y del memristor los cuales se especifican mas adelante.

La forma de imponer las condiciones iniciales serían las clásicas, usando fuentes de intensidad en serie y tensión en paralelo con interruptores que se abren en  $t = 0(s)$  para la bobina y el condensador respectivamente.

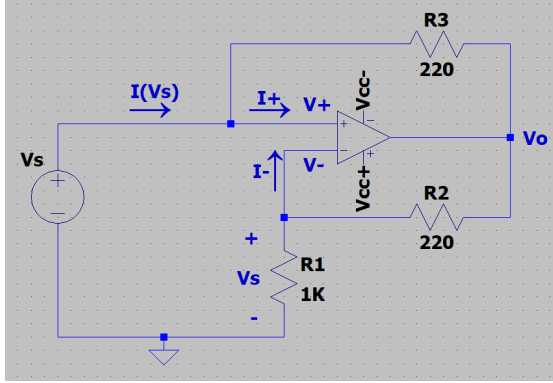
## 2.1. Resistencia negativa

Uno de los componentes del circuito es la resistencia negativa la cual se puede construir con lo que se llama un *Convertidor de Impedancia Negativa (NIC)*. Un NIC es un circuito activo, es decir, en lugar de disipar energía como una resistencia convencional, puede proporcionar energía a un circuito, ver [Fig. 2.2](#). En términos prácticos, un NIC puede ser utilizado para compensar la resistencia de carga de un sistema, mejorar la eficiencia de la transferencia de energía o realizar otras funciones específicas en circuitos eléctricos o electrónicos. En los circuitos osciladores, el NIC desempeña un papel importante en el mantenimiento, estabilización, frecuencia y calidad de la oscilación.



**Figura 2.2 :** Convertidor de Impedancia Negativa de -1000 Ohmios.

Una de las maneras de realizarlo es usando un amplificador operacional y 3 resistencias en la configuración que se ve en la [Fig. 2.2](#) de esta manera si elegimos las resistencias  $R_2 = R_3$  la resistencia  $R_1$  es la que determinaría el valor de resistencia negativa, esta es la explicación:



Consideraciones para el cálculo del circuito de la [Fig. 2.3](#) con Amplificadores Operacionales:

$$V_+ = V_- \quad (2.1)$$

$$I_+ = I_- = 0 \text{ (A)}. \quad (2.2)$$

**Figura 2.3** : Parámetros circuito NIC.

Si observamos la ecuación (2.1) se puede ver que la tensión  $V_S$  cae sobre la resistencia  $R_1$  y se puede relacionar con la tensión de salida  $V_O$  mediante un divisor de tensión:

$$V_S = V_O \frac{R_1}{R_1 + R_2} \rightarrow V_O = V_S \frac{R_1 + R_2}{R_1}. \quad (2.3)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2.2) se puede ver que la intensidad  $I(V_S)$  es la misma que pasa por la resistencia  $R_3$ , por ello se puede deducir:

$$I(V_S) = \frac{V_S - V_O}{R_3}. \quad (2.4)$$

Sustituyendo la ecuación (2.3) en (2.4) y trabajando la expresión para obtener la relacion tensión-intensidad llegamos a:

$$I(V_S) = V_S \frac{-R_2}{R_1 R_3}. \quad (2.5)$$

Si dividimos la tensión  $V_S$  entre la intensidad  $I(V_S)$  (ecuación (2.5)) para obtener la impedancia de entrada del circuito:

$$\frac{V_S}{I(V_S)} = Z_{IN} = \frac{V_S}{V_S \frac{-R_2}{R_1 R_3}} = -R_1 \frac{R_3}{R_2}. \quad (2.6)$$

Si elegimos las resistencias  $R_3 = R_2$  en la ecuación (2.6) obtenemos:

$$Z_{IN} = -R_1. \quad (2.7)$$



## 2.2. Memristor

El componente más interesante de este circuito es el Memristor, teorizado por el científico Leon Chua en 1971, ver [1]. Este elemento trata de llenar el vacío que existía en las relaciones entre las cuatro variables básicas en teoría de circuitos: voltaje  $v$ , intensidad  $i$ , carga eléctrica  $q$  y flujo magnético  $\varphi$ . En concreto el memristor relaciona la carga eléctrica con el flujo magnético de la siguiente manera, ver [2]:

$$\varphi = \varphi(q), \quad q = q(\varphi). \quad (2.8)$$

Sabiendo la relación del voltaje y la intensidad respecto a la carga y al flujo en el tiempo:

$$v(t) = \frac{d\varphi}{dt}, \quad i(t) = \frac{dq}{dt}. \quad (2.9)$$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau, \quad q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau. \quad (2.10)$$

Derivando la ecuación (2.8) respecto al tiempo, y aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi(q)}{dq} \frac{dq}{dt}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.11)$$

Sustituyendo las relación de la ecuación (2.9) en la ecuación (2.11):

$$v(t) = \frac{d\varphi(q)}{dq} i(t), \quad i(t) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} v(t). \quad (2.12)$$

Las dos relaciones de carga y flujo que quedan en la ecuación (2.12) son los que se denominan **Memristancia**  $M(q)$  y **Memductancia**  $W(\varphi)$ :

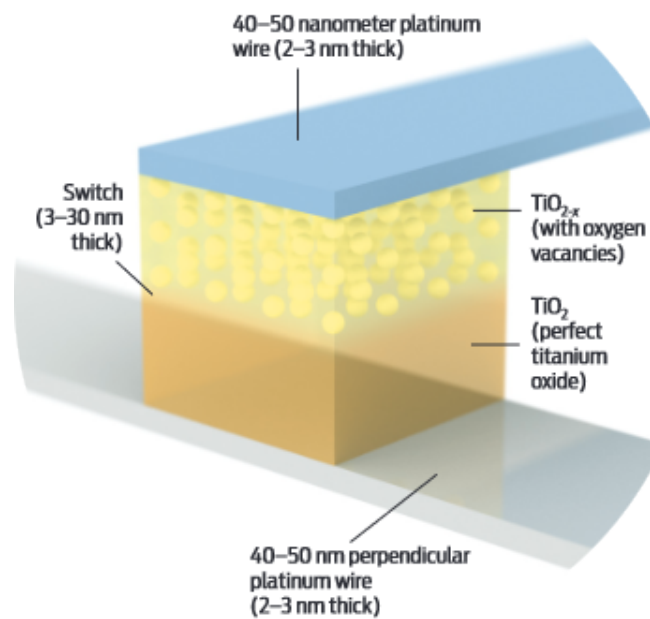
$$M(q) = \frac{d\varphi(q)}{dq}, \quad W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi}. \quad (2.13)$$

Finalmente se presentan dos tipos de expresiones:

$$\text{Memristor controlado por carga} \rightarrow v(t) = M(q) i(t). \quad (2.14)$$

$$\text{Memristor controlado por flujo} \rightarrow i(t) = W(\varphi) v(t). \quad (2.15)$$

El segundo acontecimiento más importante en relación al memristor fue en 2008 cuando en los laboratorios de HP se fabricó un componente cuyo comportamiento era muy parecido al funcionamiento que afirmaba Chua, debía de tener el memristor. En un inicio al componente que HP creó en 2005 le dieron el nombre de *Crossbar Latch*, no sería hasta 2008 que se percataron de la similitud de funcionamiento con el memristor de Chua. La construcción es sencilla, se trata de dos capas, una de dióxido de titanio puro y otra de dióxido de titanio deficiente de átomos de oxígeno, ambas envueltas por dos electrodos de platino *Fig. 2.4. Repasar este párrafo, la frase de "debía tener..." quitar*



**Figura 2.4 :** Construcción del memristor de HP. Ver [4].

El óxido de titanio tiene una serie de características que lo hacen un material muy interesante en esta aplicación:

1. Resistencia variable: La resistencia eléctrica del óxido de titanio puede cambiar en respuesta de la aplicación de una corriente o un campo eléctrico. Lo cual nos permite no tan solo guardar 1 o 0 si no un rango de valores dentro de unos límites de operación.
2. No volatilidad: El óxido de titanio puede mantener su estado de resistencia incluso cuando se retira la corriente eléctrica que lo atraviesa. Esto significa que puede retener información y mantener su estado de resistencia sin requerir energía continua.
3. Cambios rápidos de resistencia: Esta propiedad permite operaciones de escritura y lectura rápidas en el memristor, lo que es crucial para su uso en aplicaciones de almacenamiento y procesamiento de datos.
4. Baja potencia y tamaño compacto

La fórmula que se propone en [3] para modelar el comportamiento de este dispositivo es:

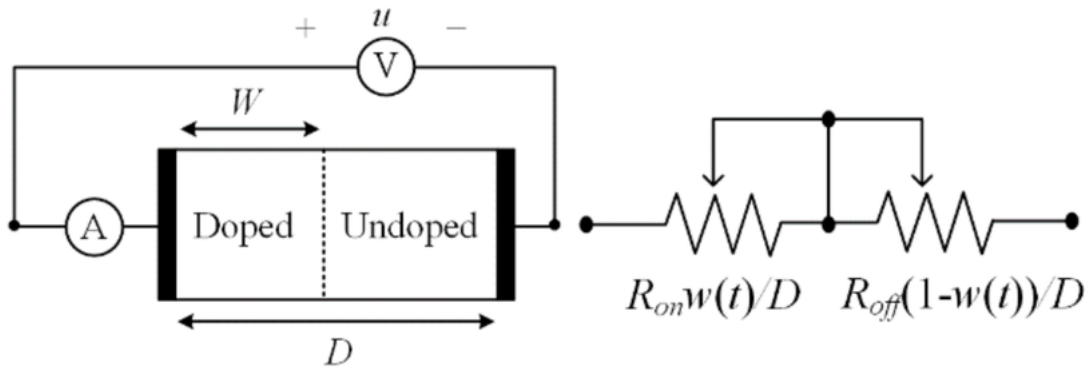
$$v(t) = \left( R_{ON} \frac{w(t)}{D} + R_{OFF} \left( 1 - \frac{w(t)}{D} \right) \right) i(t), \quad (2.16)$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = \mu_V \frac{R_{ON}}{D} q(t). \quad (2.17)$$

Integrando la ecuación (2.17) e insertándola en (2.16) teniendo en cuenta que el valor de resistencia  $R_{ON} \ll R_{OFF}$ :

$$w(t) = \mu_V \frac{R_{ON}}{D} i(t), \quad (2.18)$$

$$M(q) = R_{OFF} \left( 1 - \frac{\mu_V R_{ON}}{D^2} q(t) \right). \quad (2.19)$$

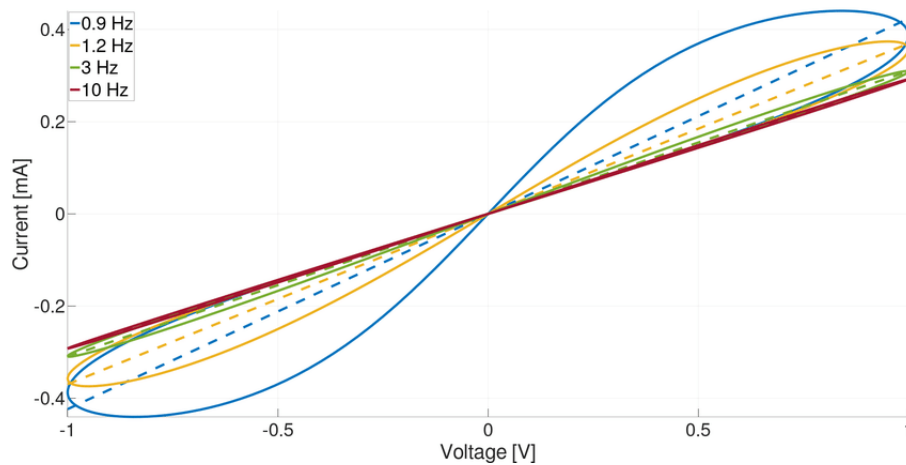


**Figura 2.5** : Esquema del memristor de HP. Ver [5].

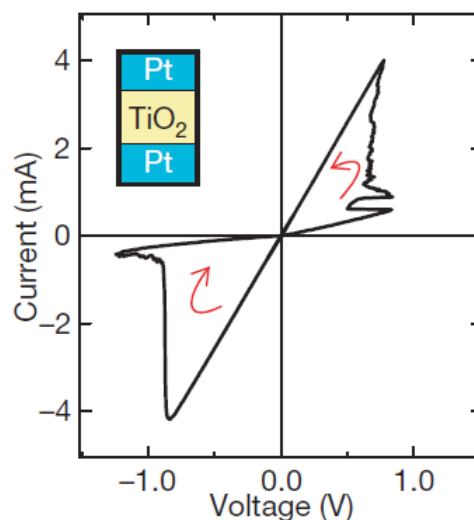
Los parámetros que aparecen en las ecuaciones anteriores y que describen el funcionamiento del componente son:

1.  $R_{ON}$ : Resistencia en el estado ON, valor mínimo. Es constante.
2.  $R_{OFF}$ : Resistencia en el estado OFF, valor máximo. Es constante.
3.  $\mu_V$ : Movilidad iónica de arrastre promedio. Es constante.
4.  $w$ : Ancho de la zona dopada, no es constante, depende de la excitación.
5.  $D$ : Ancho total de la lamina de oxido de titanio. Es constante.

El funcionamiento es el siguiente, entre los dos electrodos de platino tenemos una capa de dióxido de titanio puro  $TiO_2$  que actúa como dieléctrico y otra de dióxido de titanio con vacantes de oxígeno  $TiO_{2-x}$  que actúa como conductor ya que en estas vacantes están cargadas positivamente (ver Fig. 2.4), ya que al faltar átomos de oxígeno se están perdiendo también sus electrones de valencia asociados, generando así que el compuesto necesite atraer electrones a dichas vacantes para así mantenerse eléctricamente estable. Cuando un voltaje positivo se aplica al electrodo superior las vacantes de oxígeno de la zona dopada se repelen y viajan hacia la zona de óxido de titanio puro, haciendo así que aumente la conductividad hasta que se alcance el valor de  $R_{ON}$ . Si por el contrario el voltaje aplicado es negativo, las vacantes de oxígeno viajan hacia el electrodo superior, reduciendo la conductividad hasta  $R_{OFF}$ . *Repasar este párrafo*



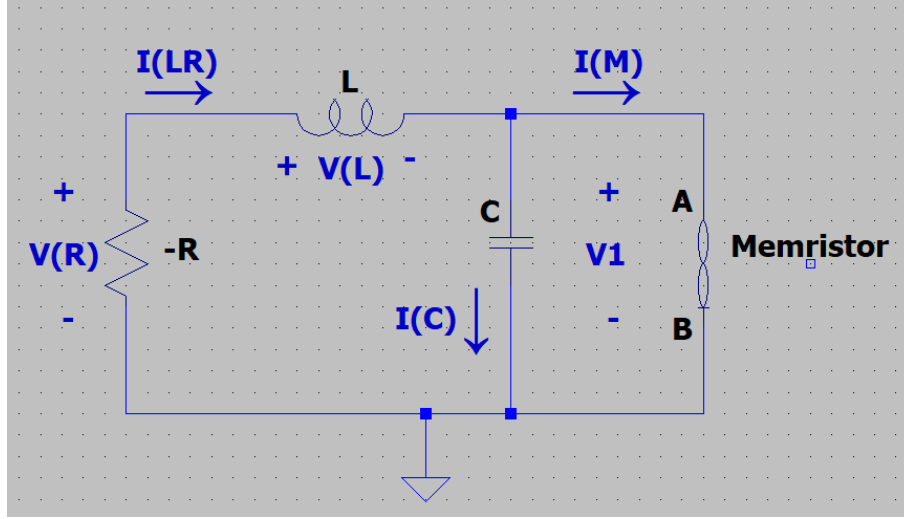
**Figura 2.6** : Gráfica Tensión-Intensidad del Memristor de Chua ideal para una señal de entrada senoidal con varias frecuencias. Como se puede ver conforme aumenta la frecuencia la gráfica se parece más a la de una resistencia tradicional. Ver [6]



**Figura 2.7** : Gráfica Tensión-Intensidad del Memristor de HP. Ver [3].

## 2.3. Variables de estado

En este trabajo hemos hecho un análisis matemático de la bifurcación del circuito oscilador haciendo uso de técnicas de análisis de reciente estudio, pero primero hay que presentar el circuito y transformar sus ecuaciones eléctricas hasta llegar a una forma matemática con la que poder trabajar. Empecemos analizando el circuito.



**Figura 2.8 :** Magnitudes del circuito.

Aplicando las leyes de Kirchhoff a nuestro circuito, [Fig. 2.8](#), se puede ver que:

$$i_{LR} = i_M + i_C, \quad (2.20)$$

$$v_R = v_L + v_1. \quad (2.21)$$

Reordenando las anteriores ecuaciones:

$$i_C = i_{LR} - i_M, \quad (2.22)$$

$$v_L = v_R - v_1. \quad (2.23)$$

Recordando la relación entre la carga y el flujo con la intensidad y la tensión de las ecuaciones [\(2.9\)](#), la ecuación del memristor controlado por flujo [\(2.15\)](#) y aplicándolo a [\(2.22\)](#) y [\(2.23\)](#) obtenemos:

$$C \frac{dv_1}{dt} = i_{LR} - W(\varphi) v_1, \quad (2.24)$$

$$L \frac{di_{LR}}{dt} = R i_{LR} - v_1, \quad (2.25)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = v_1. \quad (2.26)$$

Como se pueden ver las variables de estado elegidas son la intensidad en la resistencia y la bobina  $i_{LR}$ , la tensión en el condensador y el memristor  $v_1$  y el flujo en el memristor  $\varphi$ .

Reordenando las ecuaciones anteriores (2.24), (2.25) y (2.26) tenemos:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{i_{LR}}{C} - W(\varphi) \frac{v_1}{C}, \quad (2.27)$$

$$\frac{di_{LR}}{dt} = \frac{R}{L} i_{LR} - \frac{v_1}{L}, \quad (2.28)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = v_1. \quad (2.29)$$

Haciendo algunos cambios a las tres anteriores ecuaciones para luego poder trabajar con las ecuaciones obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(y - W(z)x), \\ \frac{dy}{dt} = -\xi x + \beta y, \\ \frac{dz}{dt} = x. \end{cases} \quad (2.30)$$

Donde tenemos:

$$x = v_1, \quad y = i_{LR}, \quad z = \varphi, \quad \alpha = \frac{1}{C}, \quad \beta = \frac{R}{L}, \quad \xi = \frac{1}{L}.$$

Escribiendo el sistema (2.30) de una forma más general:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}W(z)x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \\ \frac{dz}{dt} = x. \end{cases} \quad (2.31)$$

Con:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\alpha = -\frac{1}{C}, & a_{12} &= \alpha = \frac{1}{C}, \\ a_{21} &= -\xi = -\frac{1}{L}, & a_{22} &= \beta = \frac{R}{L}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Pero del sistema (2.31) aun tenemos que definir  $W(z)$ . En [2] se asume que el comportamiento del memristor se puede aproximar por una ecuacion lineal a trozos monótonamente creciente:

$$q(\varphi) = b\varphi + 0.5(a - b)(|\varphi + 1| - |\varphi - 1|). \quad (2.33)$$

$$\text{donde } a, b, c, d > 0$$

Escribiendo (2.33) con la variable  $z$  y derivándola (recordando la ecuación (2.13)) para obtener  $W(z)$ :

$$q(z) = bz + 0.5(a - b)(|z + 1| - |z - 1|), \quad (2.34)$$

$$W(z) = \frac{dq(z)}{dz} = \begin{cases} a, & |z| < 1, \\ b, & |z| > 1. \end{cases} \quad (2.35)$$

Por último vamos a definir dos matrices auxiliares del sistema (2.31) teniendo en cuenta la función  $W(z)$  (2.35)

$$A_L = \begin{pmatrix} a \cdot a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_R = \begin{pmatrix} b \cdot a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

con sus correspondientes trazas y determinantes:

$$\begin{aligned} t_L &= a \cdot a_{11} + a_{22} \\ d_L &= a \cdot a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ t_R &= b \cdot a_{11} + a_{22} \\ d_R &= b \cdot a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ya tenemos las ecuaciones necesarias para empezar el análisis, pero primero veremos en los siguientes capítulos que técnicas estaremos usando para ello.

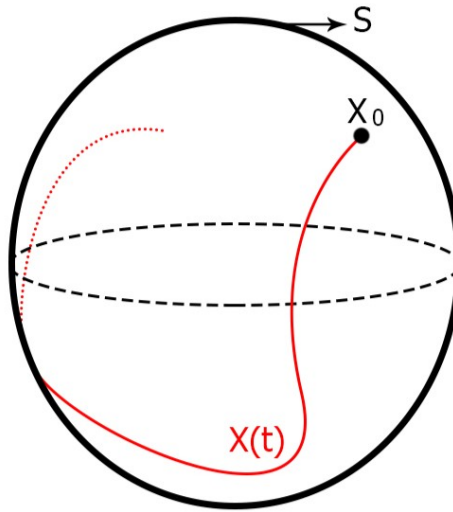
## 2.4. Superficies invariantes

Lo que en teoría de bifurcaciones se denomina *Superficie* o *Plano* es un espacio topológico de dimensión  $n$ , en un sistema dinámico, cuyas propiedades de dicha superficie se mantienen inalteradas bajo la evolución de sistema. Es decir, es una región del espacio de fase donde las trayectorias de las soluciones del sistema permanecen contenidas, siempre que no aparezcan bifurcaciones de escape, pero no será nuestro caso. En este trabajo nos interesa estudiar los planos invariantes del sistema (2.31) ya que será donde aparecerá la órbita periódica que estamos buscando en nuestro circuito.

**Definición 1** Considerando el sistema diferencial:

$$\frac{dX}{dt} = F(X), \quad X \in \mathbb{R}^3 \quad (2.38)$$

Se dice que la superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie invariante, del sistema si la solución del sistema diferencial  $X(t)$  con condición inicial  $X(0) = X_0 \in S$  satisface que  $X(t) \in S$  para todo  $t$ .



**Figura 2.9 :** Una esfera (que es una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$ ) con una órbita solución,  $X(t)$  con condición inicial  $X(0) = X_0$ , contenida en ella.



Como se demuestra en el teorema 1 de [10] existe un conjunto de superficies invariantes para nuestro sistema (2.31), se enunciará dicho teorema en este trabajo ya que nos será muy importante tenerlo presente.

**Teorema 1** Considerando el sistema (2.31) con la función lineal a trozos  $q$  (2.33) y la función  $W(z)$  (posiblemente discontinua) (2.35). Para cualquier  $h \in \mathbb{R}$ , el conjunto:

$$S_h = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : H(x, y, z) = h\} \quad (2.39)$$

es una superficie invariante para el sistema, y se calcula con la siguiente expresión:

$$H(x, y, z) = -a_{22}x + a_{12}y - a_{12}a_{21}z + a_{11}a_{22}q(z). \quad (2.40)$$

Además, el sistema tiene una familia infinita de superficies invariantes en todo  $\mathbb{R}^3$ , y la dinámica de los mismos es fundamentalmente bidimensional.

**Demostración:** Para cualquier solución  $(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t))$  del sistema (2.31), tenemos la función  $h(t) = H(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t))$ . Si derivamos  $h(t)$  y sustituimos las ecuaciones de las tres incógnitas: **REPASAR AL ECUACIÓN, ESTA BIEN HECHA LA DERIVACIÓN? SE VA TODO Y QUEDA 0? MIRAR ARTICULO PONCE**

$$h' = -a_{22}(a_{11}W(z) + a_{12}y) + a_{12}(a_{21}x + a_{22}y) + (a_{11}a_{22}W(z) - a_{12}a_{21})x = 0. \quad (2.41)$$

por lo que  $h$  es constante a lo largo de toda la órbita y por lo tanto invariante a la dinámica del sistema.

Como se ha dicho en el teorema anterior la dinámica de estas superficies se puede reducir a un comportamiento bidimensional, esto se demuestra en el teorema 2 de [10], nuevamente lo enunciaremos pues nos interesa tenerlo presente. Lo que se hace en este teorema es mediante el cambio de variable adecuado transformar nuestro sistema de tres variables en uno de dos variables.

**Teorema 2** Considerando el sistema (2.31), la función  $W(z)$  (2.35) con  $a \neq b$  y tomando la hipótesis  $a_{22} = \frac{R}{L} \neq 0$ , la dinámica del sistema (2.31) es topológicamente equivalente a la dinámica del sistema lineal a trozos de dimensión 2

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= F(\tilde{x}) - \tilde{y}, \\ \dot{\tilde{y}} &= g(\tilde{x}) - h,\end{aligned}\tag{2.42}$$

con

$$F(\tilde{x}) = \begin{cases} t_R(\tilde{x} - 1) + t_L, & \text{si } \tilde{x} > 1, \\ t_L\tilde{x}, & \text{si } |\tilde{x}| \leq 1, \\ t_R(\tilde{x} + 1) - t_L, & \text{si } \tilde{x} < -1, \end{cases}\tag{2.43}$$

$$g(\tilde{x}) = \begin{cases} d_R(\tilde{x} - 1) + d_L, & \text{si } \tilde{x} > 1, \\ d_L\tilde{x}, & \text{si } |\tilde{x}| \leq 1, \\ d_R(\tilde{x} + 1) - d_L, & \text{si } \tilde{x} < -1. \end{cases}\tag{2.44}$$

**Demostración:** Cuando  $a_{22} \neq 0$  en el sistema (2.31) podemos solucionar la ecuación  $H(x, y, z) = h$  (2.40) para  $x$ , escribiendo:

$$x = \frac{a_{12}}{a_{22}}y + a_{11}q(z) - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}}z - \frac{h}{a_{22}}.\tag{2.45}$$

ssutituyendo la ecuación (2.45) en la segunda y tercera ecuación de (2.31), tenemos:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \alpha_1 y - \alpha_2 z + a_{11}a_{21}q(z) - \frac{a_{21}h}{a_{22}}, \\ \dot{z} &= \alpha_3 y - \alpha_4 z + a_{11}q(z) - \frac{h}{a_{22}}.\end{aligned}\tag{2.46}$$

con

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{a_{22}^2 + a_{12}a_{21}}{a_{22}}, & \alpha_2 &= \frac{a_{21}^2 a_{12}}{a_{22}}, \\ \alpha_3 &= \frac{a_{12}}{a_{22}}, & \alpha_4 &= \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}}.\end{aligned}\tag{2.47}$$

Seguidamente considerando el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= z, \\ \tilde{y} &= \alpha_1 z - \alpha_3 y + \frac{h}{a_{22}}\end{aligned}\tag{2.48}$$

el sistema (2.46) se puede escribir en la forma (2.42)-(2.44).

Una breve explicación de los anteriores teoremas. Siempre que  $a_{22} \neq 0$ , si elegimos una condición inicial de nuestro sistema que se encuentre dentro de alguna superficie de las que hemos definido en (2.39), y las cuales podemos calcular con la expresión (2.40) con las condiciones iniciales de  $x, y, z$ , entonces la solución del sistema siempre estará contenida en dicha superficie. Es decir, mirando las ecuaciones (2.48); con  $\tilde{x}$  calculamos la  $z$ , con  $\tilde{y}$  podemos despejar y calcular la  $y$  (recordemos que  $h$  ya la hemos definido con las condiciones iniciales), y finalmente con la ecuación (2.45) calculamos la  $x$ . Hemos reducido un sistema tridimensional a uno bidimensional y conocemos el plano  $h$  donde estará contenida la solución del sistema, solución que estamos buscando que sea una órbita periódica.

Como dijimos en el teorema 1, la función  $W(z)$  puede ser discontinua, esto dependerá de las características del memristor. Aún así esta posible discontinuidad no nos afectará en nuestro trabajo como se demuestra en la sección 3 de [10] donde los autores demuestran como pasar en cualquier caso de un modelo discontinuo a un modelo reducido continuo. Además en el artículo de Chua de 2008, ver [2] donde se presenta el circuito que estamos estudiando en este trabajo, los autores presentan una aproximación de lo que podrían ser la gráfica flujo-carga del memristor caracterizada por la ecuación (2.34)-(2.35) y la suponen continua.

Además, nuestro nuevo sistema de dimensión dos tiene tres zonas como vemos en (2.42)-(2.44), sin embargo en este trabajo nos centraremos en dos de ellas, puesto que buscaremos oscilaciones periódicas bizonales. Se hace esta aclaración puesto que parte del trabajo que haremos mas adelante, como la forma canónica de Lienard, nos permitiría hacer el estudio de tres zonas, pero no es nuestro objetivo.

# Capítulo 3

## Sistemas Dinámicos Continuos

En este capítulo haremos un repaso de sistemas dinámicos continuos lineales a trozos puesto que como hemos visto en el sistema [\(2.31\)](#) hemos reducido nuestro circuito a un sistema de este tipo. Lo que necesitamos ahora es encontrar la o las soluciones de nuestro sistema y estudiar su estabilidad, la base que necesitamos para ello lo veremos en este capítulo.

### 3.1. Sistemas lineales planos

En esta sección vamos a analizar los sistemas dinámicos continuos de 2 ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes, ya que posteriormente describiremos nuestro circuito de esta forma. Antes que nada hay que definir lo que es un sistema dinámico continuo:

**Definición 2** *Un sistema dinámico es un conjunto de ecuaciones de cambio que describen la evolución temporal de algún fenómeno, que puede ser de cualquier naturaleza (eléctrico, económico, cinético...), de manera que el estado presente del sistema viene determinado por los estados anteriores. El estado del sistema queda descrito por sus variables de estado. Cuando la evolución se estudia considerando el tiempo como una variable continua, decimos que el sistema es continuo y para analizar este tipo de sistemas la regla determinista que lo gobierna es su sistema de ecuaciones diferenciales.*

Un sistema de este tipo tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + b_1 \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + b_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

Escribiendo el sistema (3.1) en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Escribiendo el sistema (3.2) de forma mas simplificada:

$$\dot{X} = AX + B \quad (3.3)$$

Cuando  $B = \vec{0}$  el sistema se dice homogéneo. Por el contrario cuando  $B \neq \vec{0}$  el sistema se dice no homogéneo. Esto es importante saberlo pues los métodos para solucionar estos tipos de sistemas no son los mismos.

También hay que tener en cuenta las condiciones iniciales del sistema:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Escribiendo el sistema (3.4) en forma matricial:

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = X_0 \quad (3.5)$$

Al conjunto del sistema y a sus condiciones iniciales se les denomina **Problema de Valor Inicial (PVI)**:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + B & \rightarrow \text{Sistema Diferencial (S.D.)} \\ X(t_0) = X_0 & \rightarrow \text{Condiciones Iniciales (C.I.)} \end{cases} \quad (3.6)$$

Lo primero y más importante que se debe hacer con este tipo de problemas es comprobar la existencia y unicidad de sus soluciones.

**Teorema 3** *Existencia y unicidad*

Sean  $A$  y  $B$  continuas en un intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$ , que continene el punto  $X(t_0)$  entonces el P.V.I. tiene una única solución definida en dicho intervalo  $I$  para cualquier vector  $X_0 \in \mathbb{R}^2$ . Además, si el P.V.I. tiene coeficientes constantes en  $A$  y  $B$  la solución está definida en  $\mathbb{R}$ .

Las soluciones del sistema son el conjunto de puntos (3.7) para cada instante de tiempo que forman una curva en el plano de fases  $xy$ .

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Ahora lo lógico sería hablar de como resolver este tipo de problemas ya que es nuetsro objetivo, pero no lo vamos a hacer ya que nosotros no usaremos el método tradicional de autovalores y autovectores para ello, vamos a utilizar otra técnica de reciente estudio con la que no hará falta esto, la veremos mas adelante.

Por último veamos como obtener y analizar los puntos de equilibrio del Sistema Lienal Plano. Primero escribamos el sistema (3.1) de otra forma para ver los siguientes apartados mejor:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = S(x, y) \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = V(x, y) \end{cases} \quad (3.8)$$

**Definición 3** Los puntos  $(\bar{x}, \bar{y})$  que anulan simultaneamente las funciones  $S$  y  $V$  del sistema (3.2) se denominan Puntos de Equilibrio o Críticos del sistema:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix} \\ A \bar{X} &= -b \end{aligned} \quad (3.9)$$

Si el  $\det(A) \neq 0$  (3.9) el sistema posee un único punto de equilibrio, este punto se dice solucion constante del sistema.

Veamos esto más en profundidad, primero tenemos que saber que el sistema que tenemos (3.8) se denomina **Autónomo** ya que la variable independiente  $t$  no aparece de manera explícita en los segundos términos.

Ahora lo que haremos es una translación del punto de equilibrio para que esté en el origen  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  en caso de no estarlo:

$$\begin{cases} \tilde{X} = x - \bar{x} \\ \tilde{Y} = y - \bar{y} \end{cases} \quad (3.10)$$

Por lo que ahora tenemos:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{X}}{dt} = S(\tilde{X} - \bar{x}, \tilde{Y} - \bar{y}) \\ \frac{d\tilde{Y}}{dt} = V(\tilde{X} - \bar{x}, \tilde{Y} - \bar{y}) \end{cases} \quad (3.11)$$

Donde el punto  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  es el punto de equilibrio.

Lo que veremos a continuación es la disposición de las soluciones al rededor del punto de equilibrio y la estabilidad o no del mismo. Considerando el sistema autónomo lineal con punto de equilibrio en el origen que hemos obtenido tras el cambio de variable:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Como vemos con el cambio de variable no se ha modificado la matriz  $A$  que es la que nos dirá todo respecto a la estabilidad del punto crítico, veremos los tres casos que se estudian en este trabajo: Foco Asintóticamente Estable, Foco Asintóticamente Inestable y Centro. Pero hay muchos mas y, por supuesto, combinaciones de todos ellos, lo cual complica estos problemas en gran medida.

Para saber la estabilidad de los puntos debemos estudiar el polinomio característico de la matriz  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ \text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} \end{cases} \quad (3.13)$$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$$

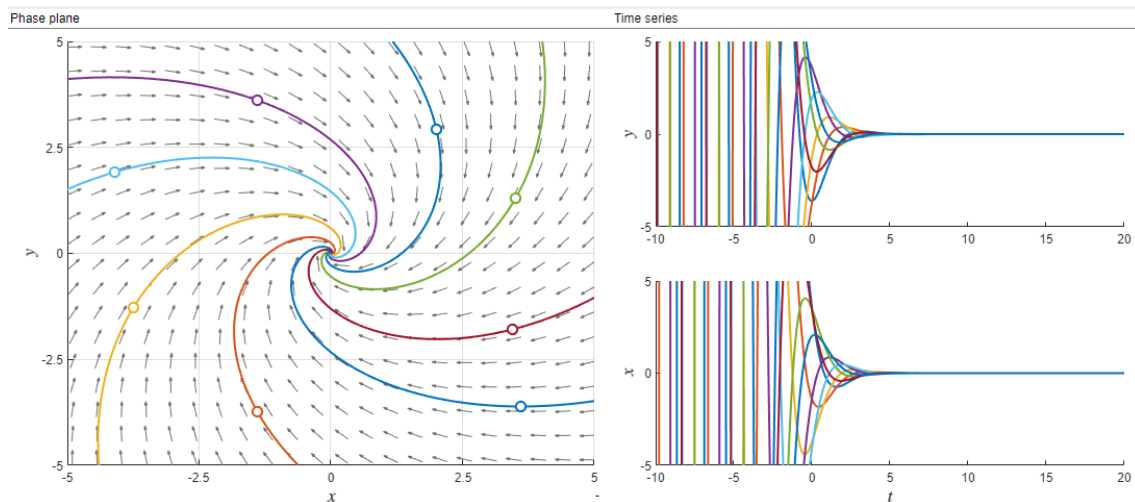
$$\text{Autovalores} \rightarrow \lambda = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}{2}$$



- Foco Asintóticamente Estable

Las curvas solución tienden al punto crítico. Este caso se da para:

- $tr(A) < 0$
- $tr(A)^2 - 4det(A) < 0$



**Figura 3.1** : Foco Asintóticamente Estable visto en el plano de fases  $xy$  (izquierda) y la variación de  $x$  e  $y$  en el tiempo (derecha).

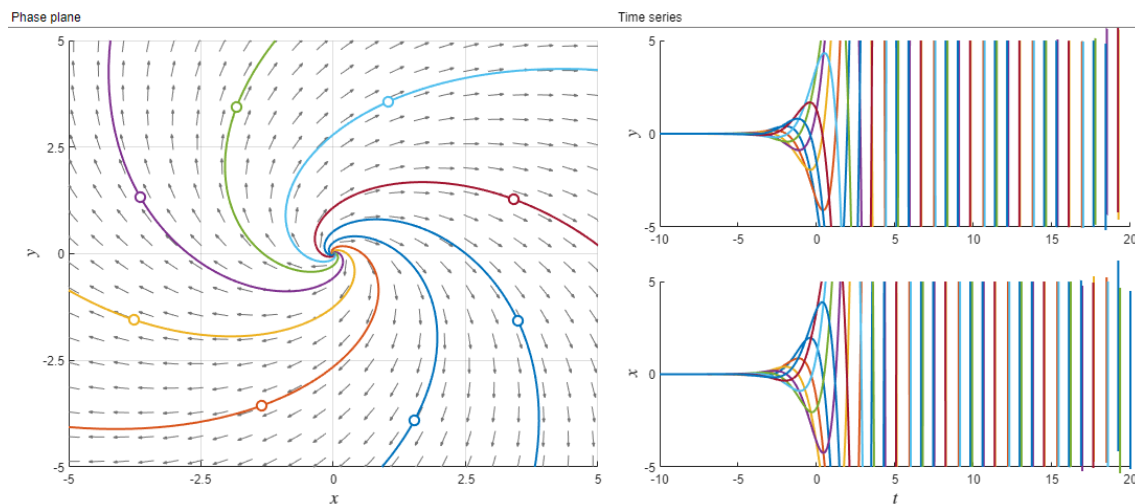
La matriz  $A$  del la [Fig. 3.1](#) es  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

- $tr(A) = -2 < 0$
- $tr(A)^2 - 4det(A) = 4 - 4(2) < 0$

- Foco Asintóticamente Inestable

Las curvas solución tienden al alejarse del punto crítico. Este caso se da para:

- $tr(A) > 0$
- $tr(A)^2 - 4det(A) < 0$



**Figura 3.2** : Foco Asintóticamente Inestable visto en el plano de fases  $xy$  (izquierda) y la variación de  $x$  e  $y$  en el tiempo (derecha).

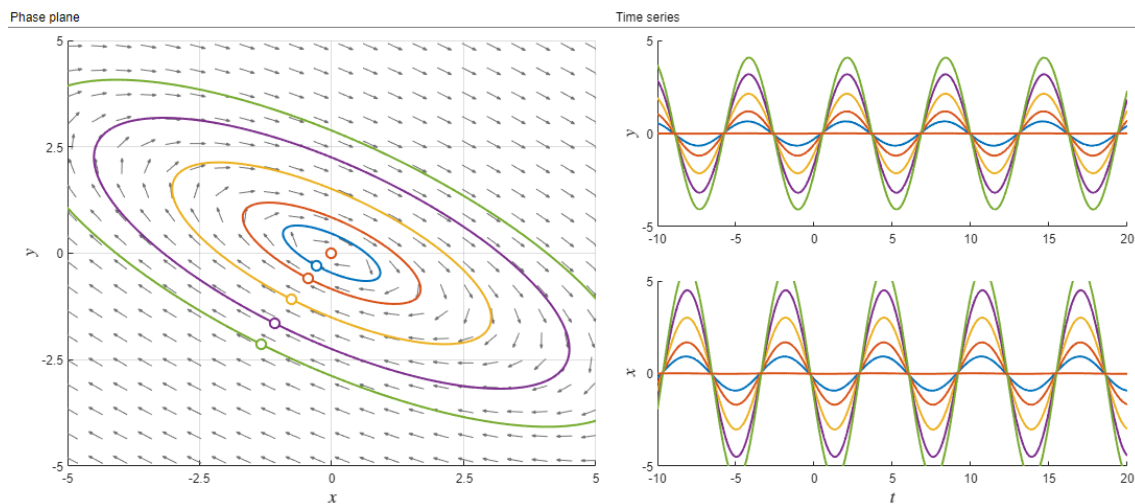
La matriz  $A$  del la [Fig. 3.2](#) es  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- $tr(A) = 2 > 0$
- $tr(A)^2 - 4det(A) = 4 - 4(2) < 0$

- Centro

Las curvas solución son concéntricas al punto crítico. Este caso se da para:

- $\text{tr}(A) = 0$
- $\text{tr}(A)^2 - 4\det(A) < 0$



**Figura 3.3 :** Centro en el plano de fases  $xy$  (izquierda) y la variación de  $x$  e  $y$  en el tiempo (derecha).

La matriz  $A$  del la [Fig. 3.3](#) es  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

- $\text{tr}(A) = 1 - 1 = 0$
- $\text{tr}(A)^2 - 4\det(A) = 0 - 4(1) < 0$

## 3.2. Sistemas lineales a trozos bizonales

En esta sección vamos a ver como estudiar los sistemas continuos dinámicos lineales a trozos de dos zonas y veremos sus propiedades de cara a la obtención de una órbita periódica y estudiar su amplitud y periodo.

También veremos como utilizar las formas canónicas para reducir el número de parámetros que influyen en el sistema y como apoyarnos en dichas formas canónicas y las propiedades que nos portan a la hora de estudiar la oscilacion periódica de nuestro circuito.

**Definición 4** *Un sistema dinámico continuo lineal a trozos plano con dos zonas es un sistema de ecuaciones diferenciales con la siguiente forma:*

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = S(x) = \begin{cases} A_1x + b_1 & \text{si } x^T \cdot w + \delta \leq 0 \\ A_2x + b_2 & \text{si } x^T \cdot w + \delta < 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Donde  $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ , las matrices  $A_1$  y  $A_2$  son reales de orden 2, además  $b_1, b_2, w \in \mathbb{R}^2$  con  $w \neq \vec{0}$  y  $\delta \in \mathbb{R}$  y se satisface la condición de continuidad

$$A_1x + b_1 = A_2x + b_2 \quad (3.15)$$

Sobre la recta de separación de las dos zonas:  $x^T \cdot w + \delta = 0$

### EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SISTEMA 3.14

Para cada  $x^0 \in \mathbb{R}^2$ , el problema de valores iniciales (3.16) tiene una solución única  $x(t)$  definida para todo  $t$  real.

$$\begin{cases} \dot{x} = S(x) \\ x(0) = x^0 \end{cases} \quad (3.16)$$

A continuación veremos la forma canónica mas común para los sistemas bizonales que coloca la recta separación en el eje de ordenadas  $x_1 = 0$ .

**Definición 5** *Todo sistema dinámico continuo lineal a trozos plano con dos zonas puede escribirse de la siguiente forma:*

$$\dot{x} = S(x) = \begin{cases} B_1x + c & \text{si } x_1 \leq 0 \\ B_2x + c & \text{si } x_1 < 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

***$S(x)$  ? pero yo tengo dos variables  $x_1$  y  $x_2$ , es  $S(x_1, x_2)$  ?***

Con  $x = (x_1, x_2)^T, c \in \mathbb{R}^2$  y las matrices  $B_1, B_2$  comparten sus dos últimas columnas por continuidad, esto es:

$$B_1 - B_2 = (B_1 - B_2) e_1 e_1^T \quad (3.18)$$

**multiplicado los e?**

Siendo  $e_1 = (1, 0)^T$  el primer vector de la base canónica  $\mathbb{R}^2$ . Además, por continuidad también, se puede ver que  $c_1 = c_2 = c$ .

**Demostración:** Basta con realizar una simetría para que el vector  $w$  normal a la recta  $x^T \cdot w + \delta = 0$ , se transforme en el vector  $e_1 = (1, 0)^T$  se puede hacer usando matrices de Householder [8]. Por último con una translación hacemos que la nueva recta de separación  $x_1 = 0$  (ahora vertical) pase por el origen. Por lo que el sistema queda con la forma: **y que pasa con  $\delta$ ? por que la recta se llama  $x_1$ , la puedo llamar solo  $x$ ? menos lio con  $\dot{x}_1$ . Pero  $x^T$  y  $w$  son vectores? en lugar de la recta  $x=0$  se podría usar la  $x=-1$ ?**

$$\dot{x} = \begin{cases} B_1 x + c_1 & \text{si } x_1 \leq 0 \\ B_2 x + c_2 & \text{si } x_1 < 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Con  $B_1$  y  $B_2$  matrices de orden 2 y  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2$ . Nuevamente por continuidad se debe satisfacer:

$$B_1 x + c_1 = B_2 x + c_2 \quad \text{si } x_1 = 0 \quad (3.20)$$

Como el punto  $(0, 0)^T$  está en la recta de separación  $x_1 = 0$ , sustituyendo en (3.20) se tiene que  $c_1 = c_2$  por lo que:

$$B_1 x = B_2 x \quad \text{si } x_1 = 0 \quad (3.21)$$

Como el vector  $(0, 1)^T$  está sobre la recta de separación  $x_1 = 0$ , se tiene por tanto que las dos últimas columnas de  $B_1$  y  $B_2$  son iguales **????**, y además no olvidemos que antes hemos visto que  $c_1 = c_2 = c$ .

Se ha reducido bastante el número de parámetros, ahora tenemos 8, 6 de ellos vienen de las matrices  $B_1$  y  $B_2$  y 2 de  $c$ . Para seguir reduciendo parámetros tengamos en cuenta que estamos buscando oscilaciones y que no aparecerán en sistemas unidimensionales por lo que el primer término de las segundas columnas de las matrices  $B_1$  y  $B_2$  no puede ser nulo (condición de observabilidad [9]). Mediante el cambio de variable oportuno lo convertiremos en  $(-1)$  aquí lo vemos, en primer lugar escribimos el sistema (3.19) de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} b_{11}^1 & b_{12} \\ b_{21}^1 & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} b_{11}^2 & b_{12} \\ b_{21}^2 & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 < 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Y le aplicamos el cambio de variable (recordando que  $b_{12} \neq 0$ ):

$$X_2 = -b_{12} x_2 - c_1 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{-X_2 - c_1}{b_{12}} \quad (3.23)$$

Para el caso  $x_1 \leq 0$  del sistema (3.22) aplicando el cambio de variable (3.23):

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= b_{11}^1 x_1 + b_{12} x_2 + c - 1 = b_{11}^1 x_1 + b_{12} \left( \frac{-X_2 - c_1}{b_{12}} \right) + c_1 = b_{11}^1 x_1 - X_2 \\
 \dot{X}_2 &= -b_{12} \dot{x}_2 = -b_{12} (b_{21}^1 x_1 + b_{22} x_2 + c_2) \\
 &= -b_{12} b_{21}^1 x_1 + b_{22} (-b_{12} x_2) - b_{12} c_2 \\
 &= -b_{12} b_{21}^1 x_1 + b_{22} (X_2 + c_1) - b_{12} c_2 \\
 &= -b_{12} b_{21}^1 x_1 + b_{22} X_2 + b_{22} c_1 - b_{12} c_2
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

De forma análoga para  $x_1 > 0$  del sistema (3.22):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = b_{11}^2 x_1 - X_2 \\ \dot{X}_2 = -b_{12} b_{21}^2 x_1 + b_{22} X_2 + b_{22} c_1 - b_{12} c_2 \end{cases} \tag{3.25}$$

Sustituyendo (3.24) y (3.25) en el sistema (3.22), tomando  $c_{11}^i = b_{11}^i$ ;  $c_{21}^i = -b_{12} b_{21}^i$ ;  $c_{22} = b_{22}$ ;  $d_2 = b_{22} c_1 - b_{12} c_2$  y renombrando  $X_2$  como  $x_2$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} c_{11}^1 & -1 \\ c_{21}^1 & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} & si \quad x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} c_{11}^2 & -1 \\ c_{21}^2 & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} & si \quad x_1 > 0 \end{cases} \tag{3.26}$$

Hemos conseguido eliminar otros dos parámetros del sistema, además solo hemos realizado cambios lineales por lo que las matrices características son semejantes, es decir, no hemos variado las características del sistema. Lo que nos queda es ya pasar a la famosa forma canónica de Liénard:

**Teorema 4** Existe un cambio de variable que transforma el sistema (3.26) en la forma canónica de Liénard, sin modificar la traza y el determinante de la matriz característica del sistema ya que son invariantes algebraicos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & si \quad x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & si \quad x_1 > 0 \end{cases} \quad con \quad a \in \{-1, 0, 1\} \tag{3.27}$$

**Demostración:** Usando el siguiente cambio de variable:

$$X_2 = c_{22} x_1 + x_2 \quad \rightarrow \quad x_2 = X_2 - c_{22} x_1 \tag{3.28}$$

Para el caso  $x_1 \leq 0$  del sistema (3.26) aplicando el cambio de variable (3.28):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= c_{11}^1 x_1 - x_2 = c_{11}^1 x_1 - (X_2 - c_{22} x_1) = x_1(c_{11}^1 + c_{22}) - X_2 \\ \dot{X}_2 &= c_{22} \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = c_{22}(c_{11}^1 x_1 - x_2) + (c_{21}^1 x_1 + c_{22} x_2 + d_2) \\ &= c_{22} c_{11}^1 x_1 - c_{22} x_2 + c_{21}^1 x_1 + c_{22} x_2 + d_2 \\ &= x_1(c_{22} c_{11}^1 + c_{21}^1) + d_2\end{aligned}\tag{3.29}$$

De forma análoga para  $x_1 > 0$  del sistema (3.26):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(c_{11}^2 + c_{22}) - X_2 \\ \dot{X}_2 = x_1(c_{22} c_{11}^2 + c_{21}^2) + d_2 \end{cases}\tag{3.30}$$

Sustituyendo (3.29) y (3.30) en el sistema (3.26), tomando  $t = c_{11}^1 + c_{22}$ ;  $d = c_{22} c_{11}^1 + c_{21}^1$ ;  $T = c_{11}^2 + c_{22}$ ;  $D = c_{22} c_{11}^2 + c_{21}^2$  y renombrando  $X_2$  como  $x_2$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > 0 \end{cases}\tag{3.31}$$

Siendo  $t, d, T, D$  las respectivas trazas ( $t, T$ ) y determinantes ( $d, D$ ) de las matrices características de cada uno de los sistemas a la derecha y a la izquierda de la recta de separación  $x_1 = 0$ , que como ya hemos visto, no hemos modificado sus propiedades pues todos los cambios aplicados han sido lineales.

Por último vamos a ajustar  $d_2$ . Si  $d_2 = 0$  entonces el sistema ya sería igual que (3.27) pero con el parámetro  $a = 0$ . Si  $d_2 \neq 0$  hay que aplicar el siguiente cambio:

$$X_1 = \frac{x_1}{|d_2|} \quad X_2 = \frac{x_2}{|d_2|}\tag{3.32}$$

Por lo que  $X_1$  tiene el mismo signo que  $x_1$  y la recta de separación sería  $X_1 = 0$   
**No entiendo lo del signo.**

Para el caso  $X_1 \leq 0$  del sistema (3.31) aplicando el cambio de variable (3.32):

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= \frac{\dot{x}_1}{|d_2|} = \frac{t x_1 - x_2}{|d_2|} = t \frac{x_1}{|d_2|} - \frac{x_2}{|d_2|} = t X_1 - X_2 \\ \dot{X}_2 &= \frac{\dot{x}_2}{|d_2|} = \frac{d x_1 - 0 + d_2}{|d_2|} = d \frac{x_1}{|d_2|} + \frac{d_2}{|d_2|} = d X_1 + \frac{d_2}{|d_2|}\end{aligned}\tag{3.33}$$

De forma análoga para  $x_1 > 0$  del sistema (3.26):

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = TX_1 - X_2 \\ \dot{X}_2 = DX_1 + \frac{d_2}{|d_2|} \end{cases} \quad (3.34)$$

Démos cuenta que cuando dividimos  $d_2$  entre su valor absoluto lo que estamos obteniendo es  $-1, 1, 0$  dependiendo de si  $d_2$  es negativo, positivo o cero, por lo que usaremos la función signo  $sgn$ :

$$sgn(d_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } d_2 > 0 \\ 0 & \text{si } d_2 = 0 \\ -1 & \text{si } d_2 < 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

Sustituyendo (3.33) y (3.34) en el sistema (3.31), tomando  $a = sgn(d_2)$  y renombrando  $X_1$  como  $x_1$  y  $X_2$  como  $x_2$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

Para ubicar de una manera más gráfica lo que tenemos en (3.36):

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \right. \quad (3.37)$$

$$x_1 = 0$$



Podemos darnos cuenta de que las ecuaciones corresponden a las dos zonas izquierda y derecha de la recta de separación  $x_1 = 0$  así que vamos a hacer unos cambios de nombres a las variables del sistema (3.36) simplemente para que los nombres sean un poco mas descriptivos. Finalmente el sistema en la forma canónica de Liénard nos queda de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} T_L & -1 \\ D_L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x \leq 0 \\ \begin{pmatrix} T_R & -1 \\ D_R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

De una manera más gráfica sería:

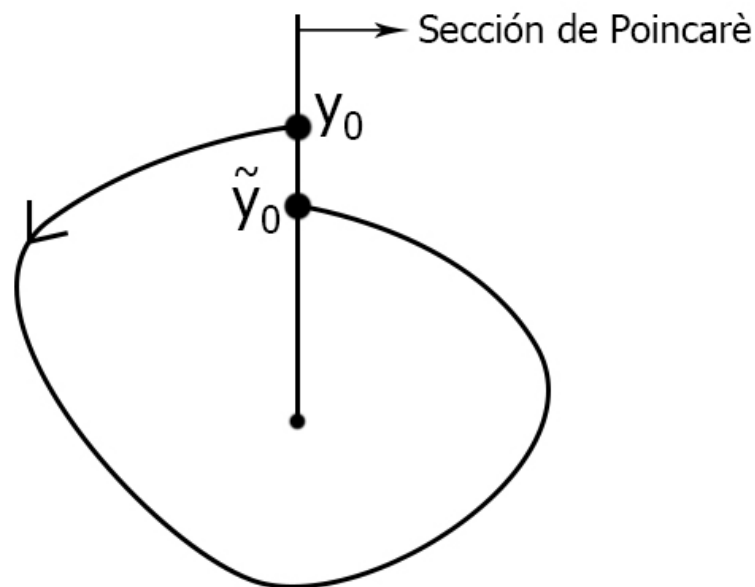
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_L & -1 \\ D_L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_R & -1 \\ D_R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \right. \quad (3.39)$$

$x = 0$

# Capítulo 4

## Semiaplicaciones de Poincaré

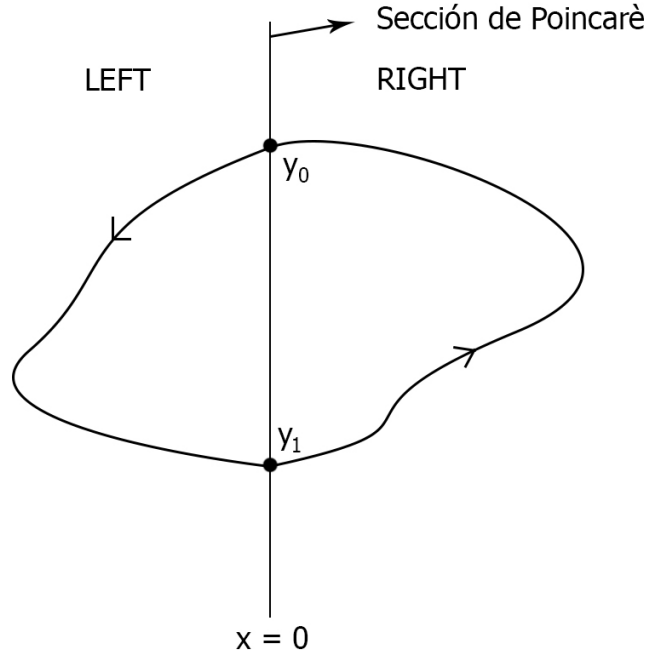
En el estudio de sistemas dinámicos, la **Aplicación de Poincaré** es muy útil. Se trata de delimitar una superficie o recta (llamada sección de Poincaré), en el espacio de fases de nuestro sistema, de tal manera que las curvas solución de nuestro sistema transpenen dicha sección para poder estudiar así el comportamiento de las trayectorias. Lo interesante de esta aplicación es que lo que nos interesa son los puntos de intersección con la sección de Poincaré, aunque no podemos obviar el comportamiento de la trayectoria y el tiempo para el estudio.



**Figura 4.1** : Punto  $y_0$  y su imagen  $\tilde{y}_0$  mediante la Aplicación de Poincaré. Esta órbita no es periódica

Como vemos en la [Fig. 4.1](#) la dinámica de estudio sería; establecer un punto  $y_0$  mediante las condiciones iniciales de nuestro sistema, establecer una sección de Poincaré que corte a la curva solución y por último ver como avanza dicha curva en el tiempo esperando a que corte de nuevo a la sección de Poincaré, para que esto ocurra se debe cumplir una serie de condiciones en el sistema que ahora no presentaremos. Finalmente si la órbita vuelve a cortar en el mismo punto  $y_0 = \tilde{y}_0$  diremos que dicha órbita es periódica.

En este trabajo hablaremos de la **Semi-Aplicación de Poincaré**, es decir, analizaremos una de las dos mitades de la órbita. Esto lo haremos ya que como nuestro estudio es de un sistema a trozos (3.38), (3.39) ya tenemos una separación en la recta  $x = 0$  la cual usaremos de sección de Poincaré, y como a la izquierda y a la derecha de dicha sección tenemos sistemas diferentes debemos estudiarlos de manera independiente.



**Figura 4.2** : Semiaplicación derecha e izquierda las cuales forman una órbita periódica

Tendremos un punto de corte  $y_0$  de nuestra órbita solución en la sección de Poincaré y buscaremos el siguiente punto de corte  $y_1$  mediante la semiaplicación izquierda, finalmente mediante la semiaplicación derecha comprobamos si la órbita vuelve a cortar a la sección de Poincaré en el mismo punto  $y_0$  (órbita periódica, ver Fig. 4.2) o si no corta en el mismo punto  $y_0$  (órbita no periódica).

Para la semiaplicación de Poincaré consideraremos el sistema (3.1), que mediante los cambios de variable adecuados podemos escribir en forma canónica de Lienard como ya hemos visto a lo largo de la Sección 3.2. En dicha sección se hace para un sistema a trozos, pero para esta parte consideraremos un único sistema, que puede ser el derecho o el izquierdo, eso no nos importa ahora mismo por lo que la nomenclatura que usaremos en esta sección para dicho sistema será:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

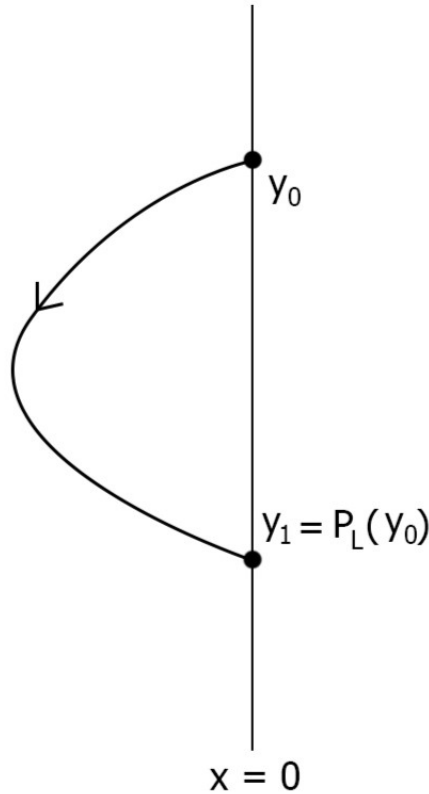
Definiendo la sección de Poincaré como  $\Sigma = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$  donde nos referiremos con  $\Sigma^L$  a la zona izquierda de la sección y  $\Sigma^R$  a la zona derecha de la sección (recordemos que los índices R y L harán alusión a las zonas derecha e izquierda). Si evaluamos la primera ecuación de (4.1) en la sección de Poincaré que hemos definido  $\Sigma$  tenemos  $\dot{x}|_{\Sigma} = -y$ , pudiéndose deducir el sentido de la órbita:

- La órbita va de  $\Sigma^L$  a  $\Sigma^R$  para  $y < 0$
- La órbita va de  $\Sigma^R$  a  $\Sigma^L$  para  $y > 0$

Asumiremos  $a^2 + D^2 \neq 0$  ya que de no ser así curva solución no cortaría de nuevo a  $\Sigma$ . Esto se puede deducir estudiando la segunda ecuación del sistema (4.1) para el caso contrario  $a = D = 0 \rightarrow \dot{y} = Dx + a = 0$ .

Vamos a centrarnos en la zona izquierda de la sección de Poicaré  $\Sigma^L$ , la cual se define de la siguiente manera:

**Definición 6** Consideraremos el punto  $(0, y_0) \in \Sigma$  con  $y_0 \geq 0$  y tomaremos como solución del sistema (4.1) para cada instante de tiempo  $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ , que para el instante inicial  $t = 0$  cumple que  $\phi(0) = (0, y_0)$ . Si existe un valor de tiempo  $\tau > 0$  para el que se cumple  $\phi_1(\tau) = 0$  y  $\phi_1(t) < 0$  para todo  $t \in (0, \tau)$  decimos que la imagen de  $y_0$  por la semiaplicación izquierda de Poincaré  $P_L(y_0) = y_1 = \phi_2(\tau) \leq 0$ . El valor de tiempo  $\tau$  se denomina semi-tiempo de vuelo izquierdo.



**Figura 4.3 :** Semiaplicación de Poincaré Izquierda

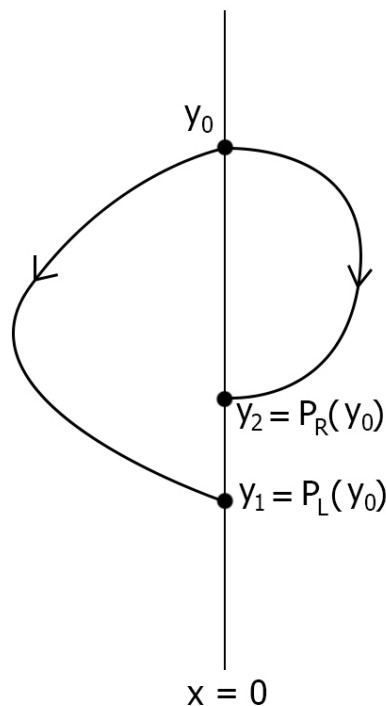
*Añadir  $P(0) = 0$ ? no entiendo muy bien esa parte (artículo caracterización integral)*

La definición de la semiaplicación de Poincaré derecha es equivalente a la izquierda ya que el sistema (4.1) no varía sus propiedades cuando se le aplica el cambio de variable  $(x, y, a) \longleftrightarrow (-x, -y, -a)$ .

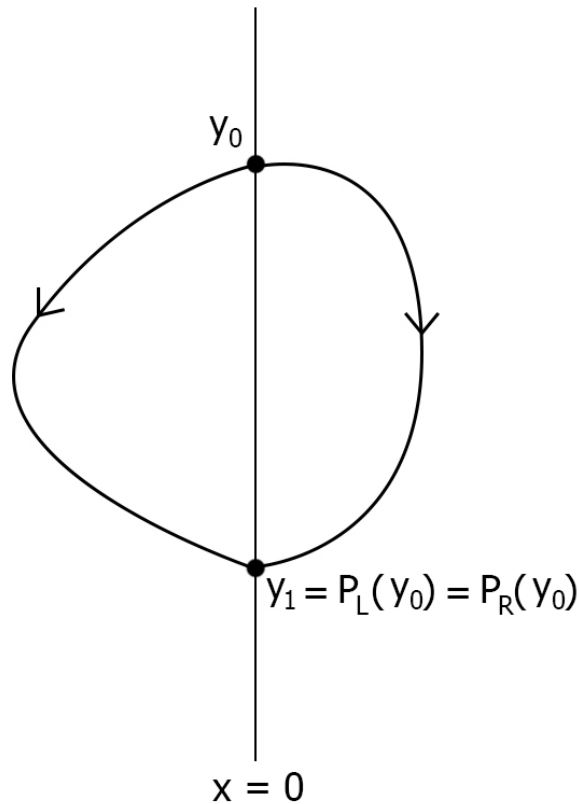
La definición 6 invita a estudiar la dinámica del sistema mediante integración, este es el método clásico, el cual conlleva una gran cantidad de posibles casos debidos a las particularidades de las matrices características para cada sistema que estudiemos. Casos que deben estudiarse uno a uno y aplicando diferentes herramientas para cada uno de ellos, lo cual se traduce en gran dificultad para el estudio y obtención de aparentemente distintos resultados para el mismo sistema dependiendo de que herramienta matemática usemos para solucionarlo. Para arreglar esta problemática usaremos la caracterización integral de la semiaplicación de Poincaré, ver (artículo caracterización integral), la cual presentaremos en la sección 4.1.

## 4.1. Caracterización integral de la semi-aplicacion de Poincare

No nos olvidemos que al fin y al cabo lo que tenemos en el sistema (3.39) sigue siendo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas a cada lado de la sección  $\Sigma \rightarrow x = 0$ . Como ya dije en la sección de 3.1 no vamos a solucionar estos sistemas de la manera clásica. Lo que nos interesa es que dado un punto  $y_0$  encontremos su correspondiente imagen mediante la semiaplicacion de poincaré izquierda  $y_1 = P_L(y_0)$ . Y como queremos una órbita periódica lo que haremos para cerrar dicha órbita es encontrar la imagen mediante la semiaplicacion de poincaré derecha con el tiempo invertido  $y_1 = P_R^{-1}(y_0)$  haciendo que las imágenes  $y_1$  de cada semiaplicación sean la misma y por tanto cerrando la órbita. Ojo, estamos buscando puntos, no estudiamos las órbitas por eso puede parecer que vamos en sentido contrario al tiempo en la semiaplicacion derecha, pero no olvidemos que las órbitas y sus sentidos no nos interesa, solo los puntos  $y_0$  e  $y_1$  que hagan que aparezca una orbita periodica. Lo hacemos de esta manera por que es la mas sencilla de solucionar, el trabajo se reduce a coger un punto  $y_0$ , hallar sus semiaplicaciones izquierda y derecha y comprobar si cortan a la sección de Poincaré  $\Sigma$  en el mismo punto  $y_1$ . *Reescribir todo este párrafo. Añadir idea que la abstraccion de la órbita y del tiempo es gracias a la caracterizacion y no a la propia semiaplicacion(foto a 0.8)*



**Figura 4.4 :** Semiaplicaciones izquierda y derecha del punto  $y_0$  con diferentes imágenes  $y_1, y_2$ .



**Figura 4.5 :** Semiaplicaciones izquierda y derecha del punto  $y_0$  con misma imagen  $y_1$  y por lo tanto formando una órbita periódica.

Para hallar esta igualdad en las semiaplicaciones derecha e izquierda haremos uso de una herramienta presentada en *citar caracterizacion integral*. Se trata de realizar una caracterización integral de la semiaplicación de Poincaré.

Primeramente debemos presentar el **Valor Principal de Cauchy** ( $PV$ ), ya que se utiliza en la caracterización integral. El valor principal de Cauchy es una herramienta matemática muy usada en análisis complejo y teoría de funciones para definir una integral principal en casos de discontinuidades evitables en el plano complejo. Consideremos un intervalo  $[a, b]$  que contiene al origen y una función  $f$  continua en  $[a, b] \setminus \{0\}$ , el Valor Principal de Cauchy se define como:

$$PV \left\{ \int_a^b f(x) dx \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{-\epsilon} f(x) dx + \int_{+\epsilon}^b f(x) dx \right) \quad (4.2)$$

Vamos a pasar a presentar la ecuación de la caracterización integral y sus propiedades.

Caracterización integral de la semiaplicación de Poincaré izquierda:

$$PV \left\{ \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy \right\} = \frac{k_L \pi T_L}{D_L \sqrt{a D_L - T_L^2}} \quad (4.3)$$

Caracterización integral de la semiaplicación de Poincaré derecha:

$$PV \left\{ \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_R y^2 - a T_R y + a^2} dy \right\} = \frac{-k_R \pi T_R}{D_L \sqrt{a D_L - T_L^2}} \quad (4.4)$$

donde los parámetros  $D_L, T_L, D_R, T_R, a$  son los correspondientes al sistema a trozos (3.38) e  $y_0$  corresponde al primer punto de corte con la sección de Poincaré  $\Sigma$  e  $y_1$  la imagen de  $y_0$  mediante la semiaplicaciones de Poincaré, ver Fig. 4.4. Como se puede ver en (4.3) y (4.4) el valor principal de cauchy solo lo usaremos en el caso de  $a = 0$  ya que la integral se vuelve impropia divergente, en el caso de  $a \neq 0$  el valor principal de cauchy es directamente el valor de la integral. Los parámetros  $k_L, k_R$  tomarán los siguientes valores en función del signo de  $a$  y de en qué zona estemos de la sección de Poincaré

Zona izquierda:

- $k_L = 0$  si  $a_L > 0$
- $k_L = 1$  si  $a_L = 0$
- $k_L = 2$  si  $a_L < 0$

Zona derecha:

- $k_R = 0$  si  $a_R < 0$
- $k_R = 1$  si  $a_R = 0$
- $k_R = 2$  si  $a_R > 0$



Lo unico que diferencia a las ecuaciones (4.3) y (4.4) es el signo menos del segundo término, el cual se debe al sentido del tiempo. Como ya comentamos antes el sentido lógico en nuestro caso para la semiaplicación derecha sería ir de  $y_1$  a  $y_0$  lo cual se denominaría  $y_0 = P_R(y_1)$  y en este caso el signo del segundo termino de la caracterización sería positivo, pero nosotros estamos calculando la semiaplicacion derecha de  $y_0$  a  $y_1$  lo que es  $y_1 = P_R^{-1}(y_0)$ , por ello aparece el signo negativo en el segundo termino de la caracterización integral de la semiaplicación derecha (4.4). Aunque realmente este signo negativo no nos importa, como he dicho el punto de equilibrio de nuestro sistema estará en la zona izquierda por lo que  $k_R = 0$ , ver la anterior lista, así que el segundo término valdrá cero para la semiaplicacion derecha. *preguntar por este párrafo completo, si en nuestro estudio  $kr=0$  siempre y como meter las imgenes de matlab sin que sean figuras*

Vamos a ver algunos ejemplos de la caracterizacion integral de la semiaplicación de Poincaré en MATLAB para entender un poco mejor la estrategia de busqueda de la oscilación periódica.

```
% Ejemplo 1 TFE
aL=-1;  aR=-1; % Punto de equilibrio ubicado en la zona IZQUIERDA
kL=2;   kR=0;  % Valores de kL,R en función del signo de aL,R
TL=0.3; TR=-0.5;% Condiciones para que exista oscilación
DL=1;   DR=1;  % Condiciones para que exista oscilación

y0 = 1;          % Punto y0 > 0 de prueba

y1_L = semipoinca(kL,aL,TL,DL,y0)
y1_R = semipoinca(kR,aR,TR,DR,y0)
```

y1\_L =

-2.8439

y1\_R =

-1.3810

**Figura 4.6** : Semiaplicaciones izquierda y derecha de un punto de ejemplo  $y_0$

```

function y1 = semipoinca(k,a,T,D,y0)
% Calcula la semiaplicacion de poicare en el intervalo y1 -> y0
% Toma como valores de entrada k,a,T,D,y0. Dado y0 devuelve y1.
inicial = -y0;
cte = (k*pi*T)/(D*sqrt(4*D-T^2));
ecuacion = @(y1) integral(@(y) (-y./((D.*y.^2)-(a.*T.*y)+(a.^2))),y1,y0)-cte;
y1 = fzero(ecuacion,inicial);
end

```

**Figura 4.7** : Función usada en [Fig. 4.6](#) que hace el cálculo de la caracterización

La función de la [Fig. 4.7](#) es la aplicación directa de la caracterización integral en MATLAB. Veamos que se está haciendo:

Primero vamos a reordenar la función de la caracterización izquierda ([4.3](#)):

$$\int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy = \frac{k_L \pi T_L}{D_L \sqrt{a D_L - T_L^2}} \quad (4.5)$$

$$\int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy - \frac{k_L \pi T_L}{D_L \sqrt{a D_L - T_L^2}} = 0$$

como vemos en [Fig. 4.7](#) tenemos como parámetros de entrada  $k, a, T, D, y_0$  y como parámetro de salida  $y_1$ , por lo que la ecuación ([4.5](#)) se puede reducir a:

$$f(y_1) - cte = 0 \quad (4.6)$$

de manera más genérica aún, el término constante lo podemos considerar dentro de  $f(y_1)$  por lo que

$$f(y_1) = 0 \quad (4.7)$$

finalmente la ecuación ([4.7](#)) ya está en la forma adecuada para resolverla con la función `fzero` de MATLAB, introduciendo como punto inicial  $-y_0$ , ver [Fig. 4.7](#). La función `fzero` resuelve de manera numérica una ecuación tipo  $f(x) = 0$  con  $x_0$  como punto inicial.

El código de la [Fig. 4.6](#) simplemente describe las características de los sistemas a la izquierda y a la derecha, describe un punto de prueba  $y_0 = 1$  y llama a la función `semipoinca` para calcular las semiaplicaciones derecha e izquierda. Como se ve obtenemos valores diferentes, de hecho la semiaplicación izquierda tiene un valor mas grande que la derecha, gráficamente podría ser perfectamente lo representado en la [Fig. 4.4](#).

Vale, no hemos conseguido que las imágenes  $y_1$  fueran las mismas, por lo que ahora lo que haríamos sería probar con otro punto  $y_0$  y volver a comprobar si se cumple que  $y_{1L} = y_{1R}$ . Obviamente no lo vamos a hacer de manera manual, tenemos suficientes herramientas para hacerlo. Como hemos visto para usar *fzero* necesitamos un punto inicial, sin entrar mucho en detalle de resolución numérica *hablar de como funciona fzero y de porque elegir el punto cerca de la solucion es útil?*, básicamente este punto cuanto más cercano a la solución lo eligamos mas fiable y rápida será dicha solución, por ello vamos a representar de manera gráfica las semiaplicaciones izquierda y derecha para un intervalo de puntos  $y_0 \in [0 \ 10]$  y veamos si encontramos un punto de corte que nos indique que para un  $y_0$  las imágenes son las mismas

```
% Ejemplo 2 TFE
aL=-1; aR=-1; % Punto de equilibrio ubicado en la zona IZQUIERDA
kL=2; kR=0; % Valores de kL,R en función del signo de aL,R
TL=0.3; TR=-0.5;% Condiciones para que exista oscilación
DL=1; DR=1; % Condiciones para que exista oscilación

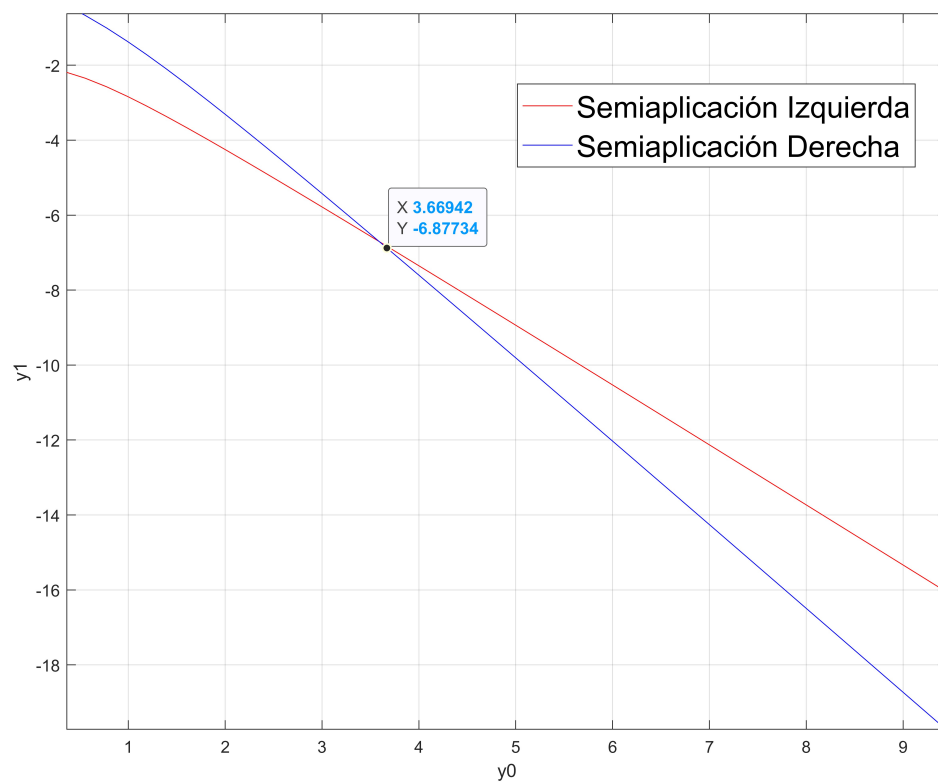
fplot(@(y0)semipoinca(kL,aL,TL,DL,y0),[0 10],'r');
xlabel('y0');
ylabel('y1');
hold on;

fplot(@(y0)semipoinca(kR,aR,TR,DR,y0),[0 10],'b');
xlabel('y0');
ylabel('y1');
hold on;

grid on;
legend('Semiaplicación Izquierda','Semiaplicación Derecha');
shg
```

**Figura 4.8** : Código para generar las gráficas de las semiaplicaciones izquierda y derecha

En este caso usamos *fplot* la cual va evaluando la función probando continuamente con valores de  $y_0$  desde cero hasta diez, se pintará de rojo la semiaplicación izquierda y de azul la semiaplicación derecha



**Figura 4.9 :** Gráfica obtenida de las semiaplicaciones izquierda y derecha

Como vemos en la [Fig. 4.9](#) efectivamente se cortan las gráficas, simplemente pinchando más o menos en el punto de corte vemos que las semiaplicaciones izquierda y derecha tendrán la misma imagen  $y_1 \approx -6.87734$  cuando  $y_0 \approx 3.66942$ .

Ya tenemos el punto que estará muy cercano a la solución que buscamos, ahora vamos a calcularla exactamente de manera numérica usando *fsolve* que nos permite solucionar los mismos casos que *fzero* y para más de una variable. Pero primero hay que escribir correctamente la función en MATLAB

```
% Ejemplo 3 TFE
aL=-1; aR=-1; % Punto de equilibrio ubicado en la zona IZQUIERDA
kL=2; kR=0; % Valores de kL,R en función del signo de aL,R
TL=0.3; TR=-0.5;% Condiciones para que exista oscilación
DL=1; DR=1; % Condiciones para que exista oscilación

Punto_Inicial = [3.66942 -6.87734];

funcion = @(Y) fsolvepoinca(kL,kR,aL,aR,TL,TR,DL,DR,Y);

Punto_Solucion = fsolve(funcion,Punto_Inicial);

y0_Solucion = Punto_Solucion(1)
y1_Solucion = Punto_Solucion(2)
```

Equation solved.

fsolve completed because the vector of function values is near zero as measured by the value of the function tolerance, and the problem appears regular as measured by the gradient.

y0\_Solucion =

3.5912

y1\_Solucion =

-6.7065

**Figura 4.10 :** Código para obtener los valores exactos de  $y_0$  e  $y_1$  para los que hay un órbita periódica

Efectivamente como se puede ver en la [Fig. 4.10](#) los valores que hemos obtenidos son muy parecidos a los que vimos en la [Fig. 4.9](#). Podemos decir entonces, que para el sistema que hemos estudiado tenemos una oscilación periódica que va desde  $y_0 = 3.5912$  hasta  $y_1 = -6.7065$ . Veamos la función *fsolvepoinca* la cual es llamada en el código anterior

```
function H = fsolvepoinca(kL,kR,aL,aR,TL,TR,DL,DR,Y)
%Funciones para fsolve en la semiaplicacion de poincaré
H(1)=semipoincay1y0(kL,aL,TL,DL,Y);
H(2)=semipoincay1y0(kR,aR,TR,DR,Y);
end
```

**Figura 4.11** : Función usada para separar las características izquierda, derecha y llama la función *semipoincay1y0* la cual se encarga de calcular la semiaplicación

Como vemos en [Fig. 4.10](#) se llama a una función *fsolvepoinca*, la cual vemos en la [Fig. 4.11](#). Los parámetros de entrada de *fsolvepoinca* son las características de los sistemas de la derecha y de la izquierda  $k, a, T, D$  además de un vector de dos componentes  $Y$ , este vector contiene el punto inicial, que como vemos en la [Fig. 4.10](#) le hemos asignado el punto de corte que más o menos obtuvimos viendo la gráfica de la [Fig. 4.9](#).

```
function valor = semipoincay1y0(k,a,T,D,Y)
%Resuelve Integral-cte = 0, dado y0 e y1
cte = (k*pi*T)/(D*sqrt(4*D-T^2));
y0=Y(1);
y1=Y(2);
valor = integral(@(y) (-y./((D.*y.^2)-(a.*T.*y)+(a.^2))),y1,y0)-cte;
end
```

**Figura 4.12**

En este caso queremos evaluar la ecuación (4.5) ya que estamos aportando valor a todos los parámetros  $y_0, y_1, k, a, T, D$ . Por ello con la función *semipoincay1y0*, ver [Fig. 4.12](#), se está evaluando:

$$f(y) = \text{integral} - \text{cte} \quad (4.8)$$

aportando como punto inicial el vector  $Y = [y_0 \ y_1]$ . La función *fsolve* del código de la [Fig. 4.10](#) buscará el punto, valores  $(y_0 \ y_1)$ , en que las curvas de las semiaplicaciones derecha e izquierda se cortan.

# Capítulo 5

## Bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite

La forma de que aparezca una oscilación en un sistema dinámico es mediante bifurcaciones. Las bifurcaciones aparecen cuando variamos de manera progresiva un parámetro del sistema, llamado parámetro de control. Esta variación puede producir una bifurcación debido a la creación o destrucción de un punto de equilibrio (bifurcación Hopf-Like) o cambiando la estabilidad del sistema mediante la variación de la traza  $T$ , este será nuestro caso. A esta bifurcación producida por la variación de la traza del sistema se le llama **Foco-Centro-Ciclo Límite**, ver *citar articulo de ponce donde se da este nombre y se presenta*, pero antes de presentarla vamos a hacer el análisis del punto de equilibrio y la estabilidad del sistema que estamos estudiando y el concepto de ciclo-límite para posteriormente ver como generar esta bifurcación en nuestro circuito.

Para hacer el análisis del punto de equilibrio y de la estabilidad primero recordemos el sistema que tenemos. Nosotros estamos estudiando un sistema, dinámico, autónomo, lineal y continuo a trozos bizonal en forma canónica de Lienard, recordar el sistema (3.38), (3.39).

Podemos obtener los puntos de equilibrio de cada una de las zonas igualando a cero el sistema, por ejemplo para la zona izquierda tenemos:

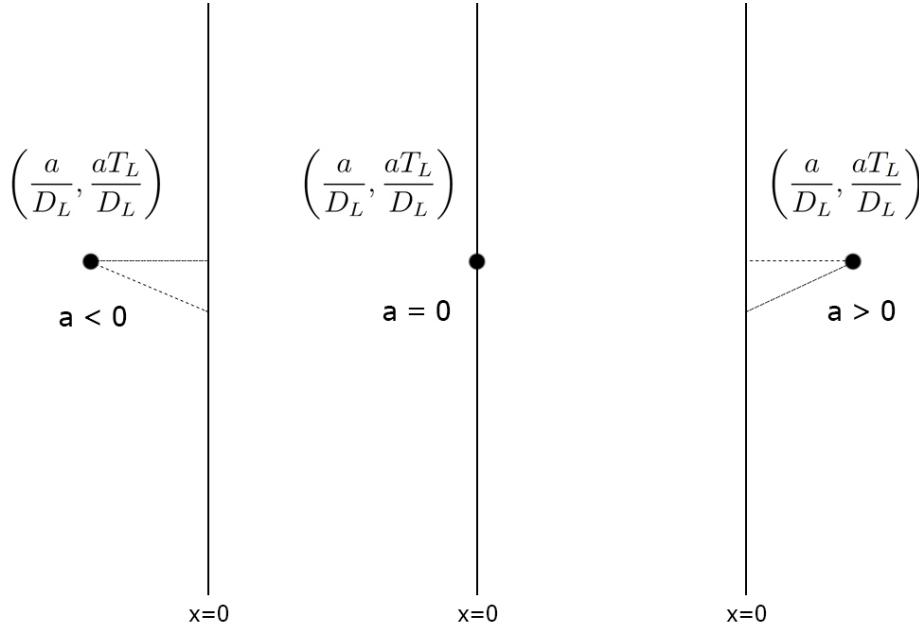
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_L & -1 \\ D_L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} T_L x - y = 0 \\ D_L x - a = 0 \end{cases} \longrightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{a}{D_L}, \frac{aT_L}{D_L} \right) \quad (5.1)$$

Análogamente para la zona derecha tendríamos el punto de equilibrio:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{a}{D_R}, \frac{aT_R}{D_R} \right) \quad (5.2)$$



Como podemos comprobar el valor de  $a$ , que como vimos en (3.35) nos indica el signo, nos está diciendo donde se encuentra el punto de equilibrio respecto a la recta de separación:



**Figura 5.1** : Posición del punto de equilibrio de la zona izquierda dependiendo del signo de  $a$ .

La posición del punto de equilibrio de la zona derecha es análoga a la de la zona izquierda, ver Fig. 5.1, pero en este trabajo nos centraremos en la zona izquierda únicamente. Mas adelante veremos como lo que ocurra en la zona derecha del plano de separación no nos afectará.

Una vez obtenido el punto de equilibrio podemos analizar la estabilidad como ya hicimos en (3.13), veámoslo de nuevo con la nueva nomenclatura que hemos elegido. El polinomio característico de la zona izquierda sería:

$$\begin{aligned}
 P_{A_L}(\lambda) &= \lambda^2 - \text{tr}(A_L)\lambda + \det(A_L) \\
 &= \lambda^2 - T_L\lambda + D_L = 0 \\
 \text{Autovalores} \rightarrow \lambda &= \frac{T_L \pm \sqrt{T_L^2 - 4D_L}}{2}
 \end{aligned} \tag{5.3}$$



Como se puede ver el polinomio característico (5.3) es análogo al del sistema (3.13) el cual ya analizamos, así que estaremos buscando:

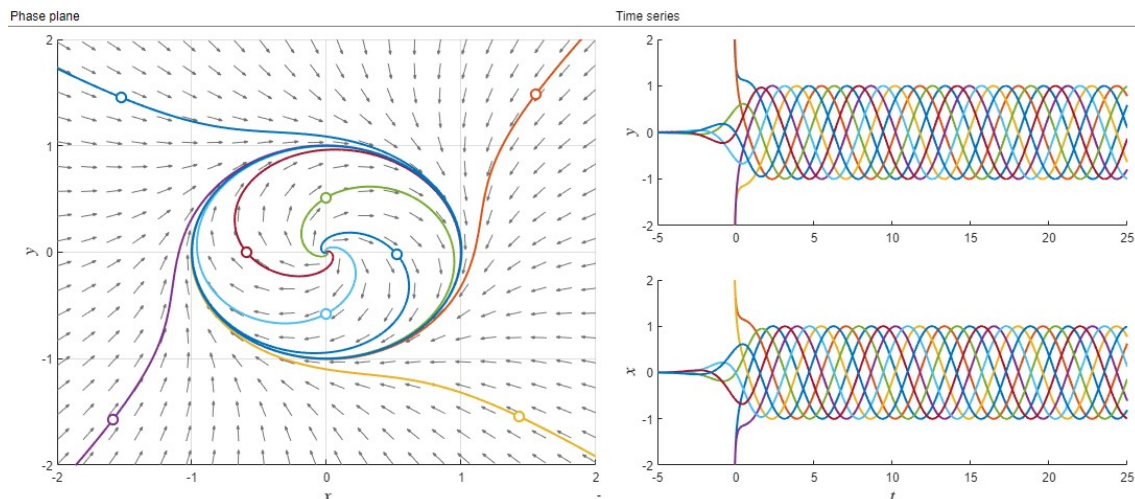
- $T_L^2 - 4 D_L < 0$  por lo que  $D_L > 0$ .
- $T_L < 0$  para tener un foco asintóticamente estable.
- $T_L = 0$  para tener un centro.
- $T_L > 0$  para tener un foco asintóticamente inestable.

Se puede ver que el cambio en la estabilidad del sistema lo produce un cambio en la traza, en nuestro caso la traza izquierda. Este cambio en la traza en nuestro sistema se traducirá en cambiar físicamente el valor de alguna variable, haremos los ajustes necesarios para que este cambio en la traza se produzca cambiando la resistencia del circuito, ya que se podría hacer fácilmente con un potenciómetro.

El siguiente concepto que debemos conocer es el de **Ciclo-Límite**. Un Ciclo-Límite es una solución periódica del sistema la cual está aislada, es decir, no existen mas soluciones periódicas cercanas a ella en el plano de fases. Del mismo modo que los puntos de equilibrio pueden tener diferentes estabilidades, hay tres posibles estabilidades para un ciclo límite.

- **Ciclo-Límite Estable**

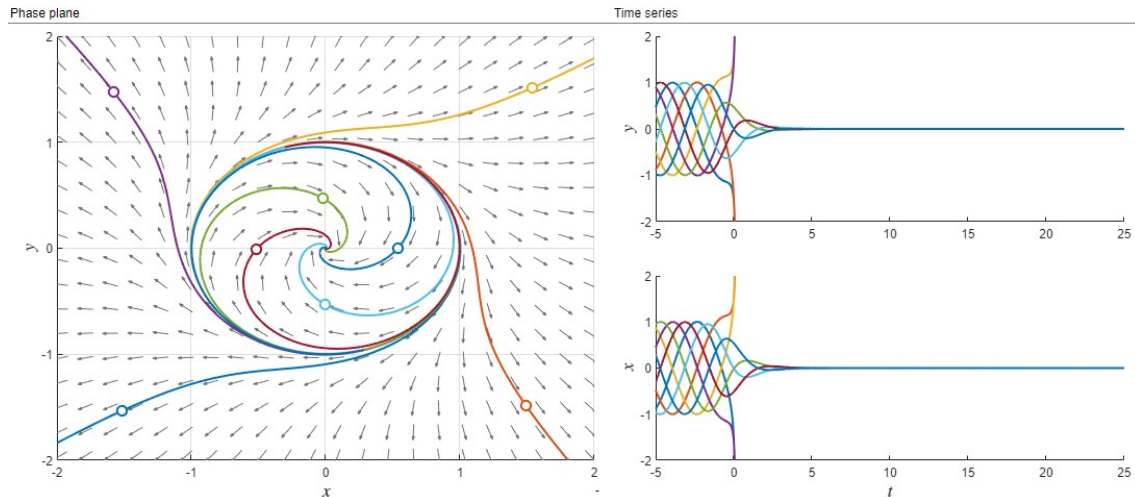
No importa si elegimos las condiciones iniciales dentro o fuera del Ciclo-Límite, las curvas solución tienden al Ciclo-Límite.



**Figura 5.2 :** Ciclo-Límite Estable con sentido horario de giro

- Ciclo-Límite Inestable

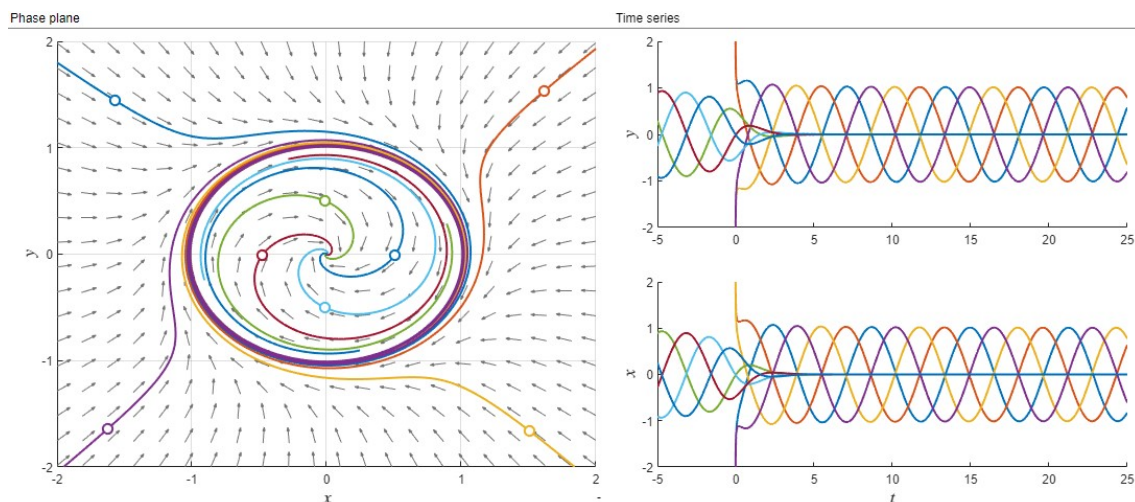
Si elegimos las condiciones iniciales dentro del Ciclo-Límite, las curvas solución tienden a cero. Si elegimos las condiciones iniciales fuera del Ciclo-Límite, las curvas solución tienden a infinito.



**Figura 5.3 :** Ciclo-Límite Inestable con sentido horario de giro

- Ciclo-Límite Parcialmente Estable

Si elegimos las condiciones iniciales dentro del Ciclo-Límite, las curvas solución tienden a cero. Si elegimos las condiciones iniciales fuera del Ciclo-Límite, las curvas solución tienden al Ciclo-Límite.



**Figura 5.4 :** Ciclo-Límite Parcialmente Estable con sentido horario de giro

El Ciclo-Límite que más nos interesa es el Estable, ya que sin importar donde eligamos las condiciones iniciales siempre tenderemos a la oscilación periódica, además, si nuestro sistema sufre alguna perturbación que lo saque de la oscilación periódica siempre tenderá a reconducirse nuevamente hacia ella.

El estudio de los Ciclos-Límites debe hacerse de manera particular para cada sistema, primero hay que estudiar el punto de equilibrio y su estabilidad, hacer el análisis para saber si existe oscilación periódica y finalmente comprobar que dicha oscilación periódica esté aislada. No hará falta que hagamos este estudio para nuestro sistema gracias a que hemos sido capaces de escribir nuestras ecuaciones (2.30) en la forma (2.42) y estas en forma canónica de Liénard (3.38), y tenemos trabajos donde ya se hace este análisis para sistemas de este tipo (*seminal nuestro, libro amarillo, libro teruel, ponce ros 2015*), cumpliendo una serie de condiciones en las trazas y determinantes del sistema podemos conseguir que se produzca el cambio de estabilidad Foco Asintóticamente Estable-Centro-Foco Asintóticamente Inestable en el punto de equilibrio del sistema y por ello obteniendo el Ciclo-Límite (ya que se produce la bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite) (*podemos saber de antemano la estabilidad del ciclo límite? es estable, pero hay forma de saberlo antes de la experimentación?*) que será nuestra oscilación periódica.

esto es texto de la siguiente hoja

# Capítulo 6

## Oscilación Periódica en el circuito

Contenido del capítulo 6.

esto es texto de la siguiente hoja

# Capítulo 7

## TÍTULO CAPÍTULO 7

Contenido del capítulo 7.

esto es texto de la siguiente hoja



# Capítulo 8

## TÍTULO CAPÍTULO 8

Contenido del capítulo 8.

esto es texto de la siguiente hoja

# Conclusiones

Contenido del capítulo de conclusiones.

# Bibliografía

- [1] CHUA, L. O. Memristor – The missing circuit element. IEEE Transactions on Circuit Theory, 1971, vol. CT-18, no. 5, p. 507 to 519. DOI: 10.1109/TCT.1971.1083337.
- [2] Itoh, Makoto & Chua, Leon. (2008). Memristor oscillators. I. J. Bifurcation and Chaos. 18. 3183-3206. 10.1142/S0218127408022354.
- [3] Strukov DB, Snider GS, Stewart DR, Williams RS. The missing memristor found. Nature. 2008 May 1;453(7191):80-3. doi: 10.1038/nature06932. Erratum in: Nature. 2009 Jun 25;459(7250):1154. PMID: 18451858.
- [4] R. S. Williams, "How We Found The Missing Memristor,"in IEEE Spectrum, vol. 45, no. 12, pp. 28-35, Dec. 2008, doi: 10.1109/MSPEC.2008.4687366.
- [5] Xiaoyue, Ji & Dong, Zhekang & Zhou, Guangdong & Lai, Chun Sing & Yan, Yunfeng & Qi, Donglian. (2021). Memristive System Based Image Processing Technology: A Review and Perspective. Electronics. 10. 3176. 10.3390/electronics10243176.
- [6] Caravelli, F. & Carbajal, Juan. (2018). Memristors for the Curious Outsiders. 10.31224/osf.io/c4qr9.
- [7] Llibre, Jaume & Teruel, Antonio. (2014). Introduction to the Qualitative Theory of Differential Systems: Planar, Symmetric and Continuous Piecewise Linear Systems. 10.1007/978-3-0348-0657-2.
- [8] Carmona, V. Bifurcaciones en Sistemas Dinámicos Lineales a Trozos. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, 2002.
- [9] V. Carmona, E. Freire, E. Ponce and F. Torres, "On simplifying and classifying piecewise-linear systems,"in IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 49, no. 5, pp. 609-620, May 2002, doi: 10.1109/TCSI.2002.1001950.
- [10] Amador, A., Freire, E., Ponce, E., and Ros, J., "On Discontinuous Piecewise Linear Models for Memristor Oscillators", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 27, no. 6, 2017. doi:10.1142/S0218127417300221.