



**Universidad de Sevilla
Escuela Politécnica Superior**



Trabajo Fin de Grado
Ingeniería Electrónica Industrial

*La caracterización integral de las
semiaplicaciones de Poincaré y su aplicación a
circuitos electrónicos: El Memristor*

Autor: Sergio R. Durán Martín

Tutor: Dr. Victoriano Carmona Centeno

Departamento: Matemática Aplicada II

Resumen

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Palabras clave: robótica educativa, robot modular, STM32, FreeRTOS, interfaz gráfica, impresión 3D.

Abstract

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Keywords: educational robotics, modular robot, STM32, FreeRTOS, graphic interface, 3D printing.

Índice general

1	Introducción	4
2	Descripción del Circuito	5
2.1	Resistencia negativa	6
2.2	Memristor	8
2.3	Variables de estado	12
2.4	Superficies invariantes	15
3	Sistemas Dinámicos Continuos	19
3.1	Sistemas lineales planos	20
3.2	Sistemas lineales a trozos bizonales	27
4	Semiacpliaciones de Poincaré	33
4.1	Caracterización integral de la semi-aplicación de Poincaré	37
5	Bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite	51
6	Oscilación Peródica en el circuito	62
7	TÍTULO CAPÍTULO 7	65
8	TÍTULO CAPÍTULO 8	67

Capítulo 1

Introducción

Contenido del capítulo de introducción. Contenido del capítulo 1.

Capítulo 2

Descripción del Circuito

El circuito que se ha estudiado es un oscilador con resistencia negativa al que se le ha añadido un componente muy interesante y que está siendo muy estudiado en estos últimos tiempos, el memristor, ver [Fig. 2.1](#).

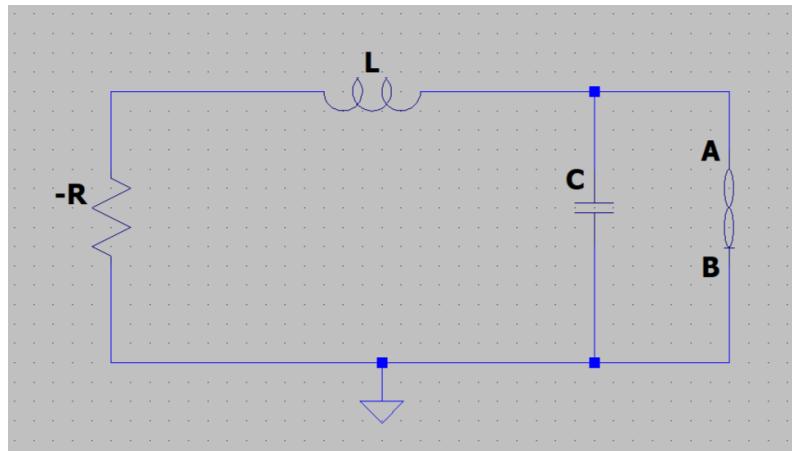


Figura 2.1 : Oscilador RLC con R negativa y Memristor.

Como se puede ver no existe una fuente de señal en el circuito y esto se debe a que el análisis hecho busca encontrar una oscilación periódica tan solo proporcionando condiciones iniciales a la bobina y el condensador, esto gracias al comportamiento de la resistencia negativa y del memristor los cuales se especifican mas adelante.

La forma de imponer las condiciones iniciales serían las clásicas, usando fuentes de intensidad en serie y tensión en paralelo con interruptores que se abren en $t = 0(s)$ para la bobina y el condensador respectivamente.

2.1. Resistencia negativa

Uno de los componentes del circuito es la resistencia negativa la cual se puede construir con lo que se llama un *Convertidor de Impedancia Negativa (NIC)*. Un NIC es un circuito activo, es decir, en lugar de disipar energía como una resistencia convencional, puede proporcionar energía a un circuito, ver *Fig. 2.2*. En términos prácticos, un NIC puede ser utilizado para compensar la resistencia de carga de un sistema, mejorar la eficiencia de la transferencia de energía o realizar otras funciones específicas en circuitos eléctricos o electrónicos. En los circuitos osciladores, el NIC desempeña un papel importante en el mantenimiento, estabilización, frecuencia y calidad de la oscilación.

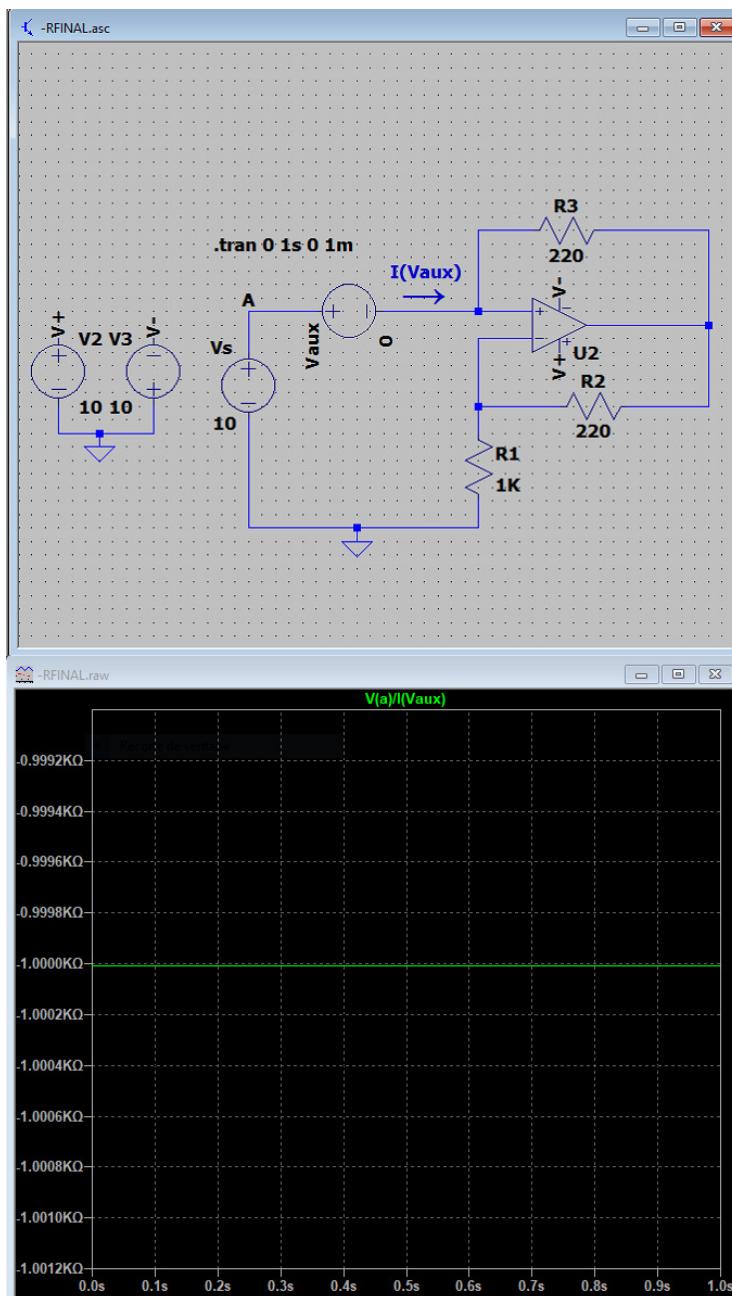
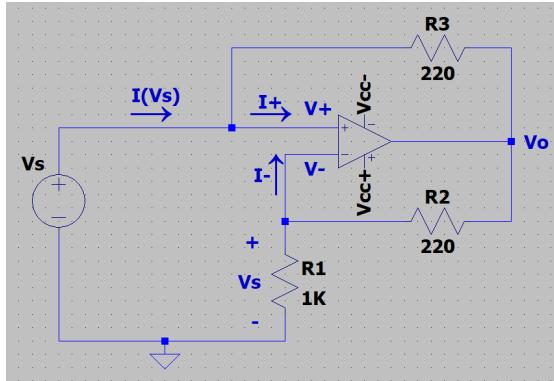


Figura 2.2 : Convertidor de Impedancia Negativa de -1000 Ohmios.

Una de las maneras de realizarlo es usando un amplificador operacional y 3 resistencias en la configuración que se ve en la [Fig. 2.2](#) de esta manera si elegimos las resistencias $R_2 = R_3$ la resistencia R_1 es la que determinaría el valor de resistencia negativa, esta es la explicación:



Consideraciones para el cálculo del circuito de la [Fig. 2.3](#) con Amplificadores Operacionales:

$$V_+ = V_- \quad (2.1)$$

$$I_+ = I_- = 0 \text{ (A).} \quad (2.2)$$

Figura 2.3 : Parámetros circuito NIC.

Si observamos la ecuación [\(2.1\)](#) se puede ver que la tensión V_S cae sobre la resistencia R_1 y se puede relacionar con la tensión de salida V_O mediante un divisor de tensión:

$$V_S = V_O \frac{R_1}{R_1 + R_2} \longrightarrow V_O = V_S \frac{R_1 + R_2}{R_1}. \quad (2.3)$$

Teniendo en cuenta la ecuación [\(2.2\)](#) se puede ver que la intensidad $I(V_S)$ es la misma que pasa por la resistencia R_3 , por ello se puede deducir:

$$I(V_S) = \frac{V_S - V_O}{R_3}. \quad (2.4)$$

Sustituyendo la ecuación [\(2.3\)](#) en [\(2.4\)](#) y trabajando la expresión para obtener la relación tensión-intensidad llegamos a:

$$I(V_S) = V_S \frac{-R_2}{R_1 R_3}. \quad (2.5)$$

Si dividimos la tensión V_S entre la intensidad $I(V_S)$ (ecuación [\(2.5\)](#)) para obtener la impedancia de entrada del circuito:

$$\frac{V_S}{I(V_S)} = Z_{IN} = \frac{V_S}{V_S \frac{-R_2}{R_1 R_3}} = -R_1 \frac{R_3}{R_2}. \quad (2.6)$$

Si elegimos las resistencias $R_3 = R_2$ en la ecuación [\(2.6\)](#) obtenemos:

$$Z_{IN} = -R_1. \quad (2.7)$$

2.2. Memristor

El componente más interesante de este circuito es el Memristor, teorizado por el científico Leon Chua en 1971, ver [1]. Este elemento trata de llenar el vacío que existía en las relaciones entre las cuatro variables básicas en teoría de circuitos: voltaje v , intensidad i , carga eléctrica q y flujo magnético φ . En concreto el memristor relaciona la carga eléctrica con el flujo magnético de la siguiente manera, ver [2]:

$$\varphi = \varphi(q), \quad q = q(\varphi). \quad (2.8)$$

Sabiendo la relación del voltaje y la intensidad respecto a la carga y al flujo en el tiempo:

$$v(t) = \frac{d\varphi}{dt}, \quad i(t) = \frac{dq}{dt}. \quad (2.9)$$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau)d\tau, \quad q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau)d\tau. \quad (2.10)$$

Derivando la ecuación (2.8) respecto al tiempo, y aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi(q)}{dq} \frac{dq}{dt}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.11)$$

Sustituyendo las relaciones de la ecuación (2.9) en la ecuación (2.11):

$$v(t) = \frac{d\varphi(q)}{dq} i(t), \quad i(t) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} v(t). \quad (2.12)$$

Las dos relaciones de carga y flujo que quedan en la ecuación (2.12) son los que se denominan **Memristancia $M(q)$** y **Memductancia $W(\varphi)$** :

$$M(q) = \frac{d\varphi(q)}{dq}, \quad W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi}. \quad (2.13)$$

Finalmente se presentan dos tipos de expresiones:

$$\text{Memristor controlado por carga} \rightarrow v(t) = M(q) i(t). \quad (2.14)$$

$$\text{Memristor controlado por flujo} \rightarrow i(t) = W(\varphi) v(t). \quad (2.15)$$

El segundo acontecimiento más importante en relación al memristor fue en 2008 cuando en los laboratorios de HP se fabricó un componente cuyo comportamiento era muy parecido al funcionamiento que afirmaba Chua, debía de tener el memristor. En un inicio al componente que HP creó en 2005 le dieron el nombre de *Crossbar Latch*, no sería hasta 2008 que se percataron de la similitud de funcionamiento con el memristor de Chua. La construcción es sencilla, se trata de dos capas, una de dióxido de titanio puro y otra de dióxido de titanio deficiente de átomos de oxígeno, ambas envueltas por dos electrodos de platino *Fig. 2.4. Repasar este párrafo, la frase de "debía tener..." quitar*

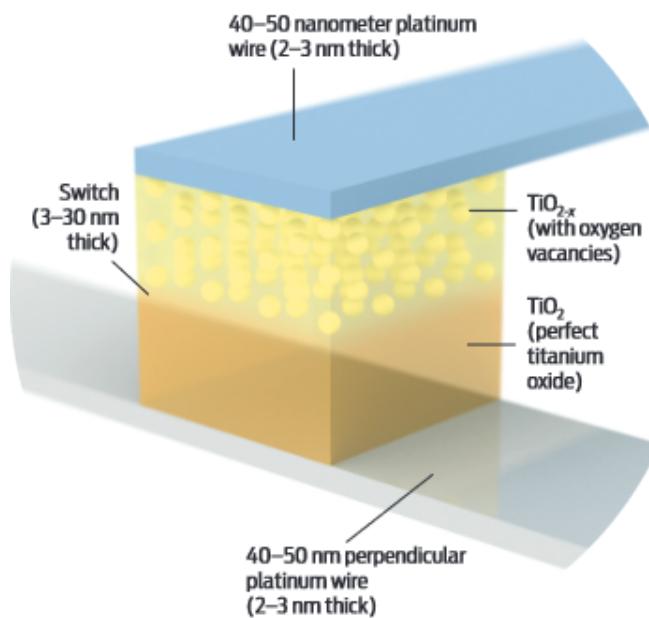


Figura 2.4 : Construcción del memristor de HP. Ver [4].

El óxido de titanio tiene una serie de características que lo hacen un material muy interesante en esta aplicación:

1. Resistencia variable: La resistencia eléctrica del óxido de titanio puede cambiar en respuesta de la aplicación de una corriente o un campo eléctrico. Lo cual nos permite no tan solo guardar 1 o 0 si no un rango de valores dentro de unos límites de operación.
2. No volatilidad: El óxido de titanio puede mantener su estado de resistencia incluso cuando se retira la corriente eléctrica que lo atraviesa. Esto significa que puede retener información y mantener su estado de resistencia sin requerir energía continua.
3. Cambios rápidos de resistencia: Esta propiedad permite operaciones de escritura y lectura rápidas en el memristor, lo que es crucial para su uso en aplicaciones de almacenamiento y procesamiento de datos.
4. Baja potencia y tamaño compacto

La fórmula que se propone en [3] para modelar el comportamiento de este dispositivo es:

$$v(t) = \left(R_{ON} \frac{w(t)}{D} + R_{OFF} \left(1 - \frac{w(t)}{D} \right) \right) i(t), \quad (2.16)$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = \mu_V \frac{R_{ON}}{D} q(t). \quad (2.17)$$

Integrando la ecuación (2.17) e insertándola en (2.16) teniendo en cuenta que el valor de resistencia $R_{ON} \ll R_{OFF}$:

$$w(t) = \mu_V \frac{R_{ON}}{D} i(t), \quad (2.18)$$

$$M(q) = R_{OFF} \left(1 - \frac{\mu_V R_{ON}}{D^2} q(t) \right). \quad (2.19)$$

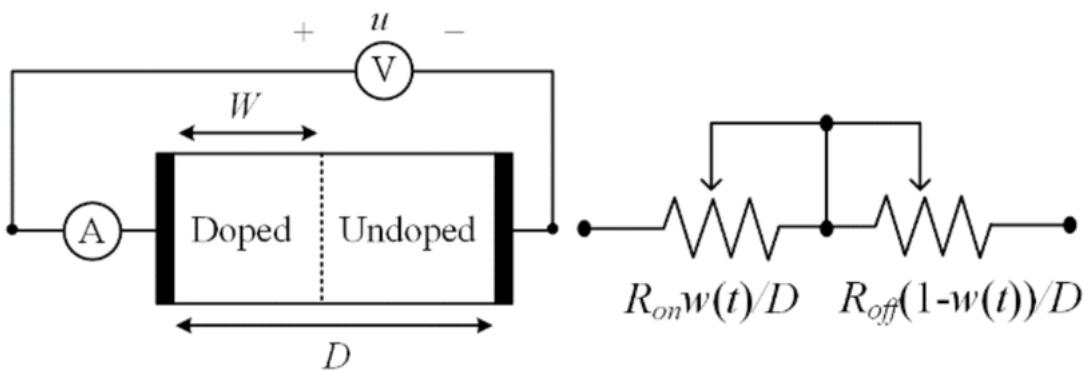


Figura 2.5 : Esquema del memristor de HP. Ver [5].

Los parámetros que aparecen en las ecuaciones anteriores y que describen el funcionamiento del componente son:

1. R_{ON} : Resistencia en el estado ON, valor mínimo. Es constante.
2. R_{OFF} : Resistencia en el estado OFF, valor máximo. Es constante.
3. μ_V : Mobilidad iónica de arrastre promedio. Es constante.
4. w : Ancho de la zona dopada, no es constante, depende de la excitación.
5. D : Ancho total de la lámina de óxido de titanio. Es constante.

El funcionamiento es el siguiente, entre los dos electrodos de platino tenemos una capa de dióxido de titanio puro TiO_2 que actúa como dieléctrico y otra de dióxido de titanio con vacantes de oxígeno TiO_{2-x} que actúa como conductor ya que en estas vacantes están cargadas positivamente (ver [Fig. 2.4](#)), ya que al faltar átomos de oxígeno se están perdiendo también sus electrones de valencia asociados, generando así que el compuesto necesite atraer electrones a dichas vacantes para así mantenerse eléctricamente estable. Cuando un voltaje positivo se aplica al electrodo superior las vacantes de oxígeno de la zona dopada se repelen y viajan hacia la zona de óxido de titanio puro, haciendo así que aumente la conductividad hasta que se alcance el valor de R_{ON} . Si por el contrario el voltaje aplicado es negativo, las vacantes de oxígeno viajan hacia el electrodo superior, reduciendo la conductividad hasta R_{OFF} . **Repasar este párrafo**

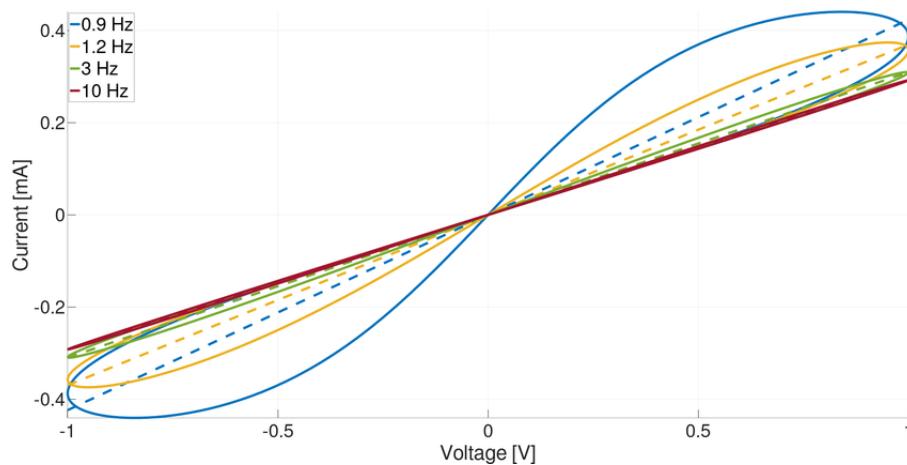


Figura 2.6 : Gráfica Tensión-Intensidad del Memristor de Chua ideal para una señal de entrada senoidal con varias frecuencias. Como se puede ver conforme aumenta la frecuencia la gráfica se parece más a la de una resistencia tradicional. Ver [\[6\]](#)

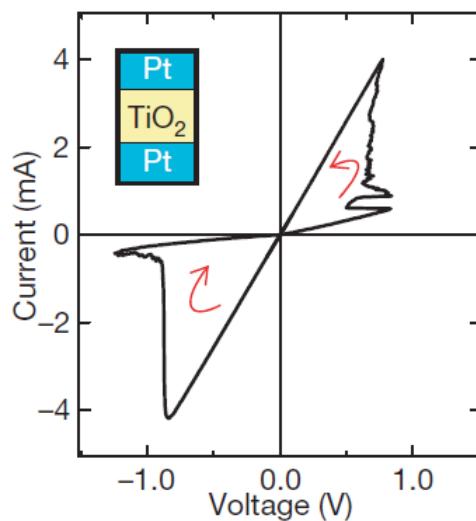


Figura 2.7 : Gráfica Tensión-Intensidad del Memristor de HP. Ver [\[3\]](#).

2.3. Variables de estado

En este trabajo hemos hecho un análisis matemático de la bifurcación del circuito oscilador haciendo uso de técnicas de análisis de reciente estudio, pero primero hay que presentar el circuito y transformar sus ecuaciones eléctricas hasta llegar a una forma matemática con la que poder trabajar. Empecemos analizando el circuito.

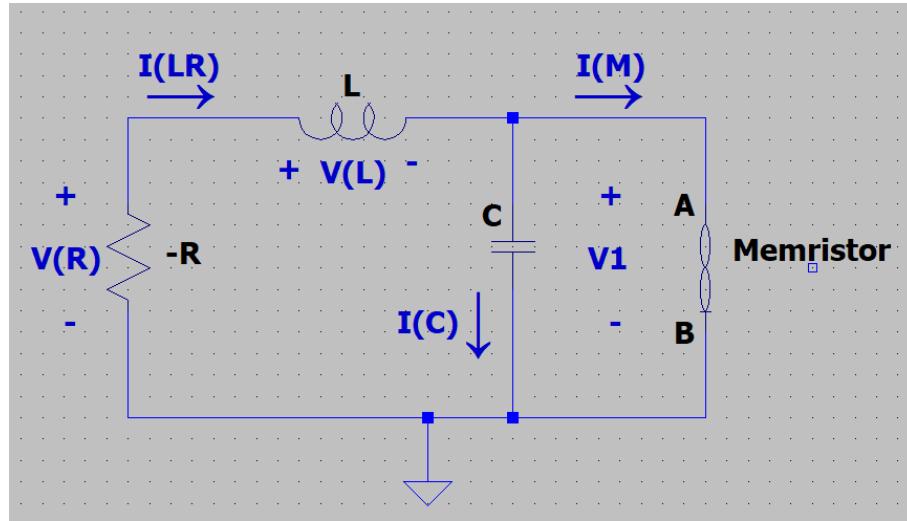


Figura 2.8 : Magnitudes del circuito.

Aplicando las leyes de Kirchoff a nuestro circuito, [Fig. 2.8](#), se puede ver que:

$$i_{LR} = i_M + i_C, \quad (2.20)$$

$$v_R = v_L + v_1. \quad (2.21)$$

Reordenando las anteriores ecuaciones:

$$i_C = i_{LR} - i_M, \quad (2.22)$$

$$v_L = v_R - v_1. \quad (2.23)$$

Recordando la relación entre la carga y el flujo con la intensidad y la tensión de las ecuaciones [\(2.9\)](#), la ecuación del memristor controlado por flujo [\(2.15\)](#) y aplicándolo a [\(2.22\)](#) y [\(2.23\)](#) obtenemos:

$$C \frac{dv_1}{dt} = i_{LR} - W(\varphi) v_1, \quad (2.24)$$

$$L \frac{di_{LR}}{dt} = R i_{LR} - v_1, \quad (2.25)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = v_1. \quad (2.26)$$

Como se pueden ver las variables de estado elegidas son la intensidad en la resistencia y la bobina i_{LR} , la tensión en el condensador y el memristor v_1 y el flujo en el memristor φ .

Reordenando las ecuaciones anteriores (2.24), (2.25) y (2.26) tenemos:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{i_{LR}}{C} - W(\varphi) \frac{v_1}{C}, \quad (2.27)$$

$$\frac{di_{LR}}{dt} = \frac{R}{L} i_{LR} - \frac{v_1}{L}, \quad (2.28)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = v_1. \quad (2.29)$$

Haciendo algunos cambios a las tres anteriores ecuaciones para luego poder trabajar con las ecuaciones obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(y - W(z)x), \\ \frac{dy}{dt} = -\xi x + \beta y, \\ \frac{dz}{dt} = x. \end{cases} \quad (2.30)$$

Donde tenemos:

$$x = v_1, \quad y = i_{LR}, \quad z = \varphi, \quad \alpha = \frac{1}{C}, \quad \beta = \frac{R}{L}, \quad \xi = \frac{1}{L}.$$

Escribiendo el sistema (2.30) de una forma más general:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}W(z)x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \\ \frac{dz}{dt} = x. \end{cases} \quad (2.31)$$

Con:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\alpha = -\frac{1}{C}, & a_{12} &= \alpha = \frac{1}{C}, \\ a_{21} &= -\xi = -\frac{1}{L}, & a_{22} &= \beta = \frac{R}{L}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Pero del sistema (2.31) aun tenemos que definir $W(z)$. En [2] se asume que el comportamiento del memristor se puede aproximar por una ecuación lineal a trozos monótonamente creciente:

$$q(\varphi) = b\varphi + 0.5(a-b)(|\varphi+1| - |\varphi-1|). \quad (2.33)$$

donde $a, b, c, d > 0$

Escribiendo (2.33) con la variable z y derivándola (recordando la ecuación (2.13)) para obtener $W(z)$:

$$q(z) = bz + 0.5(a - b)(|z + 1| - |z - 1|), \quad (2.34)$$

$$W(z) = \frac{dq(z)}{dz} = \begin{cases} a, & |z| < 1, \\ b, & |z| > 1. \end{cases} \quad (2.35)$$

Por último vamos a definir dos matrices auxiliares del sistema (2.31) teniendo en cuenta la función $W(z)$ (2.35)

$$A_L = \begin{pmatrix} a \cdot a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_R = \begin{pmatrix} b \cdot a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

con sus correspondientes trazas y determinantes:

$$\begin{aligned} t_L &= a \cdot a_{11} + a_{22} \\ d_L &= a \cdot a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ t_R &= b \cdot a_{11} + a_{22} \\ d_R &= b \cdot a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ya tenemos las ecuaciones necesarias para empezar el análisis, pero primero veremos en los siguientes capítulos que técnicas estaremos usando para ello.

2.4. Superficies invariantes

Lo que en teoría de bifurcaciones se denomina *Superficie* o *Plano* es un espacio topológico de dimensión n , en un sistema dinámico, cuyas propiedades de dicha superficie se mantienen inalteradas bajo la evolución de sistema. Es decir, es una región del espacio de fase donde las trayectorias de las soluciones del sistema permanecen contenidas, siempre que no aparezcan bifurcaciones de escape, pero no será nuestro caso. En este trabajo nos interesa estudiar los planos invariantes del sistema (2.31) ya que será donde aparecerá la órbita periódica que estamos buscando en nuestro circuito.

Definición 2.1 *Considerando el sistema diferencial:*

$$\frac{dX}{dt} = F(X), \quad X \in \mathbb{R}^3 \quad (2.38)$$

Se dice que la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie invariante, del sistema si la solución del sistema diferencial $X(t)$ con condición inicial $X(0) = X_0 \in S$ satisface que $X(t) \in S$ para todo t .

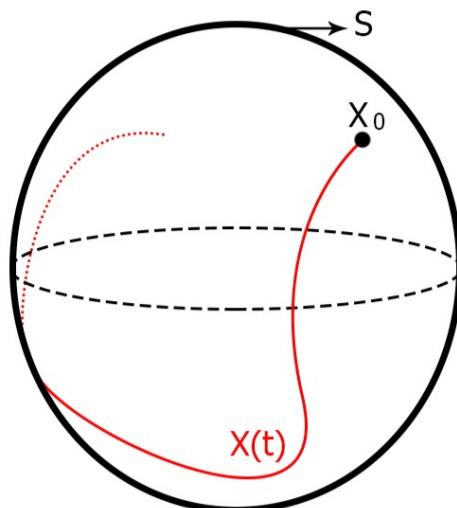


Figura 2.9 : Una esfera (que es una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$) con una órbita solución, $X(t)$ con condición inicial $X(0) = X_0$, contenida en ella.

Como se demuestra en el teorema 1 de [10] existe un conjunto de superficies invariantes para nuestro sistema (2.31), se enunciará dicho teorema en este trabajo ya que nos será muy importante tenerlo presente.

Teorema 2.1 Considerando el sistema (2.31) con la función lineal a trozos q (2.33) y la función $W(z)$ (posiblemente discontinua) (2.35). Para cualquier $h \in \mathbb{R}$, el conjunto:

$$S_h = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : H(x, y, z) = h\} \quad (2.39)$$

es una superficie invariante para el sistema, y se calcula con la siguiente expresión:

$$H(x, y, z) = -a_{22}x + a_{12}y - a_{12}a_{21}z + a_{11}a_{22}q(z). \quad (2.40)$$

Además, el sistema tiene una familia infinita de superficies invariantes en todo \mathbb{R}^3 , y la dinámica de los mismos es fundamentalmente bidimensional.

Demostración: Para cualquier solución $(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t))$ del sistema (2.31), tenemos la función $h(t) = H(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t))$. Si derivamos $h(t)$ y sustituimos las ecuaciones de las tres incógnitas: REPASAR AL ECUACIÓN, ESTA BIEN HECHA LA DERIVACIÓN? SE VA TODO Y QUEDA 0? MIRAR ARTICULO PONCE

$$h' = -a_{22}(a_{11}W(z) + a_{12}y) + a_{12}(a_{21}x + a_{22}y) + (a_{11}a_{22}W(z) - a_{12}a_{21})x = 0. \quad (2.41)$$

por lo que h es constante a lo largo de toda la órbita y por lo tanto invariante a la dinámica del sistema.

Como se ha dicho en el teorema anterior la dinámica de estas superficies se puede reducir a un comportamiento bidimensional, esto se demuestra en el teorema 2 de [10], nuevamente lo enunciaremos pues nos interesa tenerlo presente. Lo que se hace en este teorema es mediante el cambio de variable adecuado transformar nuestro sistema de tres variables en uno de dos variables.

Teorema 2.2 Considerando el sistema (2.31), la función $W(z)$ (2.35) con $a \neq b$ y tomando la hipótesis $a_{22} = \frac{R}{L} \neq 0$, la dinámica del sistema (2.31) es topológicamente equivalente a la dinámica del sistema lineal a trozos de dimensión 2

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= F(\tilde{x}) - \tilde{y}, \\ \dot{\tilde{y}} &= g(\tilde{x}) - h,\end{aligned}\tag{2.42}$$

con

$$F(\tilde{x}) = \begin{cases} t_R(\tilde{x} - 1) + t_L, & \text{si } \tilde{x} > 1, \\ t_L\tilde{x}, & \text{si } |\tilde{x}| \leq 1, \\ t_R(\tilde{x} + 1) - t_L, & \text{si } \tilde{x} < -1, \end{cases}\tag{2.43}$$

$$g(\tilde{x}) = \begin{cases} d_R(\tilde{x} - 1) + d_L, & \text{si } \tilde{x} > 1, \\ d_L\tilde{x}, & \text{si } |\tilde{x}| \leq 1, \\ d_R(\tilde{x} + 1) - d_L, & \text{si } \tilde{x} < -1. \end{cases}\tag{2.44}$$

Demarcación: Cuando $a_{22} \neq 0$ en el sistema (2.31) podemos solucionar la ecuación $H(x, y, z) = h$ (2.40) para x , escribiendo:

$$x = \frac{a_{12}}{a_{22}}y + a_{11}q(z) - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}}z - \frac{h}{a_{22}}.\tag{2.45}$$

Sustituyendo la ecuación (2.45) en la segunda y tercera ecuación de (2.31), tenemos:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \alpha_1y - \alpha_2z + a_{11}a_{21}q(z) - \frac{a_{21}h}{a_{22}}, \\ \dot{z} &= \alpha_3y - \alpha_4z + a_{11}q(z) - \frac{h}{a_{22}}.\end{aligned}\tag{2.46}$$

con

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{a_{22}^2 + a_{12}a_{21}}{a_{22}}, & \alpha_2 &= \frac{a_{21}^2a_{12}}{a_{22}}, \\ \alpha_3 &= \frac{a_{12}}{a_{22}}, & \alpha_4 &= \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}}.\end{aligned}\tag{2.47}$$

Seguidamente considerando el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= z, \\ \tilde{y} &= \alpha_1z - \alpha_3y + \frac{h}{a_{22}}\end{aligned}\tag{2.48}$$

el sistema (2.46) se puede escribir en la forma (2.42)-(2.44).

Una breve explicación de los anteriores teoremas. Siempre que $a_{22} \neq 0$, si elegimos una condición inicial de nuestro sistema que se encuentre dentro de alguna superficie de las que hemos definido en (2.39), y las cuales podemos calcular con la expresión (2.40) con las condiciones iniciales de x, y, z , entonces la solución del sistema siempre estará contenida en dicha superficie. Es decir, mirando las ecuaciones (2.48); con \tilde{x} calculamos la z , con \tilde{y} podemos despejar y calcular la y (recordemos que h ya la hemos definido con las condiciones iniciales), y finalmente con la ecuación (2.45) calculamos la x . Hemos reducido un sistema tridimensional a uno bidimensional y conocemos el plano h donde estará contenida la solución del sistema, solución que estamos buscando que sea una órbita periódica.

Como dijimos en el Teorema 2.1, la función $W(z)$ puede ser discontinua, esto dependerá de las características del memristor. Aún así esta posible discontinuidad no nos afectará en nuestro trabajo como se demuestra en la sección 3 de [10] donde los autores demuestran como pasar en cualquier caso de un modelo discontinuo a un modelo reducido continuo. Además en el artículo de Chua de 2008, ver [2] donde se presenta el circuito que estamos estudiando en este trabajo, los autores presentan una aproximación de lo que podrían ser la gráfica flujo-carga del memristor caracterizada por la ecuación (2.34)-(2.35) y la suponen continua.

Además, nuestro nuevo sistema de dimensión dos tiene tres zonas como vemos en (2.42)-(2.44), sin embargo en este trabajo nos centraremos en dos de ellas, puesto que buscaremos oscilaciones periódicas bizonales. Se hace esta aclaración puesto que parte del trabajo que faremos mas adelante, como la forma canónica de Lienard, nos permitiría hacer el estudio de tres zonas, pero no es nuestro objetivo.

Capítulo 3

Sistemas Dinámicos Continuos

En este capítulo haremos un repaso de sistemas dinámicos continuos lineales a trozos puesto que como hemos visto en el sistema (2.31) hemos reducido nuestro circuito a un sistema de este tipo. Lo que necesitamos ahora es encontrar la o las soluciones de nuestro sistema y estudiar su estabilidad, la base que necesitamos para ello lo veremos en este capítulo.

3.1. Sistemas lineales planos

En esta sección vamos a analizar los sistemas dinámicos continuos de 2 ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes, ya que posteriormente describiremos nuestro circuito de esta forma. Antes que nada hay que definir lo que es un sistema dinámico continuo:

Definición 3.1 *Un sistema dinámico es un conjunto de ecuaciones de cambio que describen la evolución temporal de algún fenómeno, que puede ser de cualquier naturaleza (eléctrico, económico, cinegético...), de manera que el estado presente del sistema viene determinado por los estados anteriores. El estado del sistema queda descrito por sus variables de estado. Cuando la evolución se estudia considerando el tiempo como una variable continua, decimos que el sistema es continuo y para analizar este tipo de sistemas la regla determinista que lo gobierna es su sistema de ecuaciones diferenciales.*

Un sistema de este tipo tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + b_1 \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + b_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

Escribiendo el sistema (3.1) en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Escribiendo el sistema (3.2) de forma mas simplificada:

$$\dot{X} = AX + B \quad (3.3)$$

Cuando $B = \vec{0}$ el sistema se dice homogéneo. Por el contrario cuando $B \neq \vec{0}$ el sistema se dice no homogéneo. Esto es importante saberlo pues los métodos para solucionar estos tipos de sistemas no son los mismos.

Tambien hay que tener en cuenta las condiciones iniciales del sistema:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Escribiendo el sistema (3.4) en forma matricial:

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = X_0 \quad (3.5)$$

Al conjunto del sistema y a sus condiciones iniciales se les denomina **Problema de Valor Inicial (PVI)**:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + B & \rightarrow \text{Sistema Diferencial (S.D.)} \\ X(t_0) = X_0 & \rightarrow \text{Condiciones Iniciales (C.I.)} \end{cases} \quad (3.6)$$

Lo primero y más importante que se debe hacer con este tipo de problemas es comprobar la existencia y unicidad de sus soluciones.

Teorema 3.1 Existencia y unicidad

Sean A y B continuas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, que contiene el punto $X(t_0)$ entonces el P.V.I. tiene una única solución definida en dicho intervalo I para cualquier vector $X_0 \in \mathbb{R}^2$. Además, si el P.V.I. tiene coeficientes constantes en A y B la solución está definida en \mathbb{R} .

Las soluciones del sistema son el conjunto de puntos (3.7) para cada instante de tiempo que forman una curva en el plano de fases xy .

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Ahora lo lógico sería hablar de como resolver este tipo de problemas ya que es nuestro objetivo, pero no lo vamos a hacer ya que nosotros no usaremos el método tradicional de autovalores y autovectores para ello, vamos a utilizar otra técnica de reciente estudio con la que no hará falta esto, la veremos mas adelante.

Por último veamos como obtener y analizar los puntos de equilibrio del Sistema Lienal Plano. Primero escribamos el sistema (3.1) de otra forma para ver los siguientes apartados mejor:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = S(x, y) \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = V(x, y) \end{cases} \quad (3.8)$$

Definición 3.2 Los puntos (\bar{x}, \bar{y}) que anulan simultáneamente las funciones S y V del sistema (3.2) se denominan *Puntos de Equilibrio o Críticos del sistema*:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix} \\ A \bar{X} &= -b \end{aligned} \quad (3.9)$$

Si el $\det(A) \neq 0$ (3.9) el sistema posee un único punto de equilibrio, este punto se dice solución constante del sistema.

Veamos esto más en profundidad, primero tenemos que saber que el sistema que tenemos (3.8) se denomina **Autónomo** ya que la variable independiente t no aparece de manera explícita en los segundos términos.

Ahora lo que haremos es una translación del punto de equilibrio para que esté en el origen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en caso de no estarlo:

$$\begin{cases} \tilde{X} = x - \bar{x} \\ \tilde{Y} = y - \bar{y} \end{cases} \quad (3.10)$$

Por lo que ahora tenemos:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{X}}{dt} = S(\tilde{X} - \bar{x}, \tilde{Y} - \bar{x}) \\ \frac{d\tilde{Y}}{dt} = V(\tilde{X} - \bar{x}, \tilde{Y} - \bar{x}) \end{cases} \quad (3.11)$$

Donde el punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es el punto de equilibrio.

Lo que veremos a continuación es la disposición de las soluciones al rededor del punto de equilibrio y la estabilidad o no del mismo. Considerando el sistema autónomo lineal con punto de equilibrio en el origen que hemos obtenido tras el cambio de variable:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Como vemos con el cambio de variable no se ha modificado la matriz A que es la que nos dirá todo respecto a la estabilidad del punto crítico, veremos los tres casos que se estudian en este trabajo: Foco Asintóticamente Estable, Foco Asintóticamente Inestable y Centro. Pero hay muchos más y, por supuesto, combinaciones de todos ellos, lo cual complica estos problemas en gran medida.

Para saber la estabilidad de los puntos debemos estudiar el polinomio característico de la matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ \text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) \\ \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) &= 0 \\ \text{Autovalores} \rightarrow \lambda &= \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}{2} \end{aligned}$$

- Foco Asintóticamente Estable

Las curvas solución tienden al punto crítico. Este caso se da para:

- $\text{tr}(A) < 0$
- $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) < 0$

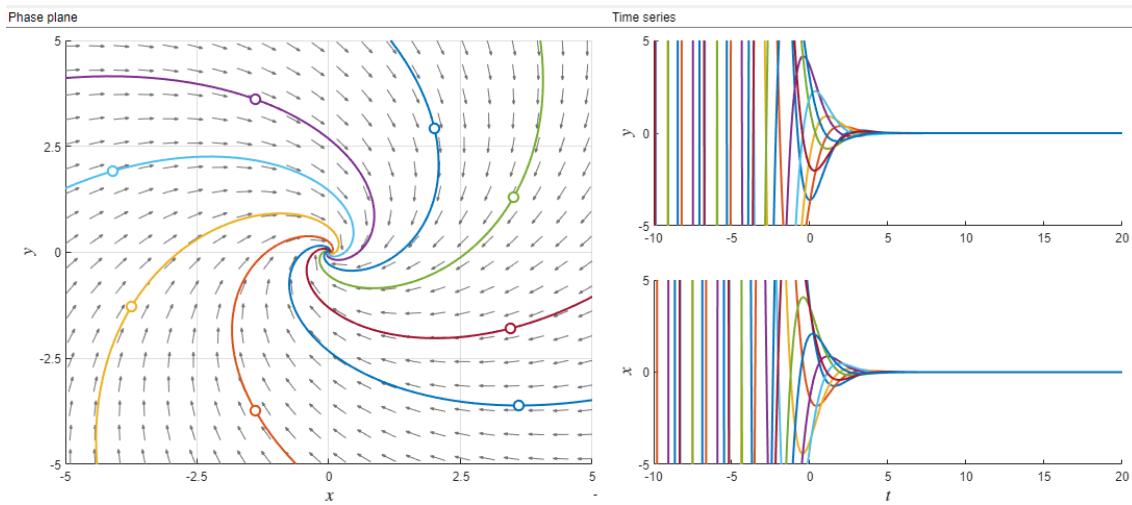


Figura 3.1 : Foco Asintóticamente Estable visto en el plano de fases xy (izquierda) y la variación de x e y en el tiempo (derecha).

La matriz A del la [Fig. 3.1](#) es $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

- $\text{tr}(A) = -2 < 0$
- $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) = 4 - 4(2) < 0$

- Foco Asintóticamente Inestable

Las curvas solución tienden al alejarse del punto crítico. Este caso se da para:

- $\text{tr}(A) > 0$
- $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) < 0$

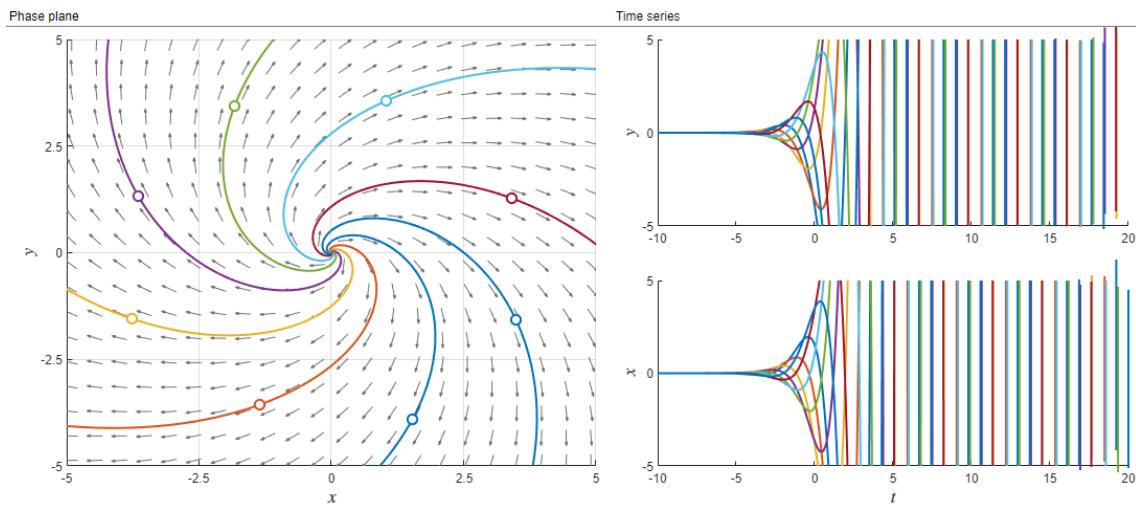


Figura 3.2 : Foco Asintóticamente Inestable visto en el plano de fases xy (izquierda) y la variación de x e y en el tiempo (derecha).

La matriz A del la [Fig. 3.2](#) es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- $\text{tr}(A) = 2 > 0$
- $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) = 4 - 4(2) < 0$

- **Centro**

Las curvas solución son concéntricas al punto crítico. Este caso se da para:

- $\text{tr}(A) = 0$
- $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) < 0$

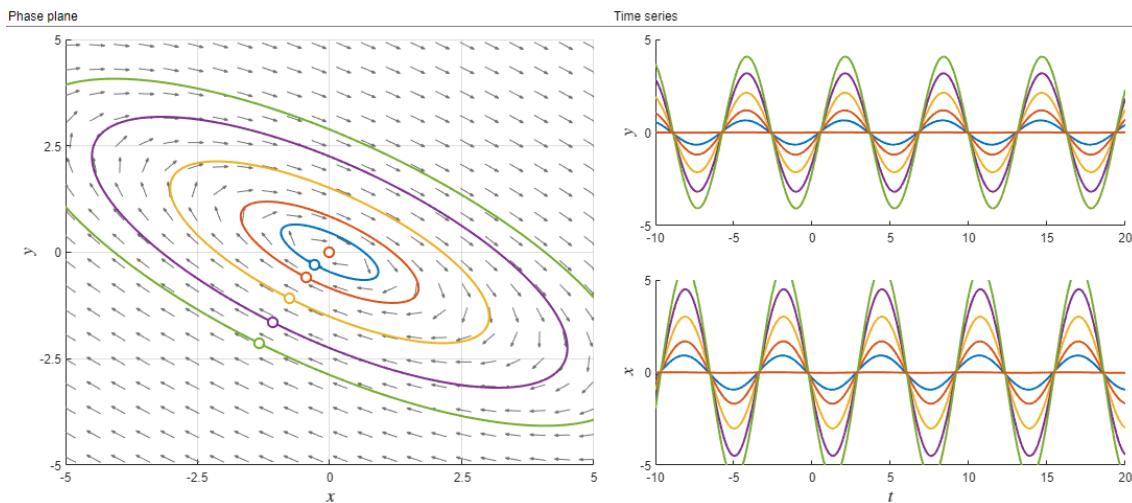


Figura 3.3 : Centro en el plano de fases xy (izquierda) y la variacion de x e y en el tiempo (derecha).

La matriz A del la [Fig. 3.3](#) es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

- $\text{tr}(A) = 1 - 1 = 0$
- $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) = 0 - 4(1) < 0$

3.2. Sistemas lineales a trozos bizonales

En esta sección vamos a ver como estudiar los sistemas continuos dinámicos lineales a trozos de dos zonas y veremos sus propiedades de cara a la obtención de una órbita periódica y estudiar su amplitud y periodo.

También veremos como utilizar las formas canónicas para reducir el número de parámetros que influyen en el sistema y como apoyarnos en dichas formas canónicas y las propiedades que nos portan a la hora de estudiar la oscilación periódica de nuestro circuito.

Definición 3.3 *Un sistema dinámico continuo lineal a trozos plano con dos zonas es un sistema de ecuaciones diferenciales con la siguiente forma:*

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = S(x) = \begin{cases} A_1x + b_1 & \text{si } x^T \cdot w + \delta \leq 0 \\ A_2x + b_2 & \text{si } x^T \cdot w + \delta < 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Donde $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, las matrices A_1 y A_2 son reales de orden 2, además $b_1, b_2, w \in \mathbb{R}^2$ con $w \neq \vec{0}$ y $\delta \in \mathbb{R}$ y se satisface la condición de continuidad

$$A_1x + b_1 = A_2x + b_2 \quad (3.15)$$

Sobre la recta de separación de las dos zonas: $x^T \cdot w + \delta = 0$

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SISTEMA 3.14

Para cada $x^0 \in \mathbb{R}^2$, el problema de valores iniciales (3.16) tiene una solución única $x(t)$ definida para todo t real.

$$\begin{cases} \dot{x} = S(x) \\ x(0) = x^0 \end{cases} \quad (3.16)$$

A continuación veremos la forma canónica más común para los sistemas bizonales que coloca la recta separación en el eje de ordenadas $x_1 = 0$.

Definición 3.4 *Todo sistema dinámico continuo lineal a trozos plano con dos zonas puede escribirse de la siguiente forma:*

$$\dot{x} = S(x) = \begin{cases} B_1x + c & \text{si } x_1 \leq 0 \\ B_2x + c & \text{si } x_1 < 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

S(x)? pero yo tengo dos variables x1 y x2, es S(x1, x2)?

Con $x = (x_1, x_2)^T, c \in \mathbb{R}^2$ y las matrices B_1, B_2 comparten sus dos últimas columnas por continuidad, esto es:

$$B_1 - B_2 = (B_1 - B_2) e_1 e_1^T \quad (3.18)$$

multiplicado los e?

Siendo $e_1 = (1, 0)^T$ el primer vector de la base canónica \mathbb{R}^2 . Además, por continuidad también, se puede ver que $c_1 = c_2 = c$.

Demostración: Basta con realizar una simetría para que el vector w normal a la recta $x^T \cdot w + \delta = 0$, se transforme en el vector $e_1 = (1, 0)^T$ se puede hacer usando matrices de Householder [8]. Por último con una translación hacemos que la nueva recta de separación $x_1 = 0$ (ahora vertical) pase por el origen. Por lo que el sistema queda con la forma: **y que pasa con δ ? por que la recta se llama x_1 , la puedo llamar solo x ? menos lio con \dot{x}_1 . Pero x^T y w son vectores? en lugar de la recta $x=0$ se podria usar la $x=-1$?**

$$\dot{x} = \begin{cases} B_1 x + c_1 & \text{si } x_1 \leq 0 \\ B_2 x + c_2 & \text{si } x_1 < 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Con B_1 y B_2 matrices de orden 2 y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2$. Nuevamente por continuidad se debe satisfacer:

$$B_1 x + c_1 = B_2 x + c_2 \quad \text{si } x_1 = 0 \quad (3.20)$$

Como el punto $(0, 0)^T$ está en la recta de separación $x_1 = 0$, sustituyendo en (3.20) se tiene que $c_1 = c_2$ por lo que:

$$B_1 x = B_2 x \quad \text{si } x_1 = 0 \quad (3.21)$$

Como el vector $(0, 1)^T$ está sobre la recta de separación $x_1 = 0$, se tiene por tanto que las dos últimas columnas de B_1 y B_2 son iguales **????**, y además no olvidemos que antes hemos visto que $c_1 = c_2 = c$.

Se ha reducido bastante el número de parámetros, ahora tenemos 8, 6 de ellos vienen de las matrices B_1 y B_2 y 2 de c . Para seguir reduciendo parámetros tengamos en cuenta que estamos buscando oscilaciones y que no aparecerán en sistemas unidimensionales por lo que el primer término de las segundas columnas de las matrices B_1 y B_2 no puede ser nulo (condición de observabilidad [9]). Mediante el cambio de variable oportuno lo convertiremos en (-1) aquí lo vemos, en primer lugar escribimos el sistema (3.19) de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} b_{11}^1 & b_{12} \\ b_{21}^1 & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} b_{11}^2 & b_{12} \\ b_{21}^2 & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 < 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Y le aplicamos el cambio de variable (recordando que $b_{12} \neq 0$):

$$X_2 = -b_{12} x_2 - c_1 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{-X_2 - c_1}{b_{12}} \quad (3.23)$$

Para el caso $x_1 \leq 0$ del sistema (3.22) aplicando el cambio de variable (3.23):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= b_{11}^1 x_1 + b_{12} x_2 + c - 1 = b_{11}^1 x_1 + b_{12} \left(\frac{-X_2 - c_1}{b_{12}} \right) + c_1 = b_{11}^1 x_1 - X_2 \\ \dot{X}_2 &= -b_{12} \dot{x}_2 = -b_{12} (b_{21}^1 x_1 + b_{22} x_2 + c_2) \\ &= -b_{12} b_{21}^1 x_1 + b_{22} (-b_{12} x_2) - b_{12} c_2 \\ &= -b_{12} b_{21}^1 x_1 + b_{22} (X_2 + c_1) - b_{12} c_2 \\ &= -b_{12} b_{21}^1 x_1 + b_{22} X_2 + b_{22} c_1 - b_{12} c_2\end{aligned}\tag{3.24}$$

De forma análoga para $x_1 > 0$ del sistema (3.22):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = b_{11}^2 x_1 - X_2 \\ \dot{X}_2 = -b_{12} b_{21}^2 x_1 + b_{22} X_2 + b_{22} c_1 - b_{12} c_2 \end{cases}\tag{3.25}$$

Sustituyendo (3.24) y (3.25) en el sistema (3.22), tomando $c_{11}^i = b_{11}^i$; $c_{21}^i = -b_{12} b_{21}^i$; $c_{22} = b_{22}$; $d_2 = b_{22} c_1 - b_{12} c_2$ y renombrando X_2 como x_2 :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} c_{11}^1 & -1 \\ c_{21}^1 & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} c_{11}^2 & -1 \\ c_{21}^2 & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > 0 \end{cases}\tag{3.26}$$

Hemos conseguido eliminar otros dos parámetros del sistema, además solo hemos realizado cambios lineales por lo que las matrices características son semejantes, es decir, no hemos variado las características del sistema. Lo que nos queda es ya pasar a la famosa forma canónica de Liénard:

Teorema 3.2 Existe un cambio de variable que transforma el sistema (3.26) en la forma canónica de Liénard, sin modificar la traza y el determinante de la matriz característica del sistema ya que son invariates algebraicos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > 0 \end{cases} \quad \text{con } a \in \{-1, 0, 1\}\tag{3.27}$$

Demostración: Usando el siguiente cambio de variable:

$$X_2 = c_{22} x_1 + x_2 \rightarrow x_2 = X_2 - c_{22} x_1\tag{3.28}$$

Para el caso $x_1 \leq 0$ del sistema (3.26) aplicando el cambio de variable (3.28):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= c_{11}^1 x_1 - x_2 = c_{11}^1 x_1 - (X_2 - c_{22} x_1) = x_1(c_{11}^1 + c_{22}) - X_2 \\ \dot{X}_2 &= c_{22} \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = c_{22}(c_{11}^1 x_1 - x_2) + (c_{21}^1 x_1 + c_{22} x_2 + d_2) \\ &= c_{22} c_{11}^1 x_1 - c_{22} x_2 + c_{21}^1 x_1 + c_{22} x_2 + d_2 \\ &= x_1(c_{22} c_{11}^1 + c_{21}^1) + d_2\end{aligned}\tag{3.29}$$

De forma análoga para $x_1 > 0$ del sistema (3.26):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(c_{11}^2 + c_{22}) - X_2 \\ \dot{X}_2 = x_1(c_{22} c_{11}^2 + c_{21}^2) + d_2 \end{cases}\tag{3.30}$$

Sustituyendo (3.29) y (3.30) en el sistema (3.26), tomando $t = c_{11}^1 + c_{22}$; $d = c_{22} c_{11}^1 + c_{21}^1$; $T = c_{11}^2 + c_{22}$; $D = c_{22} c_{11}^2 + c_{21}^2$ y renombrando X_2 como x_2 :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > 0 \end{cases}\tag{3.31}$$

Siendo t, d, T, D las respectivas trazas (t, T) y determinantes (d, D) de las matrices características de cada uno de los sistemas a la derecha y a la izquierda de la recta de separación $x_1 = 0$, que como ya hemos visto, no hemos modificado sus propiedades pues todos los cambios aplicados han sido lineales.

Por último vamos a ajustar d_2 . Si $d_2 = 0$ entonces el sistema ya sería igual que (3.27) pero con el parámetro $a = 0$. Si $d_2 \neq 0$ hay que aplicar el siguiente cambio:

$$X_1 = \frac{x_1}{|d_2|} \quad X_2 = \frac{x_2}{|d_2|}\tag{3.32}$$

Por lo que X_1 tiene el mismo signo que x_1 y la recta de separación sería $X_1 = 0$
No entiendo lo del signo.

Para el caso $X_1 \leq 0$ del sistema (3.31) aplicando el cambio de variable (3.32):

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= \frac{\dot{x}_1}{|d_2|} = \frac{tx_1 - x_2}{|d_2|} = t \frac{x_1}{|d_2|} - \frac{x_2}{|d_2|} = tX_1 - X_2 \\ \dot{X}_2 &= \frac{\dot{x}_2}{|d_2|} = \frac{dx_1 - 0 + d_2}{|d_2|} = d \frac{x_1}{|d_2|} + \frac{d_2}{|d_2|} = dX_1 + \frac{d_2}{|d_2|}\end{aligned}\tag{3.33}$$

De forma análoga para $x_1 > 0$ del sistema (3.26):

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = TX_1 - X_2 \\ \dot{X}_2 = DX_1 + \frac{d_2}{|d_2|} \end{cases} \quad (3.34)$$

Démonos cuenta que cuando dividimos d_2 entre su valor absoluto lo que estamos obteniendo es $-1, 1, 0$ dependiendo de si d_2 es negativo, positivo o cero, por lo que usaremos la función signo sgn :

$$sgn(d_2) = \begin{cases} 1 & si \quad d_2 > 0 \\ 0 & si \quad d_2 = 0 \\ -1 & si \quad d_2 < 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

Sustituyendo (3.33) y (3.34) en el sistema (3.31), tomando $a = \operatorname{sgn}(d_2)$ y renombrando X_1 como x_1 y X_2 como x_2 :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

Para ubicar de una manera más gráfica lo que tenemos en (3.36):

$$\left(\begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} t & -1 \\ d & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 0 \\ a \end{array} \right) \quad \left| \quad \left(\begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} T & -1 \\ D & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 0 \\ a \end{array} \right) \quad (3.37) \right.$$

$x_1 = 0$

Podemos darnos cuenta de que las ecuaciones corresponden a las dos zonas izquierda y derecha de la recta de separación $x_1 = 0$ así que vamos a hacer unos cambios de nombres a las variables del sistema (3.36) simplemente para que los nombres sean un poco mas descriptivos. Finalmente el sistema en la forma canónica de Liénard nos queda de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} T_L & -1 \\ D_L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x \leq 0 \\ \begin{pmatrix} T_R & -1 \\ D_R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

De una manera más gráfica sería:

$$\left| \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_L & -1 \\ D_L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \\ x = 0 \\ \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_R & -1 \\ D_R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (3.39)$$

Capítulo 4

Semiacplicaciones de Poincaré

En el estudio de sistemas dinámicos, la **Aplicación de Poincaré** es muy útil. Se trata de delimitar una superficie o recta (llamada sección de Poincaré), en el espacio de fases de nuestro sistema, de tal manera que las curvas solución de nuestro sistema transpasen dicha sección para poder estudiar así el comportamiento de las trayectorias. Lo interesante de esta aplicación es que lo que nos interesa son los puntos de intersección con la sección de Poincaré, aunque no podemos obviar el comportamiento de la trayectoria y el tiempo para el estudio.

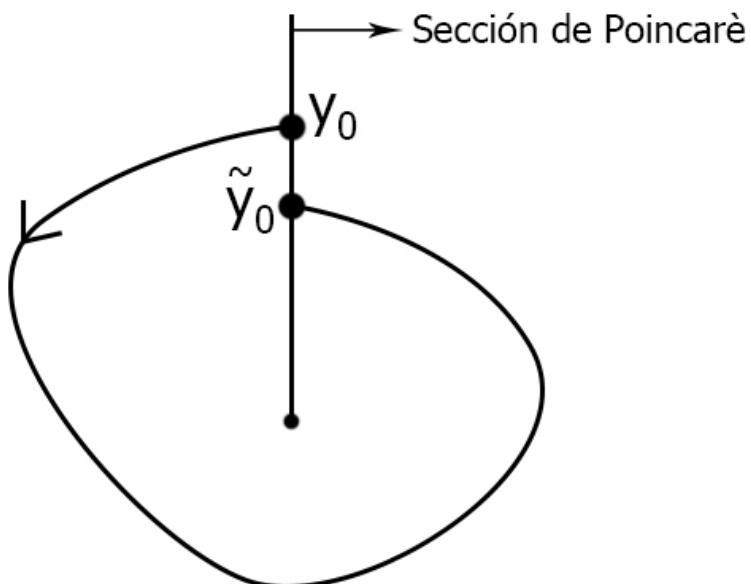


Figura 4.1 : Punto y_0 y su imagen \tilde{y}_0 mediante la Aplicación de Poincaré. Esta órbita no es periódica

Como vemos en la [Fig. 4.1](#) la dinámica de estudio sería; establecer un punto y_0 mediante las condiciones iniciales de nuestro sistema, establecer una sección de Poincaré que corte a la curva solución y por último ver como avanza dicha curva en el tiempo esperando a que corte de nuevo a la sección de Poincaré, para que esto ocurra se debe cumplir una serie de condiciones en el sistema que ahora no presentaremos. Finalmente si la órbita vuelve a cortar en el mismo punto $y_0 = \tilde{y}_0$ diremos que dicha órbita es periódica.

En este trabajo hablaremos de la **Semi-Aplicación de Poincaré**, es decir, analizaremos una de las dos mitades de la órbita. Esto lo haremos ya que como nuestro estudio es de un sistema a trozos (3.38), (3.39) ya tenemos una separación en la recta $x = 0$ la cual usaremos de sección de Poincaré, y como a la izquierda y a la derecha de dicha sección tenemos sistemas diferentes debemos estudiarlos de manera independiente.

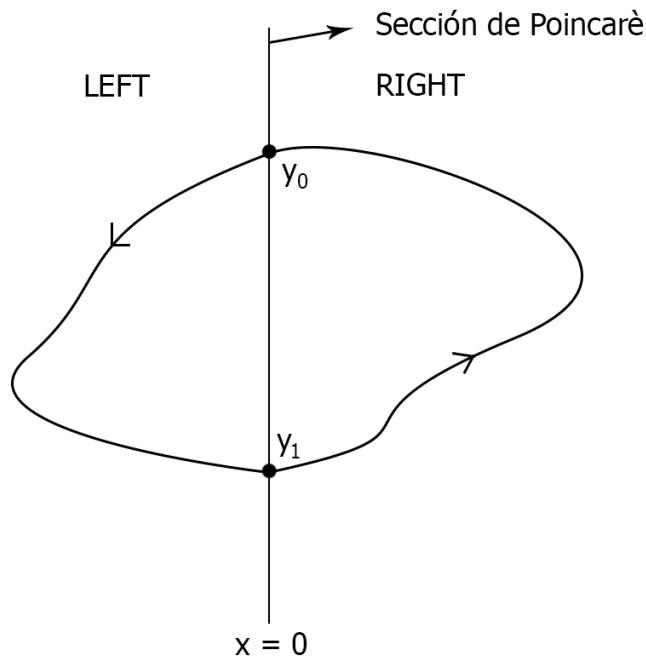


Figura 4.2 : Semiaplicación derecha e izquierda las cuales forman una órbita periódica

Tendremos un punto de corte y_0 de nuestra órbita solución en la sección de Poincaré y buscaremos el siguiente punto de corte y_1 mediante la semiaplicación izquierda, finalmente mediante la semiaplicación derecha comprobamos si la órbita vuelve a cortar a la sección de Poincaré en el mismo punto y_0 (órbita periódica, ver Fig. 4.2) o si no corta en el mismo punto y_0 (órbita no periódica).

Para la semiaplicación de Poincaré consideraremos el sistema (3.1), que mediante los cambios de variable adecuados podemos escribir en forma canónica de Lienard como ya hemos visto a lo largo de la Sección 3.2. En dicha sección se hace para un sistema a trozos, pero para esta parte consideraremos un único sistema, que puede ser el derecho o el izquierdo, eso no nos importa ahora mismo por lo que la nomenclatura que usaremos en esta sección para dicho sistema será:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Definiendo la sección de Poincaré como $\Sigma = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ donde nos referiremos con Σ^L a la zona izquierda de la sección y Σ^R a la zona derecha de la sección (recordemos que los índices R y L harán alusión a las zonas derecha e izquierda). Si evaluamos la primera ecuación de (4.1) en la sección de Poincaré que hemos definido Σ tenemos $\dot{x}|_{\Sigma} = -y$, pudiéndose deducir el sentido de la órbita:

- La órbita va de Σ^L a Σ^R para $y < 0$
- La órbita va de Σ^R a Σ^L para $y > 0$

Asumiremos $a^2 + D^2 \neq 0$ ya que de no ser así curva solución no cortaría de nuevo a Σ . Esto se puede deducir estudiando la segunda ecuación del sistema (4.1) para el caso contrario $a = D = 0 \rightarrow \dot{y} = Dx + a = 0$.

Vamos a centrarnos en la zona izquierda de la sección de Poicaré Σ^L , la cual se define de la siguiente manera:

Definición 4.1 Consideraremos el punto $(0, y_0) \in \Sigma$ con $y_0 \geq 0$ y tomaremos como solución del sistema (4.1) para cada instante de tiempo $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$, que para el instante inicial $t = 0$ cumple que $\phi(0) = (0, y_0)$. Si existe un valor de tiempo $\tau > 0$ para el que se cumple $\phi_1(\tau) = 0$ y $\phi_1(t) < 0$ para todo $t \in (0, \tau)$ decimos que la imagen de y_0 por la semiaplicación izquierda de Poincaré $P_L(y_0) = y_1 = \phi_2(\tau) \leq 0$. El valor de tiempo τ se denomina semi-tiempo de vuelo izquierdo.

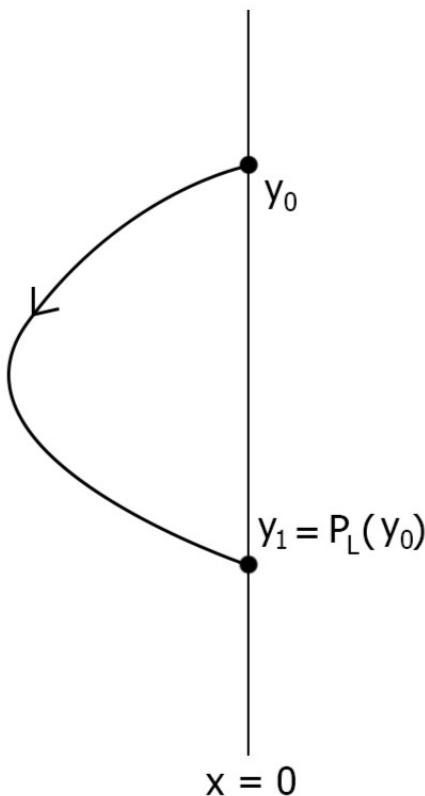


Figura 4.3 : Semiaplicación de Poincaré Izquierda

Añadir $P(0) = 0$? no entiendo muy bien esa parte (articulo caracterizacion integral)

La definición de la semiaplicación de Poincaré derecha es equivalente a la izquierda ya que el sistema (4.1) no varia sus propiedades cuando se le aplica el cambio de variable $(x, y, a) \longleftrightarrow (-x, -y, -a)$.

La definición 4.1 invita a estudiar la dinámica del sistema mediante integración, este es el método clásico, el cual conlleva una gran cantidad de posibles casos debidos a las particularidades de las matrices características para cada sistema que estudiemos. Casos que deben estudiarse uno a uno y aplicando diferentes herramientas para cada uno de ellos, lo cual se traduce en gran dificultad para el estudio y obtención de aparentemente distintos resultados para el mismo sistema dependiendo de que herramienta matemática usemos para solucionarlo. Para arreglar esta problemática usaremos la caracterización integral de la semiaplicación de Poincaré, la cual presentaremos en la sección 4.1.

4.1. Caracterización integral de la semi-aplicación de Poincaré

Hagamos un breve repaso del trabajo que hemos realizado a nuestro sistema. Primero hemos obtenido las ecuaciones diferenciales del circuito que nos indican como varía su comportamiento en el tiempo, habiendo llegado a un sistema de ecuaciones diferenciales tridimensional lineal a trozos con 3 zonas (2.31).

Luego, gracias al artículo [10], donde los autores se dan cuenta de que existen superficies invariantes en el sistema, nos proporcionan la forma de calcularlas y los cambios de variable necesarios para poder reducir el sistema tridimensional (2.31) a uno bidimensional (plano) lineal a trozos con tres zonas en forma Canónica Liénard (2.42)-(2.43)-(2.44) con las rectas de separación en $x = \pm 1$.

Posteriormente, en la Sección 3.1 hemos visto el análisis de la estabilidad de un sistema plano y hemos introducido el concepto de problema de valor inicial, que es el tipo de problema que vamos a solucionar en nuestro sistema, es decir, dadas unas condiciones iniciales al sistema plano queremos ver como varía en el tiempo su comportamiento y que dicho comportamiento sea una oscilación periódica.

Finalmente, en la Sección 3.2 hemos visto como escribir un sistema plano lineal a trozos con dos zonas, y la recta de separación en $x = 0$, en forma Canónica de Liénard (3.38)-(3.38). Esto lo hemos hecho porque aunque nuestro sistema tiene tres zonas, nosotros vamos a fijarnos solo en dos de ellas, ya que las oscilaciones que estamos buscando son bizonales, en concreto vamos a quedarnos con las zonas que separan la recta $x = -1$, posteriormente haremos una transición para que la recta de separación sea la $x = 0$, dicha recta es la que usaremos como Sección de Poincaré para el análisis de las Semi-Aplicaciones de Poincaré, lo cual hemos visto al inicio de esta Sección 4.

El motivo de transformar nuestro sistema tridimensional (2.31) a uno bidimensional en forma Canónica de Liénard con la recta de separación $x = 0$ (3.38)-(3.38) es porque esto nos permite abstraernos del circuito y utilizar toda una batería de herramientas y análisis matemático que están desarrolladas para este tipo de sistemas.

La herramienta matemática más importante que vamos a usar en nuestro trabajo es la **Caracterización Integral de la Semi-Aplicación de Poincaré**, desarrollada por Victoriano Carmona et al. [11]-[12]. En los siguientes puntos la vamos a presentar y entenderemos por qué nos es tan útil para nuestro estudio.

Partiendo de que ya hemos transformado nuestro sistema (2.31) a un sistema tipo (3.38)-(3.38), nuestro objetivo es encontrar el punto y_0 adecuado que haga que las Semi-Aplicaciones izquierda y derecha sean las mismas para así poder cerrar la órbita.

Primero vamos a repasar la nomenclatura que se va a usar en este estudio, como se dice en la Definición 4.1, la Semi-Aplicación se define para un tiempo $\tau > 0$, esto nos indica el sentido temporal positivo para la Semi-Aplicación, esto es importante porque en la manera clásica de resolución el sentido del tiempo no es trivial. Hay dos tipos de posible estudio, calcular la Semi-Aplicación *hacia delante (forward)* o *hacia detrás (backward)*. El primer paso es hacer un análisis del sentido del flujo como vimos la Definición 4.1, tomemos como ejemplo que la órbita de nuestro sistema va de Σ^R a Σ^L , usualmente la primera Semi-Aplicación (en este caso la izquierda) se calcula con sentido positivo del tiempo $y_1 = P_L(y_0)$, ahora las diferencias vienen con el cálculo de la Semi-Aplicación derecha, que puede ser en:

- Sentido positivo del tiempo $y_B = P_R(y_A)$, ver [Fig. 4.4](#) y [Fig. 4.6](#)
- Sentido negativo del tiempo $y_B = P_R^{-1}(y_A)$, ver [Fig. 4.5](#) y [Fig. 4.7](#)

Esta nomenclatura se mantiene en el uso de la Caracterización Integral para el cálculo de la Semi-Aplicación, pero con una particularidad, y es que como veremos más adelante cuando presentemos su ecuación, la Caracterización Integral no depende del tiempo. Por lo que en nuestro caso el hecho de que usemos el sentido positivo o negativo del tiempo es para indicar desde qué punto estamos cerrando la órbita en la zona derecha, en concreto, nuestra metodología de trabajo será la de la [Fig. 4.5](#), [Fig. 4.7](#) y será la siguiente:

1. Hacemos el análisis del flujo para conocer el sentido de la órbita, supongamos nuevamente que la órbita de nuestro sistema va de Σ^R a Σ^L .
2. Establecemos un punto y_0 mediante las condiciones iniciales que corte a la sección de Poincaré Σ que hemos establecido en $x = 0$.
3. Calculamos la Semi-Aplicación izquierda $y_1 = P_L(y_0)$ haciendo uso de la Caracterización Integral Izquierda.
4. Calculamos la Semi-Aplicación Derecha $y_2 = P_R^{-1}(y_0)$ haciendo uso de la Caracterización Integral derecha y comprobamos si se ha cerrado la órbita, es decir, $y_1 = y_2$.
5. En caso de no cerrarse dicha órbita, elegimos otro punto y_0 y repetimos los cálculos de las Semi-Aplicaciones.

Lo siguiente será Presentar la Caracterización Integral, sus propiedades y por último haremos un ejemplo de la metodología anteriormente explicada haciendo uso de MATLAB para los cálculos.

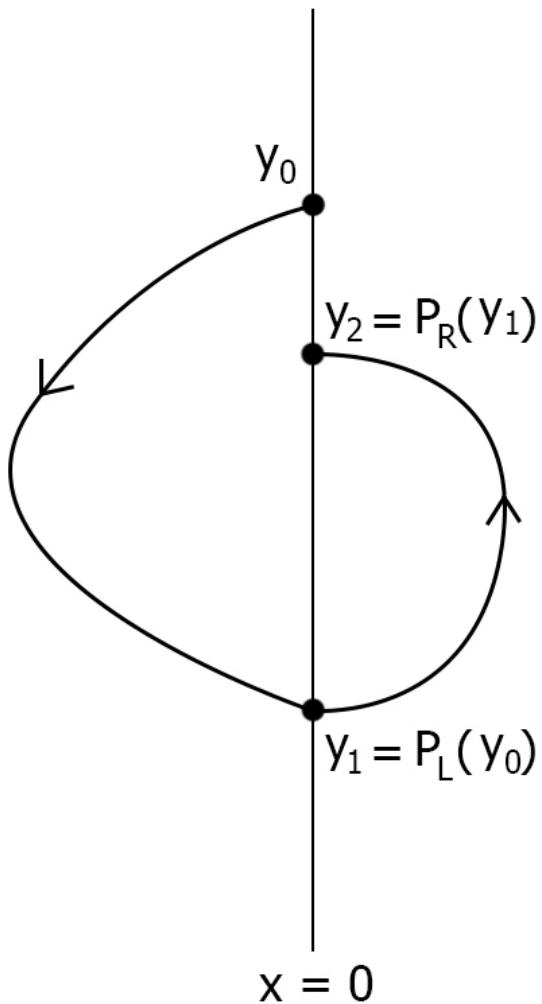


Figura 4.4 : Semi-Aplicación izquierda *forward* del punto y_0 y Semi-Aplicación derecha *forward* del punto y_1 con diferentes valores y_0, y_2 por lo que no se ha cerrado la órbita.

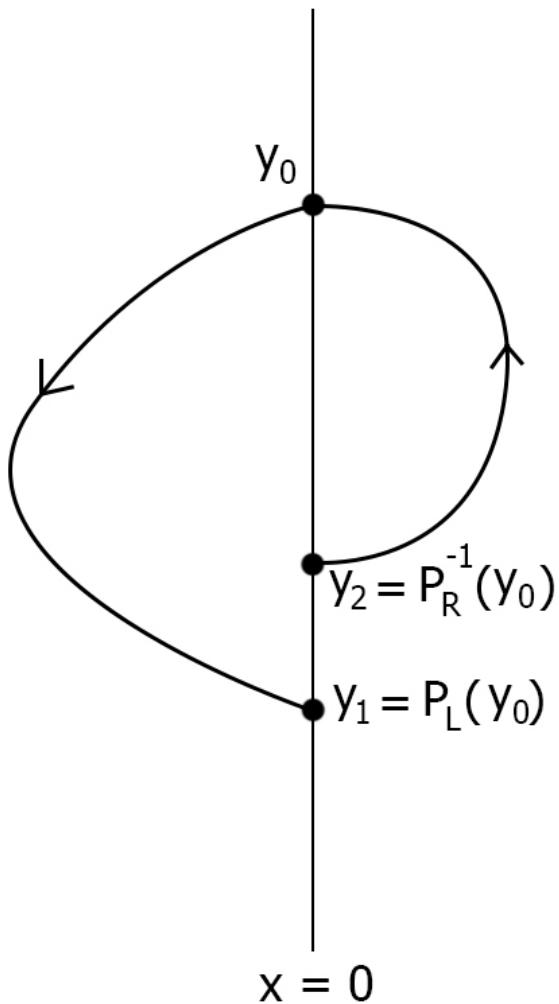


Figura 4.5 : Semi-Aplicación izquierda *forward* del punto y_0 y Semi-Aplicación derecha *backward* del punto y_0 con diferentes valores y_1, y_2 por lo que no se ha cerrado la órbita.

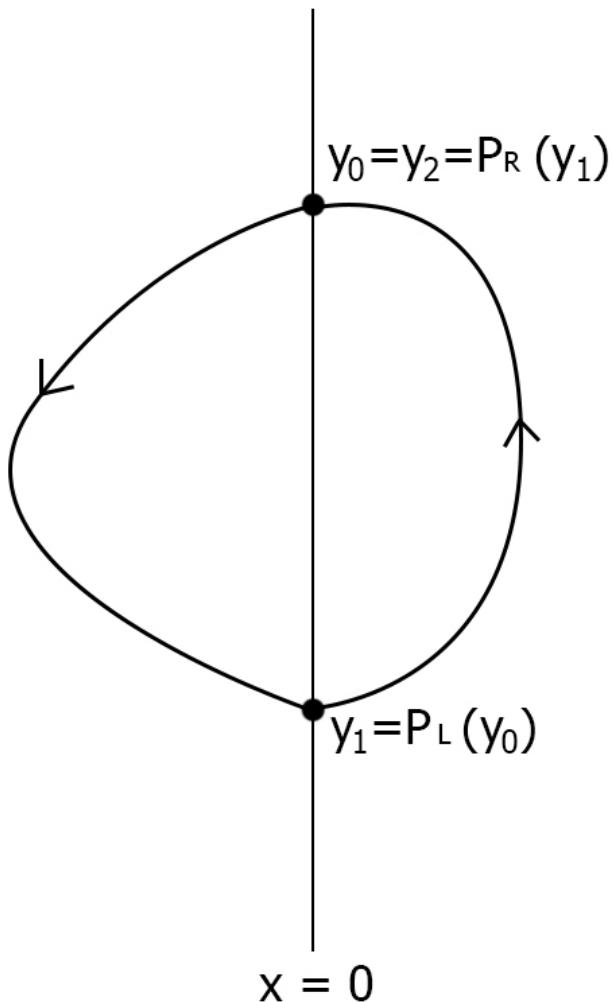


Figura 4.6 : Semi-Aplicación izquierda *forward* del punto y_0 y Semi-Aplicación de-
recha *forward* del punto y_1 con mismos valores y_0, y_2 por lo que si se ha cerrado la
órbita, formándose una órbita periódica.

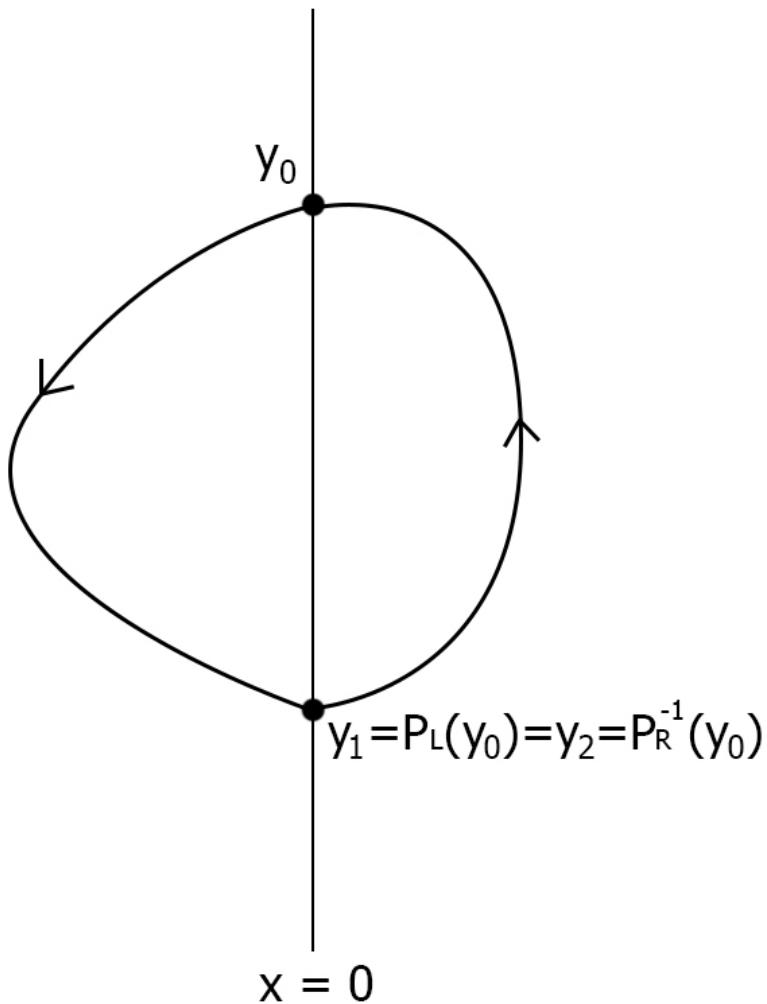


Figura 4.7 : Semi-Aplicación izquierda *forward* del punto y_0 y Semi-Aplicación derecha *backward* del punto y_0 con mismos valores y_1, y_2 por lo que si se ha cerrado la órbita formándose una órbita periódica.

Antes de ver las ecuaciones de la Caracterización Integral debemos presentar el **Valor Principal de Cauchy** (PV), ya que se utiliza en la Caraterización Integral.

El valor principal de Cauchy es una herramienta matematica muy usada en análisis complejo y teoria de funciones para definir una integral principal en casos de discontinuidades evitables en el plano complejo. Consideremos un inntervalo $[a, b]$ que contiene al origen y una funcion f continua en $[a, b] \setminus \{0\}$, el Valor Principal de Cauchy se define como:

$$PV \left\{ \int_a^b f(x)dx \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{-\epsilon} f(x)dx + \int_{+\epsilon}^b f(x)dx \right) \quad (4.2)$$

Ahora vamos a pasar a presentar la ecuacion de la caracterizacion integral y sus propiedades.

Caracterización integral de la semiaplicación de Poincaré izquierda:

$$PV \left\{ \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy \right\} = \frac{k_L \pi T_L}{D_L \sqrt{a D_L - T_L^2}} \quad (4.3)$$

Caracterización integral de la semiaplicación de Poincaré derecha:

$$PV \left\{ \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_R y^2 - a T_R y + a^2} dy \right\} = \frac{-k_R \pi T_R}{D_L \sqrt{a D_L - T_L^2}} \quad (4.4)$$

donde los parámetros D_L, T_L, D_R, T_R, a son los correspondientes al sistema a trozos (3.38)-(3.39), y_0 corresponde al primer punto de corte con la seccion de Poincaré Σ e y_1 la imagen de y_0 mediante la Semi-Aplicación de Poincaré. Como se puede ver en (4.3)-(4.4) el valor principal de cauchy solo lo usaremos en el caso de $a = 0$ ya que la integral se vuelve impropia divergente, en el caso de $a \neq 0$ el valor principal de cauchy es directamente el valor de la integral. Como dijimos anteriormente el término del tiempo no aparece en las ecuaciones (4.3)-(4.4), por lo que es una herramienta muy útil para este tipo de estudios. Los parámetros k_L, k_R tomarán los siguientes valores en función del signo de a y de en qué zona estemos de la sección de Poincaré

Zona izquierda:

- $k_L = 0$ si $a_L > 0$
- $k_L = 1$ si $a_L = 0$
- $k_L = 2$ si $a_L < 0$

Zona derecha:

- $k_R = 0$ si $a_R < 0$
- $k_R = 1$ si $a_R = 0$
- $k_R = 2$ si $a_R > 0$

Se me olvidó comentarte el jueves que el análisis del punto de equilibrio (que ahora está en el capítulo 5) lo puse en esta zona por que si te das cuenta del código de MATLAB pongo los valores de aR y aL para que esté en la zona izquierda, lo vuelvo a traer aquí? o simplemente se deja así? yo creo que donde está ahora está mejor

Vamos a ver un ejemplo de la Caracterización Integral de la Semi-Aplicación de Poincaré en MATLAB para entender un poco mejor la estrategia de búsqueda de la oscilación periódica.

```
% Ejemplo 1 TFE
aL=-1; aR=-1; % Pto. de equilibrio en zona IZQUIERDA
kL=2; kR=0; % kL,R en función del signo de aL,R
TL=0.3; TR=-0.5; % Condiciones para que exista oscilación
DL=1; DR=1; % Condiciones para que exista oscilación

y0 = 1; % Punto y0 > 0 de prueba

y1_L = semipoinca(kL,aL,TL,DL,y0)
y1_R = semipoinca(kR,aR,TR,DR,y0)
```

Resultado de "Ejemplo 1 TFE":

- $y1_L = -2.8439$
- $y1_R = -1.3810$

Función usada en "Ejemplo 1 TFE":

```
function y1 = semipoinca(k,a,T,D,y0)
% Calcula la semiaplicación en el intervalo y1 -> y0
% Valores de entrada k,a,T,D,y0.
% Dado y0 devuelve y1
inicial = -y0;
cte = (k*pi*T)/(D*sqrt(4*D-T^2));
ecuacion = @(y1) integral(@(y) (-y./((D.*y.^2)-(a.*T.*y)
+(a.^2))),y1,y0)-cte;
y1 = fzero(ecuacion,inicial);
end
```

La función *semipoicna* es la aplicación directa de la caracterización integral en MATLAB. Veamos que se está haciendo:

Primero vamos a reordenar la función de la caracterización izquierda (4.3):

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy &= \frac{k_L \pi T_L}{D_L \sqrt{a D_L - T_L^2}} \\ \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy - \frac{k_L \pi T_L}{D_L \sqrt{a D_L - T_L^2}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

como vemos en *semipoicna* tenemos como parámetros de entrada k, a, T, D, y_0 y como parámetro de salida y_1 , por lo que la ecuación (4.5) se puede reducir a:

$$f(y_1) - cte = 0 \quad (4.6)$$

de manera más genérica aún, el término constante lo podemos considerar dentro de $f(y_1)$ por lo que

$$f(y_1) = 0 \quad (4.7)$$

finalmente la ecuación (4.7) ya está en la forma adecuada para resolverla con la función *fzero* de MATLAB, introduciendo como punto inicial $-y_0$. La función *fzero* resuelve de manera numérica una ecuación tipo $f(x) = 0$ con x_0 como punto inicial.

El código de "Ejemplo 1 TFE" simplemente describe las características de los sistemas a la izquierda y a la derecha, establece un punto de prueba $y_0 = 1$ y llama a la función *semipoicna* para calcular las semiaplicaciones derecha e izquierda. Como se ve obtenemos valores diferentes, de hecho la semiaplicación izquierda tiene un valor mas grande que la derecha, gráficamente podría ser perfectamente lo representado en la Fig. 4.4.

No hemos conseguido que las imágenes y_1 fueran las mismas, por lo que ahora lo que haríamos sería probar con otro punto y_0 y volver a comprobar si se cumple que $y_{1L} = y_{1R}$. Obviamente no lo vamos a hacer de manera manual, tenemos suficientes herramientas para hacerlo. Como hemos visto para usar *fzero* necesitamos un punto inicial, sin entrar mucho en detalle de resolución numérica *hablar de como funciona fzero y fsolve y de porque elegir el punto cerca de la solucion es útil?*, basicamente este punto cuanto más cercano a la solución lo eligamos mas fiel y rápida será dicha solución, por ello vamos a representar de manera gráfica las semiaplicaciones izquierda y derecha para un intervalo de puntos $y_0 \in [0 \ 10]$ y veamos si encontramos un punto de corte que nos indique que para un y_0 las imágenes son las mismas

```
% Ejemplo 2 TFE
aL=-1;    aR=-1;    % Pto. de equilibrio en zona IZQUIERDA
kL=2;     kR=0;    % kL,R en funcion del signo de aL,R
TL=0.3;   TR=-0.5; % Condiciones para que exista oscilacion
DL=1;     DR=1;    % Condiciones para que exista oscilacion

fplot(@(y0)semipoinca(kL,aL,TL,DL,y0),[0 10], 'r');
xlabel('y0');
ylabel('y1');
hold on;

fplot(@(y0)semipoinca(kR,aR,TR,DR,y0),[0 10], 'b');
xlabel('y0');
ylabel('y1');
hold on;

grid on;
legend('Semiaplicacion Izquierda','Semiaplicacion Derecha
');
shg
```

En este caso usamos *fplot* la cual va evaluando la función probando continuamente con valores de y_0 desde cero hasta diez, se pintará de rojo la semiaplicación izquierda y de azul la semiaplicación derecha

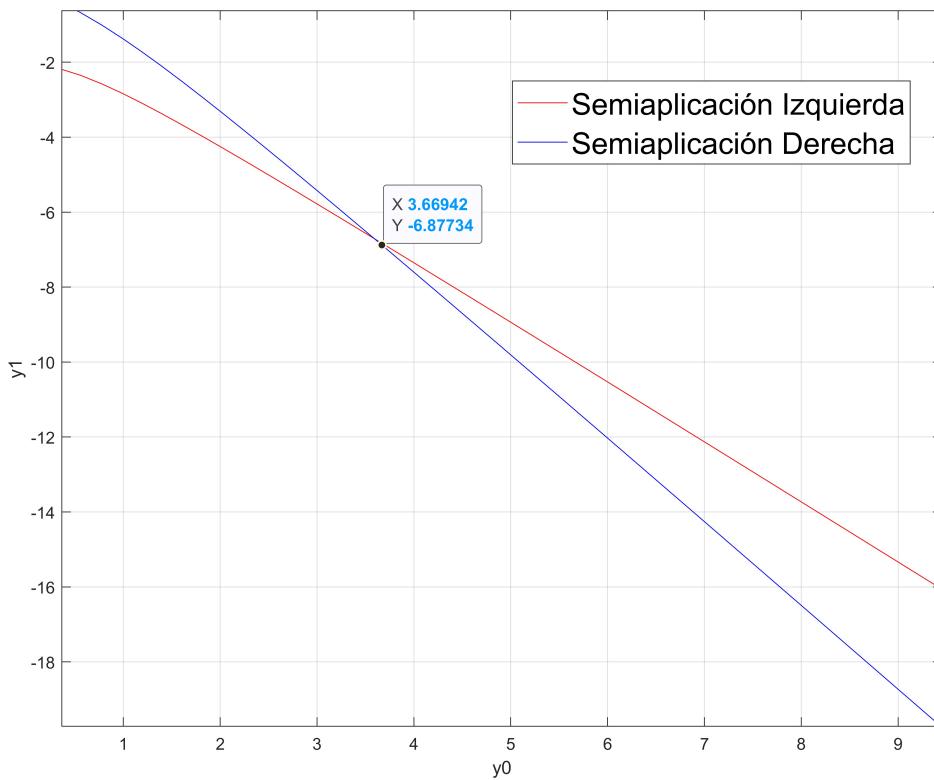


Figura 4.8 : Gráfica obtenida de las semiaplicaciones izquierda y derecha en "Ejemplo 2 TFE"

Como vemos en la [Fig. 4.8](#) efectivamente se cortan las gráficas, simplemente pinchando más o menos en el punto de corte vemos que las semiaplicaciones izquierda y derecha tendrán la misma imagen $y_1 \approx -6.87734$ cuando $y_0 \approx 3.66942$.

Ya tenemos el punto que estará muy cercano a la solución que buscamos, ahora vamos a calcularla exactamente de manera numérica usando *fsove* que nos permite solucionar los mismos casos que *fzero* y para más de una variable. Pero primero hay que escribir correctamente la función en MATLAB

```
% Ejemplo 3 TFE
aL=-1; aR=-1; % Pto. de equilibrio en zona IZQUIERDA
kL=2; kR=0; % kL,R en función del signo de aL,R
TL=0.3; TR=-0.5; % Condiciones para que exista oscilación
DL=1; DR=1; % Condiciones para que exista oscilación

Punto_Inicial = [3.66942 -6.87734];

funcion = @(Y) fsolvepoinca(kL,kR,aL,aR,TL,TR,DL,DR,Y);

Punto_Solucion = fsolve(funcion,Punto_Inicial);

y0_Solucion = Punto_Solucion(1)
y1_Solucion = Punto_Solucion(2)
```

Resultado de "Ejemplo 3 TFE":

- $y_1_L = 3.5912$
- $y_1_R = -6.7065$

Funciones usadas en "Ejemplo 3 TFE":

```
function H = fsolvepoinca(kL,kR,aL,aR,TL,TR,DL,DR,Y)
%Funciones para fsolve en la semiaplicacion de poincare
H(1)=semipoincay1y0(kL,aL,TL,DL,Y);
H(2)=semipoincay1y0(kR,aR,TR,DR,Y);
end

function valor = semipoincay1y0(k,a,T,D,Y)
% Resuelve Integral-cte = 0, dado y0 e y1
cte = (k*pi*T)/(D*sqrt(4*D-T^2));
y0=Y(1);
y1=Y(2);
valor = integral(@(y) (-y.^((D.*y.^2)-(a.*T.*y)+(a.^2))), ...
    y1,y0)-cte;
end
```

Efectivamente como se puede ver en el resultado de "Ejemplo 3 TFE" los valores que hemos obtenidos son muy parecidos a los que vimos en la *Fig. 4.8*. Podemos decir entonces, que para el sistema que hemos estudiado tenemos una oscilación periódica que va desde $y_0 = 3.5912$ hasta $y_1 = -6.7065$.

Los parámetros de entrada de *fsolvepoinca* son las características de los sistemas de la derecha y de la izquierda k, a, T, D además de un vector de dos componentes Y , este vector contiene el punto inicial, que como vemos en el código de "Ejemplo 3 TFE" le hemos asignado el punto de corte que más o menos obtuvimos viendo la gráfica de la *Fig. 4.8*.

En *semipoincay1y0* queremos evaluar la ecuación (4.5) ya que estamos aportando valor a todos los parámetros y_0, y_1, k, a, T, D . Por ello con la función *semipoincay1y0* se está evaluando:

$$f(y) = \text{integral} - \text{cte} \quad (4.8)$$

aportando como punto inicial el vector $Y = [y_0 \ y_1]$.

La función *fsolve* del código de "Ejemplo 3 TFE" buscará el punto, valores $(y_0 \ y_1)$, en que las curvas de las semiaplicaciones derecha e izquierda se cortan.

Finalmente vamos a comprobar con una simulación que el estudio que hemos hecho sea correcto. Para ello hay que reescribir las ecuaciones para introducirlo en el software de MATLAB. Tenemos un sistema a trozos como el (3.38)-(3.39), el cual podemos escribir de la siguiente manera haciendo uso de los valores absolutos

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2} (x(T_R + T_L) + |x|(T_R - T_L)) - y \\ \dot{y} = \frac{1}{2} (x(D_R + D_L) + |x|(D_R - D_L)) - a \end{cases} \quad (4.9)$$

Con

$$T_L = 0.3, \quad T_R = -0.5, \quad D_L = D_R = 1, \quad a_L = a_R = a = -1.$$

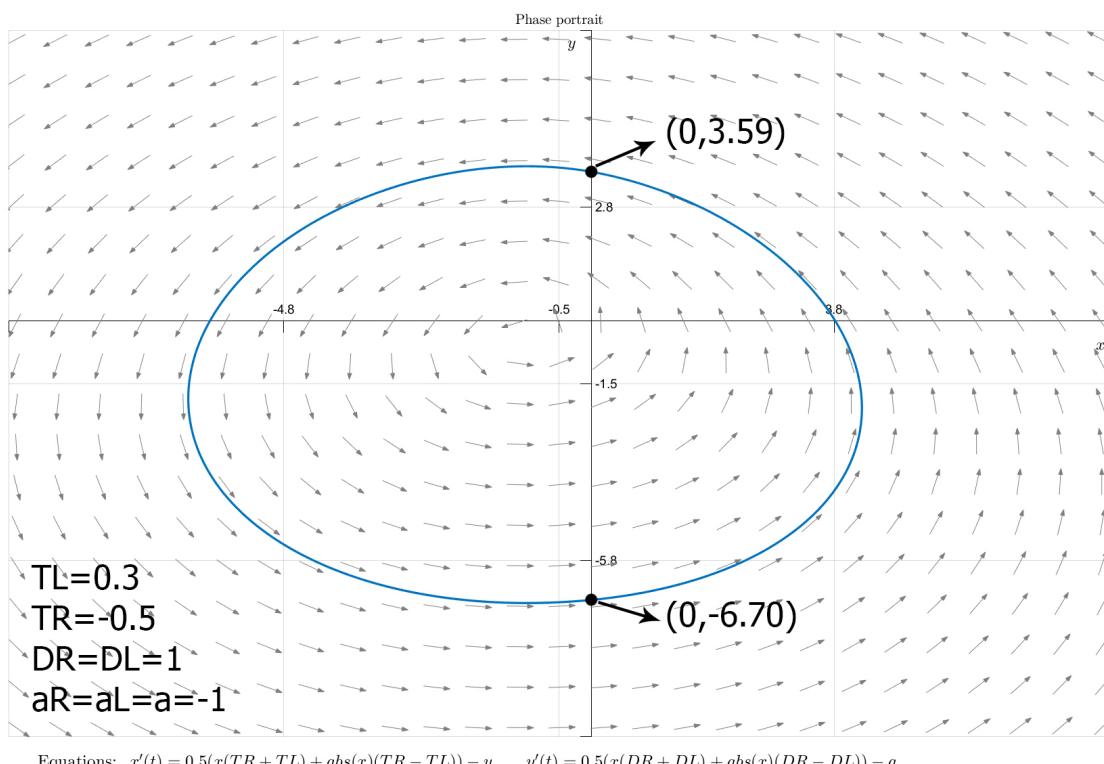


Figura 4.9 : Oscilación periódica que hemos calculado previamente con MATLAB

Capítulo 5

Bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite

La forma de que aparezca una oscilación en un sistema dinámico es mediante bifurcaciones. Las bifurcaciones aparecen cuando variamos de manera progresiva un parámetro del sistema, llamado parámetro de control. Esta variación puede producir una bifurcación debido a la creación o destrucción de un punto de equilibrio (bifurcación Hopf-Like) o cambiando la estabilidad del sistema mediante la variación de la traza T , este será nuestro caso. A esta bifurcación producida por la variación de la traza del sistema se le llama **Foco-Centro-Ciclo Límite**, pero antes de presentarla vamos a hacer el análisis del punto de equilibrio y la estabilidad del sistema que estamos estudiando y veamos el concepto de ciclo-límite para posteriormente ver como generar esta bifurcación en nuestro circuito.

Para hacer el análisis del punto de equilibrio y de la estabilidad primero volvemos a recordar el sistema que tenemos. Nosotros estamos estudiando un sistema, dinámico, autónomo, lineal y continuo a trozos bizonal en forma canónica de Lienard, recordar el sistema (3.38)-(3.39).

Podemos obtener los puntos de equilibrio de cada una de las zonas igualando a cero el sistema, por ejemplo para la zona izquierda tenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_L & -1 \\ D_L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} T_L x - y = 0 \\ D_L x - a = 0 \end{cases} \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{a}{D_L}, \frac{aT_L}{D_L} \right) \quad (5.1)$$

Análogamente para la zona derecha tendríamos el punto de equilibrio:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{a}{D_R}, \frac{aT_R}{D_R} \right) \quad (5.2)$$

Como podemos comprobar el valor de a , que como vimos en (3.35) nos indica el signo, nos está diciendo donde se encuentra el punto de equilibrio respecto a la recta de separación:

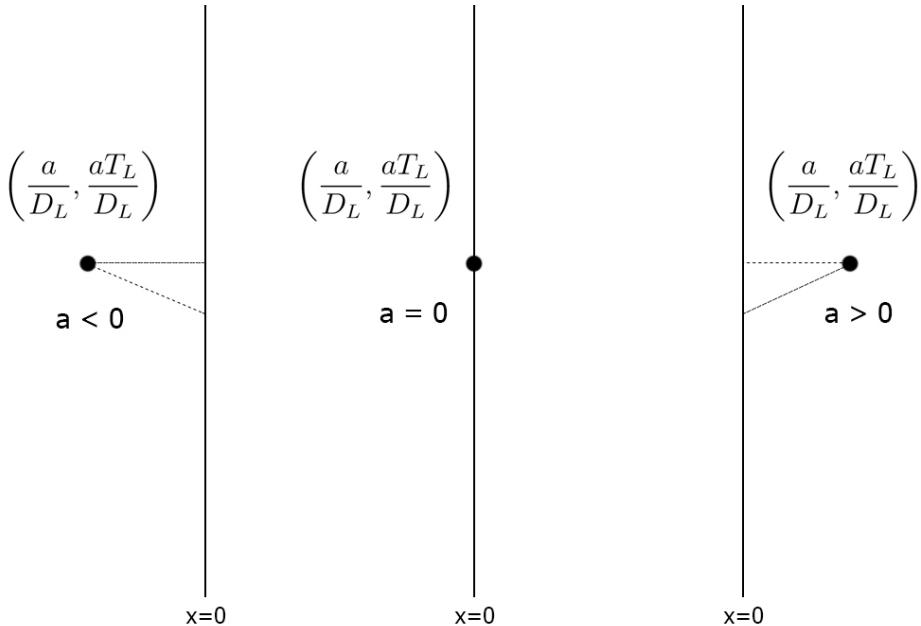


Figura 5.1 : Posición del punto de equilibrio de la zona izquierda dependiendo del signo de a .

La posición del punto de equilibrio de la zona derecha es análoga a la de la zona izquierda, ver Fig. 5.1, pero en este trabajo nos centraremos en la zona izquierda únicamente. Mas adelante veremos como lo ocurra en la zona derecha del plano de separación no nos afectará.

Una vez obtenido el punto de equilibrio podemos analizar la estabilidad como ya hicimos en (3.13), veámoslo de nuevo con la nueva nomenclatura que hemos elegido. El polinomio característico de la zona izquierda sería:

$$\begin{aligned} P_{A_L}(\lambda) &= \lambda^2 - \text{tr}(A_L)\lambda + \det(A_L) \\ &= \lambda^2 - T_L\lambda + D_L = 0 \\ \text{Autovalores} \rightarrow \lambda &= \frac{T_L \pm \sqrt{T_L^2 - 4D_L}}{2} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Como se puede ver el polinomio característico (5.3) es análogo al del sistema (3.13) el cual ya analizamos, así que estaremos buscando:

- $T_L^2 - 4 D_L < 0$ por lo que $D_L > 0$.
- $T_L < 0$ para tener un foco asintóticamente estable.
- $T_L = 0$ para tener un centro.
- $T_L > 0$ para tener un foco asintóticamente inestable.

Se puede ver que el cambio en la estabilidad del sistema lo produce un cambio en la traza, en nuestro caso la traza izquierda. Este cambio en la traza en nuestro sistema se traducirá en cambiar físicamente el valor de alguna variable, haremos los ajustes necesarios para que este cambio en la traza se produzca cambiando la resistencia del circuito, ya que se podría hacer con un potenciómetro.

El siguiente concepto que debemos conocer es el de **Ciclo-Límite**. Un Ciclo-Límite es una solución periódica del sistema la cual está aislada, es decir, no existen mas soluciones periódicas cercanas a ella en el plano de fases. Del mismo modo que los puntos de equilibrio pueden tener diferentes estabilidades, hay tres posibles estabilidades para un ciclo límite.

- **Ciclo-Límite Estable**

No importa si elegimos las condiciones iniciales dentro o fuera del Ciclo-Límite, las curvas solución tienden al Ciclo-Límite.

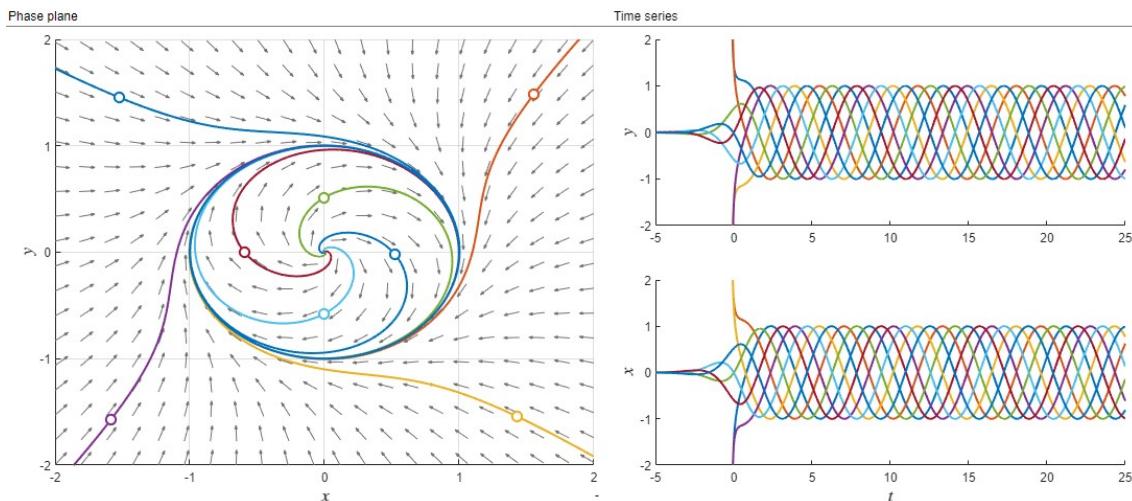


Figura 5.2 : Ciclo-Límite Estable con sentido horario de giro

- Ciclo-Límite Inestable

Si elegimos las condiciones iniciales dentro del Ciclo-Límite, las curvas solución tienden a cero. Si elegimos las condiciones iniciales fuera del Ciclo-Límite, las curvas solución tienden a infinito.

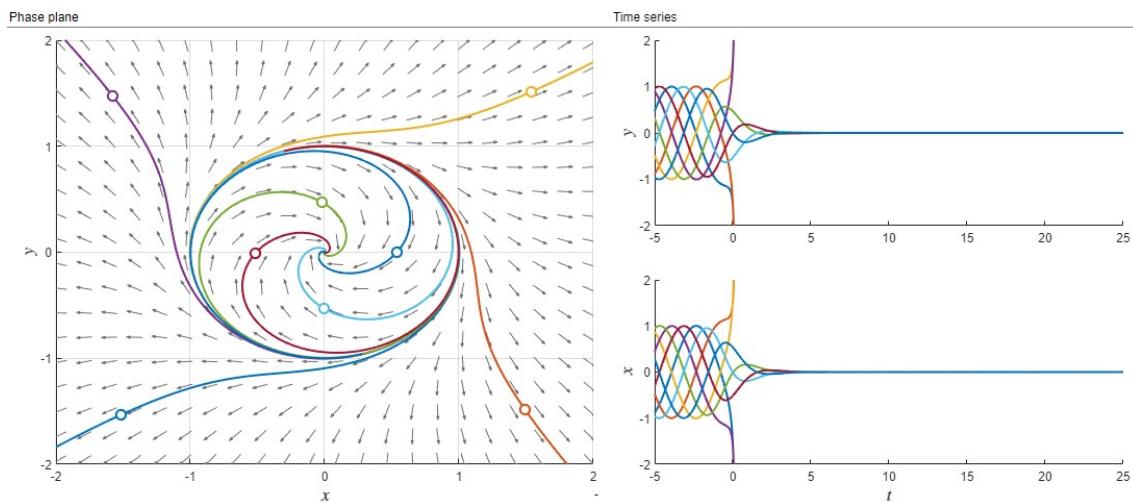


Figura 5.3 : Ciclo-Límite Inestable con sentido horario de giro

- Ciclo-Límite Parcialmente Estable

Si elegimos las condiciones iniciales dentro del Ciclo-Límite, las curvas solución tienden a cero. Si elegimos las condiciones iniciales fuera del Ciclo-Límite, las curvas solución tienden al Ciclo-Límite.

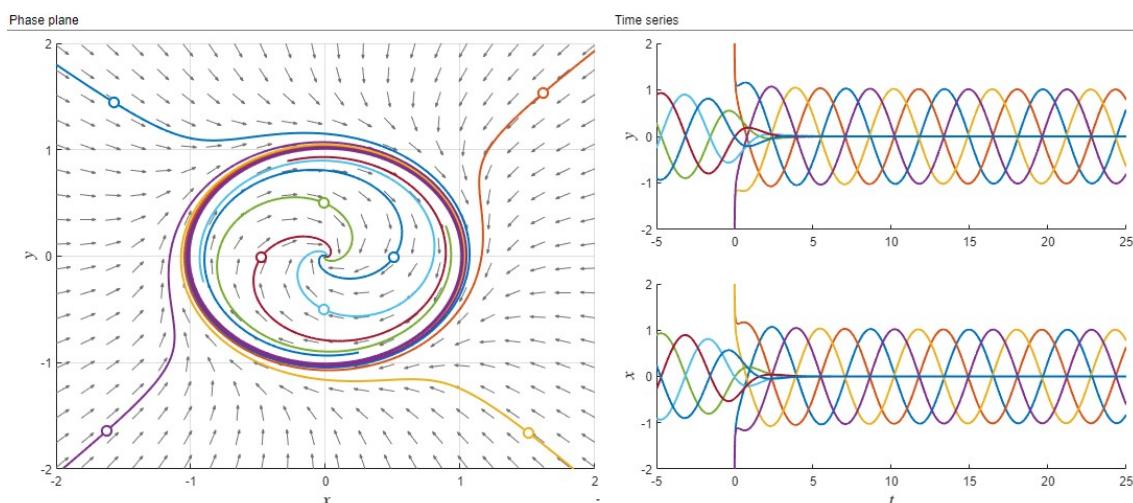


Figura 5.4 : Ciclo-Límite Parcialmente Estable con sentido horario de giro

El Ciclo-Límite que más nos interesa es el estable, ya que sin importar donde eligamos las condiciones iniciales siempre tenderemos a la oscilación periódica, además, si nuestro sistema sufre alguna perturbación que lo saque de la oscilación periódica siempre tenderá a reconducirse nuevamente hacia ella.

El estudio de los Ciclos-Límites históricamente se ha hecho de manera particular para cada sistema, primero hay que estudiar el punto de equilibrio y su estabilidad, hacer el análisis para saber si existe oscilación periódica y finalmente comprobar que dicha oscilación periódica esté aislada, lo cual no es nada sencillo. En nuestro caso no hará falta que hagamos este tipo de estudio gracias a que hemos sido capaces de escribir nuestro sistema (2.30) de la manera (2.42)-(2.43)-(2.44) y este último en la forma (3.38)-(3.39) por lo que ya tenemos trabajos donde se hace este análisis para sistemas de este tipo y se corrobora la existencia de la bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite en los mismos; ver [10], el Capítulo que inicia en la página 335 de [13] y las Secciones 8.1 y 3.6 de [14], en concreto de este último el Teorema 3.27. En los anteriores trabajos se hace un análisis tradicional del problema, nosotros para elloaremos uso de la Caracterización integral que ya hemos visto, pero vamos a utilizar algunos conceptos que se ven en dichos trabajos, conceptos como la elección de un parámetro de control, puntos de equilibrios virtuales y requisitos que deben tener los parámetros del sistema. Cumpliendo esta serie de requisitos en los parámetros del sistema, los cuales veremos mas adelante, podemos conseguir que se produzca el cambio de estabilidad Foco Asintóticamente Estable-Centro-Foco Asintóticamente Inestable en el punto de equilibrio del sistema y por ello obteniendo el Ciclo-Límite (ya que se produce la bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite), que será nuestra oscilación periódica.(*podemos saber de antemano la estabilidad del ciclo límite? es estable, pero hay forma de saberlo antes de la experimentacion?*)

Vamos a reescribir el Teorema 3.27 de [14] pero adaptando varias cosas a nuestro estudio y a las técnicas de análisis que estamos usando en este trabajo.

Definición 5.1 Considerando el sistema (3.38)-(3.39), tomando T_L como parámetro de control, lo que significa que lo haremos pasar de $T_L < 0 \rightarrow T_L = 0 \rightarrow T_L > 0$ y cumpliendo una serie de requisitos que veremos en la siguiente lista, la configuración de Centro (para $T_L = 0$) para la zona izquierda ($x < 0$), da lugar a una oscilación periódica aislada (Ciclo Límite) para $T_L T_R < 0$ y $|T_L|$ lo suficientemente pequeño. En concreto, para $T_R < 0$ el Ciclo-Límite bifurca para $T_L > 0$ y es estable, mientras que para $T_R > 0$ el Ciclo Límite bifurca para $T_L < 0$ y es inestable. A continuación veremos las condiciones que debemos cumplir:

la parte de tr y que bifurca del teorema no la entiendo, quiero reescribir mejor esta definicion

- $a_R = a_L = a < 0$ para que el punto de equilibrio de la zona Izquierda esté contenido en la zona $x < 0$, y que el punto de equilibrio de la zona Derecha tambien lo esté (punto de equilibrio virtual), ver Fig. 5.1.
- Ya que $a_L < 0$ y queremos que el polinomio característico tenga raíces imaginarias, debemos tener $D_L > 0$, ver (5.3) y (5.1) no recuerdo bien el por que de esta condicion, era para que el punto de equilibrio solo pudiera ser de tipo foco(inestable, centro, estable)?
- Como hemos establecido $a_R < 0$, el posible punto de equilibrio de la zona Derecha estaría ubicado en la zona $x < 0$, ver (5.2), por ello podemos elegir:
 - No hay punto de equilibrio $\rightarrow D_R = 0$
 - Si hay punto de equilibrio y es virtual $\rightarrow D_R \neq 0$

despues de la definicion quiero hablar del rol del punto de equilibrio virtual

- Nuestro parámetro de control será T_L , por ello lo haremos variar de negativo a positivo haciendolo pasar por cero, $T_L < 0 \rightarrow T_L = 0 \rightarrow T_L > 0$ y siempre para un valor pequeño de $|T_L|$
- De la Definición 5.1 tenemos que $T_L T_R < 0$ por ello $T_R > 0$

Veamos gráficamente como se produce la bifurcación tomando como parámetro de control T_L

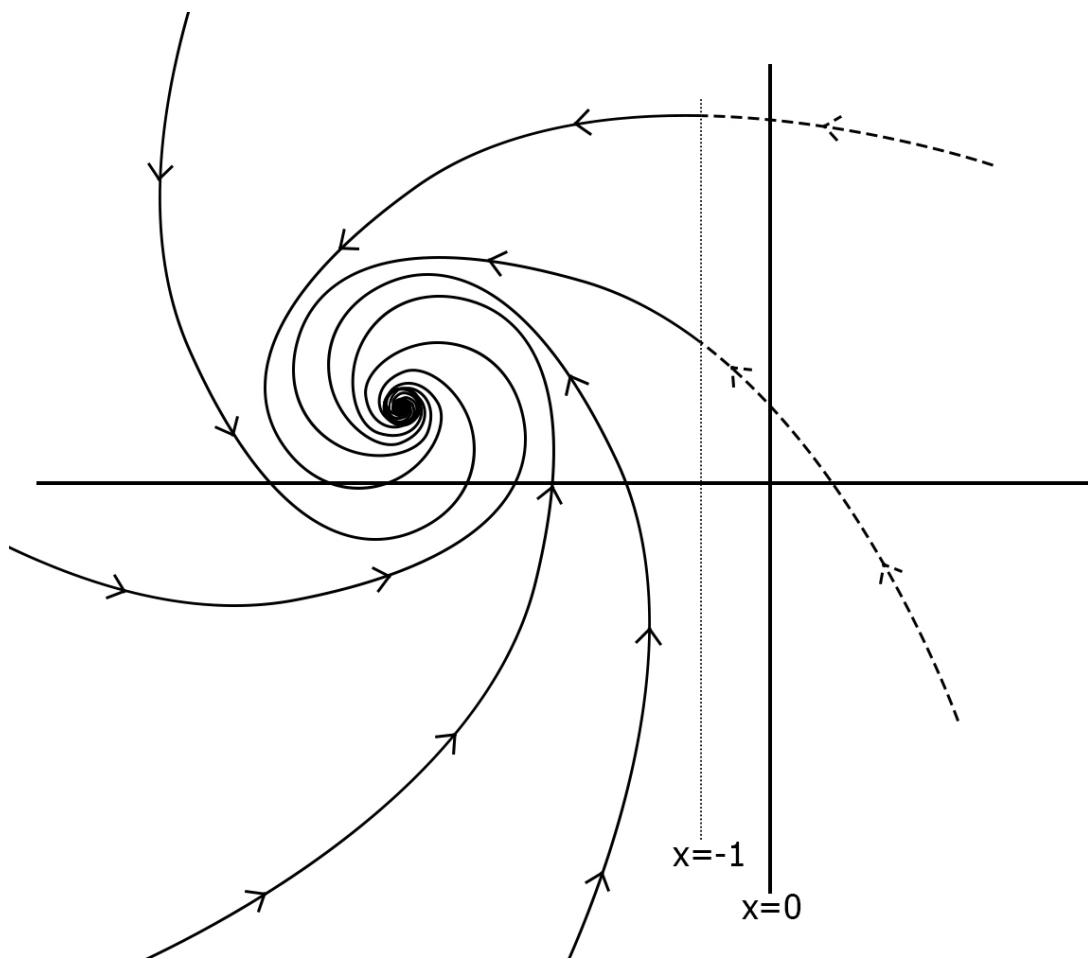


Figura 5.5 : Foco Asintóticamente Estable con sentido antihorario de giro y con la Sección de Poincaré en $x = -1$

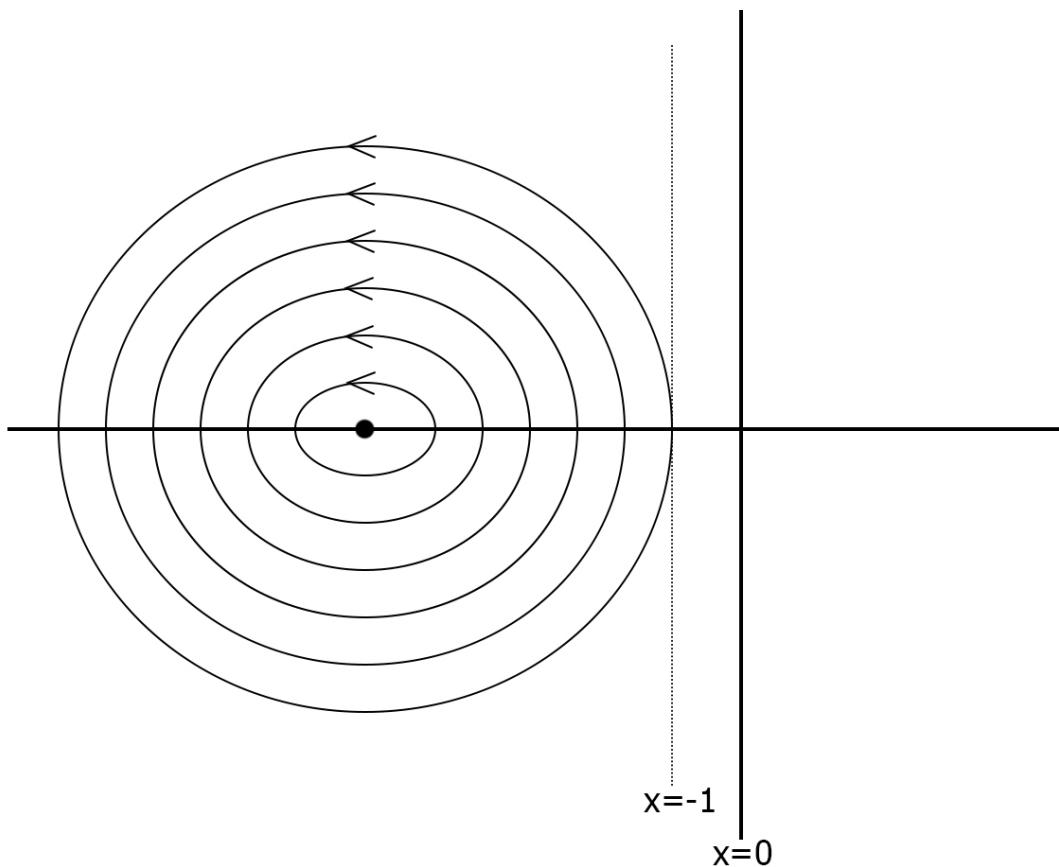


Figura 5.6 : Centro con sentido con sentido antihorario de giro y con la Sección de Poincaré en $x = -1$

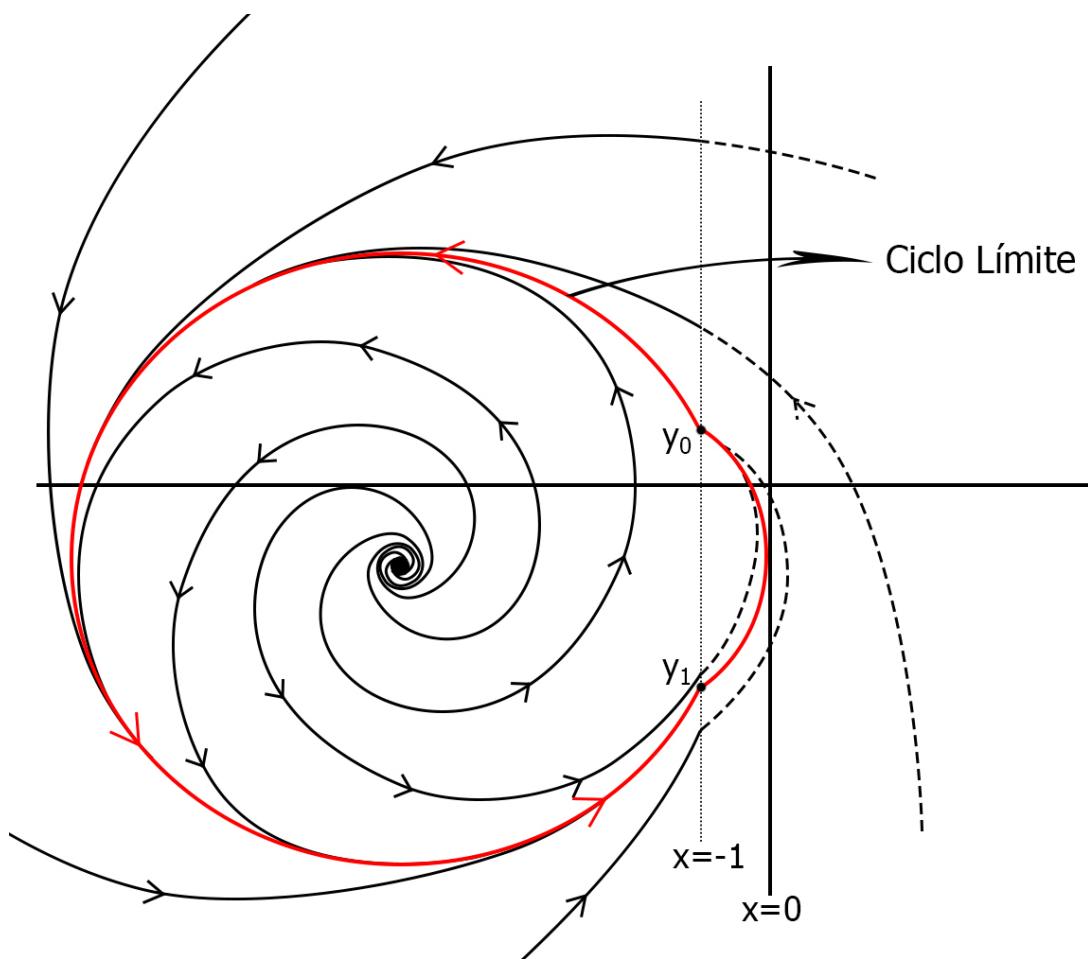


Figura 5.7 : Ciclo-Límite Estable con sentido antihorario de giro y con la Sección de Poincaré en $x = -1$

ESTRUCTURA CAPITULO 5:

- Introduccion
- Punto de equilibrio
- Ciclo Limite (fotos)
- Ciclo Limite (fin) + Introduccion Bifurcación
- Teorema 3.27 (hasta las condiciones)
- Imágenes de ejemplo bifurcacion (dibujo)
- Punto de equilibrio virtual y motivos por los que la zona R no nos importa

esto es texto de la siguiente hoja

Capítulo 6

Oscilación Peródica en el circuito

Ya hemos visto las herramientas matemáticas, la forma en que debemos describir nuestro circuito y la manera de obtener la bifurcación que nos proporcione la oscilación periódica que estamos buscando. En el inicio de la Sección 4.1 hicimos un repaso general de todo ello y ahora ha llegado el momento de aplicarlo y ver si efectivamente obtenemos dicha oscilación periódica. En este capítulo vamos a aplicar y a hacer referencia a todo lo trabajado anteriormente, por ello vamos ir reescribiendo las ecuaciones que necesitemos con sus respectivas referencias para tenerlas presentes.

Lo primero es obtener las ecuaciones diferenciales del circuito, decir cuáles serán nuestras variables de estado y escribir dichas ecuaciones de una manera que nos permita trabajar mas comodamente, todo esto lo hicimos en la Sección 2.3.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}W(z)x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \\ \frac{dz}{dt} = x. \end{cases} \quad (2.31)$$

Con:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\alpha = -\frac{1}{C}, & a_{12} &= \alpha = \frac{1}{C}, \\ a_{21} &= -\xi = -\frac{1}{L}, & a_{22} &= \beta = \frac{R}{L}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$W(z) = \frac{dq(z)}{dz} = \begin{cases} a, & |z| < 1, \\ b, & |z| > 1. \end{cases} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} t_L &= a \cdot a_{11} + a_{22} \\ d_L &= a \cdot a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ t_R &= b \cdot a_{11} + a_{22} \\ d_R &= b \cdot a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{aligned} \quad (2.37)$$

De este sistema solo nos fijaremos en los sistemas de las zonas Izquierda y Derecha de la recta de separación $x = -1$, por lo que tenemos

Lo segundo es reducir este sistema tridimensional a uno bidimensional en forma canónica de Liénard como vimos en la Sección 2.4

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= F(\tilde{x}) - \tilde{y}, \\ \dot{\tilde{y}} &= g(\tilde{x}) - h,\end{aligned}\tag{2.42}$$

con

$$F(\tilde{x}) = \begin{cases} t_R(\tilde{x} - 1) + t_L, & \text{si } \tilde{x} > 1, \\ t_L\tilde{x}, & \text{si } |\tilde{x}| \leq 1, \\ t_R(\tilde{x} + 1) - t_L, & \text{si } \tilde{x} < -1, \end{cases}\tag{2.43}$$

$$g(\tilde{x}) = \begin{cases} d_R(\tilde{x} - 1) + d_L, & \text{si } \tilde{x} > 1, \\ d_L\tilde{x}, & \text{si } |\tilde{x}| \leq 1, \\ d_R(\tilde{x} + 1) - d_L, & \text{si } \tilde{x} < -1. \end{cases}\tag{2.44}$$

esto es texto de la siguiente hoja

Capítulo 7

TÍTULO CAPÍTULO 7

Contenido del capítulo 7.

esto es texto de la siguiente hoja

Capítulo 8

TÍTULO CAPÍTULO 8

Contenido del capítulo 8.

esto es texto de la siguiente hoja

Conclusiones

Contenido del capítulo de conclusiones.

Bibliografía

- [1] CHUA, L. O. Memristor – The missing circuit element. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 1971, vol. CT-18, no. 5, p. 507 to 519. DOI: 10.1109/TCT.1971.1083337.
- [2] Itoh, Makoto & Chua, Leon. (2008). Memristor oscillators. I. J. Bifurcation and Chaos. 18. 3183-3206. 10.1142/S0218127408022354.
- [3] Strukov DB, Snider GS, Stewart DR, Williams RS. The missing memristor found. *Nature*. 2008 May 1;453(7191):80-3. doi: 10.1038/nature06932. Erratum in: *Nature*. 2009 Jun 25;459(7250):1154. PMID: 18451858.
- [4] R. S. Williams, "How We Found The Missing Memristor," in *IEEE Spectrum*, vol. 45, no. 12, pp. 28-35, Dec. 2008, doi: 10.1109/MSPEC.2008.4687366.
- [5] Xiaoyue, Ji & Dong, Zhekang & Zhou, Guangdong & Lai, Chun Sing & Yan, Yunfeng & Qi, Donglian. (2021). Memristive System Based Image Processing Technology: A Review and Perspective. *Electronics*. 10. 3176. 10.3390/electronics10243176.
- [6] Caravelli, F. & Carbajal, Juan. (2018). Memristors for the Curious Outsiders. 10.31224/osf.io/c4qr9.
- [7] Llibre, Jaume & Teruel, Antonio. (2014). Introduction to the Qualitative Theory of Differential Systems: Planar, Symmetric and Continuous Piecewise Linear Systems. 10.1007/978-3-0348-0657-2.
- [8] Carmona, V. Bifurcaciones en Sistemas Dinámicos Lineales a Trozos. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, 2002.
- [9] V. Carmona, E. Freire, E. Ponce and F. Torres, "On simplifying and classifying piecewise-linear systems," in *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 49, no. 5, pp. 609-620, May 2002, doi: 10.1109/TCSI.2002.1001950.
- [10] Amador, A., Freire, E., Ponce, E., and Ros, J., "On Discontinuous Piecewise Linear Models for Memristor Oscillators", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 27, no. 6, 2017. doi:10.1142/S0218127417300221.
- [11] Carmona, Victoriano, Fernández-Sánchez, Fernando, García-Medina, Elisabeth and Novaes, Douglas D.: Properties of Poincaré half-maps for planar linear systems and some direct applications to periodic orbits of piecewise systems, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 2023, No. 22, 1-18. doi: <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2023.1.22>
- [12] Victoriano Carmona, Fernando Fernández-Sánchez, Douglas D. Novaes, Uniqueness and stability of limit cycles in planar piecewise linear differential systems without sliding region, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Volume 123, 2023, 107257, ISSN 1007-5704. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107257>.

- [13] Ponce, E., Ros, J., Vela, E. (2013). The Focus-Center-Limit Cycle Bifurcation in Discontinuous Planar Piecewise Linear Systems Without Sliding. In: Ibáñez, S., Pérez del Río, J., Pumariño, A., Rodríguez, J. (eds) Progress and Challenges in Dynamical Systems. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 54. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-38830-9_21
- [14] Ponce, Enrique & Ros, Javier & Vela, Elísabet. (2022). Bifurcations in Continuous Piecewise Linear Differential Systems: Applications to Low-Dimensional Electronic Oscillators. [10.1007/978-3-031-21135-5](https://doi.org/10.1007/978-3-031-21135-5).