



Universidad de Sevilla
Escuela Politécnica Superior



Trabajo Fin de Grado
Ingeniería Electrónica Industrial

*La caracterización integral de las
semiacpliaciones de Poincaré y su aplicación a
circuitos electrónicos: El Memristor*

Autor: Sergio R. Durán Martín

Tutor: Dr. Victoriano Carmona Centeno

Departamento: Matemática Aplicada II

Resumen

La aplicación de herramientas matemáticas en el análisis de circuitos eléctricos y electrónicos ha sido esencial a lo largo de la historia para anticipar su comportamiento antes de la propia construcción física. En este trabajo, realizaremos una aplicación directa de la teoría de bifurcaciones a un circuito, haciendo uso de diversas herramientas matemáticas, para prever cómo evolucionará su comportamiento a medida que se modifica gradualmente un parámetro del mismo. Este estudio será el primero en emplear la Caracterización Integral de la Semiaplicación de Poincaré en la búsqueda de una bifurcación tipo Foco-Centro-Ciclo Límite en un circuito, lo que resultará en la obtención de una oscilación periódica en el sistema. Además, es importante destacar que el circuito que se examinará en el presente trabajo contiene un componente de gran relevancia en la actualidad, el Memristor, cuyas propiedades lo convierten en un elemento de alto interés para el futuro de la electrónica.

Palabras clave: Memristor, oscilador electrónico, sistemas dinámicos, bifurcación foco-centro-ciclo límite, semiaplicación de Poincaré, caracterización integral.

Abstract

Traducir el resumen cuando esté completamente bien

Keywords: Memristor, electronic oscillator, dynamical systems, focus-centre-limit cycle bifurcation, Poincaré half-map, integral characterization.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Introducción | 3 |
| 1 Descripción del Circuito | 4 |
| 1.1 Resistencia negativa | 5 |
| 1.2 Memristor | 7 |
| 1.3 Variables de estado | 11 |
| 1.4 Superficies invariantes | 14 |
| 2 Sistemas Dinámicos Continuos | 18 |
| 2.1 Sistemas lineales planos | 18 |
| 2.2 Sistemas lineales a trozos bizonales | 24 |
| 3 Semiaplicaciones de Poincaré | 28 |
| 3.1 Caracterización integral de la semiaplicación de Poincaré | 33 |
| 4 Bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite | 47 |
| 4.1 Análisis de los puntos de equilibrio | 47 |
| 4.2 Ciclo Límite | 49 |
| 4.3 Bifurcación foco-centro-ciclo límite y su determinación a partir de la carterización integral de la semiaplicación de Poincaré | 52 |
| 5 Oscilación Peródica estable en el circuito | 60 |
| Conclusiones | 95 |
| Bibliografía | 96 |

Introducción

El *Memristor*, sin lugar a dudas, es uno de los componentes electrónicos más intrigantes de los tiempos recientes. En consecuencia, en los últimos años, se ha observado una profusión de estudios en una variedad de campos dentro de la electrónica, todos destinados a explorar el potencial que podría albergar este componente. En el contexto de este trabajo, nos enfocaremos en un circuito oscilador específico, diseñado con una bobina, un condensador, una resistencia negativa y, por supuesto, un memristor. Este circuito en particular fue presentado por Leon O. Chua en su trabajo de referencia [2] y ha sido objeto de numerosas investigaciones posteriores. La motivación para emprender este estudio surge del trabajo [10], donde los autores han demostrado la existencia de superficies invariantes dentro del sistema de ecuaciones que describen este circuito. Este descubrimiento lo convierte en el escenario perfecto para aplicar por primera vez, en el terreno de los circuitos electrónicos, la *Caracterización Integral de la Semiaplicación de Poincaré*, presentada en el trabajo fundamental [13]. Nuestro objetivo principal es la búsqueda de un *Ciclo Límite* en este circuito, es decir, la identificación de una oscilación periódica que pueda tener aplicaciones significativas en diversos campos de la electrónica.

Con el propósito de aplicar la caracterización integral de la semiaplicación de poincaré, es fundamental que nuestro sistema presente ciertas características específicas; un sistema dinámico continuo lineal a trozos en *Forma Canónica de Liénard* con dos zonas de linealidad. Para lograrlo, nos centraremos en los Capítulos 1 y 2 de este trabajo, donde abordaremos minuciosamente las ecuaciones que rigen el circuito. Este proceso de análisis y transformación permitirá preparar el terreno para la aplicación posterior de la caracterización integral de la semiaplicación de poincaré, facilitando así la búsqueda de un ciclo límite en el circuito, vía una *Bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite*.

En el Capítulo 3, presentaremos la caracterización integral de la semiaplicación de poincaré y exploraremos algunas de sus propiedades que resultarán especialmente relevantes para nuestro estudio. Este capítulo nos permitirá comprender mejor cómo esta herramienta será aplicada en nuestro análisis.

A continuación, en el Capítulo 4, realizaremos una breve introducción a la teoría de bifurcaciones. En este contexto, presentaremos conceptos esenciales que serán cruciales para nuestra investigación. Entre ellos, destacaremos el concepto de ciclo límite y analizaremos cómo se puede alcanzar a través de la bifurcación conocida como foco-centro-ciclo límite.

Finalmente, en el Capítulo 5, procederemos a la aplicación directa de la teoría previamente expuesta a las ecuaciones que describen nuestro circuito, que habremos transformado en la forma canónica de Liénard. Una vez hayamos realizado esta aplicación teórica, desharemos todos los cambios realizados previamente y volveremos a las ecuaciones originales de nuestro circuito habiendo obtenido los valores de los componentes y las condiciones iniciales de manera adecuada para inducir la aparición de la oscilación periódica que hemos estado buscando a lo largo de este trabajo.

Capítulo 1

Descripción del Circuito

El circuito que se examinará es un oscilador que incorpora una resistencia negativa, y se le ha añadido un componente que ha sido objeto de extenso estudio en tiempos recientes, el memristor. El esquema de este circuito puede verse en la siguiente figura.

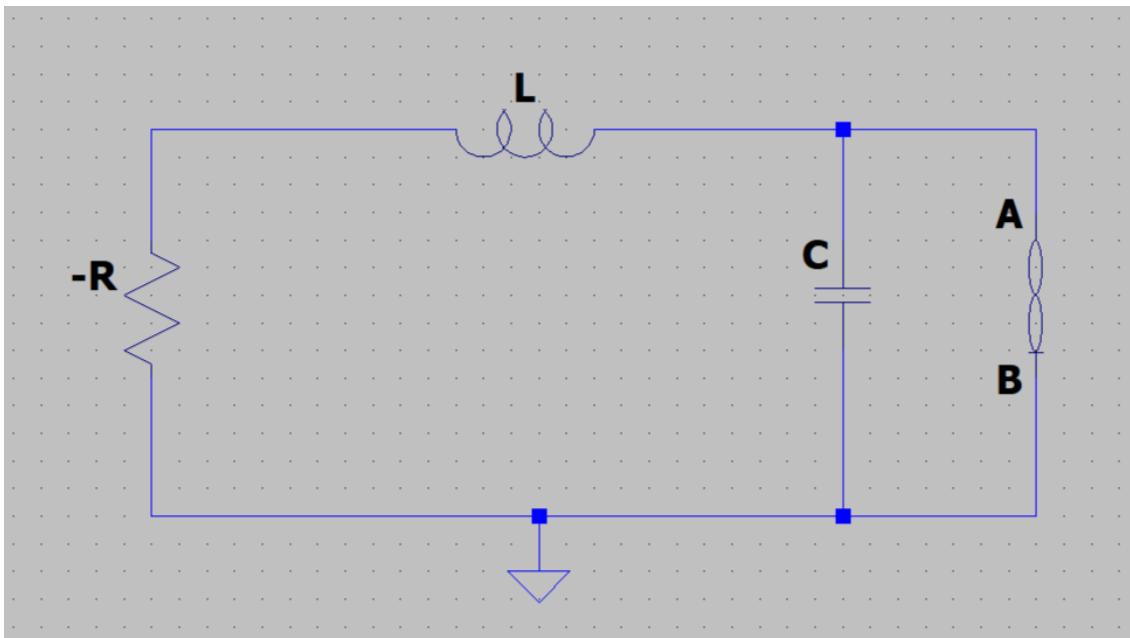


Figura 1.1: Oscilador RLC con R negativa y Memristor.

Como se puede ver en la Fig. 1.1, no existe una fuente de señal en el circuito, y esto se debe a que el análisis hecho busca encontrar una oscilación periódica tan solo proporcionando condiciones iniciales a la bobina y el condensador, gracias al comportamiento de la resistencia negativa y del memristor. La forma de imponer las condiciones iniciales serían las clásicas, usando fuentes de intensidad en serie y tensión en paralelo con interruptores que se abren en $t = 0$ (s) para la bobina y el condensador respectivamente.

1.1. Resistencia negativa

Uno de los componentes clave de este circuito es la resistencia negativa, que puede construirse mediante un *Convertidor de Impedancia Negativa (NIC)*. Un NIC es un dispositivo activo, lo que significa que en lugar de disipar energía como lo haría una resistencia convencional, puede suministrar energía a un circuito, como se ilustra en la Fig. 1.2. En términos prácticos, un NIC se utiliza para una variedad de propósitos en circuitos eléctricos o electrónicos, como la compensación de la resistencia de carga de un sistema o la mejora de la eficiencia en la transferencia de energía. En el contexto de circuitos osciladores, el NIC desempeña un papel crucial al mantener, estabilizar y controlar la frecuencia y calidad de la oscilación.

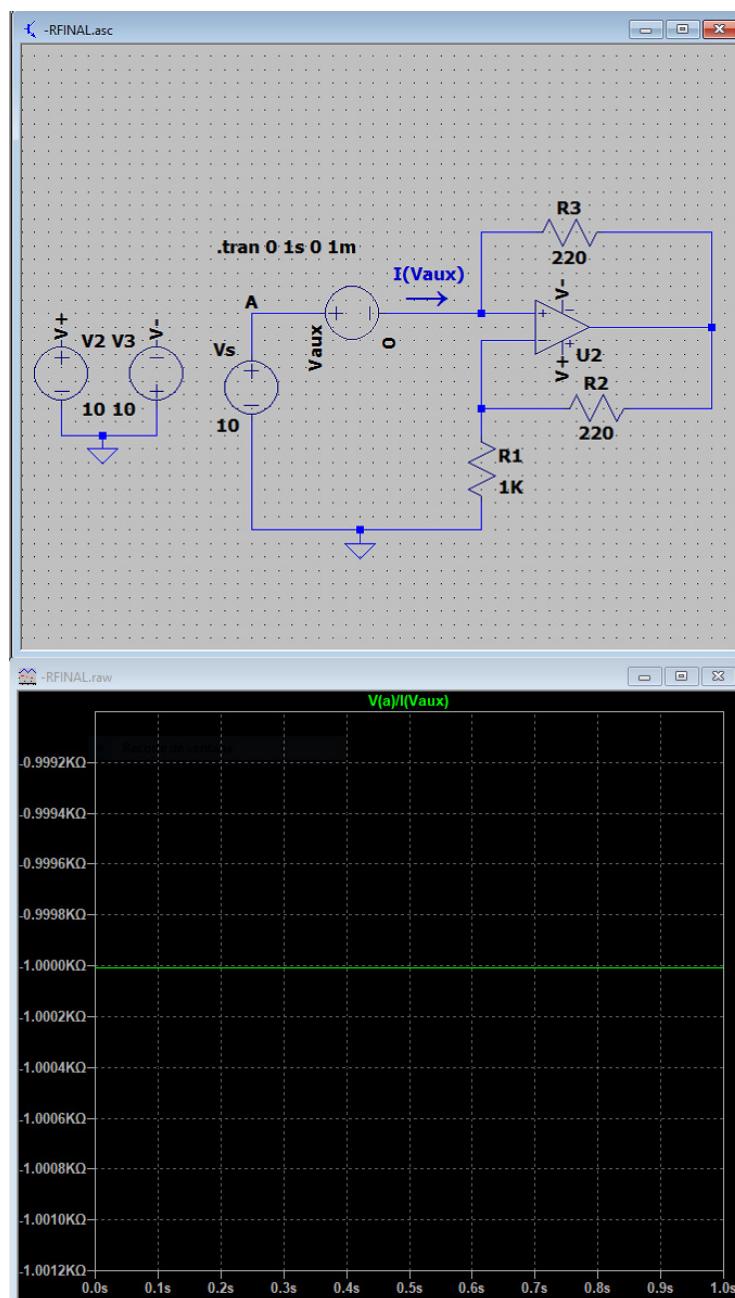
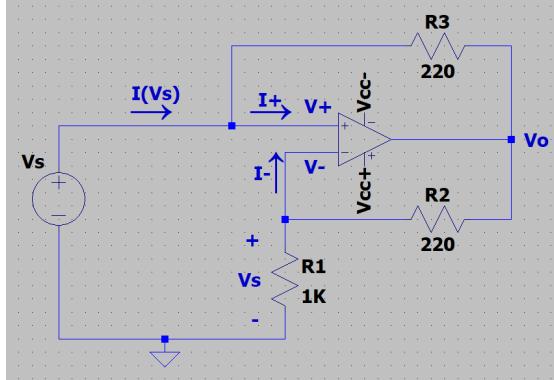


Figura 1.2: Convertidor de Impedancia Negativa de -1000 Ohmios.

Una de las maneras de realizarlo consiste en utilizar un amplificador operacional y 3 resistencias en la configuración que se ve en la Fig. 1.2. De esta manera si elegimos las resistencias $R_2 = R_3$, la resistencia R_1 es la que determinaría el valor de resistencia negativa. En efecto:



Consideraciones para el cálculo del circuito de la Fig. 1.3 con Amplificadores Operacionales:

$$V_+ = V_- \quad (1.1)$$

$$I_+ = I_- = 0(A). \quad (1.2)$$

Figura 1.3: Establecemos los signos de la corriente en el circuito NIC.

Si observamos la ecuación (1.1), notamos que la tensión V_S recae sobre la resistencia R_1 y se relaciona con la tensión de salida V_O mediante un divisor de tensión:

$$V_S = V_O \frac{R_1}{R_1 + R_2} \implies V_O = V_S \frac{R_1 + R_2}{R_1}. \quad (1.3)$$

Dada la ecuación (1.2), la corriente $I(V_S)$ es la misma que fluye a través de la resistencia R_3 , por lo que podemos deducir:

$$I(V_S) = \frac{V_S - V_O}{R_3}. \quad (1.4)$$

Sustituyendo la ecuación (1.3) en (1.4) y tras directas simplificaciones, llegamos a:

$$I(V_S) = V_S \frac{-R_2}{R_1 R_3}. \quad (1.5)$$

Si dividimos la tensión V_S entre la intensidad $I(V_S)$ (ecuación (1.5)) para obtener la impedancia de entrada del circuito, obtenemos:

$$\frac{V_S}{I(V_S)} = Z_{IN} = \frac{V_S}{V_S \frac{-R_2}{R_1 R_3}} = -R_1 \frac{R_3}{R_2}. \quad (1.6)$$

Si seleccionamos $R_3 = R_2$ en la ecuación (1.6), obtendremos:

$$Z_{IN} = -R_1. \quad (1.7)$$

1.2. Memristor

Un componente de gran interés en este circuito es el memristor, cuya teoría fue propuesta por el científico Leon O. Chua en 1971 (ver [1]). Este componente busca resolver un antiguo enigma en las relaciones entre las cuatro variables fundamentales en la teoría de circuitos: voltaje “ v ”, corriente “ i ”, carga eléctrica “ q ” y flujo magnético “ φ ”. En particular, el memristor establece una relación entre la carga eléctrica y el flujo magnético de la siguiente manera (ver [2]):

$$\varphi = \varphi(q), \quad q = q(\varphi). \quad (1.8)$$

Donde la relación del voltaje y la intensidad respecto a la carga y al flujo en el tiempo es la siguiente:

$$v(t) = \frac{d\varphi}{dt}, \quad i(t) = \frac{dq}{dt}. \quad (1.9)$$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau)d\tau, \quad q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau)d\tau. \quad (1.10)$$

Derivaremos la ecuación (1.8) respecto al tiempo, y aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi(q)}{dq} \frac{dq}{dt}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.11)$$

A continuación, sustituyendo las relaciones (1.9) en (1.11) se obtienen las expresiones:

$$v(t) = \frac{d\varphi(q)}{dq} i(t), \quad i(t) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} v(t). \quad (1.12)$$

Las dos relaciones resultantes en (1.12) se conocen como la *Memristancia* $M(q)$ y la *Memductancia* $W(\varphi)$:

$$M(q) = \frac{d\varphi(q)}{dq}, \quad W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi}. \quad (1.13)$$

Por último, se presentan dos expresiones finales que describen el comportamiento del memristor:

$$\text{Memristor controlado por carga} \Rightarrow v(t) = M(q) i(t). \quad (1.14)$$

$$\text{Memristor controlado por flujo} \Rightarrow i(t) = W(\varphi) v(t). \quad (1.15)$$

El segundo acontecimiento de notable relevancia en relación al memristor tuvo lugar en el año 2005, cuando los laboratorios de Hewlett-Packard (HP) lograron fabricar un componente cuyo comportamiento exhibía notables similitudes con las características postuladas por Chua para el memristor. Inicialmente, el componente desarrollado por HP había sido denominado como “*Crossbar Latch*”. No obstante, no sería sino hasta 2008 que se percataron de la marcada similitud en su funcionamiento con el concepto original de memristor propuesto por Chua, ver [4]. La construcción de este componente resulta elegante en su simplicidad, consistiendo en dos capas superpuestas: una compuesta de dióxido de titanio puro y otra de dióxido de titanio con una deficiencia controlada de átomos de oxígeno, ambas encapsuladas entre dos electrodos de platino.

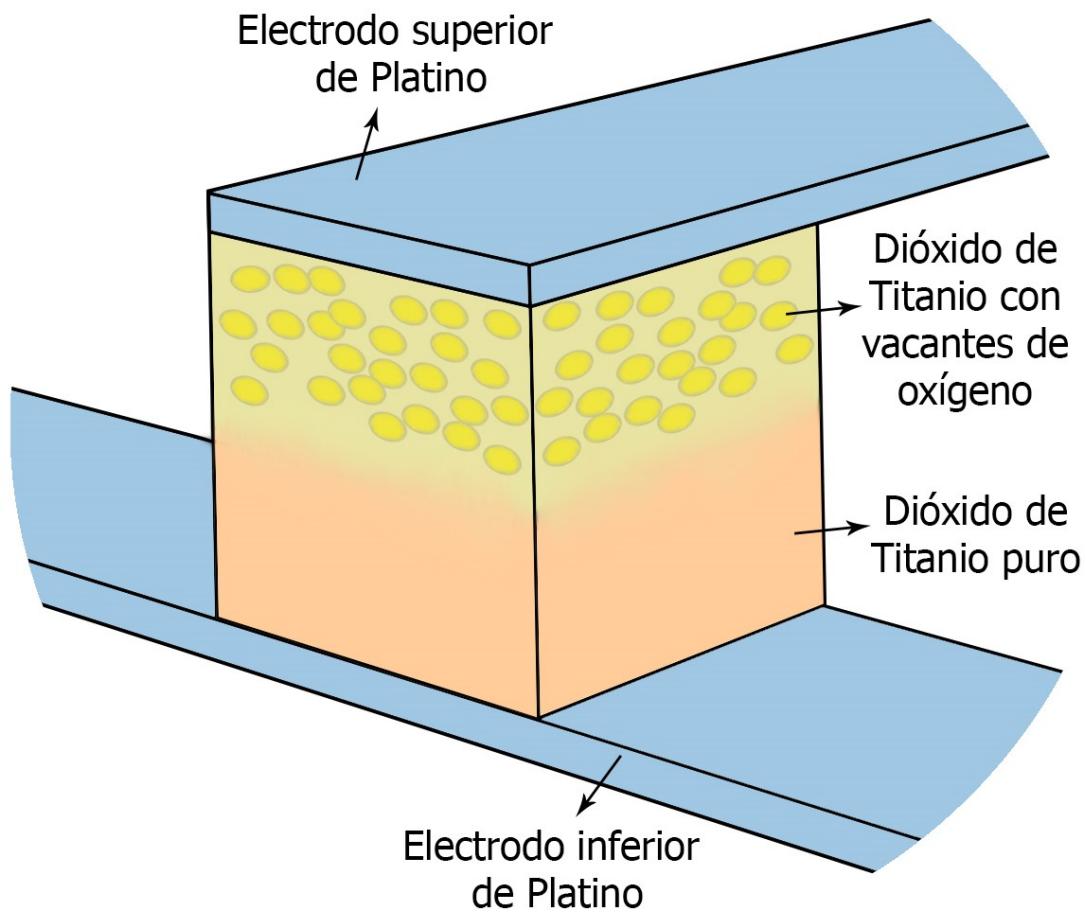


Figura 1.4: Costrucción del memristor de HP. Como se propone en [4].

Ahora presentaremos una serie de características del dióxido de titanio que lo convierten en un material altamente atractivo para esta aplicación:

1. **Resistencia variable:** Cuando el dióxido de titanio se dopa, su resistencia eléctrica puede cambiar en respuesta a la aplicación de una corriente o un campo eléctrico. Esto permite no solo almacenar los valores binarios típicos (1 o 0), sino también retener una gama de valores dentro de ciertos límites de operación. Este fenómeno se utiliza en las *Resistive Random-Access Memory (ReRAM)*.
2. **No volatilidad:** El dióxido de titanio puede mantener su estado de resistencia incluso cuando se interrumpe la corriente eléctrica que lo atraviesa. Esto significa que puede retener información y mantener su estado de resistencia sin requerir energía continua, lo que es fundamental para la preservación de datos.
3. **Cambios rápidos de resistencia:** Esta propiedad permite realizar operaciones de escritura y lectura de datos de manera rápida en el memristor. La velocidad de acceso es crucial para su implementación en aplicaciones de almacenamiento y procesamiento de datos.
4. **Baja potencia y tamaño compacto:** El uso eficiente de energía es otro punto fuerte del dióxido de titanio, lo que lo hace adecuado para dispositivos que operan con restricciones de potencia. Además, su tamaño compacto facilita su integración en sistemas electrónicos de diversos tamaños y aplicaciones.

La fórmula propuesta en [3] para modelar el comportamiento de este dispositivo se expresa mediante las siguientes ecuaciones:

$$v(t) = \left(R_{ON} \frac{w(t)}{D} + R_{OFF} \left(1 - \frac{w(t)}{D} \right) \right) i(t), \quad (1.16)$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = \mu_V \frac{R_{ON}}{D} q(t). \quad (1.17)$$

Integrando la ecuación (1.17) e insertándola en (1.16), teniendo en cuenta que el valor de resistencia $R_{ON} \ll R_{OFF}$, se obtienen las siguientes expresiones:

$$w(t) = \mu_V \frac{R_{ON}}{D} i(t), \quad (1.18)$$

$$M(q) = R_{OFF} \left(1 - \frac{\mu_V R_{ON}}{D^2} q(t) \right). \quad (1.19)$$

Las ecuaciones (1.16)-(1.19) describen el comportamiento del memristor de HP y a continuación se muestra el esquema del memristor en la Figura 1.5.

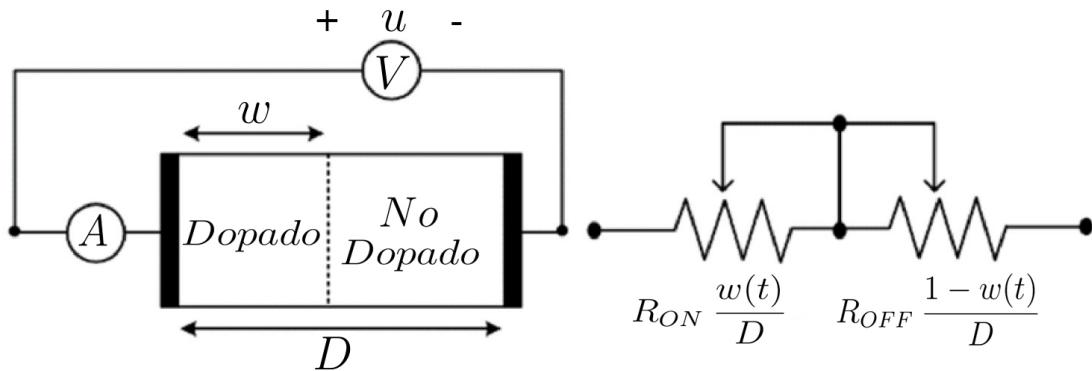


Figura 1.5: Esquema del memristor de HP. Propuesto en [5].

Los parámetros que intervienen en las ecuaciones (1.16)-(1.19) y que caracterizan el funcionamiento del componente son:

1. R_{ON} : Resistencia en el estado ON, que representa el valor mínimo de resistencia y es constante.
2. R_{OFF} : Resistencia en el estado OFF, que corresponde al valor máximo de resistencia y también es constante.
3. μ_V : Movilidad iónica promedio, una constante que describe la velocidad de movimiento de las partículas iónicas en el dispositivo.
4. w : Ancho de la zona dopada, que no es constante y depende de la excitación eléctrica.
5. D : Ancho total de la lámina de dióxido de titanio, una constante que define las dimensiones físicas del dispositivo.

El funcionamiento del dispositivo es el siguiente: entre los dos electrodos de platino se encuentra una capa de dióxido de titanio puro TiO_2 , que actúa como dieléctrico, y otra capa de dióxido de titanio con vacantes de oxígeno TiO_{2-x} que funciona como conductor. Las vacantes de oxígeno están cargadas positivamente, ya que la falta de átomos de oxígeno implica la pérdida de sus electrones de valencia asociados, lo que hace que el compuesto necesite atraer electrones hacia estas vacantes para mantenerse eléctricamente estable (ver Fig. 1.4).

Cuando se aplica un voltaje positivo al electrodo superior, las vacantes de oxígeno en la zona dopada son repelidas y se desplazan hacia la región de dióxido de titanio puro, lo que aumenta la conductividad hasta alcanzar el valor de R_{ON} . Por otro lado, si se aplica un voltaje negativo, las vacantes de oxígeno se mueven hacia el electrodo superior, disminuyendo la conductividad hasta llegar a R_{OFF} .

A continuación presentaremos una gráfica que muestra la respuesta del memristor ante una señal senoidal con diversas frecuencias. Esta respuesta se obtuvo utilizando un modelo de memristor de SPICE, basado en las ecuaciones de HP (1.16)-(1.19) (consulte [17]).

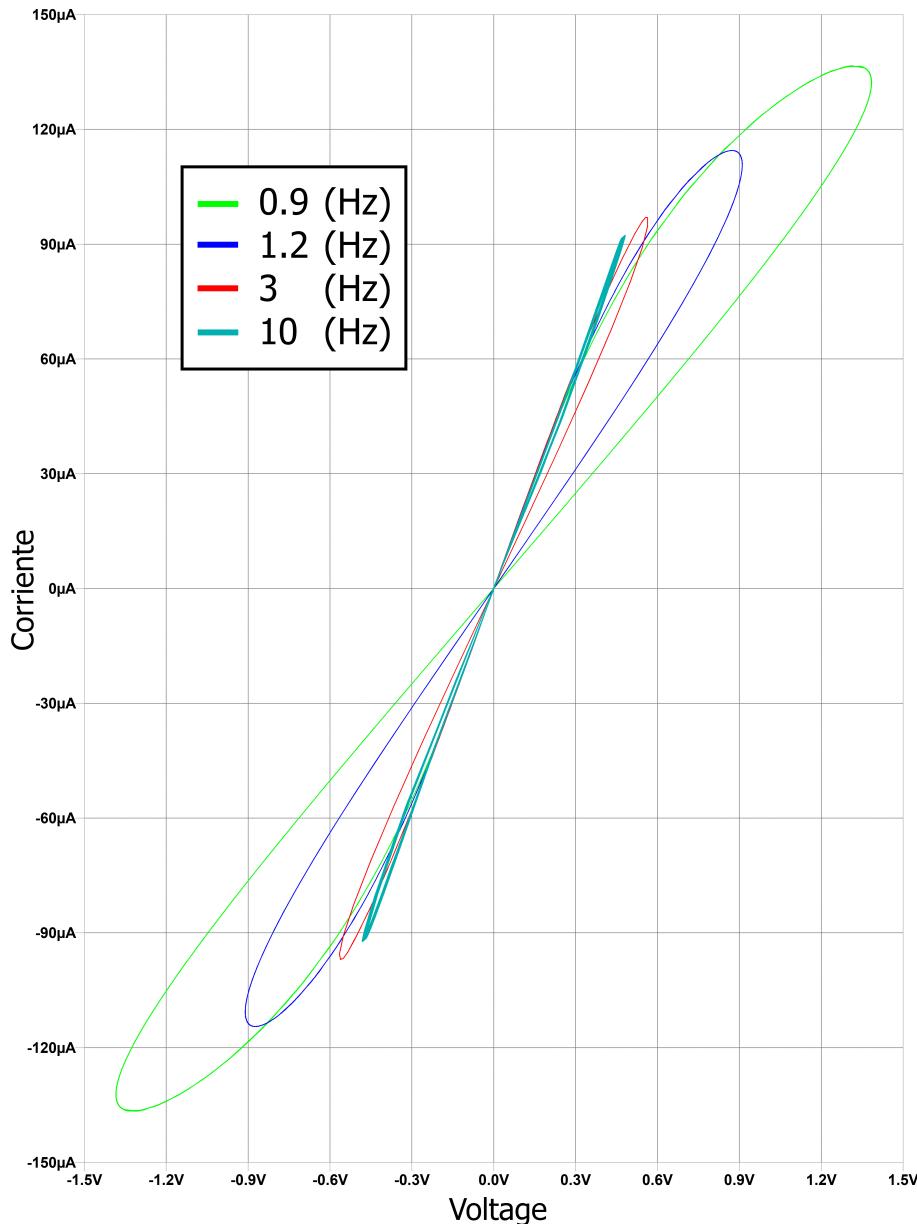


Figura 1.6: Gráfica Tensión-Intensidad del Memristor de Chua ideal para una señal de entrada senoidal con varias frecuencias.

En la Fig. 1.6 se puede comprobar que a medida que aumenta la frecuencia, la gráfica se asemeja cada vez más a la de una resistencia tradicional, esta característica se puede consultar más en profundidad en [6].

1.3. Variables de estado

En este trabajo realizamos un análisis matemático de una bifurcación presente en el circuito oscilador utilizando técnicas de análisis recientes. Sin embargo, antes de adentrarnos en los detalles matemáticos, es fundamental establecer las tensiones e intensidades del circuito (ver Fig. 1.7) y transformar sus ecuaciones eléctricas

en una forma matemática que nos permita llevar a cabo un análisis exhaustivo. Comenzaremos nuestro análisis examinando detenidamente el circuito en cuestión.

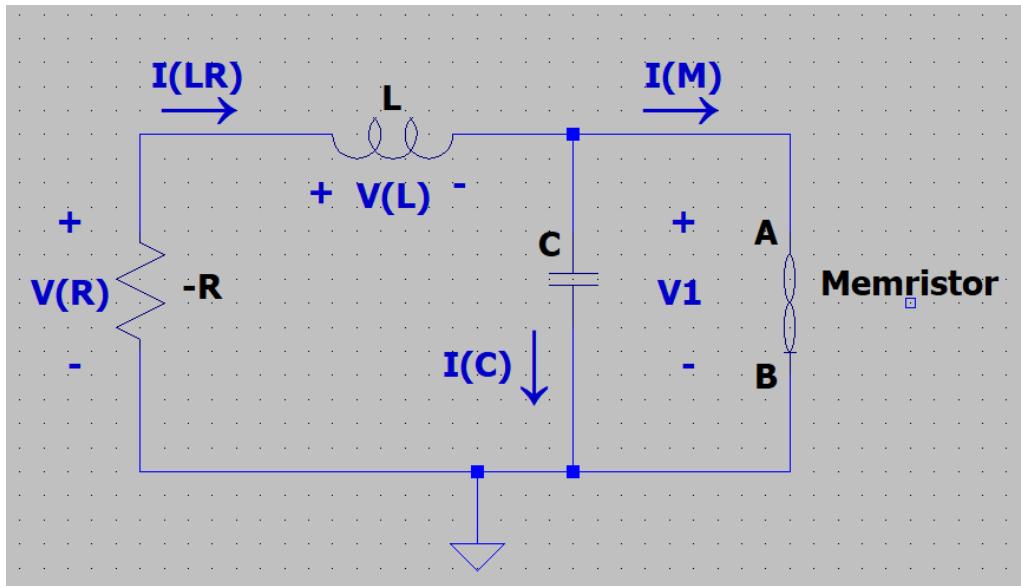


Figura 1.7: Magnitudes del circuito.

Se aplican las leyes de Kirchoff al circuito de la Fig. 1.7 y se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$i_{LR} = i_M + i_C, \quad (1.20a)$$

$$v_R = v_L + v_1. \quad (1.20b)$$

Reordenando estas ecuaciones, se obtiene:

$$i_C = i_{LR} - i_M, \quad (1.21a)$$

$$v_L = v_R - v_1. \quad (1.21b)$$

Teniendo en cuenta la relación entre la carga y el flujo con la intensidad y la tensión de las ecuaciones (1.9), así como la ecuación del memristor controlado por flujo (1.15), y aplicándolas a (1.21a) y (1.21b), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$C \frac{dv_1}{dt} = i_{LR} - W(\varphi) v_1, \quad (1.22a)$$

$$L \frac{di_{LR}}{dt} = R i_{LR} - v_1, \quad (1.22b)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = v_1. \quad (1.22c)$$

En las ecuaciones (1.22a), (1.22b) y (1.22c) las variables de estado seleccionadas son la intensidad en la resistencia y la bobina i_{LR} , la tensión en el condensador y el memristor v_1 y el flujo en el memristor φ .

Reordenando las ecuaciones anteriores (1.22a), (1.22b) y (1.22c), se obtiene el siguiente sistema:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{i_{LR}}{C} - W(\varphi) \frac{v_1}{C}, \quad (1.23a)$$

$$\frac{di_{LR}}{dt} = \frac{R}{L} i_{LR} - \frac{v_1}{L}, \quad (1.23b)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = v_1. \quad (1.23c)$$

Haciendo algunos cambios a las tres anteriores ecuaciones se llega a construir el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(y - W(z)x), \\ \frac{dy}{dt} = -\xi x + \beta y, \\ \frac{dz}{dt} = x. \end{cases} \quad (1.24)$$

Donde tenemos:

$$x = v_1, \quad y = i_{LR}, \quad z = \varphi, \quad \alpha = \frac{1}{C}, \quad \beta = \frac{R}{L}, \quad \xi = \frac{1}{L}.$$

El sistema (1.24) se puede expresar de una forma más general como sigue:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}W(z)x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \\ \frac{dz}{dt} = x. \end{cases} \quad (1.25)$$

Con:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\alpha = -\frac{1}{C}, & a_{12} &= \alpha = \frac{1}{C}, \\ a_{21} &= -\xi = -\frac{1}{L}, & a_{22} &= \beta = \frac{R}{L}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Sin embargo, aún necesitamos definir la función $W(z)$ que aparece en el sistema (1.25). En [2], se asume que el comportamiento del memristor se puede aproximar mediante una función lineal a trozos monótonamente creciente:

$$q(\varphi) = b\varphi + 0.5(a - b)(|\varphi + 1| - |\varphi - 1|). \quad (1.27)$$

donde $a, b > 0$

Derivaremos la expresión (1.27) (recordando la ecuación (1.13)) para obtener $W(z)$:

$$W(z) = \frac{dq(z)}{dz} = \begin{cases} b, & z < -1, \\ a, & -1 < z < 1, \\ b, & z > 1. \end{cases} \quad (1.28)$$

1.4. Superficies invariantes

A continuación, definiremos el concepto de superficie invariante para un sistema dinámico tridimensional. Posteriormente, veremos que el sistema (1.25) posee ciertas superficies invariantes.

Definición 1.1. Consideremos el sistema diferencial:

$$\frac{dX}{dt} = F(X), \quad X \in \mathbb{R}^3. \quad (1.29)$$

Se dice que la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie invariante para el sistema (1.29) si para cada $X_0 \in S$, la solución del sistema (1.29), con condición inicial $X(0) = X_0$, pertenece a la superficie S para todo t .

A continuación presentaremos un sistema de ejemplo que posee infinitas esferas invariantes:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

A modo de ejemplo, en la Fig. 1.8 hemos representado una esfera invariante del sistema (1.30) con varias órbitas contenida en ella.

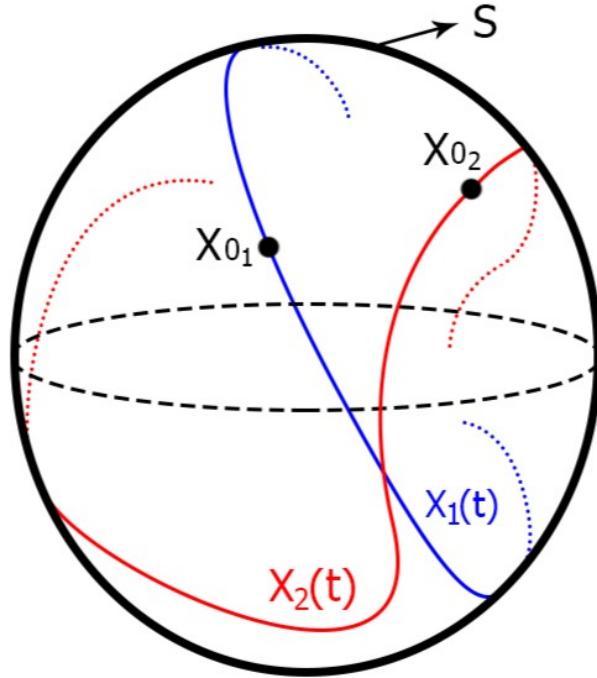


Figura 1.8: Esfera con dos órbitas solución $X_1(t)$, $X_2(t)$ con condiciones iniciales $X_1(0) = X_{01}$ y $X_2(0) = X_{02}$, contenidas en ella.

Desde el Teorema 1 de [10], sabemos que existe un conjunto de superficies invariantes para el sistema (1.25). La descripción de estas superficies invariantes se detalla en el siguiente resultado. Se enunciará dicho resultado en este trabajo ya que resultará de especial relevancia.

Teorema 1.1 (Teorema 1 de [10]). *Consideremos el sistema (1.25) con la función lineal a trozos q dada en (1.27) y la función $W(z)$ dada en (1.28). Para cualquier $h \in \mathbb{R}$, el conjunto:*

$$S_h = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : H(x, y, z) = h\}, \quad (1.31)$$

donde

$$H(x, y, z) = -a_{22}x + a_{12}y - a_{12}a_{21}z + a_{11}a_{22}q(z). \quad (1.32)$$

es una suficiente invariante para el sistema (1.25).

El sistema (1.25) tiene una familia infinita de superficies invariantes en todo \mathbb{R}^3 , y la dinámica de los mismos es fundamentalmente bidimensional.

Como se deduce del Teorema 1.1 la dinámica del sistema tridimensional (1.25) se puede reducir, aplicando un cambio de variable adecuado, al estudio de un sistema bidimensional. En este trabajo es necesario incluir la prueba de ello porque los cambios de variable nos permitirán obtener la solución periódica en el circuito. Dicha prueba la veremos en el siguiente Teorema con su correspondiente Demostración, pero antes de continuar, definiremos dos matrices auxiliares en el sistema (1.25) teniendo en cuenta la función $W(z)$ (1.28)

$$A_E = \begin{pmatrix} b \cdot a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_C = \begin{pmatrix} a \cdot a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Con sus correspondientes trazas y determinantes:

$$\begin{aligned} t_E &= b \cdot a_{11} + a_{22}, \\ d_E &= b \cdot a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}, \\ t_C &= a \cdot a_{11} + a_{22}, \\ d_C &= a \cdot a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Los subíndices E y C hacen referencia a las zonas *Externas* y a la zona *Central* del sistema trizonal (1.35).

Teorema 1.2 (Teorema 2 de [10]). *Consideremos el sistema (1.25), con la función $W(z)$ dada en (1.28), y supongamos que $a_{22} \neq 0$. La dinámica del sistema (1.25) restringida a cada superficie invariante S_h , dada en (1.31), con $h \in \mathbb{R}$, es equivalente a la dinámica del sistema bidimensional:*

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = F(\tilde{x}) - \tilde{y}, \\ \dot{\tilde{y}} = g(\tilde{x}) - h, \end{cases} \quad (1.35)$$

donde

$$F(\tilde{x}) = \begin{cases} t_E(\tilde{x} - 1) + t_C, & \text{si } \tilde{x} > 1, \\ t_C\tilde{x}, & \text{si } |\tilde{x}| \leq 1, \\ t_E(\tilde{x} + 1) - t_C, & \text{si } \tilde{x} < -1, \end{cases} \quad (1.36)$$

$$g(\tilde{x}) = \begin{cases} d_E(\tilde{x} - 1) + d_C, & \text{si } \tilde{x} > 1, \\ d_C\tilde{x}, & \text{si } |\tilde{x}| \leq 1, \\ d_E(\tilde{x} + 1) - d_C, & \text{si } \tilde{x} < -1. \end{cases} \quad (1.37)$$

Demostración. Cuando $a_{22} \neq 0$, desde la ecuación $H(x, y, z) = h$, donde H está dada en (1.32), podemos despejar x como:

$$x = \frac{a_{12}}{a_{22}}y + a_{11}q(z) - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}}z - \frac{h}{a_{22}}. \quad (1.38)$$

Sustituyendo la expresión de x anterior en la segunda y tercera ecuación de (1.25), conseguimos

$$\begin{cases} \dot{y} = \alpha_1 y - \alpha_2 z + a_{11}a_{21}q(z) - \frac{a_{21}h}{a_{22}}, \\ \dot{z} = \alpha_3 y - \alpha_4 z + a_{11}q(z) - \frac{h}{a_{22}}. \end{cases} \quad (1.39)$$

con

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a_{22}^2 + a_{12}a_{21}}{a_{22}}, & \alpha_2 &= \frac{a_{21}^2 a_{12}}{a_{22}}, \\ \alpha_3 &= \frac{a_{12}}{a_{22}}, & \alpha_4 &= \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Seguidamente, considerando el siguiente cambio de variable

$$\begin{cases} \tilde{x} = z, \\ \tilde{y} = \alpha_1 z - \alpha_3 y + \frac{h}{a_{22}}, \end{cases} \quad (1.41)$$

el sistema (1.39) se puede escribir en la forma (1.35), con lo que finaliza la demostración del resultado.

□

Ahora ofreceremos una breve explicación del significado de los anteriores teoremas. Supongamos que $a_{22} \neq 0$ y tomamos una condición inicial $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Esto fija la superficie invariante S_{h_0} donde está la órbita del sistema con condición inicial X_0 . Obviamente el valor h_0 es $h_0 = H(x_0, y_0, z_0)$, con H dada en (1.32).

A partir del valor $h = h_0$, determinamos la solución $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ del sistema (1.35) con condición inicial $\tilde{x}(0) = z_0$, $\tilde{y}(0) = \alpha_1 z_0 - \alpha_3 y_0 + \frac{h_0}{a_{22}}$. La solución $(x(t), y(t), z(t))$ del sistema (1.25) con condición inicial (x_0, y_0, z_0) está dada por:

$$\begin{cases} z(t) = \tilde{x}, \\ y(t) = \frac{\alpha_1 \tilde{x}(t) + \frac{h_0}{a_{22}} - \tilde{y}(t)}{\alpha_3}, \\ x(t) = \frac{a_{12}}{a_{22}} \left(\frac{\alpha_1 \tilde{x}(t) + \frac{h_0}{a_{22}} - \tilde{y}(t)}{\alpha_3} \right) + a_{11}q(\tilde{x}(t)) - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}}\tilde{x}(t) - \frac{h_0}{a_{22}}. \end{cases} \quad (1.42)$$

Nuestro nuevo sistema de dimensión dos tiene tres zonas como vemos en (1.35), sin embargo en este trabajo nos centraremos en dos de ellas, puesto que buscaremos oscilaciones periódicas bizonales

Capítulo 2

Sistemas Dinámicos Continuos

En este capítulo, realizaremos un repaso de los sistemas dinámicos continuos lineales a trozos, ya que hemos reducido nuestro circuito a un sistema de este tipo con las ecuaciones (1.25). Para hacerlo, primero repasaremos los conceptos fundamentales necesarios, que servirán como base posteriormente.

2.1. Sistemas lineales planos

En esta sección analizaremos los sistemas dinámicos continuos de 2 ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes. Algunos de los conceptos y resultados que se reflejan en esta sección pueden verse con más profundidad en [19], [20] y [21]. En primera instancia hay que definir lo que es un sistema dinámico continuo:

Un sistema dinámico es un conjunto de ecuaciones de cambio que describen la evolución temporal de algún fenómeno, que puede ser de cualquier naturaleza (eléctrico, económico, cinegético...), de manera que el estado presente del sistema viene determinado por los estados anteriores. El estado del sistema queda descrito por sus variables de estado. Cuando la evolución se estudia considerando el tiempo como una variable continua, decimos que el sistema es continuo y para analizar este tipo de sistemas la regla determinista que lo gobierna es su sistema de ecuaciones diferenciales.

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes en el plano tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + b_1, \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + b_2. \end{cases} \quad (2.1)$$

Escribiremos el sistema (2.1) en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

O de forma más simplificada:

$$\dot{X} = AX + B. \quad (2.3)$$

Cuando $B = \vec{0}$ el sistema se denomina homogéneo. Por el contrario cuando $B \neq \vec{0}$ el sistema se denomina no homogéneo. Las condiciones iniciales del sistema serán:

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (2.4)$$

Que en forma matricial se escribe como:

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = X_0. \quad (2.5)$$

Al conjunto del sistema y a sus condiciones iniciales se le denomina *Problema de Valor Inicial (PVI)*:

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)X + B(t), & \rightarrow \text{Sistema Diferencial (S.D.)} \\ X(t_0) = X_0. & \rightarrow \text{Condiciones Iniciales (C.I.)} \end{cases} \quad (2.6)$$

Lo primero que se debe hacer con este tipo de problemas es comprobar la existencia y unicidad de sus soluciones, por ello a continuación presentaremos el Teorema de existencia y unicidad pero se puede consultar mas en profundidad en [18] y [20].

Teorema 2.1 (Existencia y Unicidad). *Para cada $X_0 \in \mathbb{R}^2$, el problema de valor inicial (2.6) posee una única solución $X(t)$ definida en todo \mathbb{R} .*

Una solución

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

puede ser considerada como una curva en el plano. Este plano se denomina *Plano de Fases* y las *Curvas Solución* se denominan *Órbitas o Trayectorias* del sistema.

Por último, veamos como obtener y analizar los puntos de equilibrio del sistema en el plano. Primero escribamos el sistema (2.1) de otra forma para ver los siguientes apartados mejor:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = S(x, y), \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = V(x, y). \end{cases} \quad (2.8)$$

Definición 2.1. *Los puntos (\bar{x}, \bar{y}) que anulan simultáneamente las funciones S y V del sistema (2.8) se denominan Puntos de Equilibrio o Críticos del sistema:*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix}, \\ A \bar{X} &= -b. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Si el $\det(A) \neq 0$ de (2.9), el sistema posee un único punto de equilibrio; este punto se dice solución constante del sistema.

Lo siguiente será realizar una translación del punto de equilibrio para que esté en el origen $(0\ 0)^T$, en caso de no estarlo. Para ello aplicaremos los siguientes cambios de variable:

$$\begin{cases} \tilde{X} = x - \bar{x}, \\ \tilde{Y} = y - \bar{y}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Por lo que ahora tenemos:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{X}}{dt} = S(\tilde{X} - \bar{x}, \tilde{Y} - \bar{x}), \\ \frac{d\tilde{Y}}{dt} = V(\tilde{X} - \bar{x}, \tilde{Y} - \bar{x}). \end{cases} \quad (2.11)$$

Donde el punto $(0\ 0)^T$ es el punto de equilibrio.

Lo que veremos a continuación es la disposición de las soluciones en torno al punto de equilibrio, y la estabilidad del mismo. Consideraremos el sistema autónomo lineal con punto de equilibrio en el origen que hemos obtenido tras el cambio de variable:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Como vemos, con el cambio de variable no se ha modificado la matriz A que es la que nos indicará todo respecto a la estabilidad del punto crítico. Veremos los tres casos que se estudian en este trabajo: Foco Asintóticamente Estable, Foco Inestable y Centro. Para una descripción precisa de otros tipos de puntos de equilibrio (nodo, silla, ...) puede consultarse [18] y [20].

Para conocer la estabilidad de los puntos de equilibrio debemos estudiar el polinomio característico de la matriz A :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A), \\ \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \\ \text{tr}(A) &= a_{11} + a_{22}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\text{Donde los autovalores son } \implies \lambda = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A)}}{2}.$$

A continuación clasificaremos los diferentes tipos de punto de equilibrio dependiendo de los autovalores

- **Foco Asintóticamente Estable**

Las curvas solución tienden al punto de equilibrio en forma espiral. Esta situación se tiene cuando:

- $\text{tr}(A) < 0$
- $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) < 0$

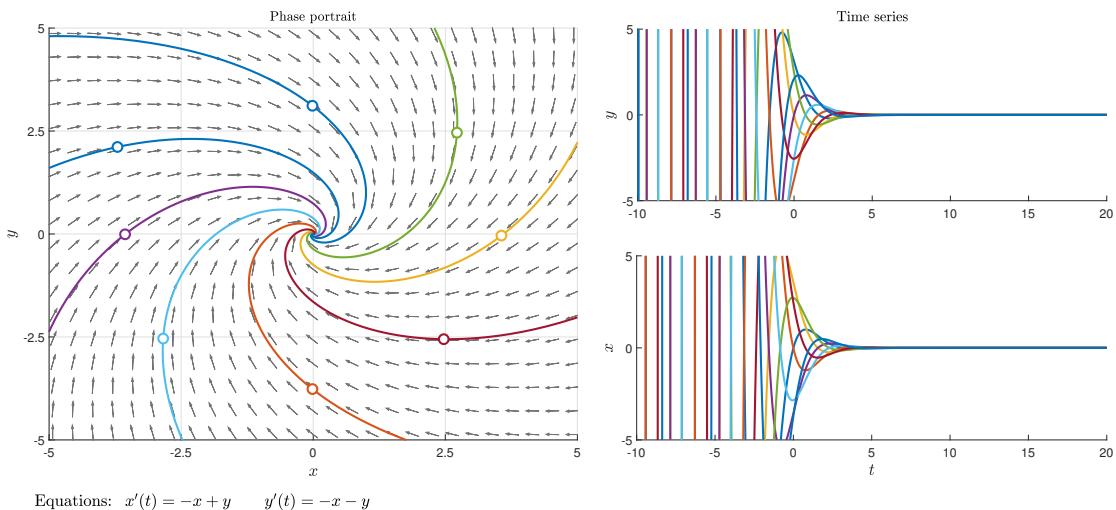


Figura 2.1: Foco asintóticamente estable visto en el plano de fases xy (izquierda) y la variacion de x e y frente al tiempo (derecha).

Un ejemplo de foco asintóticamente estable se consigue con la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \text{tr}(A) = -2 < 0 \\ \det(A) = 4 - 4(2) < 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

En la Fig. 2.1 podemos observar diferentes órbitas acercándose al foco del sistema (2.12) con la matriz A (2.14). La simulación se ha realizado con la aplicación *Phase Plane and Slope Fields* (ver [23]), una herramienta diseñada con MATLAB (ver [22]) para el dibujo en el plano de fases de órbitas de sistemas planos. Esta herramienta se usará a lo largo de todo el trabajo.

- Foco Inestable

Las curvas solución tienden al alejarse del punto de equilibrio. Este caso ocurre cuando se cumplen las siguientes condiciones:

- $\text{tr}(A) > 0$
- $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) < 0$

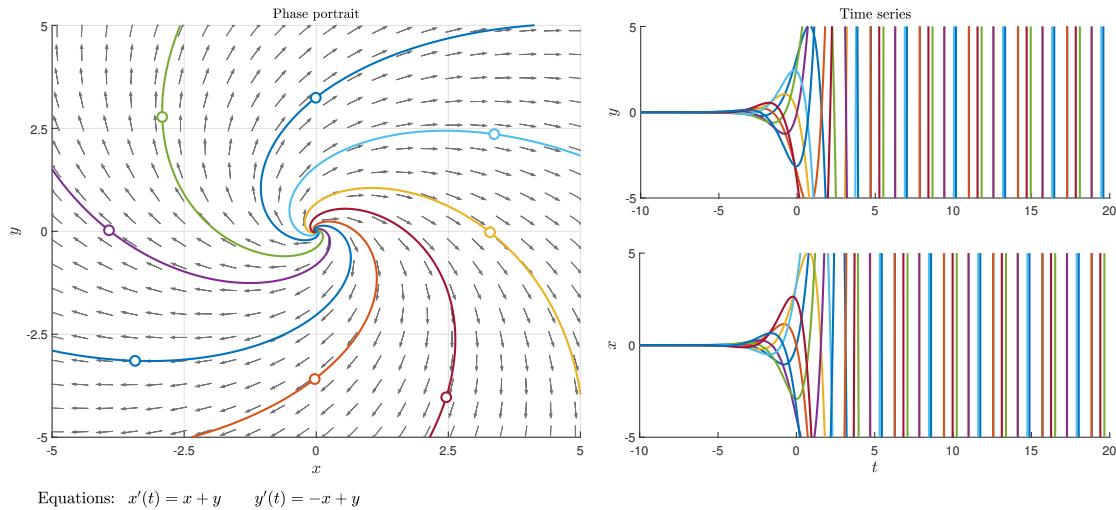


Figura 2.2: Foco Asintóticamente Inestable visto en el plano de fases xy (izquierda) y la variacion de x e y en el tiempo (derecha).

Se puede lograr una situación de foco inestable utilizando la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \text{tr}(A) = 2 > 0 \\ \det(A) = 4 - 4(2) < 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

En la Fig. 2.2, se pueden notar diversas trayectorias alejándose del punto de equilibrio del sistema (2.12), empleando la matriz A (2.15).

- Centro

Las curvas solución son concéntricas al punto crítico. Esta circunstancia se presenta cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\text{tr}(A) = 0$
- $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) < 0$

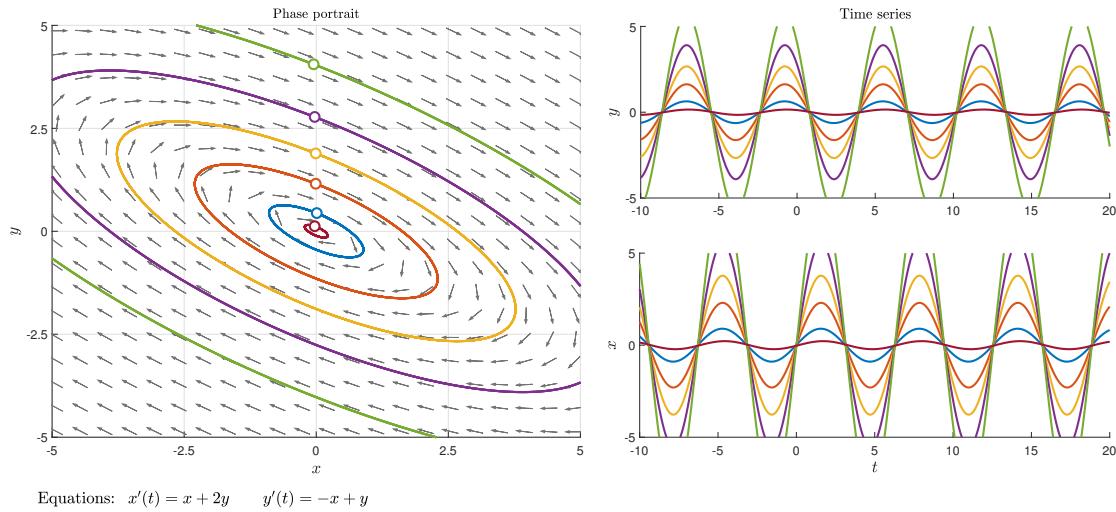


Figura 2.3: Centro en el plano de fases xy (izquierda) y la variación de x e y en el tiempo (derecha).

Es posible alcanzar una situación de centro empleando la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \text{tr}(A) = 1 - 1 = 0 \\ \det(A) = 0 - 4(1) < 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

En la figura 2.3, se pueden observar múltiples trayectorias concéntricas alrededor del punto de equilibrio del sistema (2.12), utilizando la matriz A (2.16).

2.2. Sistemas lineales a trozos bizonales

En esta sección, exploraremos el empleo de formas canónicas con el propósito de reducir el conjunto de parámetros que inciden en el sistema, aprovechando estas formas canónicas y las propiedades inherentes a ellas para analizar con mayor profundidad la oscilación periódica en nuestro circuito.

Definición 2.2. *Un sistema dinámico continuo lineal a trozos plano con dos zonas de linealidad es un sistema de ecuaciones diferenciales con la siguiente forma:*

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = S(x) = \begin{cases} A_1x + b_1 & \text{si } x^T \cdot w + \delta \leq 0, \\ A_2x + b_2 & \text{si } x^T \cdot w + \delta < 0, \end{cases} \quad (2.17)$$

donde $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, las matrices A_1 y A_2 son reales de orden 2, $b_1, b_2, w \in \mathbb{R}^2$ con $w \neq \vec{0}$ y $\delta \in \mathbb{R}$ y se satisface la condición de continuidad: $A_1x + b_1 = A_2x + b_2$ sobre la recta de separación: $x^T \cdot w + \delta = 0$.

Teorema 2.2. *Para cada $X_0 \in \mathbb{R}^2$, el problema de valor inicial asociado al sistema (2.17) con condición inicial $X(0) = X_0$ posee una única solución definida en todo \mathbb{R} .*

El Teorema 2.2 y su demostración pueden verse más en profundidad en [8].

Tras un adecuado giro y una conveniente traslación es posible hacer que la recta de separación pueda convertirse en la recta de ecuación $x_1 = 0$. De esta forma, las matrices del sistema deben compartir sus segundas columnas y los términos independientes de los sistemas a cada lado de la recta $x_1 = 0$ deben coincidir. Enunciaremos este hecho en el siguiente resultado

Proposición 2.1. *Todo sistema plano lineal a trozos con dos zonas puede escribirse en la forma:*

$$\dot{x} = S(x) = \begin{cases} B_1x + c & \text{si } x_1 \leq 0, \\ B_2x + c & \text{si } x_1 < 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

donde $x = (x_1, x_2)^T, c \in \mathbb{R}^2$ y las matrices B_1, B_2 comparten, por continuidad, sus segundas columnas; esto es:

$$B_1 - B_2 = (B_1 - B_2) e_1 e_1^T \quad (2.19)$$

siendo $e_1 = (1, 0)^T$ el primer vector de la base canónica \mathbb{R}^2 .

Se ha reducido bastante el número de parámetros, ahora tenemos ocho, donde seis de ellos vienen de las matrices B_1 y B_2 y dos de c . Para seguir reduciendo parámetros tengamos en cuenta que estamos buscando oscilaciones que ocupan dos zonas, y estas no aparecen en sistemas unidimensionales, por lo que el primer término de las segundas columnas de las matrices B_1 y B_2 no puede ser nulo. Esta condición se denomina condición de observabilidad (ver [9] y [8]). Mediante el cambio de variable oportuno convertiremos este término en (-1) . En primer lugar escribimos el sistema (2.18) de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} b_{11}^1 & b_{12} \\ b_{21}^1 & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0, \\ \begin{pmatrix} b_{11}^2 & b_{12} \\ b_{21}^2 & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 < 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Aplicamos el siguiente cambio de variable (recordando que $b_{12} \neq 0$):

$$X_2 = -b_{12} x_2 - c_1, \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{-X_2 - c_1}{b_{12}}. \quad (2.21)$$

Para el caso $x_1 \leq 0$ del sistema (2.20) aplicando el cambio de variable (2.21):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= b_{11}^1 x_1 + b_{12} x_2 + c_1 - 1 = b_{11}^1 x_1 + b_{12} \left(\frac{-X_2 - c_1}{b_{12}} \right) + c_1 = b_{11}^1 x_1 - X_2. \\ \dot{X}_2 &= -b_{12} \dot{x}_2 = -b_{12} \left(b_{21}^1 x_1 + b_{22} x_2 + c_2 \right), \\ &= -b_{12} b_{21}^1 x_1 + b_{22} (-b_{12} x_2) - b_{12} c_2, \\ &= -b_{12} b_{21}^1 x_1 + b_{22} (X_2 + c_1) - b_{12} c_2, \\ &= -b_{12} b_{21}^1 x_1 + b_{22} X_2 + b_{22} c_1 - b_{12} c_2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

De forma análoga, para $x_1 > 0$ del sistema (2.20):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = b_{11}^2 x_1 - X_2, \\ \dot{X}_2 = -b_{12} b_{21}^2 x_1 + b_{22} X_2 + b_{22} c_1 - b_{12} c_2. \end{cases} \quad (2.23)$$

Tomando $c_{11}^i = b_{11}^i$, $c_{21}^i = -b_{12} b_{21}^i$, $c_{22} = b_{22}$, $d_2 = b_{22} c_1 - b_{12} c_2$ y renombrando X_2 como x_2 , obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} c_{11}^1 & -1 \\ c_{21}^1 & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0, \\ \begin{pmatrix} c_{11}^2 & -1 \\ c_{21}^2 & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 < 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Se ha conseguido eliminar otros dos parámetros del sistema, además solo se han realizado cambios lineales, por lo que las matrices del sistema son semejantes, es decir, poseen mismos polinomios característicos, autovalores, traza y determinante.

Lo que resta es pasar a la forma canónica de Liénard y esto se enuncia en el siguiente resultado.

Teorema 2.3. *Existe un cambio de variable que transforma el sistema (2.24) en la forma canónica de Liénard:*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} T_L & -1 \\ D_L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0, \\ \begin{pmatrix} T_R & -1 \\ D_R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > 0, \end{cases} \quad (2.25)$$

con $a \in \mathbb{R}$.

Demostración. Usando el siguiente cambio de variable:

$$X_2 = c_{22}x_1 + x_2, \quad \rightarrow \quad x_2 = X_2 - c_{22}x_1. \quad (2.26)$$

Para $x_1 \leq 0$, el sistema (2.24) se escribe como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= c_{11}^1 x_1 - x_2 = c_{11}^1 x_1 - (X_2 - c_{22}x_1) = x_1(c_{11}^1 + c_{22}) - X_2. \\ \dot{X}_2 &= c_{22}\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = c_{22}(c_{11}^1 x_1 - x_2) + (c_{21}^1 x_1 + c_{22}x_2 + d_2), \\ &= c_{22}c_{11}^1 x_1 - c_{22}x_2 + c_{21}^1 x_1 + c_{22}x_2 + d_2, \\ &= x_1(c_{22}c_{11}^1 + c_{21}^1) + d_2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

De forma análoga, para $x_1 > 0$ obtenemos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(c_{11}^2 + c_{22}) - X_2, \\ \dot{X}_2 = x_1(c_{22}c_{11}^2 + c_{21}^2) + d_2. \end{cases} \quad (2.28)$$

Tomando $T_L = c_{11}^1 + c_{22}$, $D_L = c_{22}c_{11}^1 + c_{21}^1$, $T_R = c_{11}^2 + c_{22}$, $D_R = c_{22}c_{11}^2 + c_{21}^2$, renombrando X_2 como x_2 , obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} T_L & -1 \\ D_L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0, \\ \begin{pmatrix} T_R & -1 \\ D_R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

y tomando $a = -d_2$ terminamos la prueba. \square

Comentario 1. En el anterior teorema, su correspondiente demostración y a lo largo de lo que resta de trabajo, los términos T_L, D_L, T_R, D_R hacen referencia a las trazas (T_L, T_R) y determinantes (D_L, D_R) de las matrices características de cada uno de los sistemas a la derecha (subíndice R) y a la izquierda (subíndice L) de la recta de separación.

Por último, escribiremos el sistema (2.25) de manera más gráfica:

$$\left(\begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} T_L & -1 \\ D_L & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} 0 \\ a \end{array} \right) \quad \left| \quad \left(\begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} T_R & -1 \\ D_R & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} 0 \\ a \end{array} \right) \right.$$
$$x_1 = 0 \quad (2.30)$$

Esta forma “gráfica” de escribir un sistema lineal a trozos con dos zonas se volverá a usar varias veces a lo largo de esta memoria.

Capítulo 3

Semiacplcaciones de Poincaré

Dentro del análisis de sistemas dinámicos, la aplicación de Poincaré emerge como una herramienta de gran utilidad para investigar el comportamiento de un sistema específico. Este enfoque implica la elección de una superficie o una recta (conocida como sección de Poincaré) en el espacio de fases del sistema, de tal modo que las curvas solución del mismo atraviesen esta sección, permitiéndonos así examinar el comportamiento de las trayectorias. Cabe destacar que esta aplicación se centra en los puntos de corte de las órbitas con la sección de Poincaré. El análisis de los puntos de corte nos permite obtener información importante sobre el comportamiento dinámico del sistema.

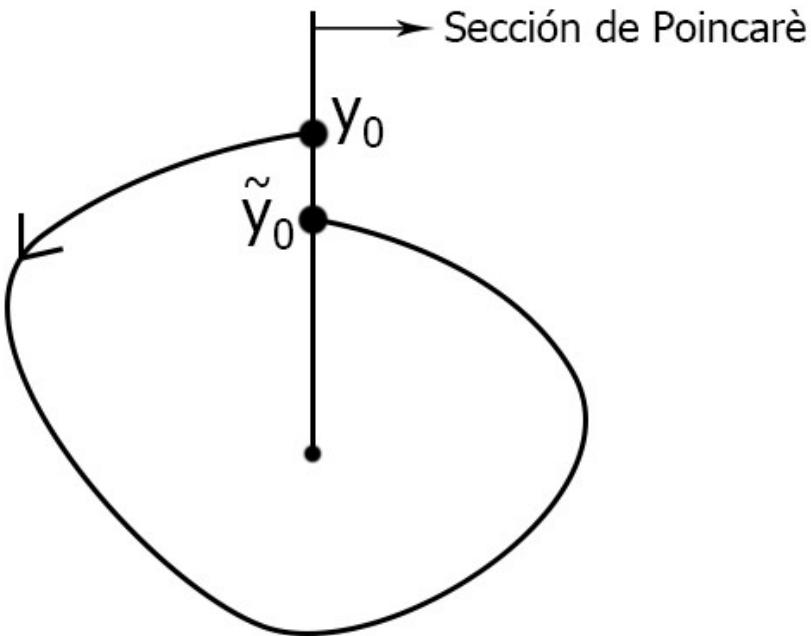


Figura 3.1: Punto y_0 y su imagen \tilde{y}_0 mediante la aplicación de Poincaré. Esta órbita no es periódica

Como se representa en la Fig. 3.1, el enfoque de estudio implica una serie de pasos. En primer lugar, se selecciona una sección de Poincaré que corta a la curva solución, posteriormente se elige como punto inicial el punto de corte y_0 de dicha curva solución con la sección de Poincaré. Luego, se procede a analizar cómo esta trayectoria evoluciona a lo largo del tiempo y si vuelve a cortar a la sección de Poincaré en un punto \tilde{y}_0 . En última instancia, si la órbita vuelve a intersectar en el mismo punto, es decir, $y_0 = \tilde{y}_0$, podemos concluir que dicha órbita exhibe un comportamiento periódico.

En este trabajo, nos enfocaremos en las semiaplicaciones de Poincaré, lo que significa que examinaremos las dos mitades de la órbita de forma independiente. Este enfoque se justifica en el hecho de que nuestro sistema (2.30) es un sistema a trozos, que ya presenta una división en la recta $x_1 = 0$, la cual se utilizará como sección de Poincaré.

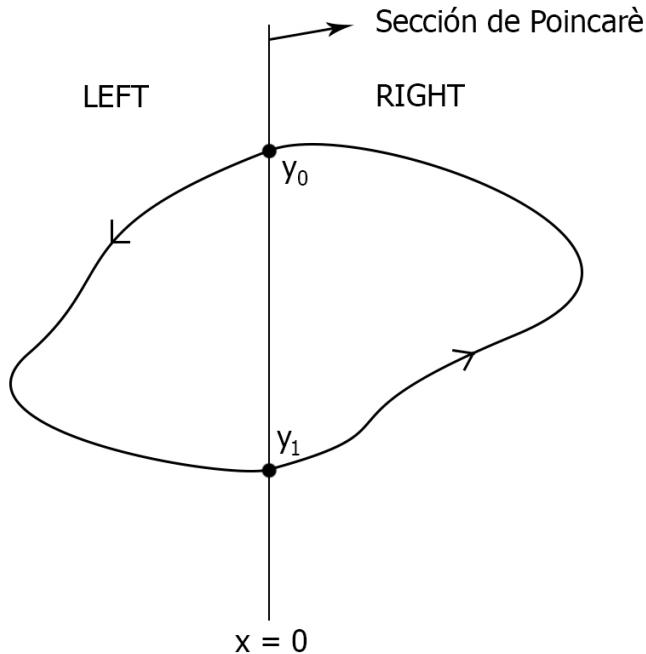


Figura 3.2: Semiaplicaciones de Poincaré derecha e izquierda de un sistema que posee una órbita periódica

En este proceso, identificaremos un punto de intersección inicial, denotado como y_0 , en la sección de Poincaré. A continuación, procedemos a buscar el siguiente punto de intersección y_1 empleando la semiaplicación izquierda. Posteriormente, mediante la semiaplicación derecha, comprobamos si la órbita vuelve a intersectar la sección de Poincaré en el mismo punto y_0 (lo que indicaría una órbita periódica, como se ilustra en la Fig. 3.2), o si no lo hace (lo que indicaría una órbita no periódica).

Puesto que los sistemas que definen el sistema (2.30) tienen una misma estructura, definiremos la semiaplicación de Poincaré izquierda asociada al siguiente sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

para lo que resta de capítulo.

A continuación presentaremos la definición de la semiaplicación de Poincaré izquierda P_L . La definición de la semiaplicación de Poincaré derecha P_R puede hacerse a partir de la semiaplicación izquierda ya que el sistema (3.1) no varía sus propiedades cuando se le aplica el cambio de variable $(x, y, a) \longleftrightarrow (-x, -y, -a)$.

Denotaremos como $\Sigma = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ a la sección de Poincaré, con

$$\Sigma^L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\},$$

$$\Sigma^R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}.$$

recordando que los índices R y L harán alusión a las zonas derecha e izquierda. Si evaluamos la primera ecuación de (3.1) en la sección de Poincaré Σ , tenemos $\dot{x}|_{\Sigma} = -y$, pudiéndose deducir el sentido de las órbitas al atravesar o comenzar en Σ :

- La órbita va de Σ^L a Σ^R para $y < 0$.
- La órbita va de Σ^R a Σ^L para $y > 0$.

Asumiremos $a^2 + D^2 \neq 0$, ya que de no ser así, ninguna curva solución cortaría dos veces a Σ . Esto se puede deducir estudiando la segunda ecuación del sistema (3.1); para el caso contrario $a = D = 0$, tenemos $\dot{y} = Dx + a = 0$, y por lo tanto y es constante. Seguidamente proporcionaremos la definición rigurosa de la semiaplicación de Poincaré.

Definición 3.1. Consideremos un punto $(0, y_0) \in \Sigma$ con $y_0 \geq 0$ y denotamos por $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ a la solución del sistema (3.1), que para el instante inicial $t = 0$ cumple $\phi(0) = (0, y_0)$. Si existe un valor de tiempo $\tau > 0$ para el que se cumple $\phi_1(\tau) = 0$ y $\phi_1(t) < 0$ para todo $t \in (0, \tau)$, decimos que la imagen de y_0 mediante la semiaplicación izquierda de Poincaré es $P_L(y_0) = \phi_2(\tau) \leq 0$. El valor de tiempo τ se denomina semitiempo de vuelo izquierdo.

A continuación se puede ver la representación gráfica de las semiaplicaciones izquierda, [Fig. 3.3](#), y derecha, [Fig. 3.4](#), con la nomenclatura adoptada. En [13] se puede consultar más en profundidad la definición de la semiaplicación junto con sus dominios de definición.

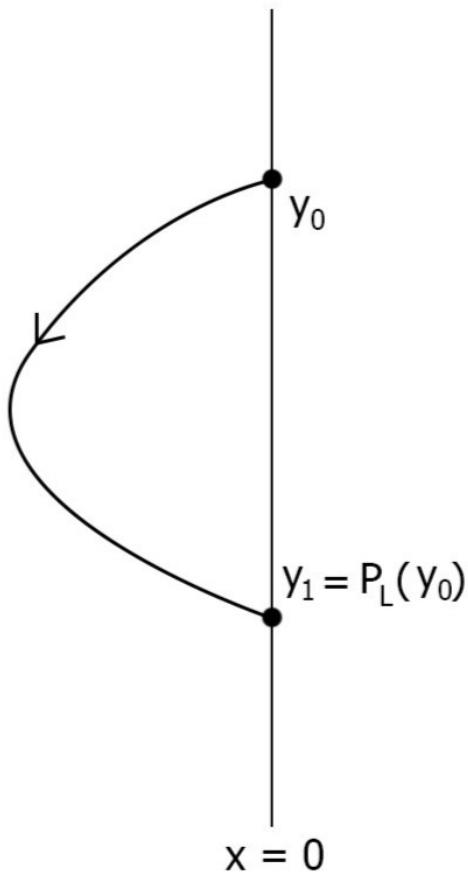


Figura 3.3: Semiaplicación de Poincaré Izquierda

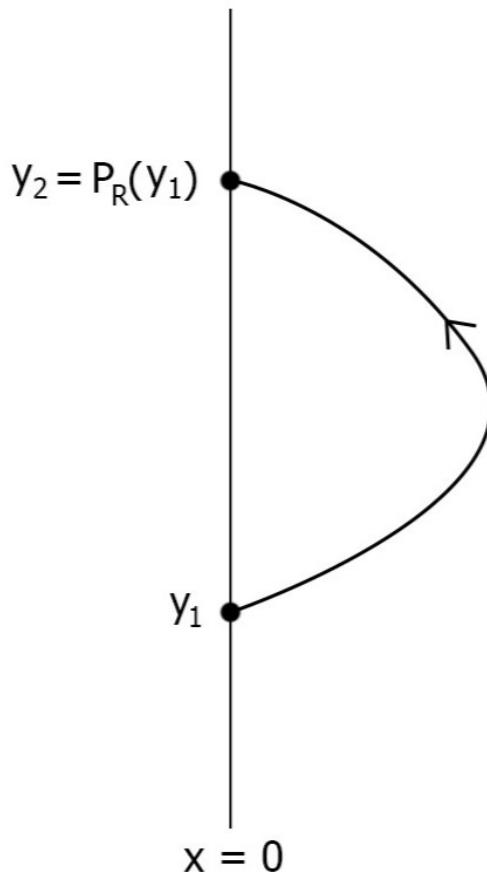


Figura 3.4: Semiaplicación de Poincaré Derecha

La Definición 3.1 nos invita a abordar la dinámica del sistema a través del cálculo explícito de sus soluciones, un enfoque clásico que conlleva una multiplicidad de casos debido a los espectros (conjunto de autovalores) de las matrices asociadas a cada sistema. Cada uno de estos casos requiere un análisis individual y la aplicación de diversas herramientas matemáticas específicas. Este enfoque puede dar lugar a una complicación considerable en el estudio y conducir a la obtención de resultados aparentemente divergentes para un mismo sistema, dependiendo de la elección de las herramientas matemáticas empleadas en su análisis.

Para evitar esta complejidad, optaremos por la caracterización integral de la semiaplicación de Poincaré, la cual se presenta detalladamente en la siguiente sección y que se encuentra disponible en la referencia [13]. Este enfoque nos permitirá abordar el sistema de una manera más coherente y sistemática, evitando las dificultades inherentes a la diversidad de casos que surgen en el enfoque clásico y dejar a un lado, en un principio, el inoportuno semitiempo de vuelo.

3.1. Caracterización integral de la semiaplicación de Poincaré

Antes de ver las expresiones de la Caracterización Integral se va a presentar el *Valor Principal de Cauchy* ya que se utiliza en las mismas. En [16] se puede consultar más en profundidad el valor principal de cauchy, así como otras de sus aplicaciones.

Definición 3.2. Consideremos un intervalo $[a, b]$ que contiene al origen y una función f continua en $[a, b] \setminus \{0\}$, el *Valor Principal de Cauchy* se define como:

$$PV \left\{ \int_a^b f(x)dx \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{-\epsilon} f(x)dx + \int_{+\epsilon}^b f(x)dx \right). \quad (3.2)$$

A continuación presentaremos las expresiones de la caracterización integral de recha e izquierda, y algunas propiedades de las mismas.

Caracterización integral de la semiaplicación de Poincaré izquierda:

Consideremos el dominio \mathcal{D}_L de la semiaplicación de Poincaré izquierda P_L y un punto $y_0 \in \mathcal{D}_L$

$$\begin{aligned} P_L : \mathcal{D}_L \subset [0, +\infty) &\longrightarrow (-\infty, 0], \\ y_0 &\longrightarrow y_1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

El valor y_1 en el recorrido de P_L , $y_1 \in P_L(\mathcal{D}_L)$, es la imagen de y_0 mediante P_L si y solo si:

$$PV \left\{ \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy \right\} = \frac{k_L \pi T_L}{D_L \sqrt{4 D_L - T_L^2}}. \quad (3.4)$$

donde

$$k_L = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0, \\ 1 & \text{si } a = 0, \\ 2 & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Caracterización integral de la semiaplicación de Poincaré derecha:

Consideremos el dominio \mathcal{D}_R de la semiaplicación de Poincaré derecha P_R y un punto $y_0 \in \mathcal{D}_R$

$$\begin{aligned} P_R : \mathcal{D}_R &\subset (-\infty, 0] \longrightarrow [0, +\infty), \\ y_1 &\longrightarrow y_2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

El valor y_1 en el recorrido de P_R , $y_1 \in P_R(\mathcal{D}_R)$, es la imagen de y_0 mediante P_R si y solo si:

$$PV \left\{ \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_R y^2 - a T_R y + a^2} dy \right\} = \frac{-k_R \pi T_R}{D_R \sqrt{4 D_R - T_R^2}}. \tag{3.6}$$

donde

$$k_R = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 0, \\ 1 & \text{si } a = 0, \\ 2 & \text{si } a > 0. \end{cases}$$

En las siguientes páginas, proporcionaremos ejemplos de P_L , P_R , y P_R^{-1} que dan lugar a una órbita periódica ([Fig. 3.7](#), [Fig. 3.8](#)) y, por otro lado, ejemplos en los que no se forma una órbita periódica ([Fig. 3.5](#), [Fig. 3.6](#)).

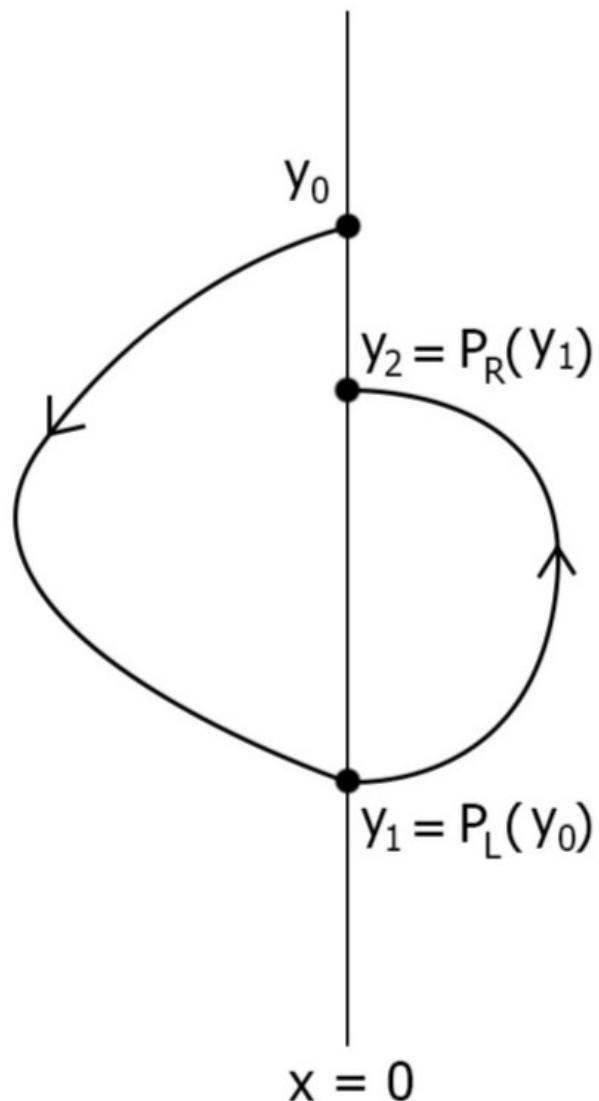


Figura 3.5: Semiaplicación izquierda del punto y_0 y semiaplicación derecha del punto y_1 con diferentes valores y_0, y_2 por lo que no se ha cerrado la órbita.

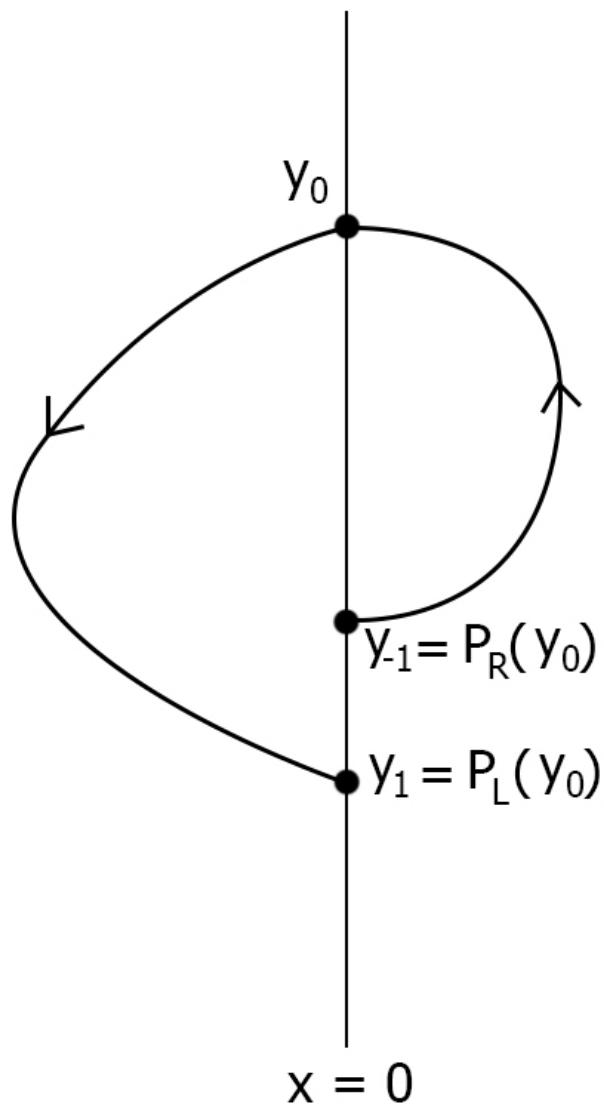


Figura 3.6: Semiaplicación izquierda del punto y_0 y la inversa de la semiaplicación derecha del punto y_0 con diferentes valores y_1 , y_{-1} por lo que no se ha cerrado la órbita.

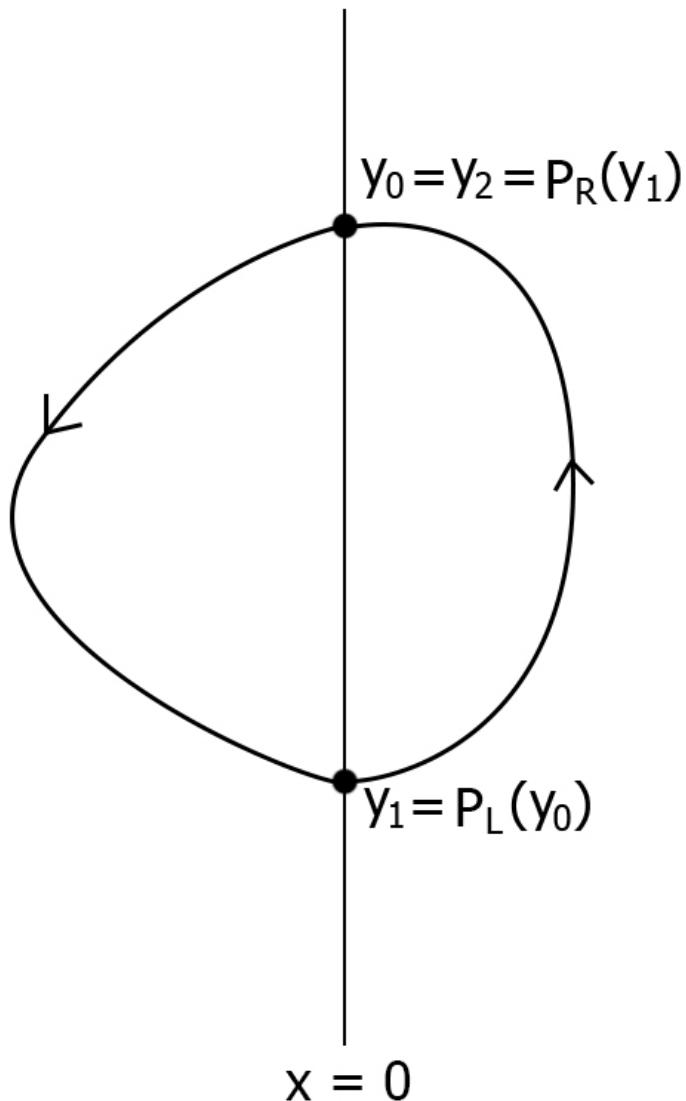


Figura 3.7: Semiaplicación izquierda del punto y_0 y semiaplicación derecha del punto y_1 con mismos valores y_0, y_2 por lo que si se ha cerrado la órbita, formándose una órbita periódica.

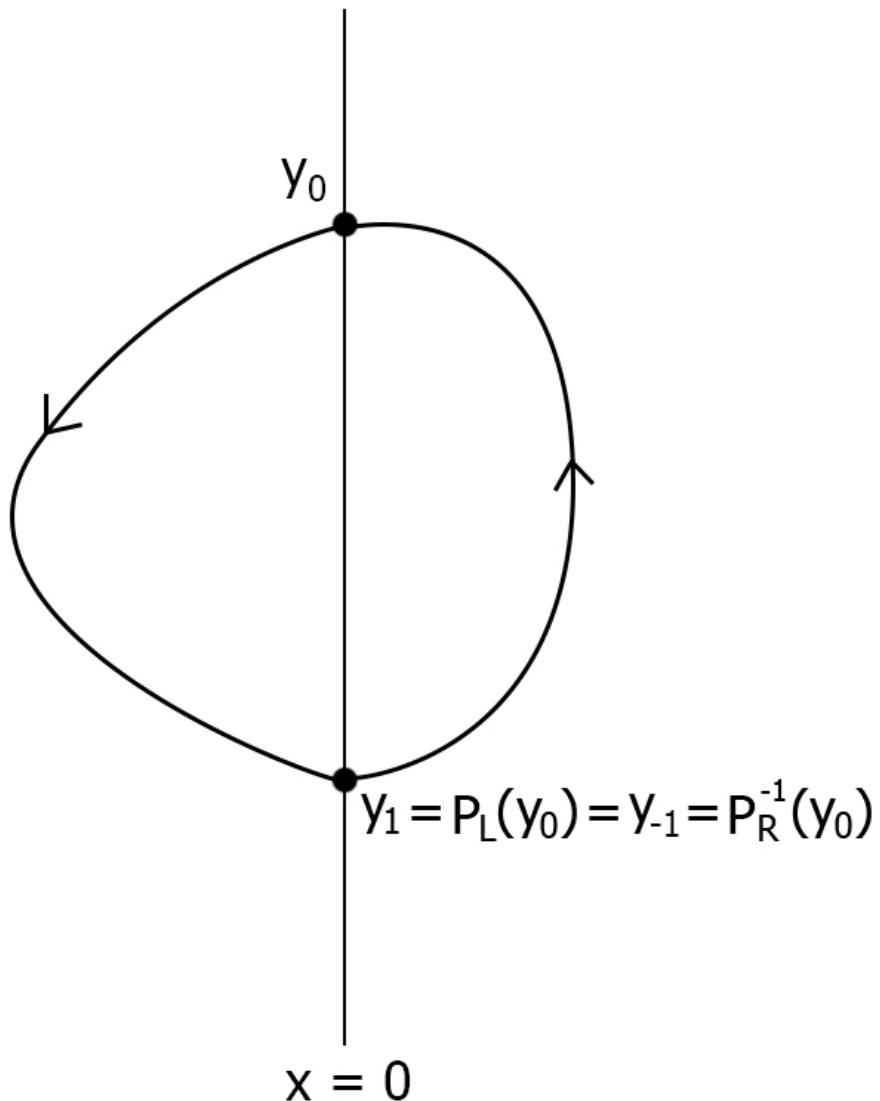


Figura 3.8: Semiaplicación izquierda del punto y_0 y la inversa de la semiaplicación derecha del punto y_0 con mismos valores y_1, y_{-1} por lo que si se ha cerrado la órbita formándose una órbita periódica.

Para encontrar una órbita periódica del sistema (2.30) debemos buscar valores que cumplan $y_0^* \in \mathcal{D}_L$, $y_1^* \in \mathcal{D}_R$ tales que

$$\begin{cases} P_L(y_0^*) = y_1^*, \\ P_R(y_1^*) = y_0^*, \end{cases}$$

de manera equivalente

$$\begin{cases} P_L(y_0^*) = y_1^*, \\ P_R^{-1}(y_0^*) = y_1^*, \end{cases}$$

de modo que

$$P_L(y_0^*) = P_R^{-1}(y_0^*), \quad y_0^* \in \mathcal{D}_L \cap P_R(\mathcal{D}_R).$$

Recordando que $y_0 \geq 0$ e $y_1 \leq 0$, si representamos las gráficas $y_1 = P_L(y_0)$ e $y_1 = P_R^{-1}(y_0)$, una órbita periódica corresponde a un punto de corte entre dichas gráficas, esto se presenta en la Fig. 3.9.

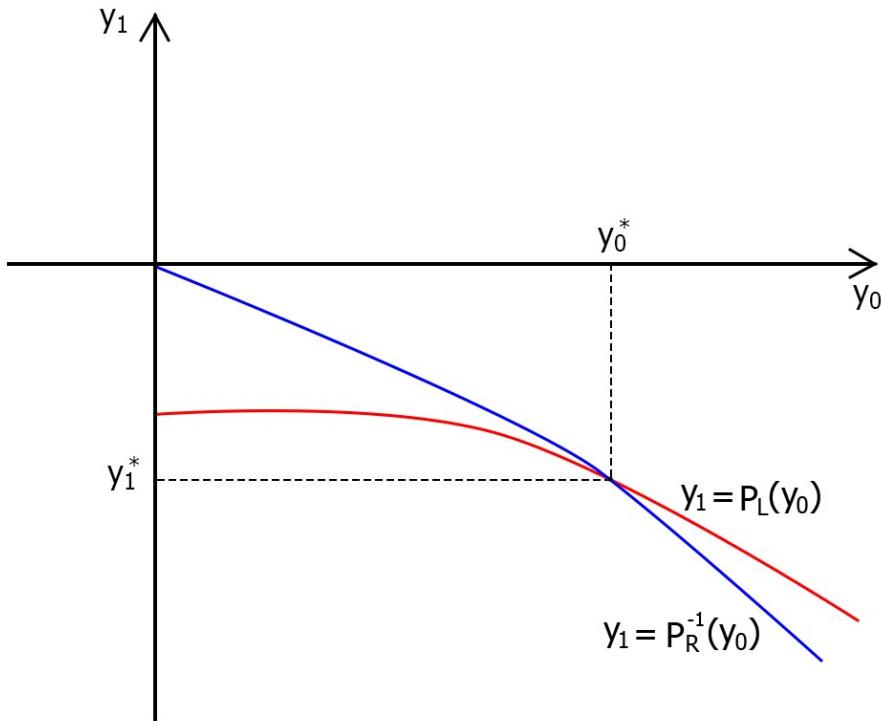


Figura 3.9: Punto de corte entre $y_1 = P_L(y_0)$ e $y_1 = P_R^{-1}(y_0)$ que corresponde a una solución periódica del sistema (2.30).

A continuación veremos un ejemplo de la Caracterización Integral de la semi-aplicación de Poincaré en MATLAB para entender un poco mejor la estrategia de búsqueda de la órbita periódica.

```
% Ejemplo 1
a=-1; % Pto. de equilibrio en zona IZQUIERDA
kL=2; kR=0; % kL,R en función del signo de aL,R
TL=0.3; TR=-0.5; % Condiciones para que exista oscilación
DL=1; DR=1; % Condiciones para que exista oscilación

y0 = 1.5; % Punto y0 > 0 de prueba

y1_L = semipoinca(kL,a,TL,DL,y0)
y1_R = semipoinca(kR,a,TR,DR,y0)

>> Ejemplo_1

y1_L =
-3.5193

y1_R =
-2.3065
```

Función usada en “Ejemplo 1”:

```
function y1 = semipoinca(k,a,T,D,y0)
% Calcula la semiaplicación en el intervalo y1 -> y0
% Valores de entrada k,a,T,D,y0.
% Dado y0 devuelve y1
inicial = -y0;
cte = (k*pi*T)/(D*sqrt(4*D-T^2));
ecuacion = @(y1) integral(@(y) (-y./((D.*y.^2)-(a.*T.*y)
+(a.^2))),y1,y0)-cte;
y1 = fzero(ecuacion,inicial);
end
```

La función *semipoingca* es la aplicación directa de la caracterización integral en MATLAB. Veamos que se está haciendo:

Primero vamos a reordenar por ejemplo la expresión de la caracterización izquierda (3.4) (con la expresión de la caracterización derecha el procedimiento es el mismo):

$$\int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy - \frac{k_L \pi T_L}{D_L \sqrt{4 D_L - T_L^2}} = 0. \quad (3.7)$$

como vemos en *semipoingca* tenemos como argumentos de entrada k, a, T, D, y_0 y como argumento de salida y_1 , por lo que la ecuación (3.7) se puede reducir a:

$$f(y_1) = 0. \quad (3.8)$$

Finalmente la ecuación (3.8) ya está en la forma adecuada para resolverla con la función *fzero* de MATLAB, introduciendo como punto inicial $-y_0$. La función *fzero* resuelve de manera numérica una ecuación tipo $f(x) = 0$ a partir de un punto inicial x_0 dado.

El código de “Ejemplo 1” describe las características de los sistemas a la izquierda y a la derecha, establece un punto de prueba $y_0 = 1.5$ y llama a la función *semipoingca* para calcular la semiaplicación de Poincaré izquierda y la inversa de la semiaplicación de Poincaré derecha. Como se ve obtenemos valores diferentes, de hecho, la semiaplicación izquierda tiene un valor mayor que la derecha, gráficamente podría ser perfectamente lo representado en la Fig. 3.6.

A continuación, procederemos a representar de manera gráfica la semiaplicación izquierda y la inversa de la semiaplicación derecha en un intervalo de puntos $y_0 \in [0, 10]$ para determinar si existe un punto de intersección que nos indique que, para un valor de y_0 dado, sus imágenes son idénticas.

```
% Ejemplo 2
a=-1; % Pto. de equilibrio en zona IZQUIERDA
kL=2; kR=0; % kL,R en función del signo de aL,R
TL=0.3; TR=-0.5; % Condiciones para que exista oscilacion
DL=1; DR=1; % Condiciones para que exista oscilacion

fplot(@(y0)semipoinga(kL,a,TL,DL,y0),[0 10], 'r');
xlabel('y0');
ylabel('y1');
hold on;

fplot(@(y0)semipoinga(kR,a,TR,DR,y0),[0 10], 'b');
xlabel('y0');
ylabel('y1');
hold on;

grid on;
legend('Semiaplicacion Izquierda','Semiaplicacion Inversa
Derecha');
shg
```

En este caso, empleamos la función *fplot*, que evalúa la función para diferentes valores de y_0 , abarcando un rango desde cero hasta diez como hemos definido. La representación gráfica muestra la semiaplicación izquierda en rojo y la semiaplicación inversa derecha en azul (ver Fig. 3.10).

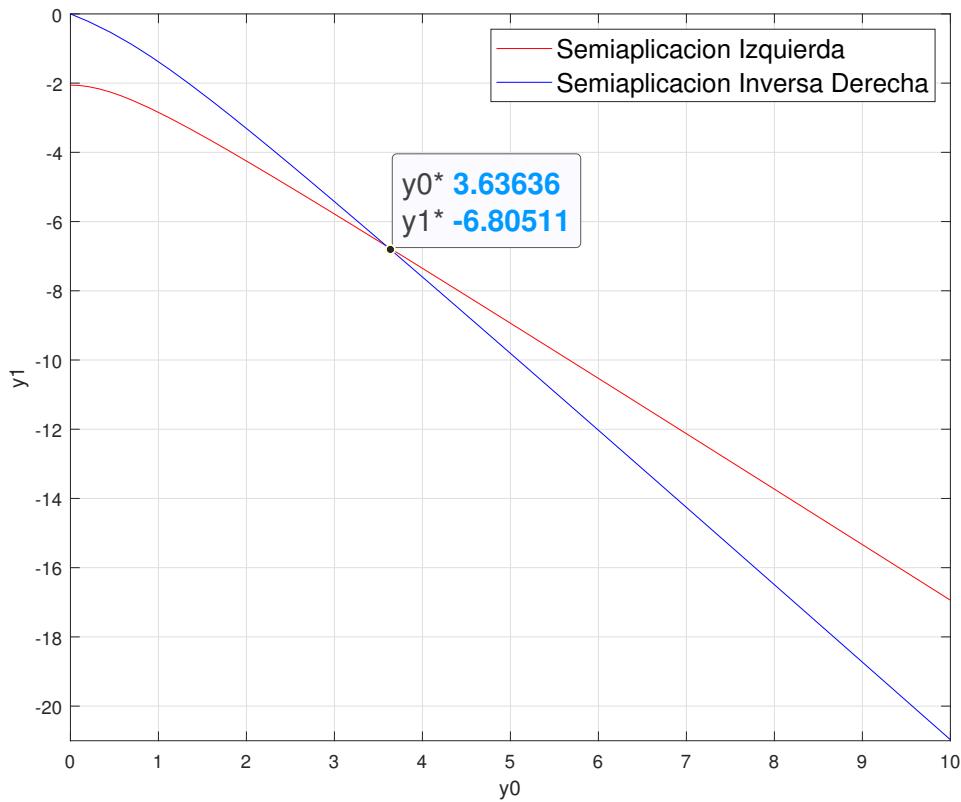


Figura 3.10: Gráfica obtenida de la semiaplicación izquierda y la semiaplicación inversa derecha en el cuarto cuadrante de “Ejemplo 2”

Como vemos en la Fig. 3.10 efectivamente se cortan las gráficas, simplemente pinchando más o menos en el punto de corte vemos que las semiaplicación izquierda y la inversa de la semiaplicación derecha tendrán la misma imagen $y_1 \approx -6.80511$ cuando $y_0 \approx 3.63636$.

Una vez hemos identificado un punto cercano a la solución que buscamos, procederemos a calcularla de manera precisa utilizando *fsolve* en MATLAB. Sin embargo, antes de hacerlo, es importante asegurarse de que la función esté escrita de manera correcta.

```
% Ejemplo 3
a=-1; % Pto. de equilibrio en zona IZQUIERDA
kL=2; kR=0; % kL,R en funcion del signo de aL,R
TL=0.3; TR=-0.5; % Condiciones para que exista oscilacion
DL=1; DR=1; % Condiciones para que exista oscilacion

Punto_Inicial = [3.63636 -6.80511];

funcion = @(Y) fsolvepoinca(kL,kR,a,TL,TR,DL,DR,Y);

Punto_Solucion = fsolve(funcion,Punto_Inicial);

y0_Solucion = Punto_Solucion(1)
y1_Solucion = Punto_Solucion(2)

>> Ejemplo_3

Equation solved.

fsolve completed because the vector of function values is
    near zero
as measured by the value of the function tolerance, and
the problem appears regular as measured by the gradient.

<stopping criteria details>

y0_Solucion =
    3.5912

y1_Solucion =
    -6.7065
```

Funciones usadas en “Ejemplo 3”:

```

function H = fsolvepoinca(kL,kR,a,TL,TR,DL,DR,Y)
%Funciones para fsolve en la semiaplicacion de poincare
H(1)=semipoincay1y0(kL,a,TL,DL,Y);
H(2)=semipoincay1y0(kR,a,TR,DR,Y);
end

function valor = semipoincay1y0(k,a,T,D,Y)
% Resuelve Integral-cte = 0, dado y0 e y1
cte = (k*pi*T)/(D*sqrt(4*D-T^2));
y0=Y(1);
y1=Y(2);
valor = integral(@(y) (-y ./((D.*y.^2)-(a.*T.*y)+(a.^2))), ...
    y1,y0)-cte;
end

```

Efectivamente, como se puede apreciar en los resultados de “Ejemplo 3”, los valores que hemos obtenido son muy similares a los que se observaron en la Fig. 3.10. Por lo tanto, podemos afirmar que, para el sistema que hemos estudiado, existe una solución periódica con $y_0 \simeq 3.5912$ e $y_1 \simeq -6.7065$.

Los argumentos de entrada de la función “fsolvepoinca” incluyen los parámetros de los sistemas tanto de la derecha como de la izquierda, es decir, k_L , k_R , a , T_L , T_R , D_L y D_R . Además, se utiliza un vector de dos componentes Y . Como se puede apreciar en el código de “Ejemplo 3”, asignamos a este vector el punto de corte que aproximadamente obtuvimos a partir de la gráfica en la Fig. 3.10.

La función “fsolve” en el código de “Ejemplo 3” buscará el punto (y_0^*, y_1^*) en el cual las curvas de la semiaplicación izquierda y la semiaplicación inversa derecha se intersecan.

Por último, para confirmar la validez de nuestro análisis, realizaremos una simulación. Para ello, debemos reformular las ecuaciones de manera que puedan ser implementadas en la aplicación Phase Plane de MATLAB que ya se ha utilizado anteriormente en este trabajo. Tenemos el sistema lineal a trozos (2.30), que podemos expresar de la siguiente manera utilizando valores absolutos. También podríamos haber utilizado la función “signo” o las funciones *mkpp* y *ppval*.

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2} (x(T_R + T_L) + |x|(T_R - T_L)) - y, \\ \dot{y} = \frac{1}{2} (x(D_R + D_L) + |x|(D_R - D_L)) - a, \end{cases} \quad (3.9)$$

$$T_L = 0.3, \quad T_R = -0.5, \quad D_L = D_R = 1, \quad a = -1.$$

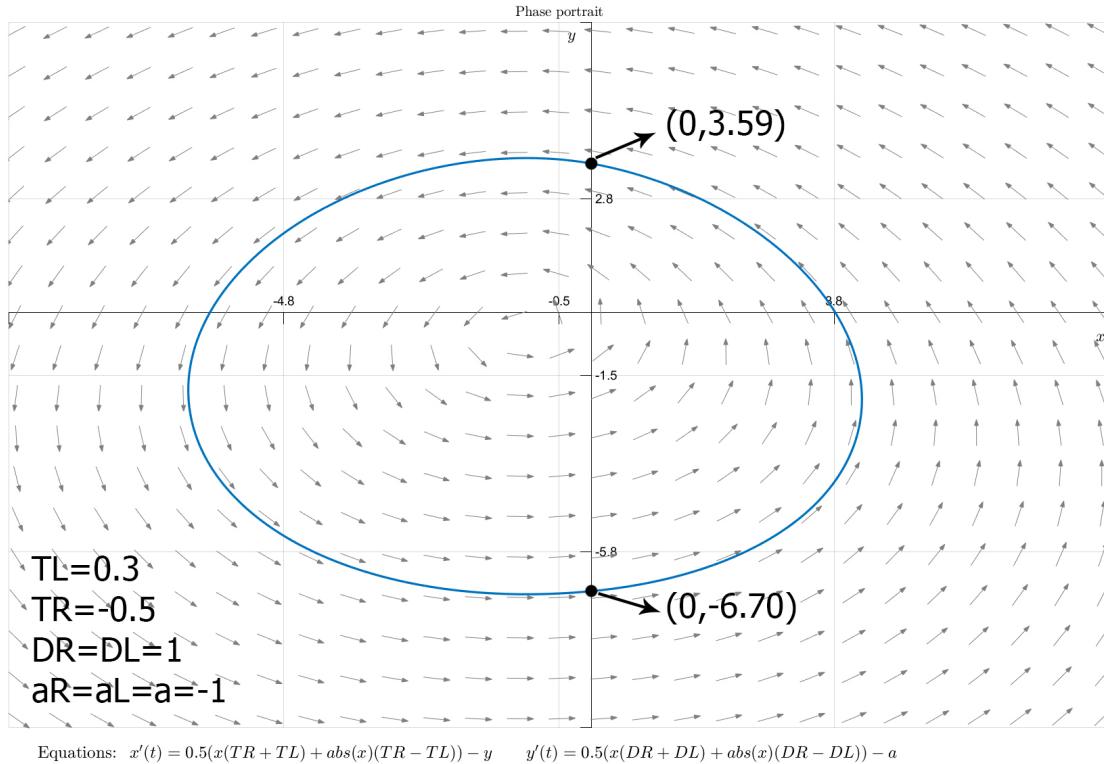


Figura 3.11: Órbita periódica, cuya existencia hemos establecido previamente con MATLAB

De hecho la solución periódica de la Fig. 3.11 es un ciclo límite, objeto al que nos dedicaremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite

La aparición de una oscilación periódica en un sistema dinámico puede darse a través de los fenómenos conocidos como bifurcaciones. Las bifurcaciones son eventos fundamentales que ocurren cuando variamos de manera gradual uno o varios parámetros del sistema, (conocidos como parámetros de control) y esto hace que se produzca un cambio cualitativo en la dinámica del mismo. En esta memoria nos centraremos en una bifurcación específica, de carácter local, donde la modificación de la estabilidad de un punto de equilibrio (mediante la correcta variación de un parámetro de control) origina la aparición de una oscilación periódica aislada, denominada *Ciclo Límite*.

Esta bifurcación, denominada *Foco-Centro-Ciclo Límite*, es provocada por la variación de la traza de la matriz de uno de los sistemas lineales que definen el sistema lineal a trozos (2.30). Sin embargo, antes de presentar esta bifurcación, es crucial llevar a cabo un análisis detallado del punto de equilibrio y su estabilidad. Asimismo, exploraremos el concepto de ciclo límite para luego examinar cómo podemos generar esta bifurcación en nuestro circuito.

4.1. Análisis de los puntos de equilibrio

Para llevar a cabo el análisis de los puntos de equilibrio y su estabilidades, recordemos primero el sistema que estamos estudiando. Se trata de un sistema dinámico continuo lineal a trozos, específicamente bizonal en su forma canónica de Lienard, tal como se describe en las ecuaciones (2.30).

Podemos obtener los puntos de equilibrio de cada una de las zonas igualando a cero el sistema, para la zona izquierda se tendría:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_L & -1 \\ D_L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} T_L x - y = 0, \\ D_L x - a = 0, \end{cases} \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{a}{D_L}, \frac{aT_L}{D_L} \right). \quad \text{si } D_L \neq 0 \quad (4.1)$$

Análogamente para la zona derecha se obtendría el punto de equilibrio:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{a}{D_R}, \frac{aT_R}{D_R} \right). \quad \text{si } D_R \neq 0 \quad (4.2)$$

En las siguientes figuras veremos la representación gráfica de las posibles posiciones de los puntos de equilibrio (4.1) y (4.2) en función del signo de a

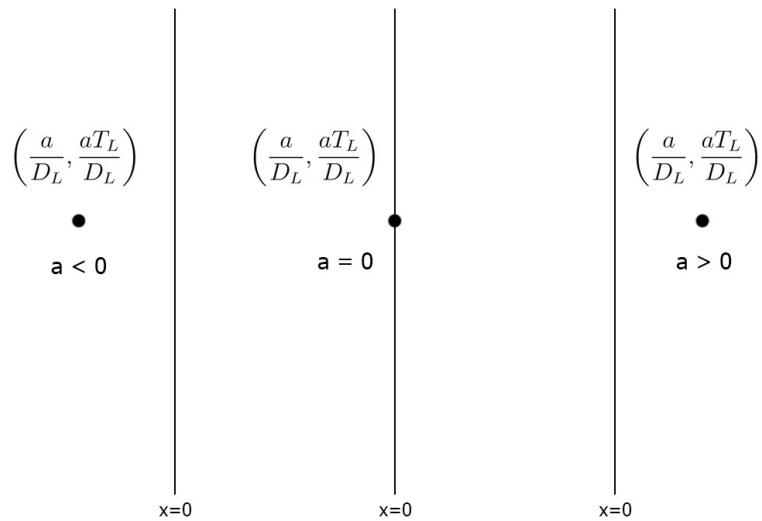


Figura 4.1: Posición del punto de equilibrio del sistema lineal de la zona izquierda dependiendo del signo de a .

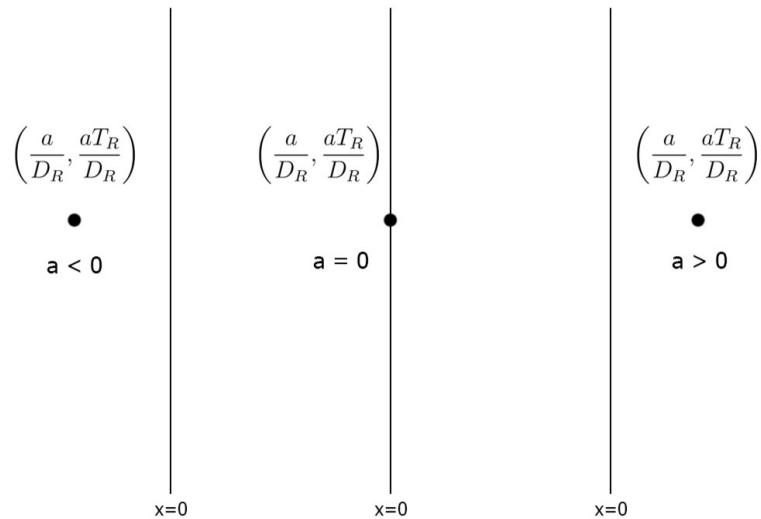


Figura 4.2: Posición del punto de equilibrio del sistema lineal de la zona derecha dependiendo del signo de a .

Una vez que se ha identificado el punto de equilibrio, se puede proceder a analizar su estabilidad. Este análisis es igual al que ya se realizó en (2.13) ya que el polinomio característico es el mismo, por ello veamos directamente las condiciones que se están buscando en este trabajo.

- $T_L^2 - 4D_L < 0$ por lo que $D_L > 0$.
- $T_L < 0$ para tener un foco asintóticamente estable.
- $T_L = 0$ para tener un centro.
- $T_L > 0$ para tener un foco inestable.

Es evidente que un cambio en la estabilidad del punto de equilibrio está directamente relacionado con una modificación en la traza, particularmente en nuestro caso, se refiere a la traza en la zona izquierda. Este ajuste en la traza de nuestro sistema se traducirá en una modificación física del valor de uno o varios componentes del circuito.

4.2. Ciclo Límite

El siguiente concepto crucial que debemos conocer es el de ciclo límite. Un ciclo límite es una solución periódica del sistema que se encuentra aislada del resto de soluciones periódicas, ya sea de manera local o global. A continuación veremos algunas posibles configuraciones de estabilidad que se pueden dar en un ciclo límite.

- Ciclo Límite Asintóticamente Estable

Independientemente de si seleccionamos las condiciones iniciales dentro o fuera del ciclo límite, las trayectorias de las soluciones cercanas a dicho ciclo límite convergen a él.

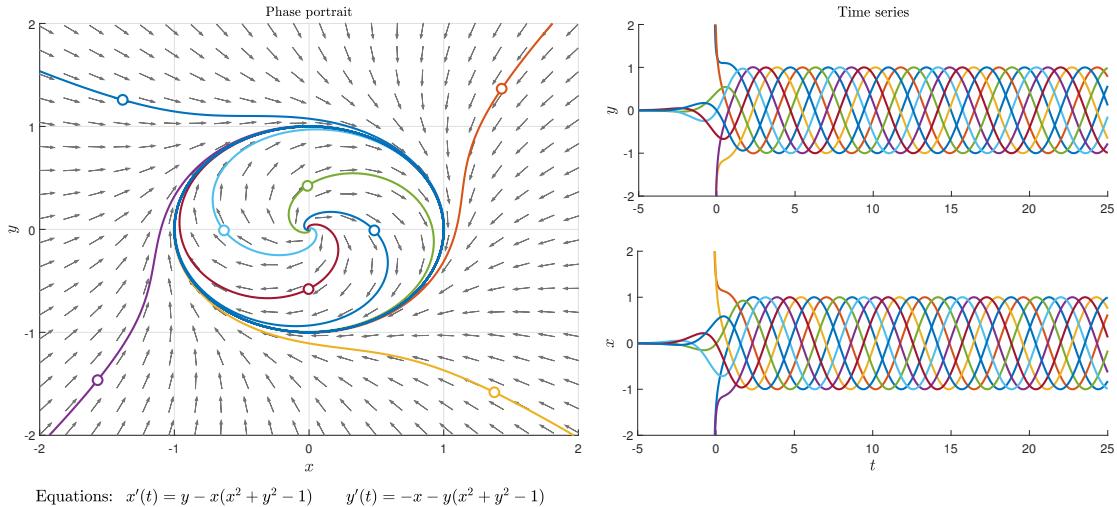


Figura 4.3: Ciclo límite asintóticamente estable.

- Ciclo Límite Inestable

Si optamos por condiciones iniciales cercanas al Ciclo Límite (dentro o fuera), las trayectorias de las soluciones no convergen a él.

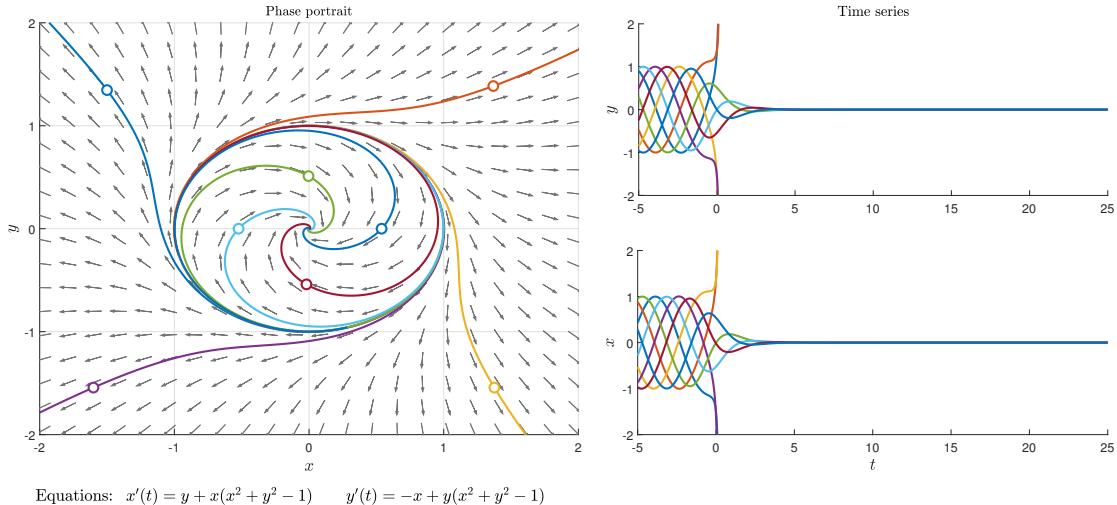


Figura 4.4: Ciclo límite inestable.

- Ciclo Límite Semiestable

Esta configuración se da cuando solo las soluciones con condiciones iniciales dentro o fuera, y cercanas al ciclo límite convergen hacia el mismo.

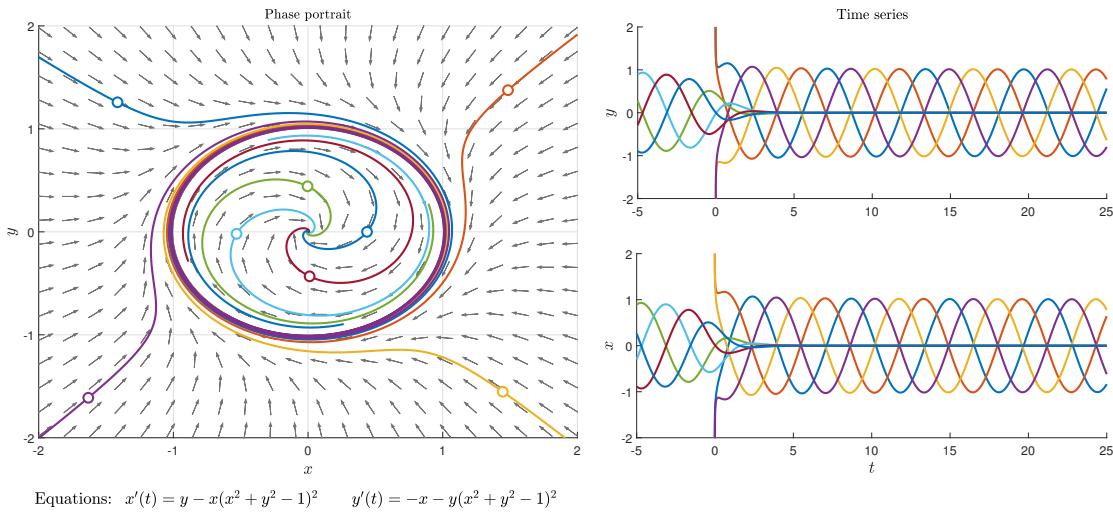


Figura 4.5: Ciclo límite semiestable donde solo las soluciones con condiciones iniciales cercanas y fuera del ciclo límite convergen hacia él.

El ciclo límite de mayor interés para nuestro trabajo es el asintóticamente estable (ver Fig. 4.3), dado que, sin importar dónde seleccionemos las condiciones iniciales, siempre y cuando sean cercanas al ciclo límite, la solución convergerá hacia la oscilación periódica. Además, en caso de que nuestro sistema sufra alguna perturbación que lo aleje de la oscilación periódica, este tiende a regresar y restablecer dicha oscilación.

Por otro lado el ciclo límite inestable (ver Fig. 4.4) es altamente desfavorable ya que la única opción de que la solución de nuestro sistema alcance al ciclo límite es estableciendo las condiciones iniciales exactas para ello, lo cual es casi improbable.

Por último, el ciclo límite semiestable (ver Fig. 4.5) tampoco nos es de interés ya que aunque consigamos establecer las condiciones iniciales adecuadas para que la solución de nuestro sistema converga al ciclo límite, dicha solución puede perder la estabilidad con cierta facilidad.

4.3. Bifurcación foco-centro-ciclo límite y su determinación a partir de la caracterización integral de la semiaplicación de Poincaré

Existen trabajos previos que han abordado la existencia de la bifurcación foco-centro-ciclo límite en sistemas lineales a trozos. Estos trabajos se pueden consultar en: el Capítulo “*The Focus-Center-Limit Cycle Bifurcation in Discontinuous Planar Piecewise Linear Systems Without Sliding*” de [14] y las Secciones 8.1 y 3.6 de [15], específicamente el Teorema 3.27 de este último. En esos trabajos se ha realizado un enfoque del problema diferente al nuestro, nosotros aplicaremos la caracterización integral que hemos explorado previamente. Mediante el cumplimiento de una serie de requisitos en los parámetros del sistema, los cuales se explicitarán más adelante, podremos lograr un cambio en la estabilidad del punto de equilibrio, pasando de foco asintóticamente estable a centro y, finalmente, a foco inestable. Este proceso nos llevará a obtener el ciclo límite asintóticamente estable, lo que representa nuestra oscilación periódica.

Enunciaremos a continuación el resultado principal que garantiza la existencia de la bifurcación y la aparición del ciclo límite bizonal.

Teorema 4.1. Considerando el sistema (2.30), donde tomamos T_L como parámetro de bifurcación (esto es, suponemos que el resto de parámetros permanecen fijos), elegimos $a < 0$ y $D_L > 0$. El sistema experimenta una bifurcación foco-centro-ciclo límite al pasar T_L por el valor cero. Es decir, de la configuración de centro para $T_L = 0$, ver Fig. 4.7, se produce un ciclo límite (que nace de la órbita periódica del centro que es tangente a la sección de Poincaré) cuando $T_L T_R < 0$ y $|T_L|$ es lo suficientemente pequeño. El ciclo límite que nace es asintóticamente estable si $T_L > 0$, ver Fig. 4.3, e inestable cuando $T_L < 0$, ver Fig. 4.4. Además, se puede calcular el periodo T_P de la oscilación como:

$$T_P = \frac{4\pi}{D_L \sqrt{4D_L^2 - T_L^2}} + \frac{2(D_R - D_L - 2T_R^2 + T_R T_L + T_L^2)}{a^3} \left[\left(\frac{3a^3 \pi}{2D_L^{3/2} T_R} \right) \cdot (T_L) + \dots \right] \quad (4.3)$$

y la amplitud Δ (medida como la distancia entre los puntos de corte de la órbita periódica con la recta de separación) viene dada por:

$$\begin{aligned} \Delta = & \left(\left(\frac{3a^3 \pi}{2D_L^{3/2} T_R} \right)^{1/3} \cdot (T_L)^{1/3} + \dots \right) - \left[- \left(\left(\frac{3a^3 \pi}{2D_L^{3/2} T_R} \right)^{1/3} \cdot (T_L)^{1/3} + \dots \right) - \right. \\ & \left. \frac{2T_R}{3a} \left(\left(\frac{3a^3 \pi}{2D_L^{3/2} T_R} \right)^{1/3} \cdot (T_L)^{1/3} + \dots \right)^2 - \frac{4T_R^2}{9a^2} \left(\left(\frac{3a^3 \pi}{2D_L^{3/2} T_R} \right) \cdot (T_L) + \dots \right) + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Veamos las condiciones para que se deben cumplir en nuestras ecuaciones y sus consecuencias para que se cumpla el Teorema 4.1 en nuestro sistema (2.30):

- $a < 0$ para que el punto de equilibrio de la zona izquierda esté contenido en la zona $x < 0$, ver Fig. 4.1.
- Ya que $a < 0$ y queremos que el polinomio característico tenga raíces imaginarias para tener una configuración de foco en nuestro punto de equilibrio, debemos tener $T_L^2 - 4 D_L < 0$ y $D_L > 0$, ver Sección 4.1.
- Nuestro parámetro de bifurcación será T_L , por ello lo haremos variar de negativo a positivo haciéndolo pasar por cero, $T_L < 0 \rightarrow T_L = 0 \rightarrow T_L > 0$ y siempre para un valor pequeño de $|T_L|$. Lo hacemos de esta manera para que el ciclo límite que obtengamos sea asintóticamente estable.
- Del Teorema 4.1 tenemos que $T_L T_R < 0$ con $T_L > 0$, por ello $T_R < 0$.

En las siguientes figuras vemos gráficamente como se produce la bifurcación tomando como parámetro de control T_L .

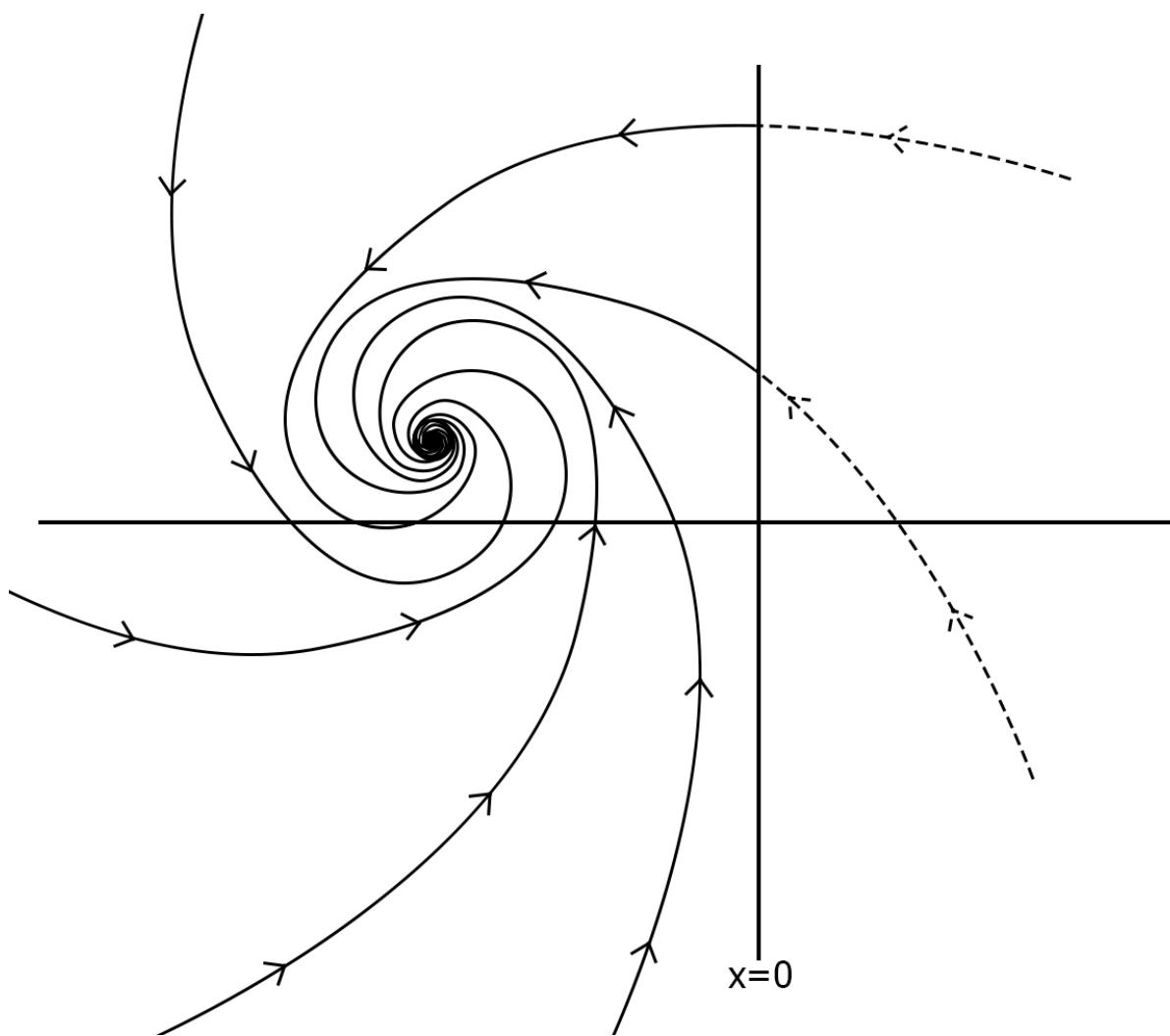


Figura 4.6: Foco asintóticamente estable con sección de Poincaré en $x = 0$.

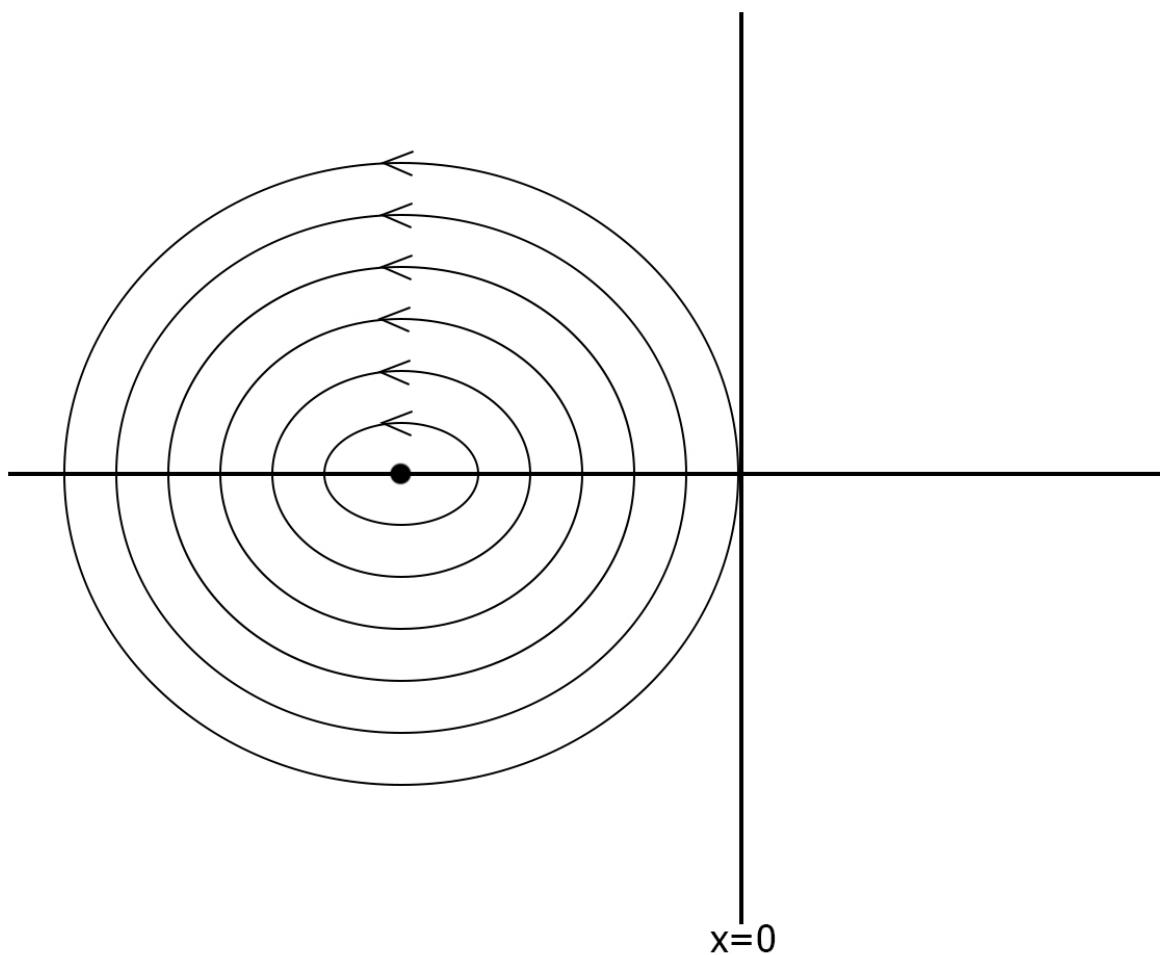


Figura 4.7: Centro con Sección de Poincaré en $x = 0$.

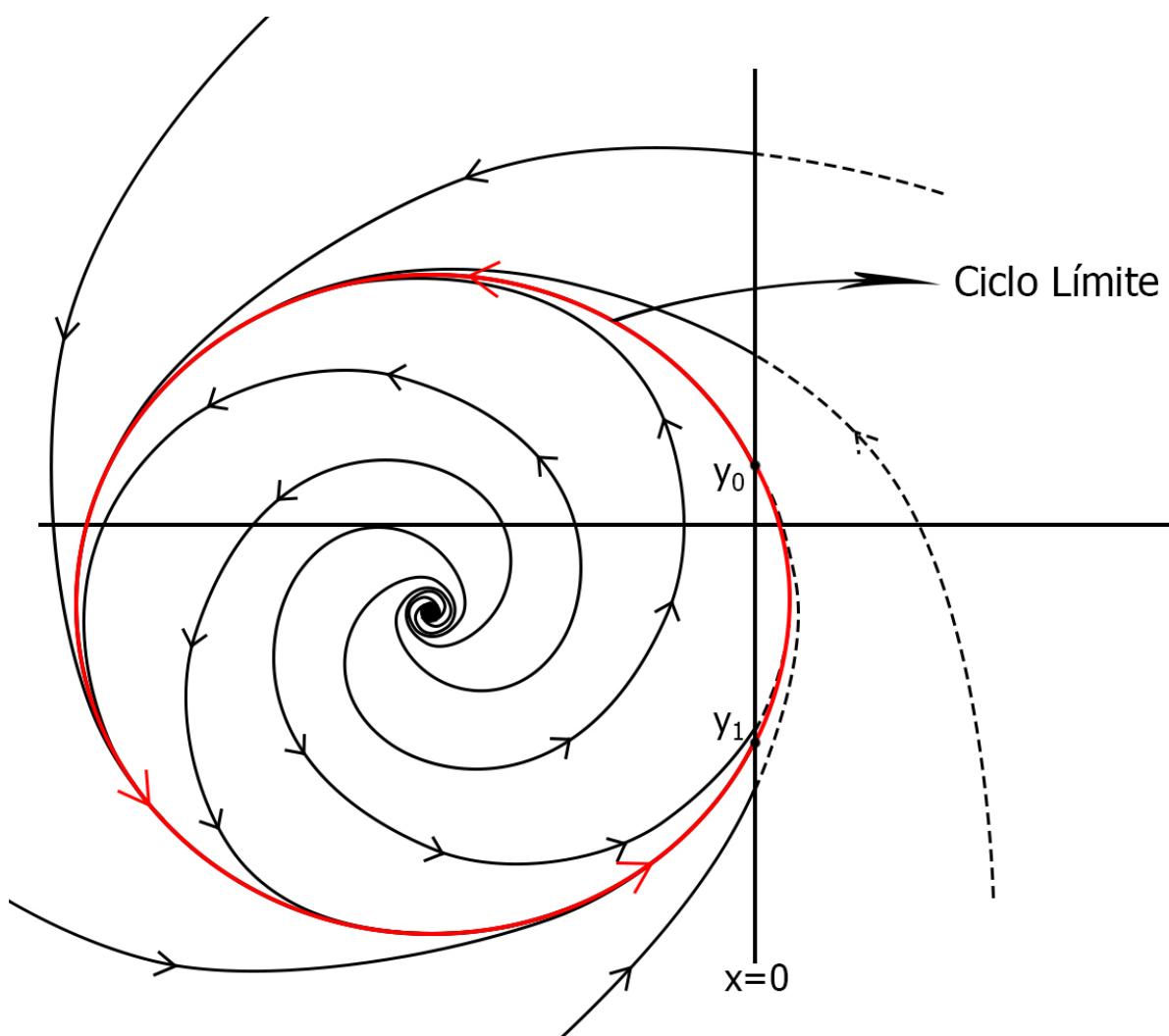


Figura 4.8: Ciclo límite asintóticamente estable con Sección de Poincaré en $x = 0$.

Para la demostración del Teorema 4.1 haremos uso de la Caracterización Integral de la semiaplicación de Poincaré, desarrollos en series de MacLaurin y el *Teorema de la Función Implícita*, este último se puede consultar más en profundidad en [24] y en [25]. Presentaremos a continuación este último conocido teorema.

Teorema 4.2 (Función Implícita). *Sean $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales de primer orden continuas y $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tales que*

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Entonces, existe una función g definida en un intervalo abierto I que contiene a x_0 , de forma que $y_0 = g(x_0)$ y

$$f(x, g(x)) = 0. \quad \forall x \in I$$

es más, g es derivable y tiene derivada continua en I .

Ahora veremos la demostración del Teorema 4.1.

Demostración. (del Teorema 4.1) Es obvio que el sistema (2.30) posee una órbita periódica transversal a la linea de separación $x = 0$, como la de la Fig. 3.8, si y solo si el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} PV \left\{ \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_R y^2 - a T_R y + a^2} dy \right\} = \frac{-k_R \pi T_R}{D_L \sqrt{4 D_L - T_L^2}}, \\ PV \left\{ \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy \right\} = \frac{k_L \pi T_L}{D_L \sqrt{4 D_L - T_L^2}}. \end{cases} \quad (4.5)$$

posee una solución $y_0 = y_0^* > 0$ e $y_1 = y_1^* < 0$.

Demostraremos, aplicando el teorema de la función implícita (Teorema 4.2), que el sistema (4.5) posee solución bajo la hipótesis del teorema. Fijaremos los siguientes parámetros constantes en nuestro sistema: D_L , D_R , a , k_L , k_R , T_R , con $a < 0$ por lo que k_L y k_R serían $k_L = 2$ y $k_R = 0$. Luego, (4.5) se escribe como:

$$\begin{cases} F_1(y_0, y_1) = 0, \\ F_2(y_0, y_1, T_L) = 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

donde

$$F_1(y_0, y_1) = \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_R y^2 - a T_R y + a^2} dy, \quad (4.7)$$

y

$$F_2(y_0, y_1, T_L) = \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy - \frac{2\pi T_L}{D_L \sqrt{4D_L - T_L^2}}. \quad (4.8)$$

Desde la ecuación (4.7), aplicando la Proposición 3.1 de [11], obtenemos que:

$$y_1 = -y_0 - \frac{2T_R}{3a} y_0^2 - \frac{4T_R^2}{9a^2} y_0^3 + \dots \quad (4.9)$$

Haciendo uso de (4.9), se puede escribir la segunda expresión de (4.6) de la siguiente manera

$$\tilde{F}_2(y_0, T_L) = 0. \quad (4.10)$$

donde

$$\tilde{F}_2(y_0, T_L) = \int_{-y_0 - \frac{2T_R}{3a} y_0^2 + \dots}^{y_0} \frac{-y}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy - \frac{2\pi T_L}{D_L \sqrt{4D_L - T_L^2}}. \quad (4.11)$$

como se cumple

$$\tilde{F}_2(0, 0) = 0, \quad \text{y} \quad \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial T_L}(0, 0) = \frac{\pi}{D_L^{3/2}} \neq 0. \quad (4.12)$$

aplicando el Teorema de la Función Implícita (Teorema 4.2), existe una única función que nos permite definir $T_L = f_2(y_0)$ de manera local. El desarrollo en series de MacLaurin de esta función es:

$$T_L = \frac{2 D_L^{3/2} T_R}{3 a^3 \pi} y_0^3 + \frac{2 D_L^{3/2} T_R^2}{9 a^4 \pi} y_0^4 - \dots \quad (4.13)$$

Realizando una inversión de la serie anterior podemos finalmente definir $y_0 = f_2^{-1}(T_L)$:

$$\begin{aligned} y_0^3 &= \left(\frac{3 a^3 \pi}{2 D_L^{3/2} T_R} \right) \cdot (T_L) + \dots, \\ y_0 &= \left(\frac{3 a^3 \pi}{2 D_L^{3/2} T_R} \right)^{1/3} \cdot (T_L)^{1/3} + \dots \end{aligned} \quad (4.14)$$

ya que hemos supuesto $T_R \neq 0$.

El periodo T_P se calculará como la suma del semitiempo de vuelo izquierdo τ_L y el semitiempo de vuelo derecho τ_R , ambas expresiones se pueden extraer de [13] y las presentaremos a continuación:

$$\tau_L = \frac{4\pi}{D_L \sqrt{4D_L^2 - T_L^2}} + \int_{y_1}^{y_0} \frac{a}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy, \quad (4.15)$$

$$\tau_R = \int_{y_1}^{y_0} \frac{-a}{D_R y^2 - a T_R y + a^2} dy. \quad (4.16)$$

Recordemos que los parámetros D_L , D_R , a y T_R están fijos, y como ya se ha visto anteriormente se puede escribir $y_1 = f_1(y_0)$, por lo que las expresiones (4.15) y (4.16) tan solo dependerán de y_0 . A continuación presentaremos el desarrollo en series que hemos calculado para cada semitiempo de vuelo, donde hemos sustituido y_1 por la expresión en función de y_0 que vimos en (4.9):

$$\tau_L = \frac{4\pi}{D_L \sqrt{4D_L^2 - T_L^2}} + \frac{2y_0}{a} - \frac{2T_R y_0^2}{3a^2} + \frac{(4a^2 T_R^2 + 6a(a T_R T_L + a(-D_L + T_L^2)))y_0^3}{9a^5} + \dots \quad (4.17)$$

$$\tau_R = -\frac{2y_0}{a} + \frac{2T_R y_0^2}{3a^2} + \frac{2(3D_R - 8T_R^2)y_0^3}{9a^3} + \dots \quad (4.18)$$

Sumando los semitiempos anteriores obtenemos el periodo:

$$T_P = \tau_L + \tau_R = \frac{4\pi}{D_L \sqrt{4D_L^2 - T_L^2}} + \frac{2(D_R - D_L - 2T_R^2 + T_R T_L + T_L^2)y_0^3}{a^3}. \quad (4.19)$$

Y sustituyendo en la anterior ecuación y_0 por la expresión $y_0 = f_2^{-1}(T_L)$ que se presentó en (4.14), obtenemos la expresión del periodo (4.3), donde T_P únicamente depende de T_L .

El cálculo de la amplitud Δ se puede hacer con las expresiones (4.9) y (4.14) de la siguiente manera:

$$\Delta = y_0 - y_1 = \left(\left(\frac{3a^3\pi}{2D_L^{3/2}T_R} \right)^{1/3} \cdot (T_L)^{1/3} + \dots \right) - \left[-y_0 - \frac{2T_R}{3a}y_0^2 - \frac{4T_R^2}{9a^2}y_0^3 + \dots \right] \quad (4.20)$$

Sustituyendo en la anterior expresión el valor de y_0 dado por (4.14), como ya se hizo anteriormente, se obtiene la expresión de la amplitud (4.4), la cual depende únicamente de T_L .

Con esto queda finalizada la demostración del Teorema 4.1 sin más que tener en cuenta que $y_0 \cdot y_1 < 0$ lo que implica $T_L \cdot T_R < 0$.

□

Capítulo 5

Oscilación Peródica estable en el circuito

En este último capítulo aplicaremos al circuito de estudio los conceptos y herramientas que se han presentado a lo largo del trabajo. Comprobaremos que las hipótesis planteadas efectivamente se cumplen y veremos como, eligiendo las condiciones iniciales adecuadas, se producirá el ciclo límite asintóticamente estable en el circuito vía la bifurcación foco-centro-ciclo límite.

El primer paso es obtener las ecuaciones diferenciales del circuito y decidir cuáles serán nuestras variables de estado, esto se hizo en (1.22a)-(1.22b)-(1.22c) y se establecieron como variables de estado:

- Tensión en el condensador y el memristor: $x = v_1$
- Intensidad en la bobina y la resistencia negativa: $y = i_{LR}$
- Flujo en el memristor: $z = \varphi$

Seguidamente tras ciertos cambios en las ecuaciones (1.22a)-(1.22b)-(1.22c) se llega al sistema tridimensional (1.25), con la función $W(z)$ dada (1.28).

A continuación, gracias a las superficies invariantes escritas en (1.31) para el sistema, podemos pasar de estudiar el sistema tridimensional (1.25) a uno equivalente bidimensional trizonal en la forma canónica de Liénard (1.35), con las rectas de separación en $\tilde{x} = \pm 1$.

De este último sistema trizonal (1.35) nos fijaremos únicamente en dos de sus zonas, ya que la oscilación que se está tratando de obtener es bizonal, por lo que nos fijaremos por ejemplo en las zonas a la izquierda y a la derecha de la recta de separación $\tilde{x} = -1$. Para referirnos a este sistema “bizonal” cambiaremos la nomenclatura de \tilde{x}, \tilde{y} a x, y para evitar confusiones de ahora en adelante, por lo que el sistema queda de la siguiente forma

$$\left| \begin{array}{l} \begin{cases} \dot{x} = t_E(x+1) - t_C - y \\ \dot{y} = d_E(x+1) - d_C - h \end{cases} \\ x = -1 \end{array} \right| \quad \begin{cases} \dot{x} = t_C x - y \\ \dot{y} = d_C x - h \end{cases} \quad (5.1)$$

Antes de continuar, en el sistema (5.1) debemos hacer una traslación de la recta de separación $x = -1$ a la recta $x = 0$ ya que la oscilación encontrada vía bifurcación foco-centro-ciclo límite se obtiene para un sistema bizonal con la recta de separación en $x = 0$.

Aplicaremos a (5.1) el primer cambio de variable:

$$X = x + 1, \quad \rightarrow \quad x = X - 1, \quad y \quad \dot{X} = x. \quad (5.2)$$

y obtenemos el sistema

$$\left| \begin{array}{l} \begin{cases} \dot{X} = t_E X - t_C - y \\ \dot{y} = d_E X - d_C - h \end{cases} \\ X = 0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \begin{cases} \dot{X} = t_C X - t_C - y \\ \dot{y} = d_C X - d_C - h \end{cases} \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Aplicaremos a (5.3) el segundo cambio de variable:

$$Y = y + t_C, \quad \rightarrow \quad y = Y - t_C, \quad e \quad \dot{Y} = y. \quad (5.4)$$

y obtenemos

$$\left| \begin{array}{l} \begin{cases} \dot{X} = t_E X - Y \\ \dot{Y} = d_E X - d_C - h \end{cases} \\ X = 0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \begin{cases} \dot{X} = t_C X - Y \\ \dot{Y} = d_C X - d_C - h \end{cases} \end{array} \right. \quad (5.5)$$

que escrito de forma matricial es:

$$\left| \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_E & -1 \\ d_E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ d_C + h \end{pmatrix} \\ X = 0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_C & -1 \\ d_C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ d_C + h \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Como se puede comprobar el sistema (5.6) está escrito en la forma canónica de Liénard (2.30), que vimos al final de la Sección 2.2, por lo que todo el análisis posterior que se hizo para un sistema tipo (2.30) lo podremos aplicar al sistema (5.6). Los parámetros del sistema en relación a nuestro circuito son:

$$\begin{aligned}
 T_L &= t_E = b \cdot a_{11} + a_{22} = \frac{-b}{C} + \frac{R}{L}, \\
 D_L &= d_E = b \cdot a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \frac{-b}{C} \cdot \frac{R}{L} - \frac{-1}{L} \cdot \frac{1}{C} = \frac{-bR}{CL} + \frac{1}{CL}, \\
 T_R &= t_C = a \cdot a_{11} + a_{22} = \frac{-a}{C} + \frac{R}{L}, \\
 D_R &= d_C = a \cdot a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \frac{-a}{C} \cdot \frac{R}{L} - \frac{-1}{L} \cdot \frac{1}{C} = \frac{-aR}{CL} + \frac{1}{CL}, \\
 a &= d_C + h = a \cdot a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} + h = \frac{-aR}{CL} + \frac{1}{CL} + h.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

El siguiente paso es recordar las condiciones que se estudiaron en el Teorema 4.1 para que se produzca la bifurcación foco-centro-ciclo límite y ajustar dichas condiciones con un parámetro del circuito, este será la resistencia negativa. Es decir, modificando la resistencia del circuito haremos que se produzca el cambio en la traza y por tanto el cambio en la estabilidad del punto de equilibrio.

- Condición I

$$a = d_C + h < 0, \quad \rightarrow \quad \frac{-aR}{CL} + \frac{1}{CL} + h < 0,$$

$R > \frac{1}{a} + \frac{CL}{a} h.$

(5.8)

- Condición II

$$D_L > 0, \quad \rightarrow \quad \frac{-bR}{CL} + \frac{1}{CL} > 0,$$

$R < \frac{1}{b}.$

(5.9)

- Condición III

$$T_R < 0, \quad \rightarrow \quad \frac{-a}{C} + \frac{R}{L} < 0,$$

$R < a \frac{L}{C}.$

(5.10)

- Condición IV

$$T_L = 0, \quad \rightarrow \quad \frac{-b}{C} + \frac{R}{L} = 0,$$

$T_L \begin{cases} > 0 & \text{para } R > b \frac{L}{C}, \\ = 0 & \text{para } R = b \frac{L}{C}, \\ < 0 & \text{para } R < b \frac{L}{C}. \end{cases}$

(5.11)

Ahora ajustaremos los parámetros a, b, h, R, L, C para que las cuatro condiciones anteriores se cumplan simultáneamente

De las condiciones III y IV obtenemos la relación entre a y b :

$$a \frac{L}{C} > R = b, \frac{L}{C} \rightarrow a > b,$$

Elegiremos $\begin{cases} a = 0.2, \\ b = 0.01. \end{cases}$ (5.12)

Comprobemos la condición II:

$$R < \frac{1}{b} = \frac{1}{0.01}, \rightarrow R < 100.$$

Ahora se establecerá el valor de R límite, para que se produzca el cambio en la traza izquierda $T_L < 0 \rightarrow T_L = 0 \rightarrow T_L > 0$, con la condición IV. Haremos que el cambio se produzca para $R = 1$ y comprobaremos la relación entre L y C que obtendremos tras ello:

$$\text{Establecemos } \rightarrow R = 1. \quad (5.13a)$$

$$\text{Condición IV } \rightarrow C = 0.01L,$$

$$\text{Elegiremos } \rightarrow C = 100 \cdot 10^{-3}(F), \quad L = 10(H). \quad (5.13b)$$

A continuación comprobemos la condición I para establecer el valor de h :

$$\begin{aligned} R &> \frac{1}{a} + \frac{CL}{a} h, \\ R &> \frac{1}{0.2} + \frac{100 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{0.2} h, \\ R &> 5 + 5h, \end{aligned}$$

$$\text{Por lo que } h < 0, \quad \text{y escogeremos } h = -1. \quad (5.14)$$

$$R > 5 + 5(-1) = 0.$$

Por último, comprobemos la condición III:

$$R < a \frac{L}{C}, \quad \rightarrow R < 0.2 \frac{10}{100 \cdot 10^{-3}} = 20. \quad (5.15)$$

A modo de resumen, estos serán los valores elegidos para los parámetros de nuestro sistema (5.6):

$$\begin{aligned} a &= 0.2, \\ b &= 0.01, \\ h &= -1, \\ C &= 100 \cdot 10^{-3} (F), \\ L &= 10 (H). \end{aligned} \tag{5.16}$$

con $R < 1 (\Omega)$, $R = 1 (\Omega)$ y $R > 1 (\Omega)$

Se han elegido los anteriores valores para una mayor comodidad a la hora de hacer los cálculos, si se quisiera implementar el circuito habría que realizar un trabajo más extenso con las inecuaciones anteriores para ajustar los parámetros a valores comerciales, además no se podría elegir libremente los valores de a y b ya que estos dependen de la curva característica flujo-carga del memristor.

Con el trabajo realizado previamente, podemos enunciar a continuación el resultado principal de esta memoria, cuya prueba es directa.

Teorema 5.1. Consideremos el circuito de la Fig. 1.7, regido por las ecuaciones diferenciales (1.22a)-(1.22b)-(1.22c) y con los parámetros fijos dados en (5.16), salvo el parámetro de bifurcación R . El circuito experimenta una bifurcación foco-centro-ciclo límite cuando R pasa por 1. Es decir, de la configuración de centro para $R = 1$ se produce una oscilación periódica cuando $R - 1 > 0$ y esta relación es lo suficientemente pequeña. Es más, la oscilación periódica es asintóticamente estable. El periodo T_P y la amplitud Δ de la oscilación, en función de R , vienen dadas por:

$$T_P = - \frac{4\pi CL}{(Rb-1) \sqrt{-\frac{C^2 R^2 + 2CLRb - 4CL + L^2b^2}{C^2L^2}}} - \frac{2\pi (Lb - CR)(a-b)(2La + Lb - 2CR)(CLh - Ra + 1)^3}{C(2La - 2CR)(Rb-1) \sqrt{-\frac{Rb-1}{CL}} (Ra + CLh - 1)^3} \tag{5.17}$$

$$\Delta = 2 \left(\frac{3\pi \left(\frac{R}{L} - \frac{b}{C}\right) \left(h - \frac{Ra-1}{CL}\right)^3}{\left(\frac{2R}{L} - \frac{2a}{C}\right) \left(-\frac{Rb-1}{CL}\right)^{3/2}} \right)^{1/3} + \frac{\left(\frac{2R}{L} - \frac{2a}{C}\right) \left(\frac{3\pi \left(\frac{R}{L} - \frac{b}{C}\right) \left(h - \frac{Ra-1}{CL}\right)^3}{\left(\frac{2R}{L} - \frac{2a}{C}\right) \left(-\frac{Rb-1}{CL}\right)^{3/2}} \right)^{2/3}}{3h - \frac{3(Ra-1)}{CL}} \tag{5.18}$$

A continuación pasemos a comprobar con MATLAB que efectivamente aparece el ciclo límite en nuestro circuito con los valores anteriormente elegidos. Calcularemos y_0 e y_1 con las expresiones (4.9) y (4.14). En la expresión (4.9) donde aparezca y_0 lo sustituiremos por (4.14), de esta manera tendremos tanto y_0 como y_1 en función de

T_L , esto lo haremos ya que como vimos en (5.7) podemos escribir $T_L = f(b, C, L, R)$ y ya dijimos anteriormente que solo variaremos R del circuito, por lo que de esta manera conseguimos tener y_0 , y_1 y T_L en función de R , a continuación presentaremos un ejemplo de esto.

% Ejemplo 4

```
% Valores del circuito
a = 0.2; Rtilde = 1.3;
b = 0.01; L = 10;
h = -1; C = 0.1;

% dc = (1-a*R)/(C*L)      % c: Central , Derecha
% de = (1-b*R)/(C*L)      % e: Exterior , Izquierda
% tc = (-a/C)+(R/L)
% te = (-b/C)+(R/L)
% as = dc + h

Y0 = @(R) (((3*pi*((1-a*R)/(C*L))+h)^3)/(2*((-a/C)+(R/L))) * ((1-b*R)/(C*L))^(3/2)) * ((-b/C)+(R/L))^(1/3);

Y1 = @(R) (-(((3*pi*((1-a*R)/(C*L))+h)^3)/(2*((-a/C)+(R/L))) * ((-b/C)+(R/L))^(1/3))) - (((2*((-a/C)+(R/L)))/(3*(h+((1-a*R)/(C*L)))))) * (((3*pi*((1-a*R)/(C*L))+h)^3)/(2*((-a/C)+(R/L))) * ((1-b*R)/(C*L))^(3/2)) * ((-b/C)+(R/L))^(1/3))^2;

periodo = @(R) (4*pi/(((1-b*R)/(C*L))*sqrt((4*((1-b*R)/(C*L))-((-b/C)+(R/L))^2))) + (2*((1-a*R)/(C*L))-((1-b*R)/(C*L))-(2*((-a/C)+(R/L))^2)+((-a/C)+(R/L))*((-b/C)+(R/L))^2)*(((3*pi*((1-a*R)/(C*L))+h)^3)/(2*((-a/C)+(R/L))*((1-b*R)/(C*L))^(3/2)))*((-b/C)+(R/L))^(1/3))^3/(3*((1-a*R)/(C*L))-h)^3);

amplitud = @(R) Y0(R)-Y1(R);

disp('Condiciones que deben cumplirse');
disp('de > 0, te > 0(para R > 1), a < 0, tc < 0');
de = (1-b*Rtilde)/(C*L)
te = (-b/C)+(Rtilde/L)
as = ((1-a*Rtilde)/(C*L)) + h
tc = (-a/C)+(Rtilde/L)

disp('Puntos, periodo y amplitud');
Y0_punto = Y0(Rtilde)
Y1_punto = Y1(Rtilde)
periodo_punto = periodo(Rtilde)
amplitud_punto = amplitud(Rtilde)

subplot(3,1,1); fplot(Y0,[1 3]); hold on; fplot(Y1,[1 3]);
plot(Rtilde,Y0_punto,'*'); plot(Rtilde,Y1_punto,'*');
xlabel('R'); ylabel('Y'); grid on; shg; subplot(3,1,2);
fplot(periodo,[1 3]); hold on; plot(Rtilde,periodo_punto,
```

```
'*');  
xlabel('R'); ylabel('periodo'); grid on; shg;  
subplot(3,1,3); fplot(amplitud,[1 3]); hold on;  
plot(Rtilde,amplitud_punto,'*'); xlabel('R'); ylabel('amplitud');  
grid on; shg;
```

```
>> Ejemplo_4
Condiciones que deben cumplirse
de > 0, te > 0(para R > 1), a < 0, tc < 0

de =
0.9870

te =
0.0300

as =
-0.2600

tc =
-1.8700

Puntos, periodo y amplitud

Y0_punto =
0.1107

Y1_punto =
-0.1694

periodo_punto =
6.4072

amplitud_punto =
0.2800
```

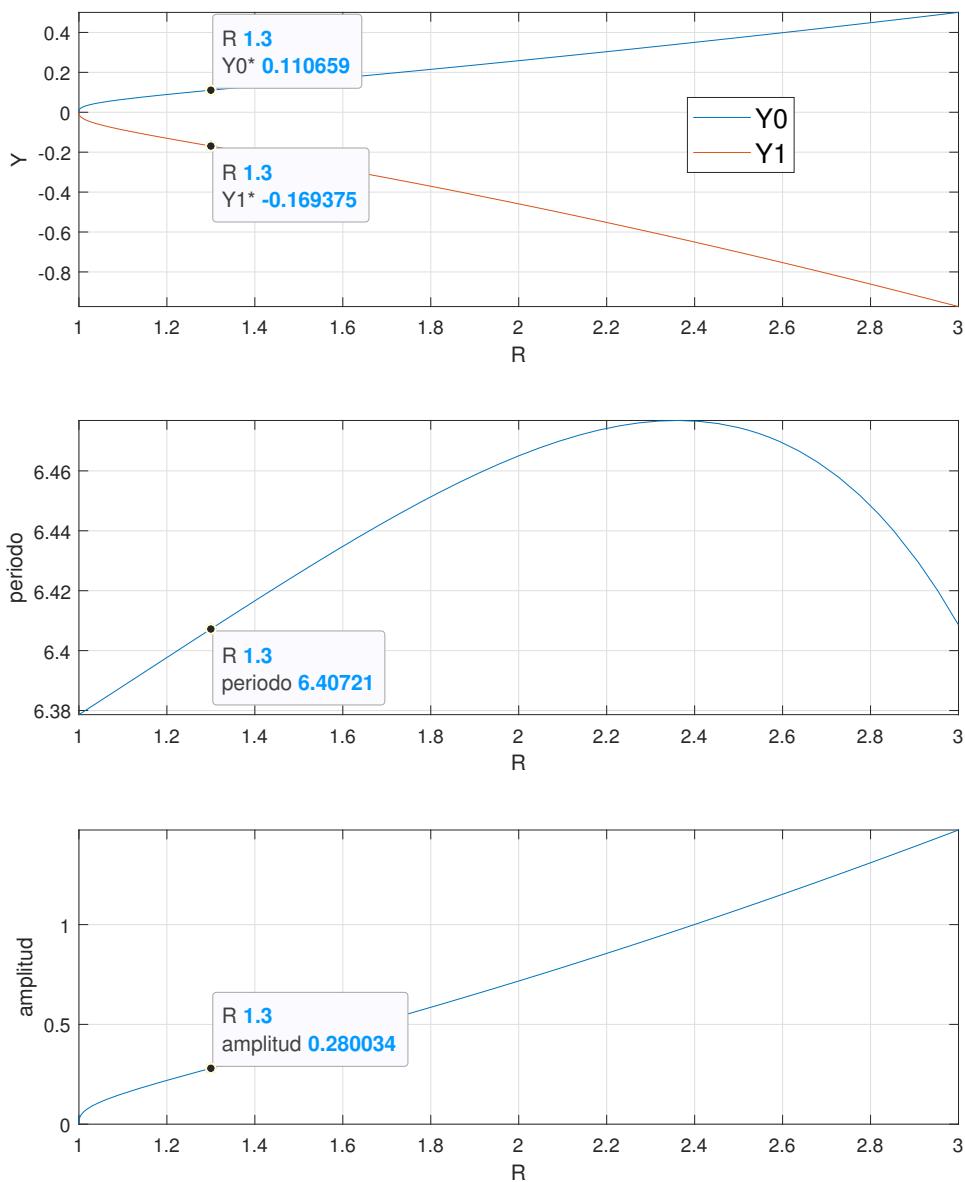


Figura 5.1: Gráficas obtenidas de “Ejemplo 4 TFE”.

En la Fig. 5.1 se ve la gráfica obtenida de “Ejemplo 4 TFE” donde aparecen la gráfica de Y_0 e Y_1 en función de R , la gráfica del periodo en función de R y la gráfica de la amplitud también en función de R . Además, se muestra el punto solución (Y_0^*, Y_1^*) para $R = 1.3$, así como el periodo y la amplitud correspondiente.

A continuación veremos una pequeña modificación del código “Ejemplo 4” para ver más ampliamente la gráfica de Y_0 e Y_1 en función de R .

```
% Ejemplo 5

% Valores del circuito
a = 0.2;
b = 0.01; L = 10;
h = -1; C = 0.1;

% dc = (1-a*R)/(C*L)      % c: Central , Derecha
% de = (1-b*R)/(C*L)      % e: Exterior , Izquierda
% tc = (-a/C)+(R/L)
% te = (-b/C)+(R/L)
% as = dc + h

Y0 = @(R) (((3*pi*((1-a*R)/(C*L))+h)^3)/(2*(-a/C)+(R/L))*
((1-b*R)/(C*L))^(3/2))*((-b/C)+(R/L))^(1/3);

Y1 = @(R) (-(((3*pi*((1-a*R)/(C*L))+h)^3)/(2*(-a/C)+(R/L))*
((1-b*R)/(C*L))^(3/2))*((-b/C)+(R/L))^(1/3))
-(((2*(-a/C)+(R/L))/(3*(h+((1-a*R)/(C*L))))))
*(((3*pi*((1-a*R)/(C*L))+h)^3)/(2*(-a/C)+(R/L))*
((1-b*R)/(C*L))^(3/2))*((-b/C)+(R/L))^(1/3))^2;

fplot(Y0,[1 20]);
hold on;
fplot(Y1,[1 20]);
xlabel('R');
ylabel('Y');
legend('Y0','Y1');
grid on;
shg;
```

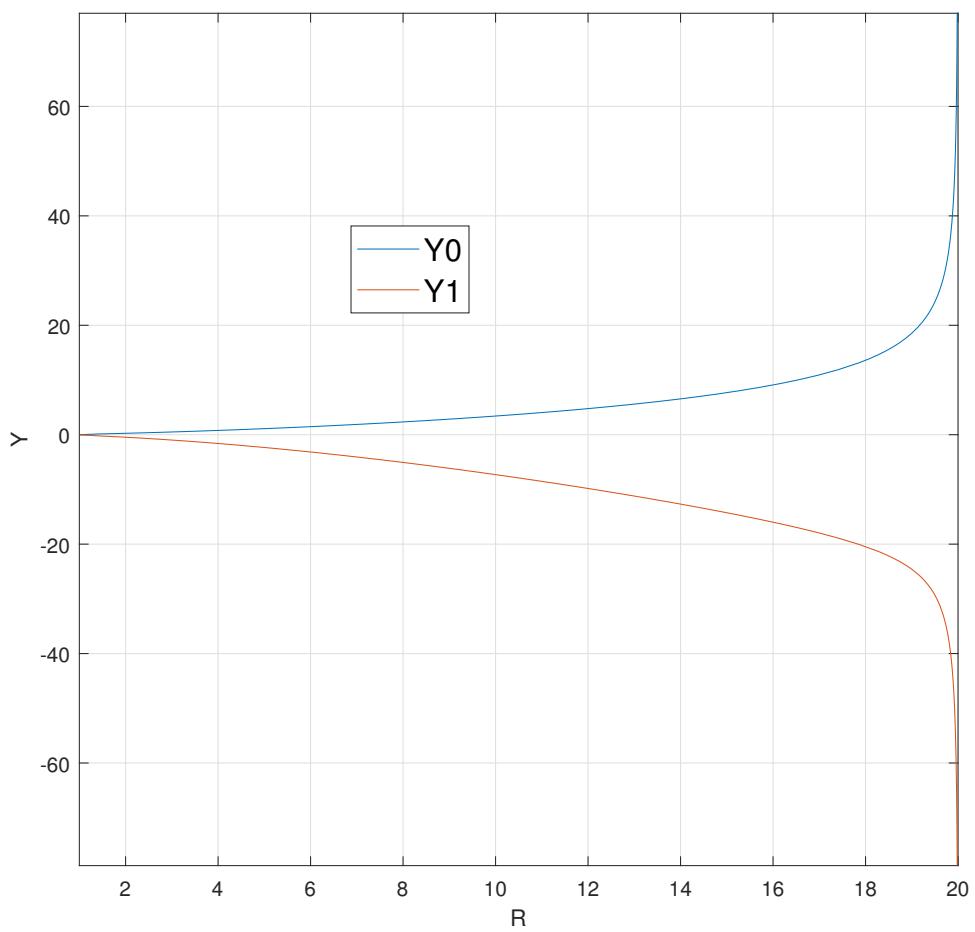


Figura 5.2: Gráfica obtenida de “Ejemplo 5”

En la Fig. 5.2 se puede ver más ampliamente las gráficas de Y_0 e Y_1 en función de R , aunque recordemos que el estudio que se ha realizado en esta memoria es local por lo que solo podemos confiar en los resultados cercanos a $R = 1$.

Para finalizar el estudio vamos a ver gráficamente el ciclo límite haciendo uso nuevamente de la herramienta Phase Plane, para ello hay que reescribir el sistema (1.35) como ya hicimos en (3.9).

$$\begin{cases} \dot{x} = t_E x - y + (t_C - t_E) \frac{1}{2} (|x+1| - |x-1|), \\ \dot{y} = d_E x + (d_C - d_E) \frac{1}{2} (|x+1| - |x-1|) - h. \end{cases} \quad (5.19)$$

Siendo t_E, t_C, d_E, d_C los parámetros dados en (5.7), los cuales dependen de las variables a, b, R, L, C y h cuyos valores se han establecido en (5.12), (5.13a), (5.13b) y (5.14). Se ha analizado el resultado para tres valores de R , en las siguientes figuras se presentan dichos resultados.

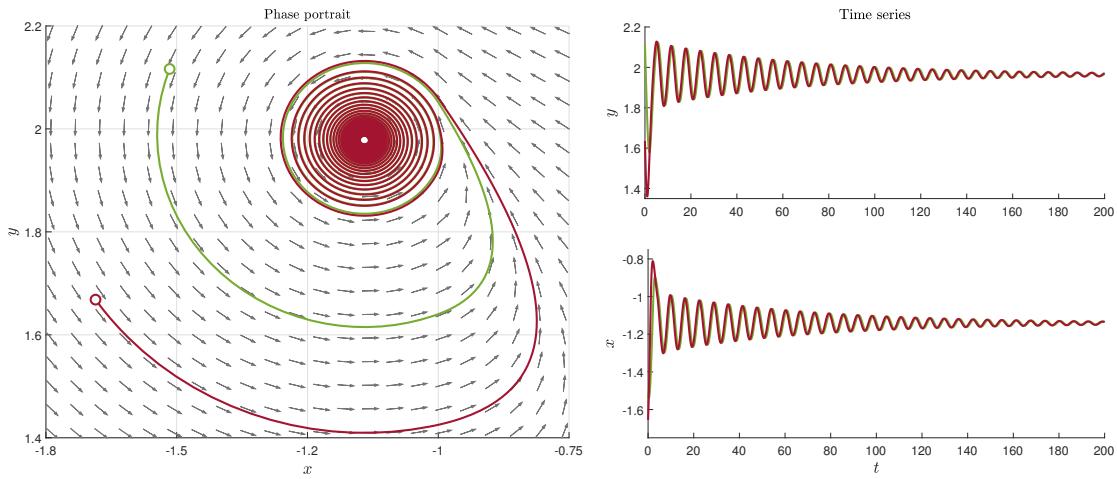


Figura 5.3: Configuración de foco asintóticamente estable para $R = 0.7$

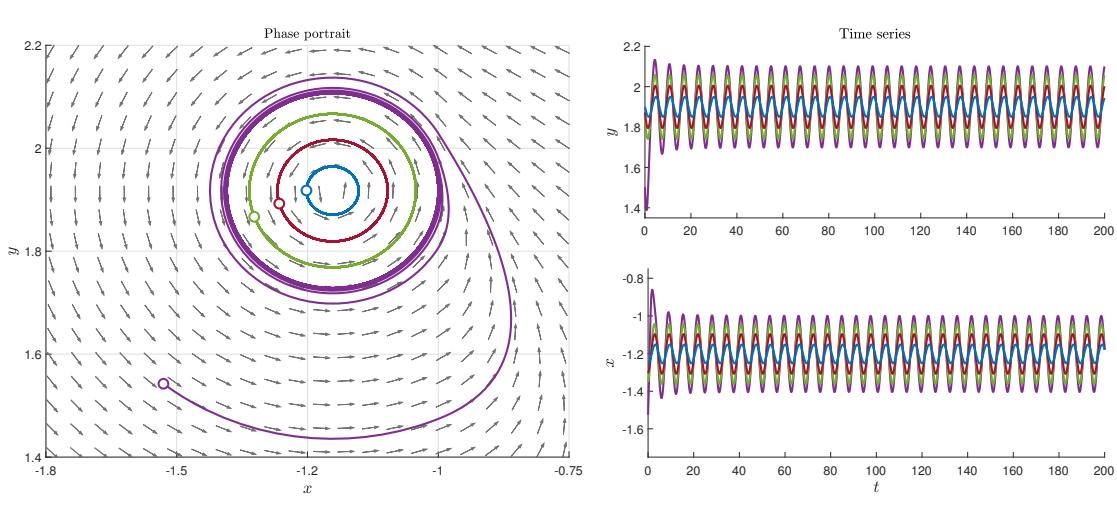


Figura 5.4: Configuración de centro para $R = 1$

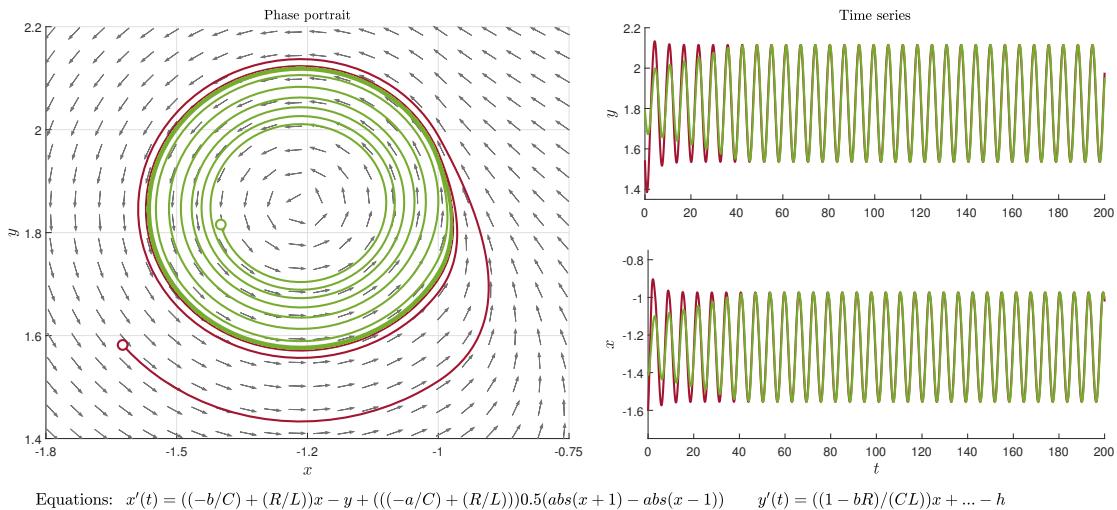


Figura 5.5: Configuración de foco inestable para $R = 1.3$ donde se ha producido el ciclo límite debido a la bifurcación estudiada.

Como se puede ver en las Fig. 5.3, Fig. 5.4 y Fig. 5.5, hemos obtenido en nuestro circuito el mismo comportamiento que el visto en las Fig. 4.6, Fig. 4.7 y Fig. 4.8. Se puede comprobar que el ciclo límite efectivamente se introduce levemente en la zona derecha de la recta de separación, ver Fig. 4.8 y Fig. 5.5

En la herramienta Phase Plane hemos utilizado el integrador *ode45* de MATLAB para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales y así representar la solución. Ahora usaremos la función *ode45* junto con la opción *events* para hacer un análisis más minucioso del sistema (5.19). Así podremos comparar los resultados que obtengamos con los que se obtuvieron previamente mediante los desarrollos en series. Haciendo uso de los *events* determinaremos los puntos intersección de la órbita con la recta de separación $x = -1$ y los instantes de tiempo en los cuales se producen dichas intersecciones. De esa forma podremos comprobar los puntos y_0 e y_1 además del periodo y la amplitud. Dejaremos que la función *ode45* resuelva el sistema para un valor de tiempo elevado, así nos aseguraremos que los últimos valores de y que cortan a la recta $x = -1$ ya están dentro del ciclo límite. En la siguiente página presentaremos el código de MATLAB utilizado para ello.

% Ejemplo 6

```
tspan = 0:0.01:50; % Lapso de tiempo estudiado.
x0    = [-1;1];      % Punto inicial.

[t, xy,tE,xE,iE] = ode45(@sistema, tspan, x0, odeset('
Events',@EF));

% t -> Los valores de tspan que hemos definido
% xy -> Soluciones del sistema, el primer punto es el
    inicial
% tE -> Momentos temporales para los que se produce un
    evento definido.
% xE -> Valores x e y para los que se produce un evento
    definido.
% iE -> Indice de eventos, nosotros solo definimos uno.
```

Funciones usadas en “Ejemplo 6”:

```
function F=sistema(t,X)

% Valores del circuito
a = 0.2; R = 1.1;
b = 0.01; L = 10;
h = -1; C = 0.1;

x=X(1);
y=X(2);

F=[((-b/C)+(R/L))*x - y + (((-a/C)+(R/L)))*0.5*(abs(x+1)-
abs(x-1));...
((1-b*R)/(C*L))*x + (((1-a*R)/(C*L))-((1-b*R)/(C*L)))
*0.5*(abs(x+1)-abs(x-1))-h];
end

function [valor,terminar,direccion] = EF(t,xy)

valor=(xy(1)+1);
% xy(1) es la x y buscamos x=-1 --> x+1=0

terminar=0;
% 0 (no termina), 1 (termina de integrar en el primer
    evento)

direccion=0;
% 0 (no importa el sentido)
end
```

En el “Ejemplo 6”, hemos seleccionado el punto inicial en $(-1, 1)$. Es importante destacar que la elección del punto inicial dentro o fuera del ciclo límite no es crítica, ya que nuestro sistema con $R > 1$ exhibe una configuración de ciclo límite asintóticamente estable. En consecuencia, la solución eventualmente convergerá hacia el ciclo límite, independientemente de dónde comencemos. No obstante, es esencial no seleccionar un punto inicial demasiado alejado del punto de equilibrio, ya que nuestro análisis se ha centrado en una región local y no podemos prever el comportamiento del circuito si nos alejamos significativamente del punto de equilibrio.

Primeramente, vamos a obtener los valores finales de la matriz xE , ya que contendrán los últimos valores de y_0 e y_1 que cruzan la recta $x = -1$. También, recordemos deshacer los cambios de variable que aplicamos anteriormente (5.2) y (5.4).

```
>> Ejemplo_6
>> Eventos_Finales = xE(end-1:end, :)

Eventos_Finales =
-0.999999999999999    1.755882619300063
-1.000000000000000    1.954464581254850

>> tc = -1.87;
>> Eventos_Finales_Cambio_APLICADO = [Eventos_Finales
(:,1)+1, Eventos_Finales(:,2)+tc]

Eventos_Finales_Cambio_APLICADO =
0.000000000000001   -0.114117380699937
0           0.084464581254850
```

Se han obtenido unos valores de $Y_0 = 0.0845$ e $Y_1 = -0.1141$ para $R = 1.1$. Haciendo uso nuevamente del código “Ejemplo 4” pero esta vez para el valor $R = 1.1$ se obtienen los siguientes valores

```
>> Ejemplo_4
Condiciones que deben cumplirse
de > 0, te > 0 (para R > 1), a < 0, tc < 0

de =
0.989000000000000

te =
```

```
0.01000000000000000  
  
as =  
-0.22000000000000000  
  
tc =  
-1.89000000000000000  
  
Puntos, periodo y amplitud  
  
Y0_punto =  
0.064627542839310  
  
Y1_punto =  
-0.088548753338143  
  
periodo_punto =  
6.388147402021764  
  
amplitud_punto =  
0.153176296177453
```

A continuación comprobemos el periodo

```
>> Ejemplo_6
>> Tiempos_Eventos_Finales = tE(end-3:end , :)

Tiempos_Eventos_Finales =
33.259907834777607
34.150063127865117
39.601397212288113
40.503958556087646

>> Periodo = Tiempos_Eventos_Finales(end) -
    Tiempos_Eventos_Finales(end-2)

Periodo =
6.353895428222529
```

Hemos obtenido un periodo de $T_P = 6.3539$, realmente parecido al obtenido en “Ejemplo 4”, ver [Fig. 5.1](#).

En las siguientes páginas veremos algunas gráficas interesantes que podemos generar con los resultados obtenidos de “Ejemplo 6”.

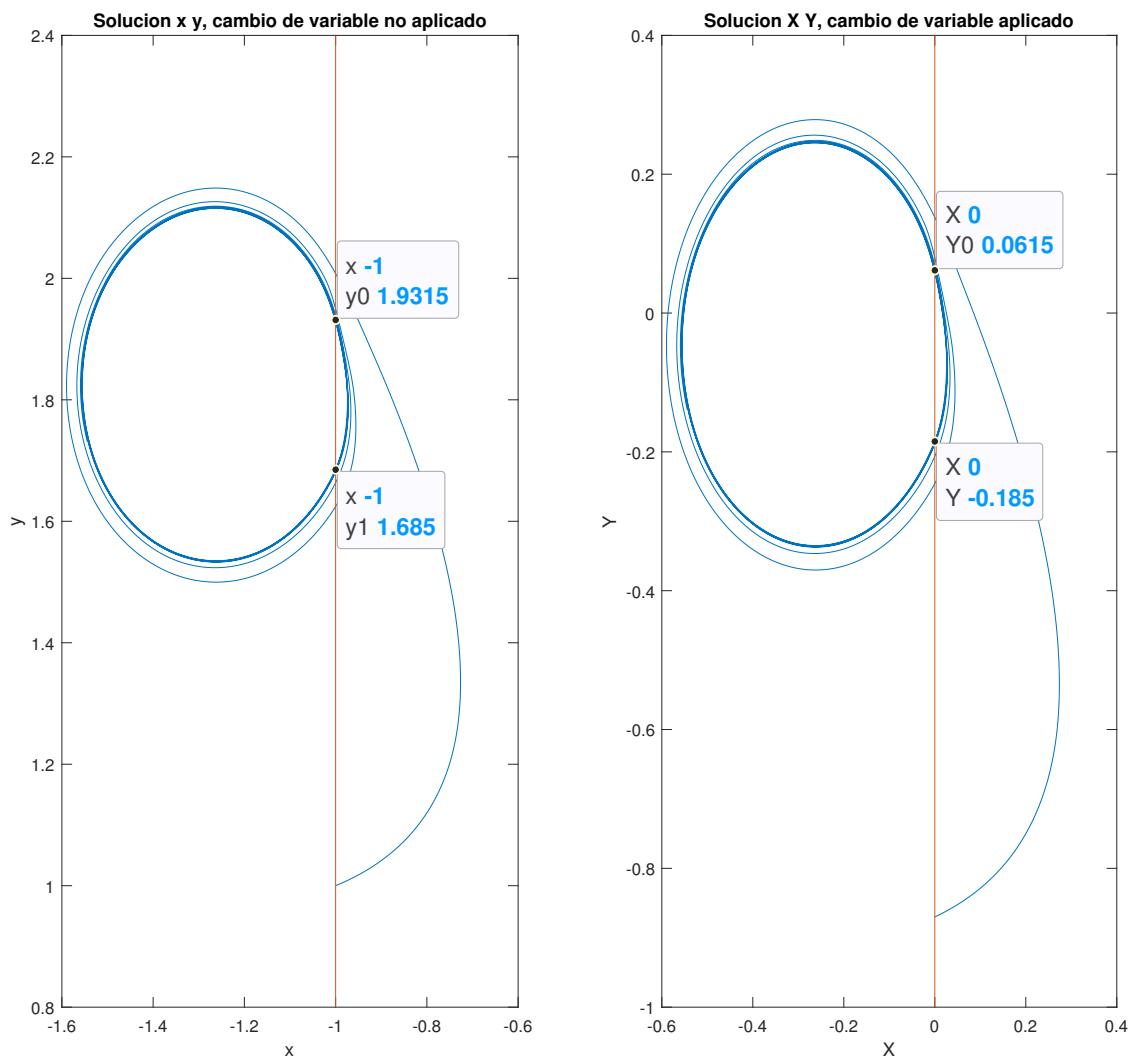


Figura 5.6: Comparación de la representación de la matriz xy de “Ejemplo 6” con los cambios de variable (5.2) y (5.4) aplicados y no aplicados. Los puntos representados corresponden a las dos últimas componentes de $\mathbf{x}\mathbf{E}$, nuevamente con cambios de variable aplicados y no aplicados.

Se han utilizado las dos últimas componentes de $\mathbf{x}\mathbf{E}$ en la figura anterior ya que para ese valor de tiempo la órbita solución ya ha alcanzado por completo el ciclo límite.

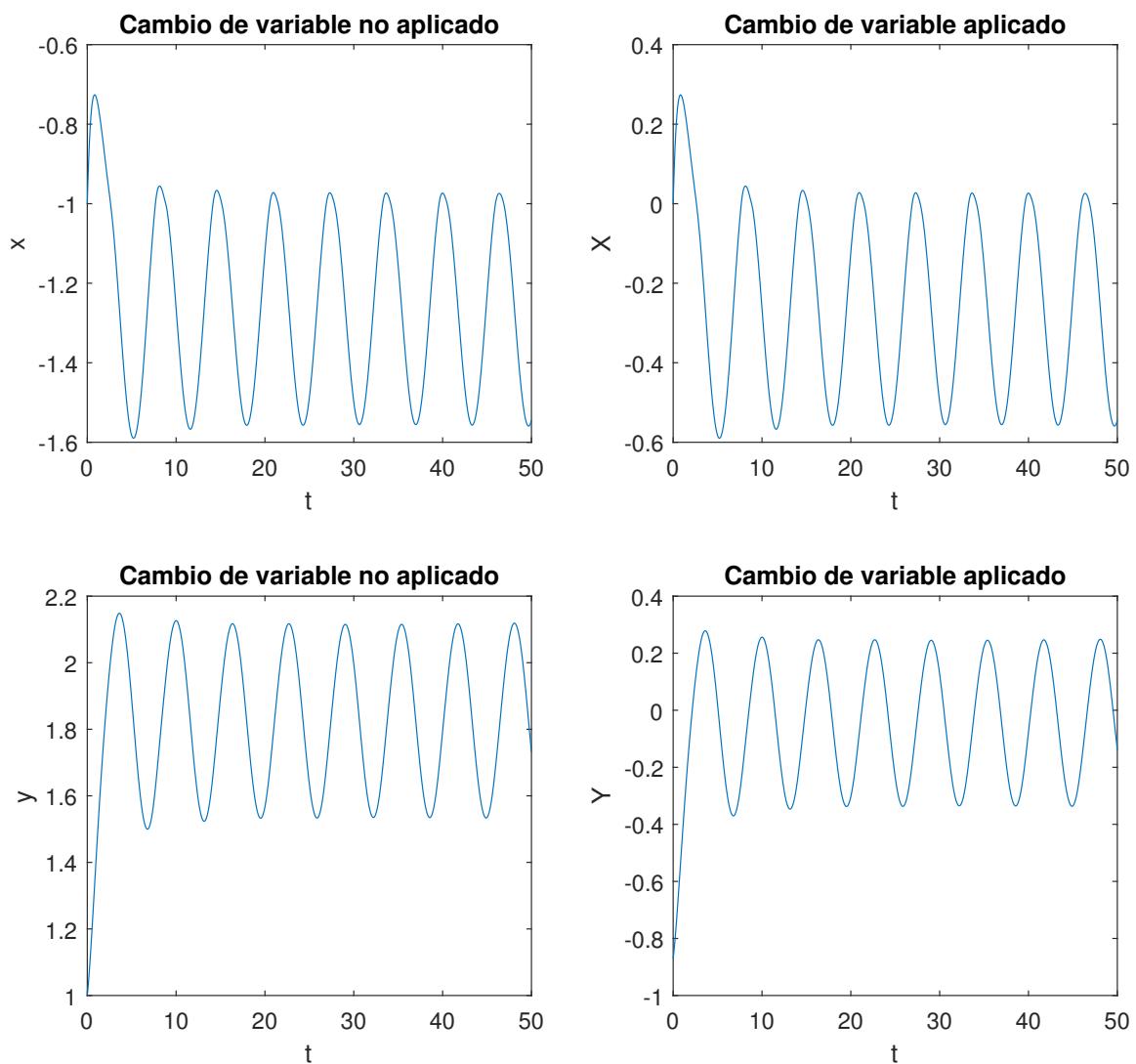


Figura 5.7: Comparación de la representación de las componentes de la matriz xy de “Ejemplo 6” con respecto al tiempo de estudio t con los cambios de variable (5.2) y (5.4) aplicados y no aplicados

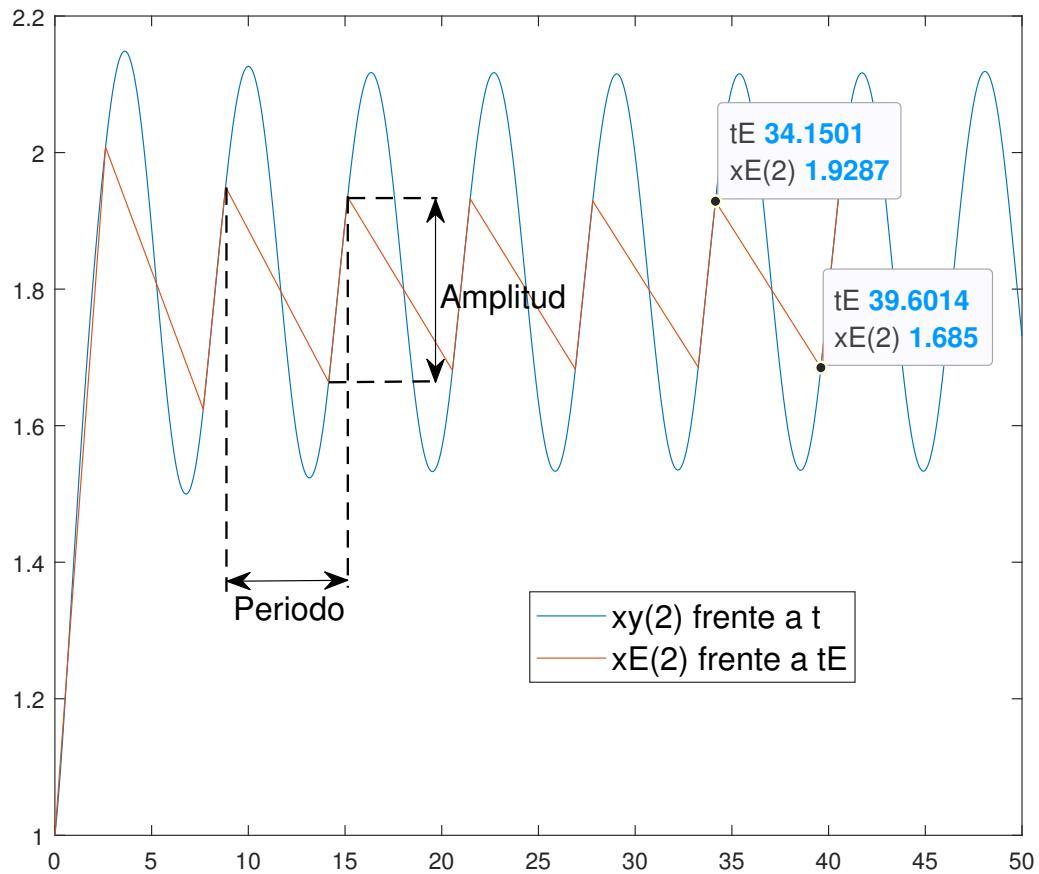


Figura 5.8: Comparación de las gráficas de y ($xy(2)$) solución frente al tiempo de estudio t y los valores de y ($x_{E(2)}$) para los que se produce el evento de corte con la recta $x = -1$ frente a los instantes de tiempo t_E en que se produce el evento.

La Fig. 5.8 resulta especialmente interesante, ya que proporciona una visualización clara de los puntos de intersección y_0 e y_1 , así como de la manera en que se pueden medir tanto el periodo como la amplitud de la oscilación.

Las gráficas previamente presentadas se generaron utilizando “Graficas Ejemplo 6”, cuyo código se encuentra detallado en la siguiente página.

```
% Graficas Ejemplo 6
Ejemplo_6

xE = round(xE,4); tc=-1.87;

figure; subplot(1,2,1);
plot(xy(:,1) , xy(:,2));
title('Solucion x y, cambio de variable no aplicado');
xlabel('x'); ylabel('y'); hold on;
h1 = 0.8:0.001:2.4;
k1 = -1.*ones(1 , length(h1));
plot(k1,h1);
plot(xE(end,1) , xE(end,2), '*');
plot(xE(end-1,1) , xE(end-1,2), '*'); hold off;
subplot(1,2,2);
xy_APLICADO = [xy(:,1)+1 , xy(:,2)+tc];
plot(xy_APLICADO(:,1) , xy_APLICADO(:,2))
title('Solucion X Y, cambio de variable aplicado');
xlabel('X'); ylabel('Y'); hold on;
h2 = -1:0.001:0.4;
k2 = zeros(1,length(h2));
plot(k2,h2);
xE_APLICADO = [xE(:,1)+1 , xE(:,2)+tc];
plot(xE_APLICADO(end,1) , xE_APLICADO(end,2), '*');
plot(xE_APLICADO(end-1,1) , xE_APLICADO(end-1,2), '*');
hold off;

figure;
subplot(2,2,1);
plot(t,xy(:,1));
title('Cambio de variable no aplicado');
xlabel('t'); ylabel('x');
subplot(2,2,3);
plot(t,xy(:,2));
title('Cambio de variable no aplicado');
xlabel('t'); ylabel('y');
subplot(2,2,2);
plot(t,xy_APLICADO(:,1));
title('Cambio de variable aplicado');
xlabel('t'); ylabel('X');
subplot(2,2,4);
plot(t,xy_APLICADO(:,2));
title('Cambio de variable aplicado');
xlabel('t'); ylabel('Y');

figure;
plot(t,xy(:,2)); hold on;
plot(tE,xE(:,2)); hold off;
```

El próximo y último paso de este trabajo consistirá en regresar a las ecuaciones originales del circuito (1.25) y verificar de manera efectiva la existencia de dicho ciclo límite, con una condición inicial (x_0, y_0, z_0) . Para lograrlo, deberemos revertir todas los cambios de variable que hemos aplicado a lo largo del estudio.

Si examinamos el sistema (5.6), es evidente que dado que el ciclo límite es asintóticamente estable, y basándonos en la gráfica derecha de la Fig. 5.6, si seleccionamos el punto inicial $(X_0, Y_0) = (0, 0)$, la solución del sistema tenderá hacia el ciclo límite cuando pase el suficiente tiempo. Por esta razón, hemos optado por tomar el punto $(X_0, Y_0) = (0, 0)$ como punto de partida para el proceso de deshacer las transformaciones y determinar así las condiciones iniciales adecuadas para el circuito.

El siguiente paso es deshacer los cambios de variable (5.2) y (5.4):

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) &= (X_0 - 1, Y_0 - t_c) = (0 - 1, 0 - t_C) \\ (x_0, y_0) &= (-1, -t_C) \end{aligned} \tag{5.20}$$

Las condiciones iniciales (5.20) corresponden al sistema “bizonal” (5.1). Como ya se comentó, este sistema no es mas que una simplificación del sistema (1.35), por lo que la conversión de las condiciones iniciales anteriores es directa:

$$(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = (-1, -t_C) \tag{5.21}$$

En última instancia, debemos proceder a deshacer las transformaciones de variable que se llevaron a cabo para pasar del sistema tridimensional (1.25) al sistema bidimensional (1.35). Esta tarea ya ha sido preparada en las ecuaciones (1.42), de manera que ahora solo debemos realizar la sustitución de los valores \tilde{x}_0 , \tilde{y}_0 y h_0 , teniendo en cuenta que previamente se estableció $h = h_0 = -1$. De este modo, obtendremos:

$$z_0 = \tilde{x}_0 = -1. \tag{5.22a}$$

$$y_0 = \frac{\alpha_1 \tilde{x}_0 + \frac{h_0}{a_{22}} - \tilde{y}_0}{\alpha_3} = \frac{\alpha_1(-1) + \frac{(-1)}{a_{22}} - (-t_C)}{\alpha_3} = \frac{-\alpha_1 - \frac{1}{a_{22}} + t_C}{\alpha_3}. \tag{5.22b}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{a_{12}}{a_{22}} y_0 + a_{11} q(\tilde{x}_0) - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{22}} \tilde{x}_0 - \frac{h_0}{a_{22}} = \\ &\quad \frac{a_{12}}{a_{22}} \left(\frac{-\alpha_1 - \frac{1}{a_{22}} + t_C}{\alpha_3} \right) + a_{11} q(-1) - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{22}}(-1) - \frac{-1}{a_{22}} = \\ &\quad \frac{a_{12}}{a_{22}} \left(\frac{-\alpha_1 - \frac{1}{a_{22}} + t_C}{\alpha_3} \right) + a_{11} q(-1) + \frac{a_{12} a_{21}}{a_{22}} + \frac{1}{a_{22}}. \end{aligned} \tag{5.22c}$$

Los valores anteriores se calcularán haciendo uso del siguiente código

```
% Condiciones Iniciales

% valores del circuito
a = 0.2; R = 1;
b = 0.01; L = 10;
h0 = -1; C = 0.1;

% variables auxiliares
a12 = 1/C; a11 = -a12;
a21 = -1/L; a22 = -R*a21;

alpha1 = (a22^2+a21*a12)/a22;
alpha3 = a12/a22;

tc=a*a11+a22;

% Funcion q
q = @(phi) b*phi+0.5*(a-b)*(abs(phi+1)-abs(phi-1));

% punto inicial sistema bidimensional
x0tilde = -1; y0tilde = -tc;

% punto inicial sistema tridimensional
z0 = x0tilde

y0=(alpha1*x0tilde+h0/a22-y0tilde)/alpha3

x0=a12/a22*(y0)+a11*q(x0tilde)-a12*a21/a22*x0tilde-h0/a22

>> Condiciones_Iniciales

z0 =
-1

y0 =
-0.0200

x0 =
-1.7764e-15
```

Recordemos que las variables de estado son:

- $x(t)$ es la tensión (v_1) en el condensador y el memristor.
- $y(t)$ es la intensidad (i_{LR}) en la resistencia y la bobina.
- $z(t)$ es el flujo (φ) en el memristor.

Por lo que aplicando una tensión inicial $v_1 = -1.7764 \cdot 10^{-15} \simeq 0$ (v) y una intensidad inicial $i_{LR} = -0.02 = -20$ (mA) aparecerá el ciclo límite asintóticamente estable en el circuito. Vamos a comprobarlo haciendo uso de la función *ode45* como hicimos anteriormente en “Ejemplo 6”.

% Ejemplo 6 Tridimensional

```
tspan = 0:0.001:100; % Lazo de tiempo estudiado.
x0    = [-1.7764e-15;-0.02;-1]; % Punto inicial.

[t, xyz] = ode45(@sistematridi, tspan, x0);

% t    -> Los valores de tspan que hemos definido
% xyz -> Soluciones del sistema, el primer punto es el
        inicial
```

Función usada en “Ejemplo 6 Tridimensional”:

```
function F=sistematridi(t,X)

% valores del circuito
a = 0.2; R = 1;
b = 0.01; L = 10;
h0 = -1; C = 0.1;

% variables auxiliares
a12 = 1/C; a11 = -a12;
a21 = -1/L; a22 = -R*a21;

x=X(1);
y=X(2);
z=X(3);

% funcion W(z)
breaks=[-Inf, -1, 1, Inf];
coefs=[b,a,b];
W=mkpp(breaks,coefs);

F=[a11*x*ppval(W,z)+a12*y ; a21*x+a22*y ; x];
```

end

Utilizando el código “Ejemplo 6 Tridimensional”, obtendremos los valores x , y , z como resultado de la integración del sistema (1.25). Además, variaremos manualmente el valor de R en la función “sistematridi” con los siguientes tres valores $R = 0.7$, $R = 1$ y $R = 1.3$, lo que nos permitirá visualizar la bifurcación foco-centro-ciclo límite, tal como se ha explicado previamente. A continuación, presentaremos el código ”Bifurcacion Planos 1”, el cual se utiliza para representar en 3D los resultados obtenidos.

```
% Bifurcacion Planos 1

Ejemplo_6_Tridimensional

% Definir las coordenadas X e Y

[X, Y] = meshgrid(-0.3:0.00025:0.3);

% Calcular Z
Z = -1+0*X*Y;

% Crear una grafica 3D
figure('Position', [0, 0, 1200, 1000]);
surf(X, Y, Z, 'FaceAlpha', 0.5, 'EdgeColor', 'none', ...
    'FaceColor', 'black');
hold on;

% Dibujar el ciclo limite
h1 = plot3(xyz(:,1),xyz(:,2),xyz(:,3), 'LineWidth', 1.5);
shg;
view(-140, 10);
axis([-0.3, 0.3, -0.3, 0.3, -1.5, -0.8]);
hold off;
```

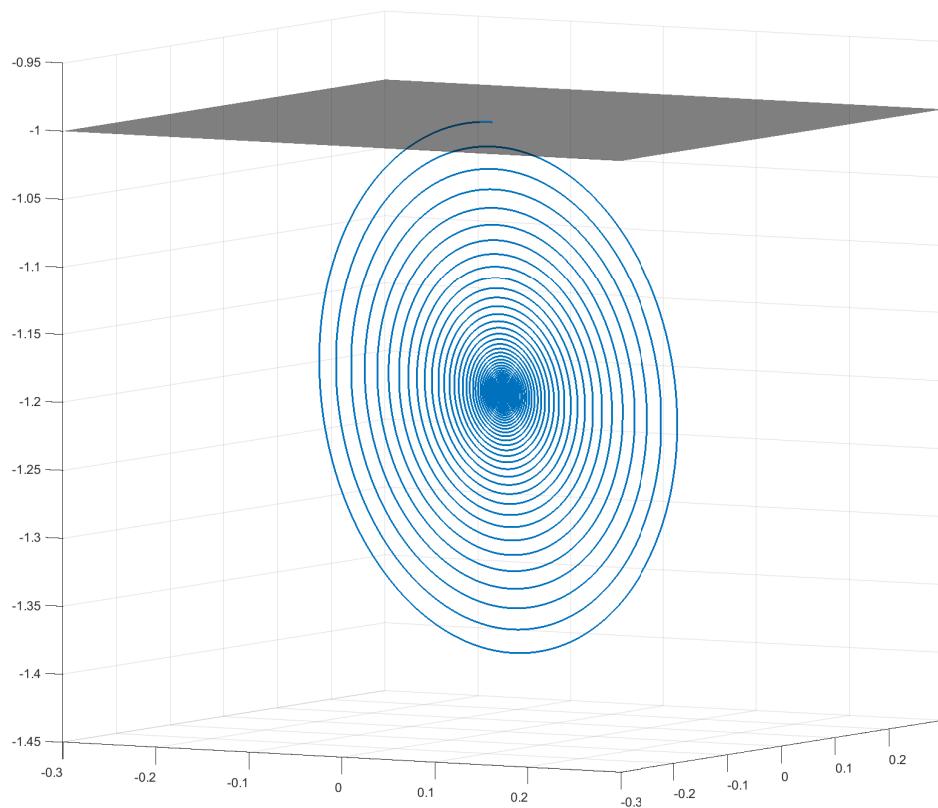


Figura 5.9: Gráfica resultado de “Bifurcacion Planos 1” para un valor de $R = 0.7$ en “sistematidi”.

En la Fig. 5.9, se aprecia la configuración de foco asintóticamente estable para un valor de $R < 1$ en el sistema (1.25), utilizando las condiciones iniciales previamente calculadas.

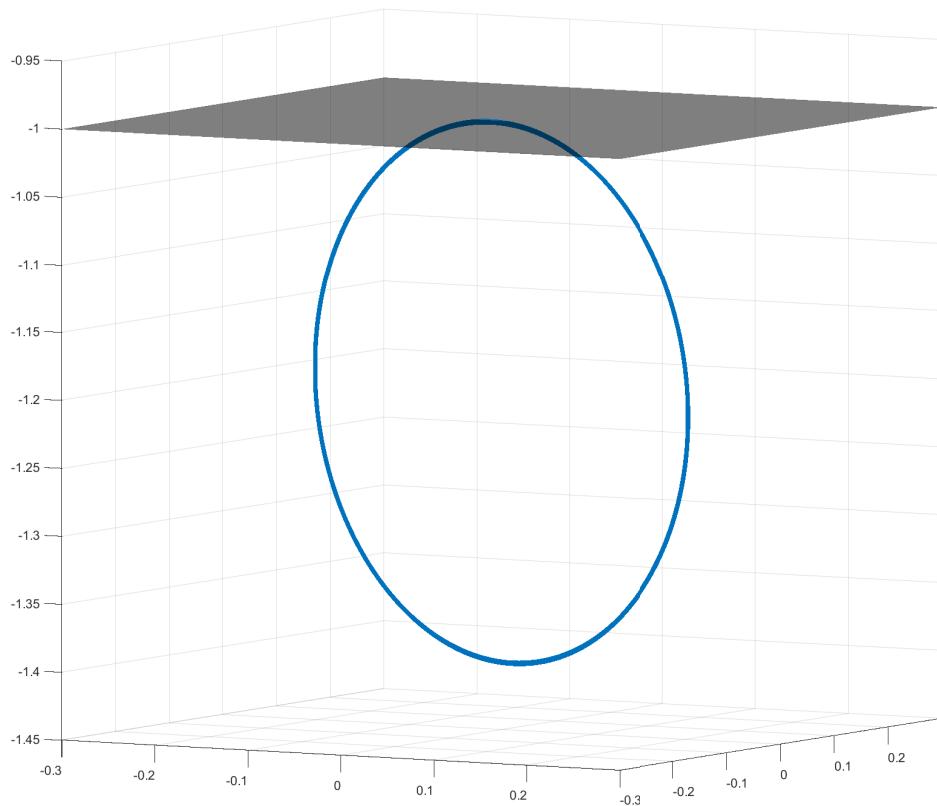


Figura 5.10: Gráfica resultado de “Bifurcacion Planos 1” para un valor de $R = 1$ en “sistematidi”.

En la Fig. 5.10, se observa la configuración de centro para un valor de $R = 1$ en el sistema (1.25), utilizando las condiciones iniciales previamente calculadas. Se puede notar que la última órbita es tangente a la superficie de separación, y será precisamente de esta órbita de donde surgirá el ciclo límite.

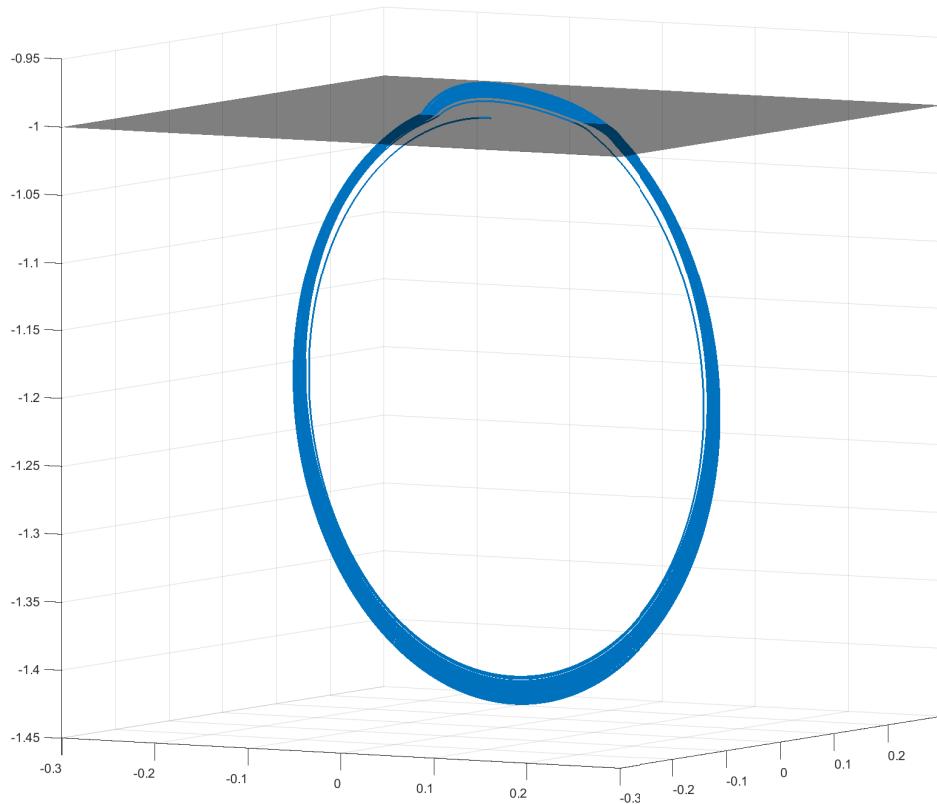


Figura 5.11: Gráfica resultado de “Bifurcacion Planos 1” para un valor de $R = 1.3$ en “sistematidi”.

En la Fig. 5.11, se representa la configuración de ciclo límite asintóticamente estable para un valor de $R > 1$ en el sistema (1.25), utilizando las condiciones iniciales previamente calculadas. Se puede observar cómo el ciclo límite efectivamente se introduce en la zona adyacente levemente.

Aunque en la Fig. 5.11 no sea muy evidente, las dos partes del ciclo límite, tanto en la zona superior como en la inferior del plano de separación, están contenidas en planos distintos (recordar que la dinámica del sistema es bidimensional). A continuación obtendremos la expresión de ambos planos para representarlos y ver dicha diferencia, basta con despejar z de la ecuación (1.32), sustituyendo (1.27):

$$\text{Para } z < -1 \rightarrow h_0 = -a_{22}x + a_{12}y - a_{12}a_{21}z + a_{11}a_{22}(b(z+1) - a),$$

$$z = -\frac{h_0 + a_{22}x - a_{12}y + a_{11}a_{22}(a - b)}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}b} =: z_1. \quad (5.23a)$$

$$\text{Para } z > -1 \rightarrow h_0 = -a_{22}x + a_{12}y - a_{12}a_{21}z + a_{11}a_{22}(az),$$

$$z = -\frac{h_0 + a_{22}x - a_{12}y}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}a} =: z_2. \quad (5.23b)$$

Seguidamente, presentaremos el código utilizado para representar ambos planos z_1 y z_2 , lo que nos permitirá observar con mayor claridad que, efectivamente, no son el mismo.

```
% Bifurcacion Planos 2

Ejemplo_6_Tridimensional

% Definir las coordenadas X e Y
[X, Y] = meshgrid(-0.3:0.00025:0.3);

% Calcular Z, Z1 y Z2
Z = -1+0*X*Y;
Z1 = -(h0 + a22*X - a12*Y + a11*a22*(a - b))/(a12*a21 - a11*a22*b);
Z2 = -(h0 + a22*X - a12*Y)/(a12*a21 - a*a11*a22);

% Visualizar diferencia entre planos
figure('Position', [0, 0, 1200, 1000]);
surf(X, Y, Z1, 'FaceAlpha', 0.5, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'red');
hold on;
surf(X, Y, Z2, 'FaceAlpha', 0.5, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'green');
surf(X, Y, Z, 'FaceAlpha', 0.5, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'black');
hold off;
view(-80, 15);
```

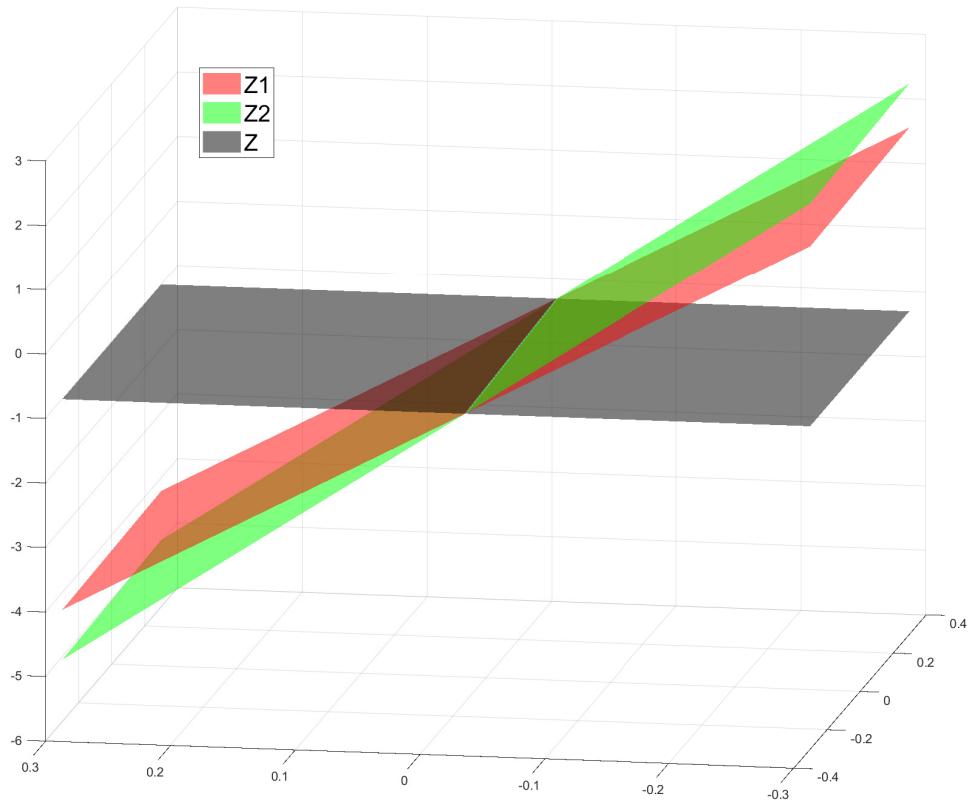


Figura 5.12: Gráfica resultado de “Bifurcacion Planos 2”.

En la Fig. 5.12, se ve la representación del plano z_1 (rojo) que contendrá la porción mayor de ciclo límite y el plano z_2 (verde) que contendrá la pequeña porción de ciclo límite que traspasará el plano de separación $\tilde{x} = -1$. Por último, presentaremos una figura que compara las tres figuras anteriores (Fig. 5.9, Fig. 5.10, Fig. 5.11) junto con los planos de la Fig. 5.12. Para ello, utilizaremos “Bifurcacion Planos 3” para generar las figuras, que se guardarán manualmente con los nombres ‘foco25.fig’, ‘centro25.fig’ y ‘ciclo25.fig’, posteriormente las combinaremos utilizando “Bifurcacion Combinar Planos”.

```
% Bifurcacion Planos 3

Ejemplo_6_Tridimensional

% Definir las coordenadas X e Y

[X, Y] = meshgrid(-0.3:0.00025:0.3);

% Calcular Z, Z1 y Z2
Z = -1+0*X*Y;
Z1 = -(h0 + a22*X - a12*Y + a11*a22*(a - b))/(a12*a21 -
a11*a22*b);
Z2 = -(h0 + a22*X - a12*Y)/(a12*a21 - a*a11*a22);

% Visualizar diferencia entre planos
figure('Position', [0, 0, 1200, 1000]);
surf(X, Y, Z1, 'FaceAlpha', 0.5, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'red');
hold on;
surf(X, Y, Z2, 'FaceAlpha', 0.5, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'green');
surf(X, Y, Z, 'FaceAlpha', 0.5, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'black');
hold off;
view(-80, 15);

% Ocultar los valores no deseados en Z1 y Z2
Z1(Z1 > -1) = NaN;
Z2(Z2 < -1) = NaN;

% Crear una grafica 3D
figure('Position', [0, 0, 1200, 1000]);
surf(X, Y, Z1, 'FaceAlpha', 0.5, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'red');
hold on;
surf(X, Y, Z2, 'FaceAlpha', 0.5, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'green');
surf(X, Y, Z, 'FaceAlpha', 0.5, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'black');

% Dibujar el ciclo limite
h1 = plot3(xyz(:,1),xyz(:,2),xyz(:,3), 'LineWidth', 1.5);
shg;
view(-140, 10);
axis([-0.3, 0.3, -0.3, 0.3, -1.5, -0.8]);
hold off;
```

```
% Bifurcacion Combinar Planos

% Abre las figuras existentes
h1 = openfig('foco25.fig','reuse','invisible');
h2 = openfig('centro25.fig','reuse','invisible');
h3 = openfig('ciclo25.fig','reuse','invisible');

% Define la misma vista 3D para todas las figuras
azimuth = 30; % Angulo azimutal (grados)
elevation = 10; % Angulo de elevacion (grados)

% Crea una nueva figura con tres subplots
figure('units','normalized','outerposition',[0 0 1 1])

% Configura los subplots
s1 = subplot(1,3,1);
axis([-0.3, 0.3, -0.3, 0.3, -1.5, -0.8]);
view(azimuth, elevation);

s2 = subplot(1,3,2);
axis([-0.3, 0.3, -0.3, 0.3, -1.5, -0.8]);
view(azimuth, elevation);

s3 = subplot(1,3,3);
axis([-0.3, 0.3, -0.3, 0.3, -1.5, -0.8]);
view(azimuth, elevation);

% Copia y muestra las figuras en los subplots
copyobj(allchild(get(h1,'CurrentAxes')), s1);
copyobj(allchild(get(h2,'CurrentAxes')), s2);
copyobj(allchild(get(h3,'CurrentAxes')), s3);

% Ajusta los titulos de los subplots
title(s1, '\fontsize{28}FOCO R = 0.7');
title(s2, '\fontsize{28}CENTRO R = 1');
title(s3, '\fontsize{28}CICLO LIMITE R = 1.3');
```

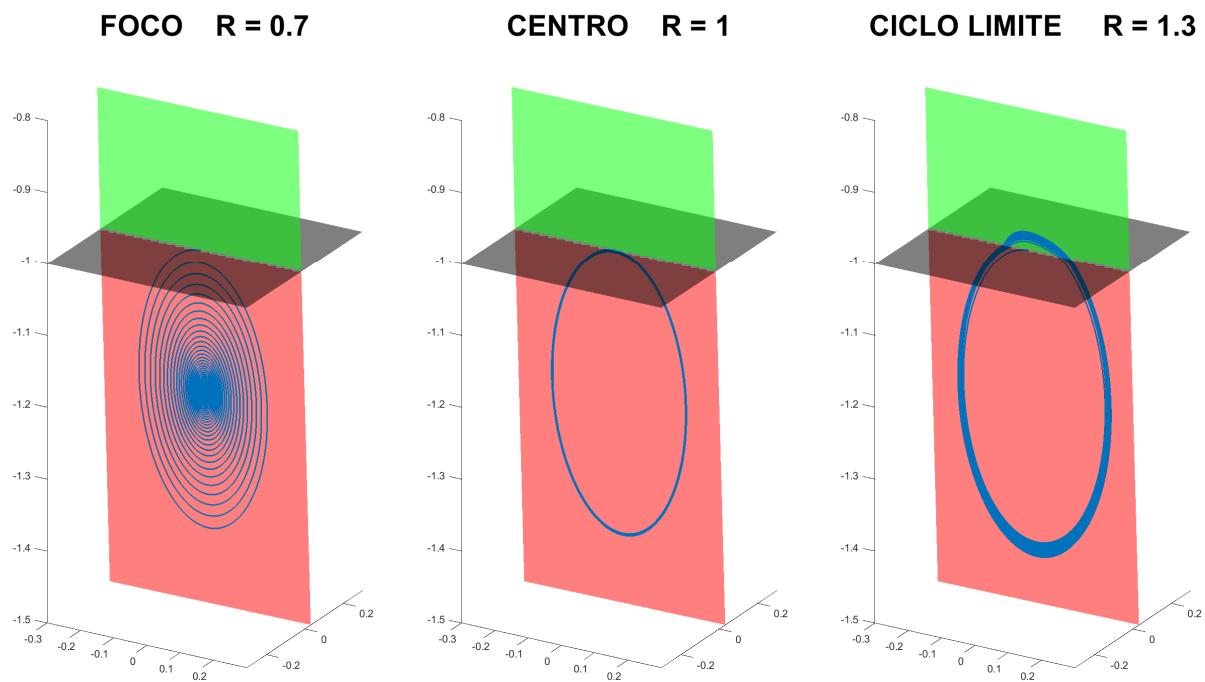


Figura 5.13: Gráfica resultado de “Bifurcacion Combinar Planos” .

Como se puede comprobar en la Fig. 5.13, efectivamente los planos rojo y verde pueden parecer el mismo, pero ya se ha demostrado en la Fig. 5.12 que no es así.

Conclusiones

En el transcurso de este trabajo, hemos explorado a fondo el potencial y la dinámica de este circuito oscilador construido con componentes electrónicos innovadores, y hemos aplicado rigurosamente conceptos teóricos clave. A través de nuestro análisis, hemos alcanzado valiosas conclusiones que arrojan luz sobre las posibilidades y limitaciones de este sistema, abriendo así la puerta a futuras investigaciones y aplicaciones en el campo de la electrónica y la utilización del Memristor. A lo largo de este estudio, hemos aplicado una gran cantidad de conceptos matemáticos de alto nivel y hemos logrado abstraernos del circuito para trabajar únicamente con expresiones matemáticas, obtener resultados en ellas y, finalmente, volver al circuito para corroborar que nuestros resultados son correctos.

Esta memoria ha sido la primera en utilizar la caracterización integral de la semiaplicación de Poincaré fuera del contexto puramente matemático, y esperamos que sirva como guía para que el resto de la comunidad científica se decida a utilizarla como una herramienta matemática de gran utilidad. Aspiramos a que este no sea más que el primero de muchos trabajos que la aprovechen.

Hemos demostrado que, a través de la aplicación rigurosa de conceptos matemáticos avanzados, es posible obtener una comprensión profunda de sistemas complejos como el que hemos estudiado, sin poner en riesgo la integridad del circuito mediante experimentación.

En última instancia, el futuro de la investigación científica en este ámbito es prometedor, y estamos ansiosos por presenciar los descubrimientos y avances que se avecinan. Esperamos que este trabajo contribuya al desarrollo de tecnologías innovadoras y al enriquecimiento de nuestro conocimiento sobre sistemas dinámicos y electrónicos.

Bibliografía

- [1] CHUA, Leon O. “Memristor – The missing circuit element.” En: *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 1971, vol. CT-18, no. 5, pp. 507-519.
DOI: <https://doi.org/10.1109/TCT.1971.1083337>
- [2] ITOH, Makoto., CHUA, Leon O. “Memristor Oscillators” En: *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2008, vol. 18, No. 11, pp. 3183-3206.
DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127408022354>
- [3] STRUKOV, D. B., SNIDER, G. S., STEWART, D. R., WILLIAMS, R. S. “The missing memristor found” En: *Nature*, 2008, vol. 453(7191), pp. 80-3.
DOI: <https://doi.org/10.1038/nature06932>
- [4] WILLIAMS, R. S. “How We Found The Missing Memristor” En: *IEEE Spectrum*, 2008, vol. 45, no. 12, pp. 28-35,
DOI: <https://doi.org/10.1109/MSPEC.2008.4687366>
- [5] Ji, Xiaoyue and Dong, Zhekang and Zhou, Guangdong and Lai, Chun Sing and Yan, Yunfeng and Qi, Donglian “Memristive System Based Image Processing Technology: A Review and Perspective” En: *Electronics*, 2021, vol. 10, no. 24, p. 3176.
DOI: <https://doi.org/10.3390/electronics10243176>
- [6] CARAVELLI, F., CARBAJAL, J. “Memristors for the Curious Outsiders” En: *Technologies*, 2018, vol. 6, no. 4, p.118.
DOI: <https://doi.org/10.3390/technologies6040118>
- [7] LLIBRE, J., TERUEL, A. E. *Introduction to the Qualitative Theory of Differential Systems*, Enero de 2014. Editorial: Springer Basel. eBook ISBN: 978-3-0348-0657-2. Hardcover ISBN: 978-3-0348-0656-5.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0657-2>
- [8] CARMONA, V. “Bifurcaciones en Sistemas Dinámicos Lineales a Trozos” . Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, 2002.
URL: <https://idus.us.es/handle/11441/15911>
- [9] CARMONA, V., FREIRE, E., PONCE, E., TORRES, F. “On simplifying and classifying piecewise-linear systems” En: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2002, vol. 49, no. 5, pp. 609-620.
DOI: <https://doi.org/10.1109/TCSI.2002.1001950>
- [10] AMADOR, A., FREIRE, E., PONCE, E., ROS, J. “On Discontinuous Piecewise Linear Models for Memristor Oscillators” En: *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2017, vol. 27, no. 6.
DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127417300221>

- [11] CARMONA, V., FERNÁNDEZ-SÁNCHEZ, F., GARCÍA-MEDINA, E., NOVAES, D. D. "Properties of Poincaré half-maps for planar linear systems and some direct applications to periodic orbits of piecewise systems " En: *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2023, No. 22, 1-18,
DOI: <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2023.1.22>
- [12] CARMONA, V., FERNÁNDEZ-SÁNCHEZ, F., NOVAES, D. D. "Uniqueness and stability of limit cycles in planar piecewise linear differential systems without sliding region" En: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2023, vol. 123, pp. 107257, ISSN 1007-5704,
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107257>
- [13] CARMONA, V., FERNÁNDEZ-SÁNCHEZ, F. "Integral characterization for Poincaré half-maps in planar linear systems" En: *Journal of Differential Equations*, 2021, vol. 305, pp. 319-346, ISSN 0022-0396,
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.10.010>
- [14] PONCE, E., ROS, J., VELA, E. *The Focus-Center-Limit Cycle Bifurcation in Discontinuous Planar Piecewise Linear Systems Without Sliding*. Julio de 2013. Editorial: Springer, Berlin, Heidelberg. Print ISBN: 978-3-642-38829-3. Online ISBN: 978-3-642-38830-9.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-38830-9_21
- [15] PONCE, E., ROS, J., VELA, E. *Bifurcations in Continuous Piecewise Linear Differential Systems: Applications to Low-Dimensional Electronic Oscillators*. Diciembre de 2022. Editorial: Springer Cham. eBook ISBN: 978-3-031-21135-5. Hardcover ISBN: 978-3-031-21134-8. Softcover ISBN: 978-3-031-21137-9.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-21135-5>
- [16] BACHMANN, K. H. "Henrici, P., Applied and Computational Complex Analysis, Bd. I, 682 S., New York-London-Sydney-Toronto. John Wiley & sons. 1974. £ 13,50" En: *Zamm-zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik*, 1977, vol. 57, pp.352-352.
DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.19770570622>
- [17] BIOLEK, Z., BIOLEK, D., BIOLKOVA, V. "SPICE Model of Memristor with Nonlinear Dopant Drift" En: *Radioengineering*, 2009, vol. 18, no. 2, pp. 210-214
URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:19016545>
- [18] PERKO, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*, Diciembre del 2000. Editorial: Springer New York. eBook ISBN: 978-1-4613-0003-8. Hard-cover ISBN: 978-0-387-95116-4.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0003-8>
- [19] HIRSCH, M. W., SMALE, S. *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*, 1983. Editorial: Alianza. ISBN 13: 9788420680613.
- [20] SIMMONS, G. F. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, Octubre de 1985. Editorial: McGraw-Hill. ISBN 13: 978-8476150696.
- [21] ZILL, D. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, Julio de 2009. Editorial: Cengage Learning Editores S.A. de C.V. ISBN 13: 978-9708300551.

- [22] MOLER, C. B. *Numerical Computing with MATLAB*, Enero de 2004. Editorial: Society for Industrial and Applied Mathematics. ISBN 13: 978-0898715606.
- [23] App “*Phase Plane and Slope Field*”
URL: <https://es.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/91705-phase-plane-and-slope-field-apps/>
- [24] APOSTOL, T. M. *Análisis Matemático*, Enero de 1976. Editorial: Reverté. Segunda edición. ISBN: 978-84-291-5004-9.
- [25] FUSCO, N., MARCELLINI, P., SBORDONE, C. *Mathematical Analysis. Functions of Several Real Variables and Applications*, Enero de 2023. Editorial: Springer Cham. eBook ISBN: 978-3-031-04151-8. Softcover ISBN: 978-3-031-04150-1.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-04151-8>