



Universidad de Sevilla
Escuela Politécnica Superior



Trabajo Fin de Grado
Ingeniería Electrónica Industrial

*La caracterización integral de las
semiaplicaciones de Poincaré y su aplicación a
circuitos electrónicos: El Memristor*

Autor: Sergio R. Durán Martín

Tutor: Dr. Victoriano Carmona Centeno

Departamento: Matemática Aplicada II

Resumen

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Palabras clave: robótica educativa, robot modular, STM32, FreeRTOS, interfaz gráfica, impresión 3D.

Abstract

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Keywords: educational robotics, modular robot, STM32, FreeRTOS, graphic interface, 3D printing.

Índice general

1	Introducción	4
2	Descripción del Circuito	5
2.1	Resistencia negativa	6
2.2	Memristor	8
2.3	Variables de estado	12
2.4	Superficies invariantes	14
3	Sistemas Lineales a Trozos Bizonales	15
3.1	Sistemas lineales planos	16
3.2	Sistemas lineales a trozos bizonales	17
4	Semiaplicaciones de Poincaré	18
5	Bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite	20
6	Oscilación Periódica en el circuito	22
7	TÍTULO CAPÍTULO 7	24
8	TÍTULO CAPÍTULO 8	26

Capítulo 1

Introducción

Contenido del capítulo de introducción. Contenido del capítulo 1.

Capítulo 2

Descripción del Circuito

El circuito que se ha estudiado es un oscilador con resistencia negativa al que se le ha añadido un componente muy interesante y que está siendo muy estudiado en estos últimos tiempos, el memristor, ver [Fig. 2.1](#).

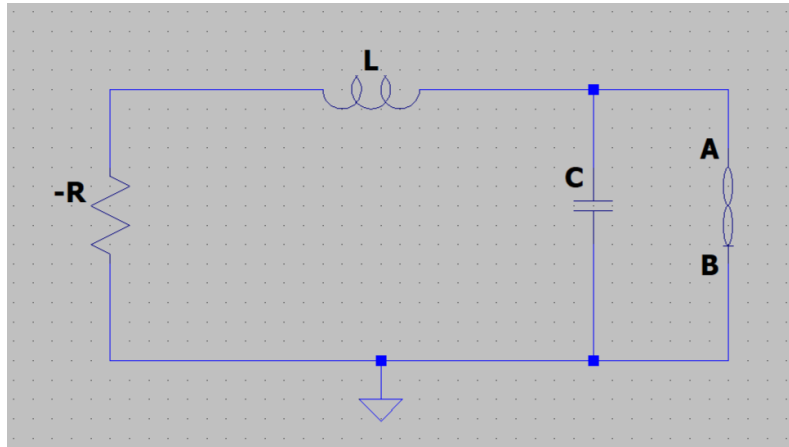


Figura 2.1 : Oscilador RLC con R negativa y Memristor

Como se puede ver no existe una fuente de señal en el circuito y esto se debe a que el análisis hecho busca encontrar una oscilación periódica tan solo proporcionando condiciones iniciales a la bobina y el condensador, esto gracias al comportamiento de la resistencia negativa y del memristor los cuales se especifican mas adelante.

La forma de imponer las condiciones iniciales serían las clásicas, usando fuentes de intensidad en serie y tensión en paralelo con interruptores que se abren en $t = 0(s)$ para la bobina y el condensador respectivamente. Esta parte no se va a detallar más en profundidad puesto que en este trabajo no hay implementación real del circuito, los motivos se detallan en el CAPITULO X.

2.1. Resistencia negativa

Uno de los componentes del circuito es la resistencia negativa la cual se puede construir con lo que se llama un *Convertidor de Impedancia Negativa (NIC)*. Un NIC es un circuito activo, es decir, en lugar de disipar energía como una resistencia convencional, puede proporcionar energía a un circuito, ver [Fig. 2.2](#). En términos prácticos, un NIC puede ser utilizado para compensar la resistencia de carga de un sistema, mejorar la eficiencia de la transferencia de energía o realizar otras funciones específicas en circuitos eléctricos o electrónicos. En los circuitos osciladores, el NIC desempeña un papel importante en el mantenimiento, estabilización, frecuencia y calidad de la oscilación.

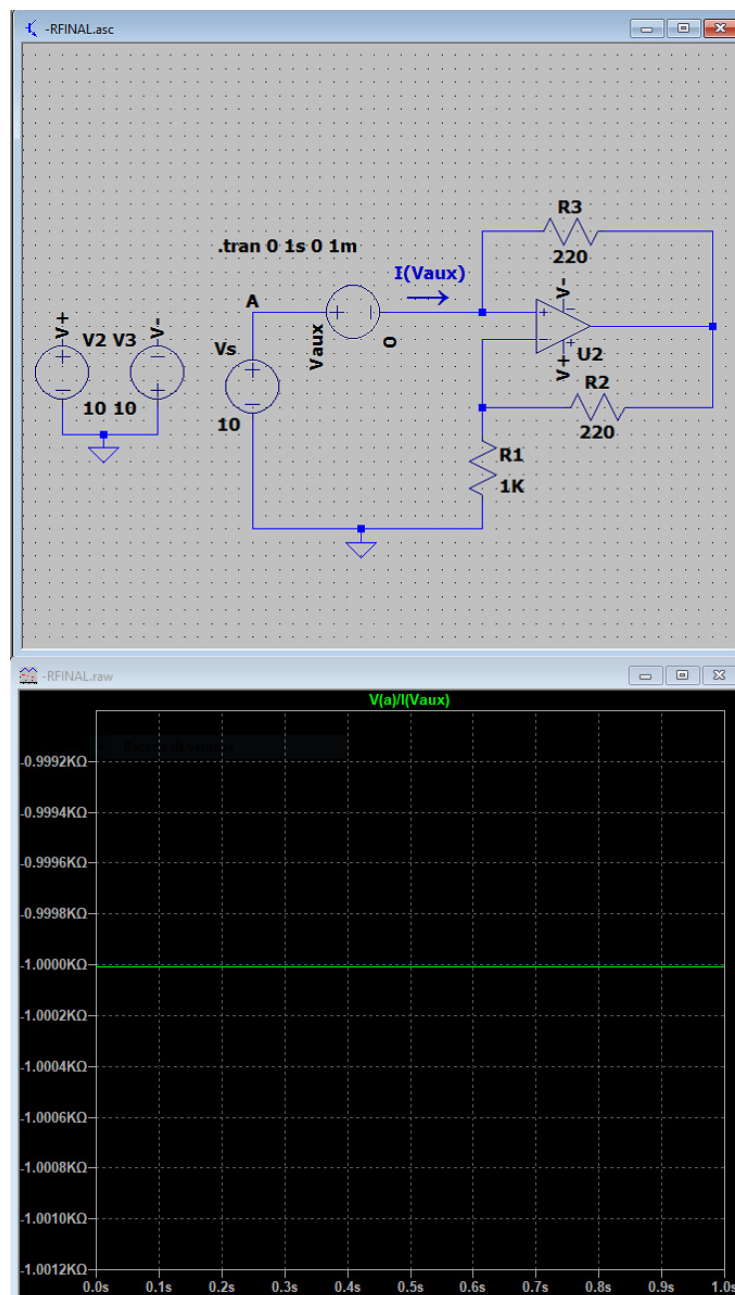
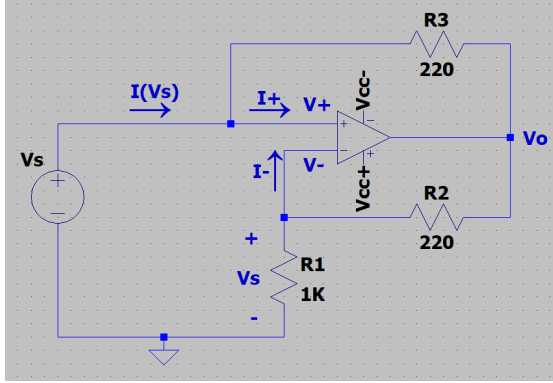


Figura 2.2 : Convertidor de Impedancia Negativa de -1000 Ohmios

Una de las maneras de realizarlo es usando un amplificador operacional y 3 resistencias en la configuración que se ve en la [Fig. 2.2](#) de esta manera si elegimos $R_2 = R_3$ la resistencia R_1 es la que determinaría el valor de resistencia negativa, esta es la demostración:



Consideraciones para el cálculo del circuito de la [Fig. 2.3](#) con Amplificadores Operacionales:

$$V_+ = V_- \quad (2.1)$$

$$I_+ = I_- = 0(A) \quad (2.2)$$

Figura 2.3 : Parámetros circuito NIC

Teniendo en cuenta la ecuación (2.1) se puede ver que la tensión V_S cae sobre R_1 y se puede relacionar con V_O mediante un divisor de tensión:

$$V_S = V_O \frac{R_1}{R_1 + R_2} \rightarrow V_O = V_S \frac{R_1 + R_2}{R_1} \quad (2.3)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2.2) se puede ver que la intensidad $I(V_S)$ es la misma que pasa por la R_3 , por ello se puede deducir:

$$I(V_S) = \frac{V_S - V_O}{R_3} \quad (2.4)$$

Sustituyendo la ecuación (2.3) en (2.4) y trabajando la expresión se llega a:

$$I(V_S) = V_S \frac{-R_2}{R_1 R_3} \quad (2.5)$$

Si dividimos V_S entre $I(V_S)$ (ecuación (2.5)) para obtener la impedancia de entrada:

$$\frac{V_S}{I(V_S)} = Z_{IN} = \frac{V_S}{V_S \frac{-R_2}{R_1 R_3}} = -R_1 \frac{R_3}{R_2} \quad (2.6)$$

Si elegimos $R_3 = R_2$ en la ecuación (2.6) obtenemos:

$$Z_{IN} = -R_1 \quad (2.7)$$

2.2. Memristor

El componente más interesante de este circuito es el Memristor, teorizado por el científico Leon Chua en 1971 [1], este elemento trata de llenar el vacío que existía en las relaciones entre las cuatro variables básicas en teoría de circuitos: voltaje v , intensidad i , carga eléctrica q y flujo magnético φ . En concreto el memristor relaciona la carga eléctrica con el flujo magnético de la siguiente manera [2]:

$$\varphi = \varphi(q) \quad q = q(\varphi) \quad (2.8)$$

Sabiendo la relación del voltaje y la intensidad respecto a la carga y al flujo en el tiempo:

$$v(t) = \frac{d\varphi}{dt} \quad i(t) = \frac{dq}{dt} \quad (2.9)$$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau \quad q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (2.10)$$

Derivando la ecuación (2.8) respecto al tiempo aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi(q)}{dq} \frac{dq}{dt} \quad \frac{dq}{dt} = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.11)$$

Sustituyendo las relaciones de la ecuación (2.9) en la ecuación (2.11):

$$v(t) = \frac{d\varphi(q)}{dq} i(t) \quad i(t) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} v(t) \quad (2.12)$$

Los dos parámetros que quedan en la ecuación (2.12) son los que se denominan **Memristancia** $M(q)$ y **Memductancia** $W(\varphi)$:

$$M(q) = \frac{d\varphi(q)}{dq} \quad W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} \quad (2.13)$$

Finalmente se presentan dos tipos de expresiones:

$$\text{Memristor controlado por carga} \rightarrow v(t) = M(q) i(t) \quad (2.14)$$

$$\text{Memristor controlado por flujo} \rightarrow i(t) = W(\varphi) v(t) \quad (2.15)$$

El segundo acontecimiento más importante en relación al memristor fue en 2008 cuando en los laboratorios de HP fabricaron un componente cuyo comportamiento era muy parecido al funcionamiento que afirmaba Chua, debía de tener el memristor. En un inicio al componente que HP creó en 2005 le dieron el nombre de *Crossbar Latch* no sería hasta 2008 que se percataron de la similitud de funcionamiento con el memristor de Chua. La construcción es sencilla, se trata de dos capas, una de dióxido de titanio puro y otra de dióxido de titanio deficiente de átomos de oxígeno, ambas envueltas por dos electrodos de platino *Fig. 2.4*

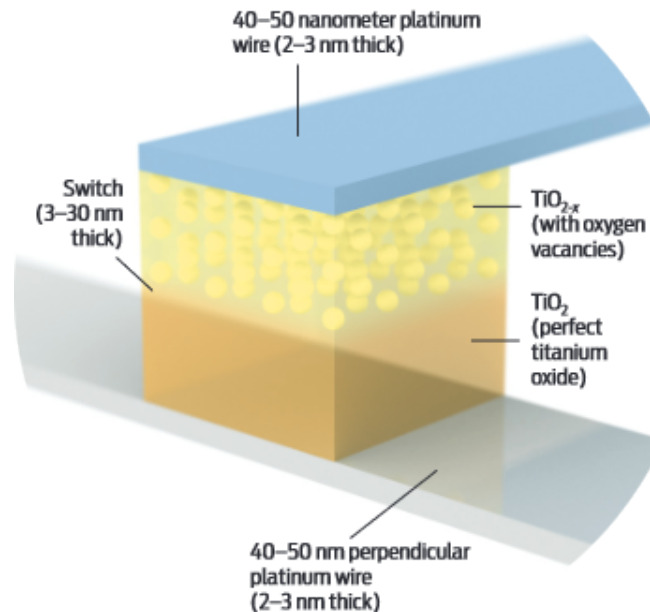


Figura 2.4 : Construcción del memristor de HP. Referencia: [4]

El óxido de titanio tiene una serie de características que lo hacen un material muy interesante en esta aplicación:

1. Resistencia variable: La resistencia eléctrica del óxido de titanio puede cambiar en respuesta de la aplicación de una corriente o un campo eléctrico. Lo cual nos permite no tan solo guardar 1 o 0 si no un rango de valores dentro de unos límites de operación.
2. No volatilidad: El óxido de titanio puede mantener su estado de resistencia incluso cuando se retira la corriente eléctrica que lo atraviesa. Esto significa que puede retener información y mantener su estado de resistencia sin requerir energía continua.
3. Cambios rápidos de resistencia: Esta propiedad permite operaciones de escritura y lectura rápidas en el memristor, lo que es crucial para su uso en aplicaciones de almacenamiento y procesamiento de datos.
4. Baja potencia y tamaño compacto

La formula que se propone en [3] para modelar el comportamiento de este dispositivo es:

$$v(t) = \left(R_{ON} \frac{w(t)}{D} + R_{OFF} \left(1 - \frac{w(t)}{D} \right) \right) i(t) \quad (2.16)$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = \mu_V \frac{R_{ON}}{D} q(t) \quad (2.17)$$

Integrando la ecuación (2.17) e insertandola en (2.16) teniendo en cuenta que el valor de resistencia $R_{ON} \ll R_{OFF}$:

$$w(t) = \mu_V \frac{R_{ON}}{D} i(t) \quad (2.18)$$

$$M(q) = R_{OFF} \left(1 - \frac{\mu_V R_{ON}}{D^2} q(t) \right) \quad (2.19)$$

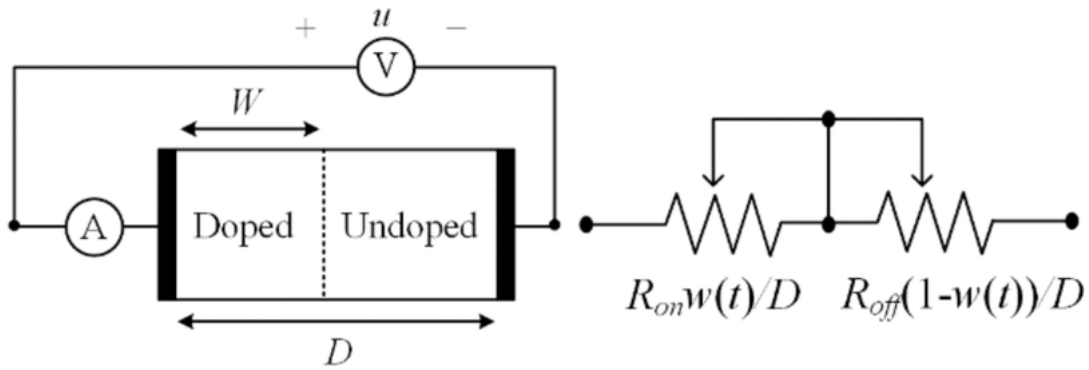


Figura 2.5 : Esquema del memristor de HP. Referencia: [5]

Los parámetros que aparecen en las ecuaciones anteriores y que describen el funcionamiento del componente son:

1. R_{ON} : Resistencia en el estado ON, valor mínimo. Es constante.
2. R_{OFF} : Resistencia en el estado OFF, valor máximo. Es constante.
3. μ_V : Movilidad iónica de arrastre promedio. Es constante.
4. w : Ancho de la zona dopada, no es constante, depende de la excitación.
5. D : Ancho total de la lamina de oxido de titanio. Es constante.

El funcionamiento es el siguiente, entre los dos electrodos de platino tenemos una capa de dióxido de titanio puro TiO_2 que actúa como dieléctrico y otra de dióxido de titanio con vacantes de oxígeno TiO_{2-x} que actúa como conductor ya que en estas vacantes están cargadas positivamente (ver [Fig. 2.4](#)), ya que al faltar átomos de oxígeno se están perdiendo también sus electrones de valencia asociados, generando así que el compuesto necesite atraer electrones a dichas vacantes para así mantenerse eléctricamente estable. Cuando un voltaje positivo se aplica al electrodo superior las vacantes de oxígeno de la zona dopada se repelen y viajan hacia la zona de óxido de titanio puro, haciendo así que aumente la conductividad hasta que se alcance el valor de R_{ON} . Si por el contrario el voltaje aplicado es negativo, las vacantes de oxígeno viajan hacia el electrodo superior, reduciendo la conductividad hasta R_{OFF} .

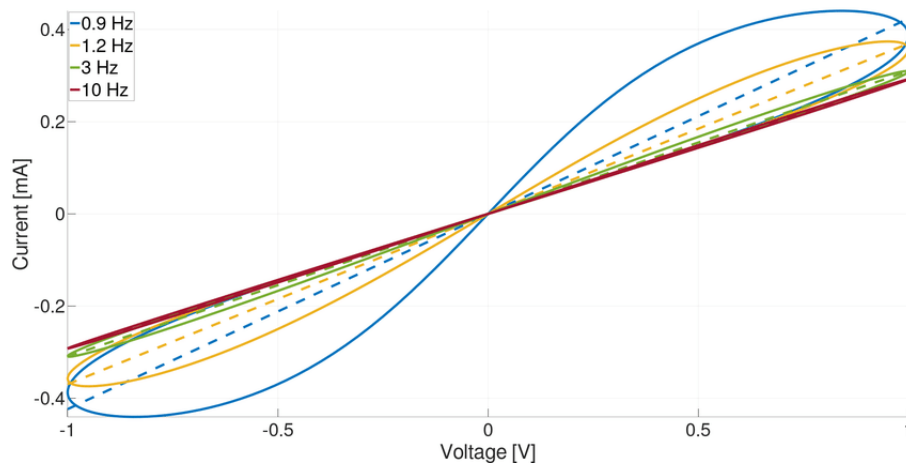


Figura 2.6 : Gráfica Tensión-Intensidad del Memristor de Chua ideal para una señal de entrada senoidal con varias frecuencias. Como se puede ver conforme aumenta la frecuencia la gráfica se parece más a la de una resistencia tradicional.

Referencia: [6]

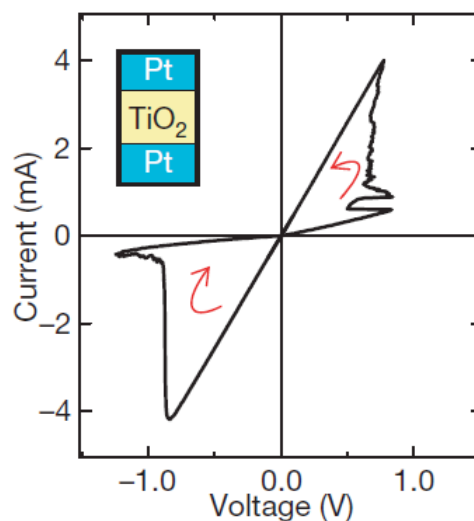


Figura 2.7 : Gráfica Tensión-Intensidad del Memristor de HP. Referencia: [3]

2.3. Variables de estado

En este trabajo hemos hecho un análisis matemático de la bifurcación del circuito oscilador haciendo uso de técnicas de análisis de reciente estudio, pero primero hay que presentar el circuito y transformar sus ecuaciones eléctricas hasta llegar a una forma matemática con la que poder trabajar, por ello empezamos analizando el circuito.

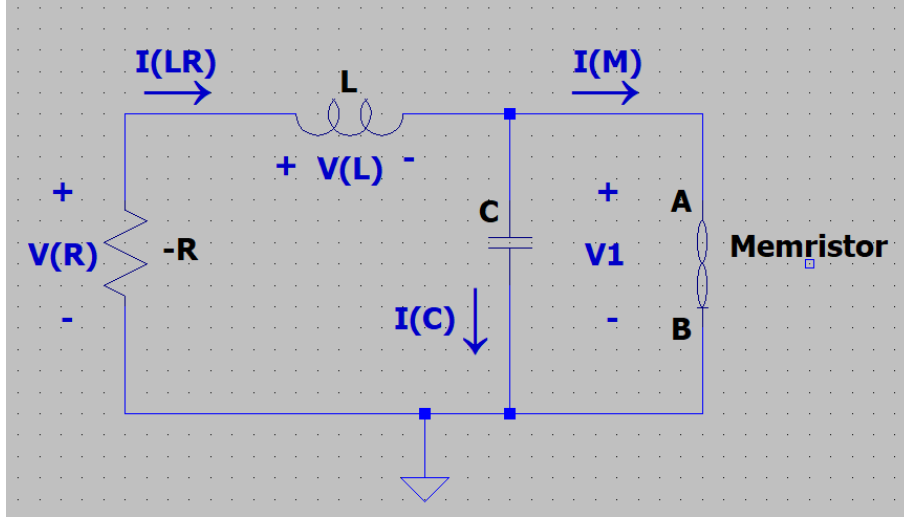


Figura 2.8 : Parámetros del circuito

Aplicando las leyes de Kirchoff a nuestro circuito, [Fig. 2.8](#), se puede ver que:

$$i_{LR} = i_M + i_C \quad (2.20)$$

$$v_R = v_L + v_1 \quad (2.21)$$

Reordenando las anteriores ecuaciones:

$$i_C = i_{LR} - i_M \quad (2.22)$$

$$v_L = v_R - v_1 \quad (2.23)$$

Recordando la relación entre la carga y el flujo con la intensidad y la tensión de las ecuaciones [\(2.9\)](#), la ecuación del memristor controlado por flujo [\(2.15\)](#) y aplicándolo a [\(2.22\)](#) y [\(2.23\)](#) obtenemos:

$$C \frac{dv_1}{dt} = i_{LR} - W(\varphi) v_1 \quad (2.24)$$

$$L \frac{di_{LR}}{dt} = R i_{LR} - v_1 \quad (2.25)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = v_1 \quad (2.26)$$

Como se pueden ver las variables de estado elegidas son la intensidad en la resistencia y la bobina i_{LR} , la tensión en el condensador y el memristor v_1 y el flujo en el memristor φ

Reordenando las ecuaciones anteriores (2.24), (2.25) y (2.26) tenemos:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{i_{LR}}{C} - W(\varphi) \frac{v_1}{C} \quad (2.27)$$

$$\frac{di_{LR}}{dt} = \frac{R}{L} i_{LR} - \frac{v_1}{L} \quad (2.28)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = v_1 \quad (2.29)$$

Haciendo algunos cambios a las tres anteriores ecuaciones para luego poder trabajar con las ecuaciones obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(y - W(z)x) \\ \frac{dy}{dt} = -\xi x + \beta y \\ \frac{dz}{dt} = x \end{cases} \quad (2.30)$$

Donde tenemos:

$$x = v_1 \quad y = i_{LR} \quad z = \varphi \quad \& \quad \alpha = \frac{1}{C} \quad \beta = \frac{R}{L} \quad \xi = \frac{1}{L}$$

Pero del sistema (2.30) aun tenemos que definir $W(z)$. En [2] se asume que el comportamiento del memristor se puede aproximar por una ecuacion lineal a trozos monótonamente creciente:

$$q(\varphi) = b\varphi + 0,5(a - b)(|\varphi + 1| - |\varphi - 1|) \quad (2.31)$$

$$\forall \quad a, b, c, d > 0$$

Escribiendo (2.31) con la variable z y derivandola (recordando la ecuación (2.13)) para obtener $W(z)$:

$$q(z) = bz + 0,5(a - b)(|z + 1| - |z - 1|) \quad (2.32)$$

$$W(z) = \frac{dq(z)}{dz} = \begin{cases} a, & |z| < 1 \\ b, & |z| > 1 \end{cases} \quad (2.33)$$

Ya tenemos las ecuaciones necesarias para empezar el análisis pero primero veremos en los siguientes capitulos que técnicas estaremos usando para ello.

2.4. Superficies invariantes

esto es texto de la siguiente hoja

Capítulo 3

Sistemas Lineales a Trozos Bizonales

Contenido del capítulo 3.

3.1. Sistemas lineales planos

esto es texto de la siguiente hoja

3.2. Sistemas lineales a trozos bizonales

esto es texto de la siguiente hoja

Capítulo 4

Semiaplicaciones de Poincaré

Contenido del capítulo 4.

esto es texto de la siguiente hoja

Capítulo 5

Bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite

Contenido del capítulo 5.

esto es texto de la siguiente hoja

Capítulo 6

Oscilación Periódica en el circuito

Contenido del capítulo 6.

esto es texto de la siguiente hoja

Capítulo 7

TÍTULO CAPÍTULO 7

Contenido del capítulo 7.

esto es texto de la siguiente hoja

Capítulo 8

TÍTULO CAPÍTULO 8

Contenido del capítulo 8.

esto es texto de la siguiente hoja

Conclusiones

Contenido del capítulo de conclusiones.

Bibliografía

- [1] CHUA, L. O. Memristor – The missing circuit element. IEEE Transactions on Circuit Theory, 1971, vol. CT-18, no. 5, p. 507 to 519. DOI: 10.1109/TCT.1971.1083337.
- [2] Itoh, Makoto & Chua, Leon. (2008). Memristor oscillators. I. J. Bifurcation and Chaos. 18. 3183-3206. 10.1142/S0218127408022354.
- [3] Strukov DB, Snider GS, Stewart DR, Williams RS. The missing memristor found. Nature. 2008 May 1;453(7191):80-3. doi: 10.1038/nature06932. Erratum in: Nature. 2009 Jun 25;459(7250):1154. PMID: 18451858.
- [4] R. S. Williams, "How We Found The Missing Memristor,"in IEEE Spectrum, vol. 45, no. 12, pp. 28-35, Dec. 2008, doi: 10.1109/MSPEC.2008.4687366.
- [5] Xiaoyue, Ji & Dong, Zhekang & Zhou, Guangdong & Lai, Chun Sing & Yan, Yunfeng & Qi, Donglian. (2021). Memristive System Based Image Processing Technology: A Review and Perspective. Electronics. 10. 3176. 10.3390/electronics10243176.
- [6] Caravelli, F. & Carbajal, Juan. (2018). Memristors for the Curious Outsiders. 10.31224/osf.io/c4qr9.