



Universidad de Sevilla
Escuela Politécnica Superior



Trabajo Fin de Grado
Ingeniería Electrónica Industrial

*La caracterización integral de las
semiacpliaciones de Poincaré y su aplicación a
circuitos electrónicos: El Memristor*

Autor: Sergio R. Durán Martín

Tutor: Dr. Victoriano Carmona Centeno

Departamento: Matemática Aplicada II

Resumen

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Palabras clave: robótica educativa, robot modular, STM32, FreeRTOS, interfaz gráfica, impresión 3D.

Abstract

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Keywords: educational robotics, modular robot, STM32, FreeRTOS, graphic interface, 3D printing.

Índice general

1	Introducción	4
2	Descripción del Circuito	5
2.1	Resistencia negativa	6
2.2	Memristor	8
2.3	Variables de estado	12
2.4	Superficies invariantes	15
3	Sistemas Dinámicos Continuos	19
3.1	Sistemas lineales planos	20
3.2	Sistemas lineales a trozos bizonales	27
4	Semiacpliaciones de Poincaré	33
4.1	Caracterización integral de la semiacpliación de Poincare	38
5	Bifurcaciones	52
5.1	Análisis del punto de equilibrio	53
5.2	Ciclo-Límite	57
5.3	Bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite y su cálculo mediante desarrollo en series.	60
6	Oscilación Peródica en el circuito	68

Capítulo 1

Introducción

Contenido del capítulo de introducción. Contenido del capítulo 1.

Capítulo 2

Descripción del Circuito

El circuito que se ha estudiado es un oscilador con resistencia negativa al que se le ha añadido un componente muy interesante y que está siendo muy estudiado en estos últimos tiempos, el memristor, ver *Fig. 2.1*.

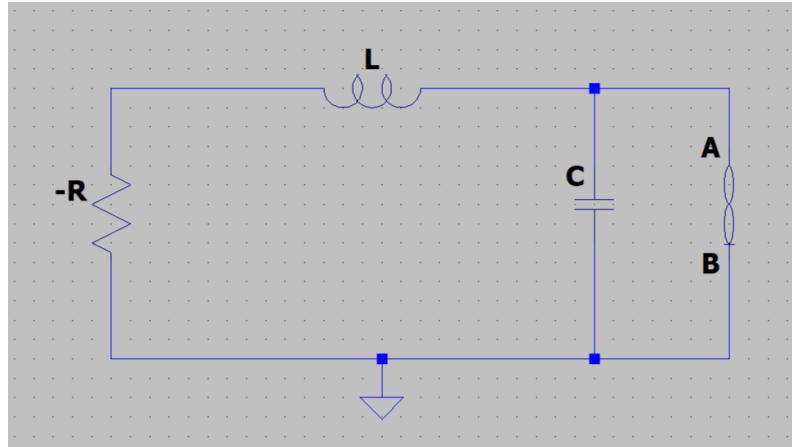


Figura 2.1 : Oscilador RLC con R negativa y Memristor.

Como se puede ver no existe una fuente de señal en el circuito y esto se debe a que el análisis hecho busca encontrar una oscilación periódica tan solo proporcionando condiciones iniciales a la bobina y el condensador, esto gracias al comportamiento de la resistencia negativa y del memristor los cuales se especifican mas adelante.

La forma de imponer las condiciones iniciales serían las clásicas, usando fuentes de intensidad en serie y tensión en paralelo con interruptores que se abren en $t = 0(s)$ para la bobina y el condensador respectivamente.

2.1. Resistencia negativa

Uno de los componentes del circuito es la resistencia negativa la cual se puede construir con lo que se llama un *Convertidor de Impedancia Negativa (NIC)*. Un NIC es un circuito activo, es decir, en lugar de disipar energía como una resistencia convencional, puede proporcionar energía a un circuito, ver *Fig. 2.2*. En términos prácticos, un NIC puede ser utilizado para compensar la resistencia de carga de un sistema, mejorar la eficiencia de la transferencia de energía o realizar otras funciones específicas en circuitos eléctricos o electrónicos. En los circuitos osciladores, el NIC desempeña un papel importante en el mantenimiento, estabilización, frecuencia y calidad de la oscilación.

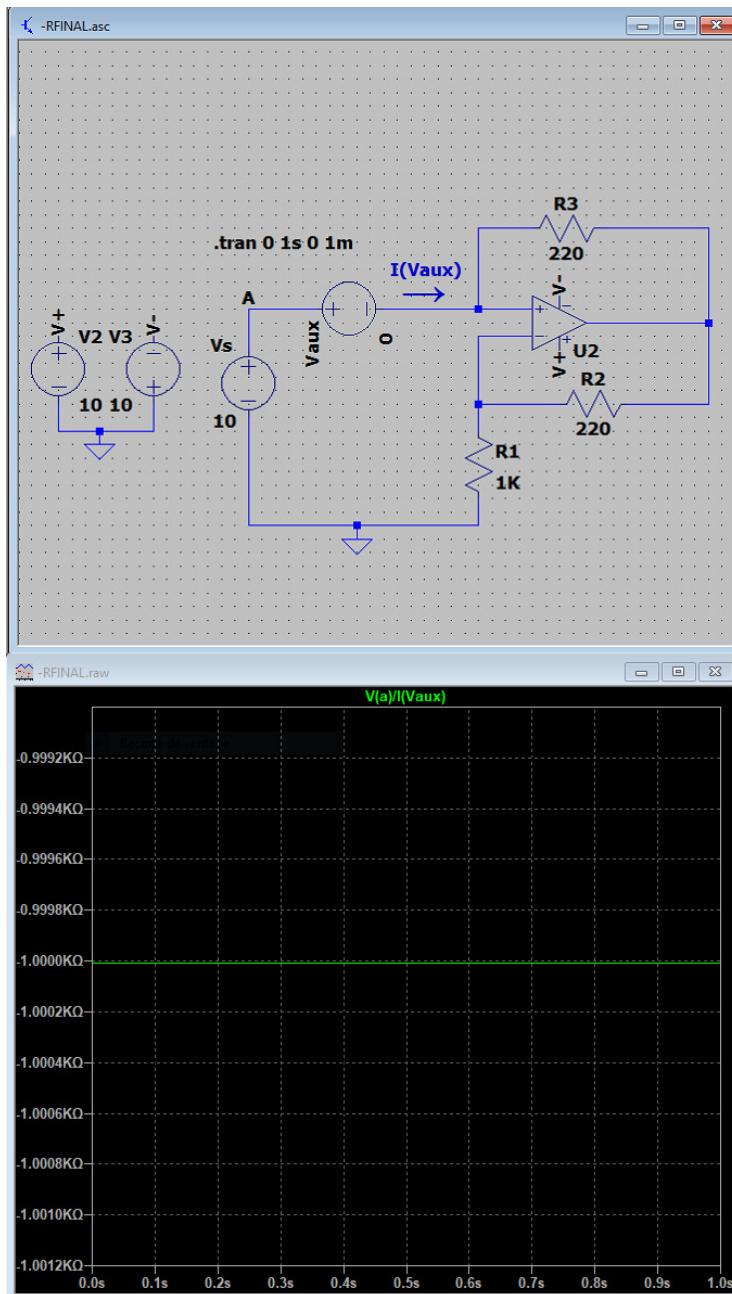
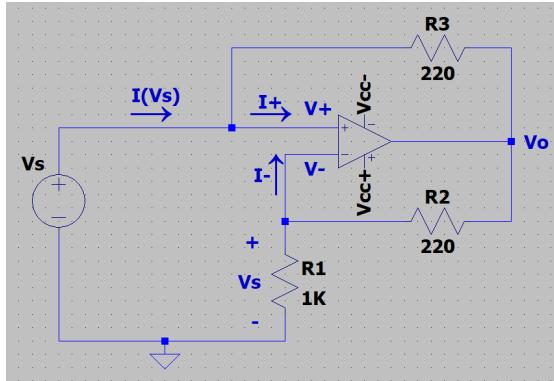


Figura 2.2 : Convertidor de Impedancia Negativa de -1000 Ohmios.

Una de las maneras de realizarlo es usando un amplificador operacional y 3 resistencias en la configuración que se ve en la [Fig. 2.2](#) de esta manera si elegimos las resistencias $R_2 = R_3$ la resistencia R_1 es la que determinaría el valor de resistencia negativa, esta es la explicación:



Consideraciones para el cálculo del circuito de la [Fig. 2.3](#) con Amplificadores Operacionales:

$$V_+ = V_- \quad (2.1)$$

$$I_+ = I_- = 0(A). \quad (2.2)$$

Figura 2.3 : Parámetros circuito NIC.

Si observamos la ecuación [\(2.1\)](#) se puede ver que la tensión V_S cae sobre la resistencia R_1 y se puede relacionar con la tensión de salida V_O mediante un divisor de tensión:

$$V_S = V_O \frac{R_1}{R_1 + R_2} \longrightarrow V_O = V_S \frac{R_1 + R_2}{R_1}. \quad (2.3)$$

Teniendo en cuenta la ecuación [\(2.2\)](#) se puede ver que la intensidad $I(V_S)$ es la misma que pasa por la resistencia R_3 , por ello se puede deducir:

$$I(V_S) = \frac{V_S - V_O}{R_3}. \quad (2.4)$$

Sustituyendo la ecuación [\(2.3\)](#) en [\(2.4\)](#) y trabajando la expresión para obtener la relación tensión-intensidad llegamos a:

$$I(V_S) = V_S \frac{-R_2}{R_1 R_3}. \quad (2.5)$$

Si dividimos la tensión V_S entre la intensidad $I(V_S)$ (ecuación [\(2.5\)](#)) para obtener la impedancia de entrada del circuito:

$$\frac{V_S}{I(V_S)} = Z_{IN} = \frac{V_S}{V_S \frac{-R_2}{R_1 R_3}} = -R_1 \frac{R_3}{R_2}. \quad (2.6)$$

Si elegimos las resistencias $R_3 = R_2$ en la ecuación [\(2.6\)](#) obtenemos:

$$Z_{IN} = -R_1. \quad (2.7)$$

2.2. Memristor

El componente más interesante de este circuito es el Memristor, teorizado por el científico Leon Chua en 1971, ver [1]. Este elemento trata de llenar el vacío que existía en las relaciones entre las cuatro variables básicas en teoría de circuitos: voltaje v , intensidad i , carga eléctrica q y flujo magnético φ . En concreto el memristor relaciona la carga eléctrica con el flujo magnético de la siguiente manera, ver [2]:

$$\varphi = \varphi(q), \quad q = q(\varphi). \quad (2.8)$$

Sabiendo la relación del voltaje y la intensidad respecto a la carga y al flujo en el tiempo:

$$v(t) = \frac{d\varphi}{dt}, \quad i(t) = \frac{dq}{dt}. \quad (2.9)$$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau)d\tau, \quad q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau)d\tau. \quad (2.10)$$

Derivando la ecuación (2.8) respecto al tiempo, y aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi(q)}{dq} \frac{dq}{dt}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.11)$$

Sustituyendo las relación de la ecuación (2.9) en la ecuación (2.11):

$$v(t) = \frac{d\varphi(q)}{dq} i(t), \quad i(t) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} v(t). \quad (2.12)$$

Las dos relaciones de carga y flujo que quedan en la ecuación (2.12) son los que se denominan **Memristancia** $M(q)$ y **Memductancia** $W(\varphi)$:

$$M(q) = \frac{d\varphi(q)}{dq}, \quad W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi}. \quad (2.13)$$

Finalmente se presentan dos tipos de expresiones:

$$\text{Memristor controlado por carga} \rightarrow v(t) = M(q) i(t). \quad (2.14)$$

$$\text{Memristor controlado por flujo} \rightarrow i(t) = W(\varphi) v(t). \quad (2.15)$$

El segundo acontecimiento más importante en relación al memristor fue en 2008 cuando en los laboratorios de HP se fabricó un componente cuyo comportamiento era muy parecido al funcionamiento que afirmaba Chua, debía de tener el memristor. En un inicio al componente que HP creó en 2005 le dieron el nombre de *Crossbar Latch*, no sería hasta 2008 que se percataron de la similitud de funcionamiento con el memristor de Chua. La construcción es sencilla, se trata de dos capas, una de dióxido de titanio puro y otra de dióxido de titanio deficiente de átomos de oxígeno, ambas envueltas por dos electrodos de platino *Fig. 2.4. Repasar este párrafo, la frase de "debía tener..." quitar*

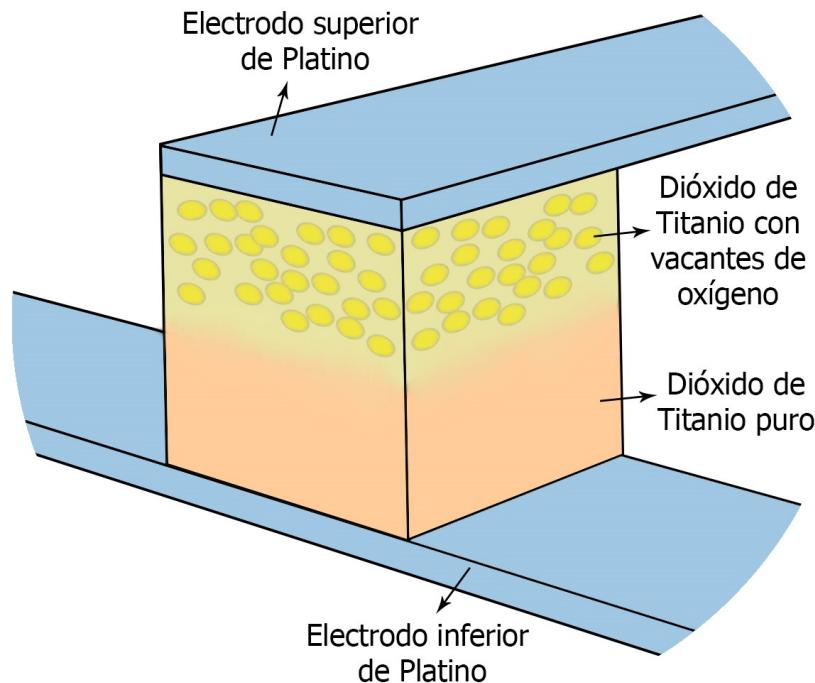


Figura 2.4 : Construcción del memristor de HP. Ver [4].

El óxido de titanio tiene una serie de características que lo hacen un material muy interesante en esta aplicación:

1. Resistencia variable: La resistencia eléctrica del dióxido de titanio cuando está dopado puede cambiar en respuesta de la aplicación de una corriente o un campo eléctrico. Lo cual nos permite no tan solo guardar 1 o 0 si no un rango de valores dentro de unos límites de operación (memorias ReRAM).
2. No volatilidad: El óxido de titanio puede mantener su estado de resistencia incluso cuando se retira la corriente eléctrica que lo atraviesa. Esto significa que puede retener información y mantener su estado de resistencia sin requerir energía continua.
3. Cambios rápidos de resistencia: Esta propiedad permite operaciones de escritura y lectura rápidas en el memristor, lo que es crucial para su uso en aplicaciones de almacenamiento y procesamiento de datos.
4. Baja potencia y tamaño compacto

La fórmula que se propone en [3] para modelar el comportamiento de este dispositivo es:

$$v(t) = \left(R_{ON} \frac{w(t)}{D} + R_{OFF} \left(1 - \frac{w(t)}{D} \right) \right) i(t), \quad (2.16)$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = \mu_V \frac{R_{ON}}{D} q(t). \quad (2.17)$$

Integrando la ecuación (2.17) e insertándola en (2.16) teniendo en cuenta que el valor de resistencia $R_{ON} \ll R_{OFF}$:

$$w(t) = \mu_V \frac{R_{ON}}{D} i(t), \quad (2.18)$$

$$M(q) = R_{OFF} \left(1 - \frac{\mu_V R_{ON}}{D^2} q(t) \right). \quad (2.19)$$

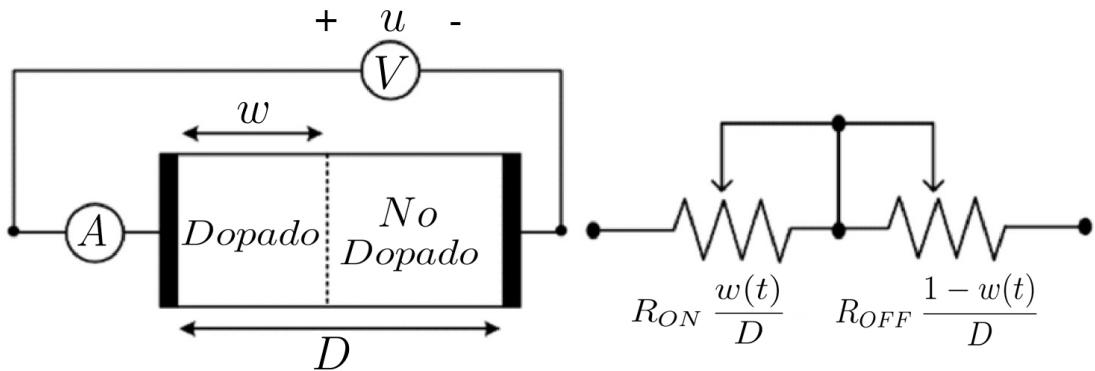


Figura 2.5 : Esquema del memristor de HP. Ver [5].

Los parámetros que aparecen en las ecuaciones anteriores y que describen el funcionamiento del componente son:

1. R_{ON} : Resistencia en el estado ON, valor mínimo. Es constante.
2. R_{OFF} : Resistencia en el estado OFF, valor máximo. Es constante.
3. μ_V : Mobilidad iónica de arrastre promedio. Es constante.
4. w : Ancho de la zona dopada, no es constante, depende de la excitación.
5. D : Ancho total de la lámina de óxido de titanio. Es constante.

El funcionamiento es el siguiente, entre los dos electrodos de platino tenemos una capa de dióxido de titanio puro TiO_2 que actúa como dieléctrico y otra de dióxido de titanio con vacantes de oxígeno TiO_{2-x} que actúa como conductor ya que en estas vacantes están cargadas positivamente (ver [Fig. 2.4](#)), ya que al faltar átomos de oxígeno se están perdiendo también sus electrones de valencia asociados, generando así que el compuesto necesite atraer electrones a dichas vacantes para así mantenerse eléctricamente estable. Cuando un voltaje positivo se aplica al electrodo superior las vacantes de oxígeno de la zona dopada se repelen y viajan hacia la zona de óxido de titanio puro, haciendo así que aumente la conductividad hasta que se alcance el valor de R_{ON} . Si por el contrario el voltaje aplicado es negativo, las vacantes de oxígeno viajan hacia el electrodo superior, reduciendo la conductividad hasta R_{OFF} . *Repasar este párrafo*

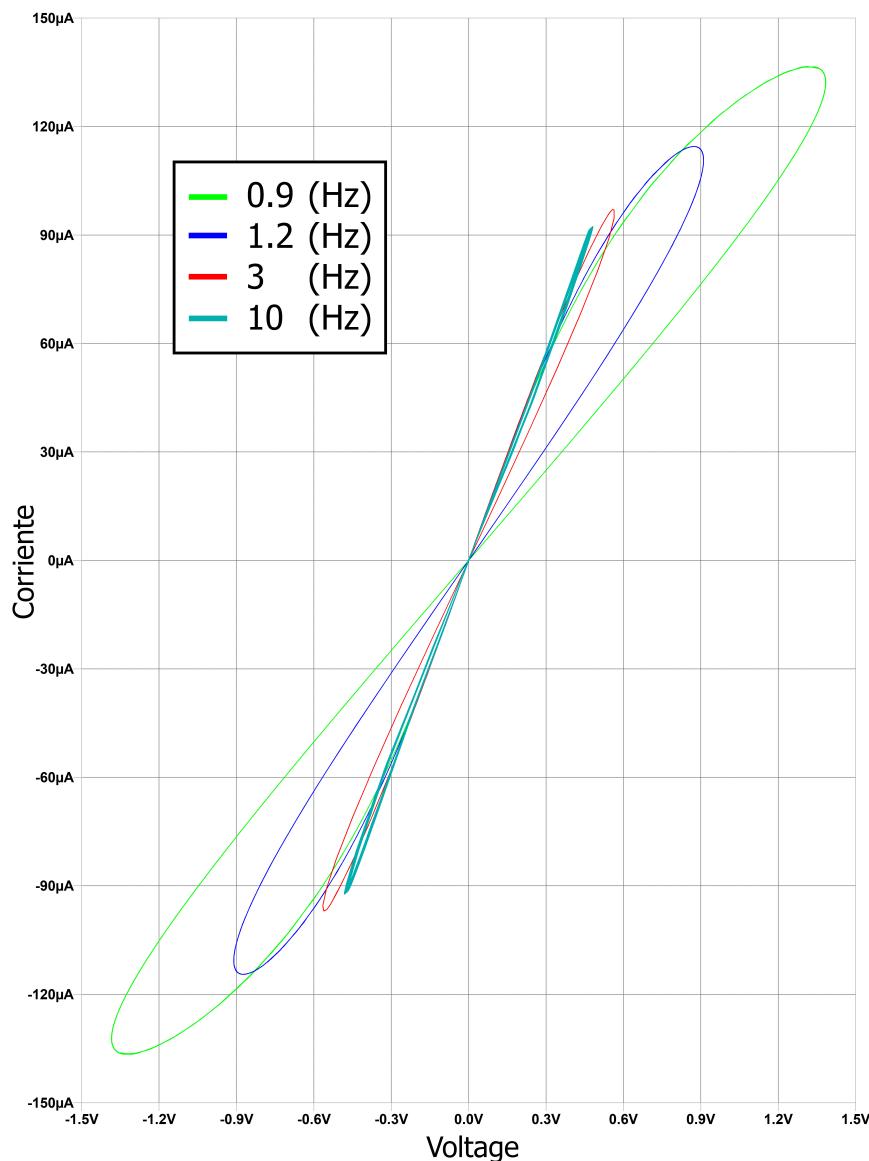


Figura 2.6 : Gráfica Tensión-Intensidad del Memristor de Chua ideal para una señal de entrada senoidal con varias frecuencias. Como se puede ver conforme aumenta la frecuencia la gráfica se parece más a la de una resistencia tradicional. Ver [6]

2.3. Variables de estado

En este trabajo hemos hecho un análisis matemático de la bifurcación del circuito oscilador haciendo uso de técnicas de análisis de reciente estudio, pero primero hay que presentar el circuito y transformar sus ecuaciones eléctricas hasta llegar a una forma matemática con la que poder trabajar. Empecemos analizando el circuito.

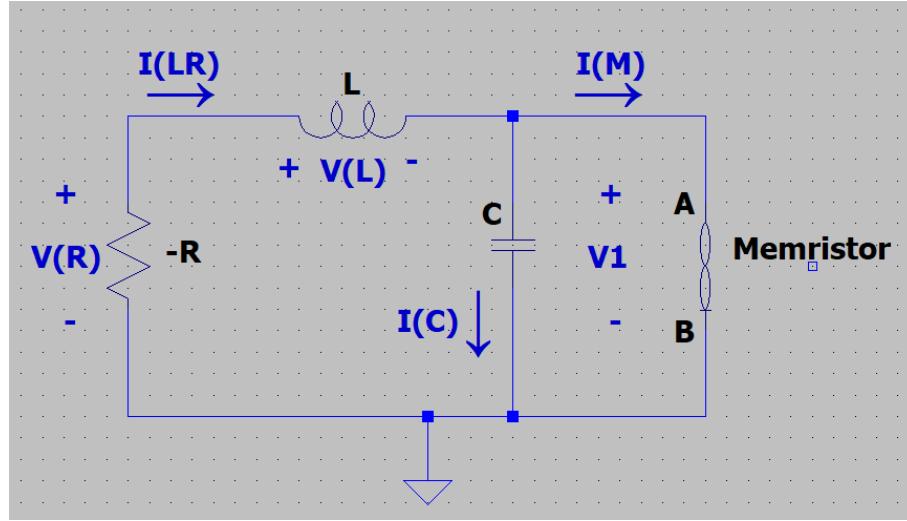


Figura 2.7 : Magnitudes del circuito.

Aplicando las leyes de Kirchoff a nuestro circuito, *Fig. 2.7*, se puede ver que:

$$i_{LR} = i_M + i_C, \quad (2.20)$$

$$v_R = v_L + v_1. \quad (2.21)$$

Reordenando las anteriores ecuaciones:

$$i_C = i_{LR} - i_M, \quad (2.22)$$

$$v_L = v_R - v_1. \quad (2.23)$$

Recordando la relación entre la carga y el flujo con la intensidad y la tensión de las ecuaciones (2.9), la ecuación del memristor controlado por flujo (2.15) y aplicándolo a (2.22) y (2.23) obtenemos:

$$C \frac{dv_1}{dt} = i_{LR} - W(\varphi) v_1, \quad (2.24)$$

$$L \frac{di_{LR}}{dt} = R i_{LR} - v_1, \quad (2.25)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = v_1. \quad (2.26)$$

Como se pueden ver las variables de estado elegidas son la intensidad en la resistencia y la bobina i_{LR} , la tensión en el condensador y el memristor v_1 y el flujo en el memristor φ .

Reordenando las ecuaciones anteriores (2.24), (2.25) y (2.26) tenemos:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{i_{LR}}{C} - W(\varphi) \frac{v_1}{C}, \quad (2.27)$$

$$\frac{di_{LR}}{dt} = \frac{R}{L} i_{LR} - \frac{v_1}{L}, \quad (2.28)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = v_1. \quad (2.29)$$

Haciendo algunos cambios a las tres anteriores ecuaciones para luego poder trabajar con las ecuaciones obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(y - W(z)x), \\ \frac{dy}{dt} = -\xi x + \beta y, \\ \frac{dz}{dt} = x. \end{cases} \quad (2.30)$$

Donde tenemos:

$$x = v_1, \quad y = i_{LR}, \quad z = \varphi, \quad \alpha = \frac{1}{C}, \quad \beta = \frac{R}{L}, \quad \xi = \frac{1}{L}.$$

Escribiendo el sistema (2.30) de una forma más general:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}W(z)x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \\ \frac{dz}{dt} = x. \end{cases} \quad (2.31)$$

Con:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\alpha = -\frac{1}{C}, & a_{12} &= \alpha = \frac{1}{C}, \\ a_{21} &= -\xi = -\frac{1}{L}, & a_{22} &= \beta = \frac{R}{L}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Pero del sistema (2.31) aun tenemos que definir $W(z)$. En [2] se asume que el comportamiento del memristor se puede aproximar por una ecuación lineal a trozos monótonamente creciente:

$$q(\varphi) = b\varphi + 0.5(a - b)(|\varphi + 1| - |\varphi - 1|). \quad (2.33)$$

donde $a, b > 0$

Derivemos la expresión (2.33) (recordando la ecuación (2.13)) para obtener $W(z)$:

$$W(z) = \frac{dq(z)}{dz} = \begin{cases} b, & z < -1, \\ a, & -1 < z < 1, \\ b, & z > 1. \end{cases} \quad (2.34)$$

Por último vamos a definir dos matrices auxiliares del sistema (2.31) teniendo en cuenta la función $W(z)$ (2.34)

$$A_E = \begin{pmatrix} b \cdot a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_C = \begin{pmatrix} a \cdot a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

con sus correspondientes trazas y determinantes:

$$\begin{aligned} t_E &= b \cdot a_{11} + a_{22} \\ d_E &= b \cdot a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ t_C &= a \cdot a_{11} + a_{22} \\ d_C &= a \cdot a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Ya tenemos las ecuaciones necesarias para empezar el análisis, pero primero veremos en los siguientes capítulos que técnicas estaremos usando para ello.

2.4. Superficies invariantes

A continuación definimos el concepto de superficie invariante para un sistema dinámico tridimensional. Más adelante veremos que el sistema (2.31) posee unas determinadas superficies invariantes.

Definición 2.1. Consideremos, el sistema diferencial:

$$\frac{dX}{dt} = F(X), \quad X \in \mathbb{R}^3 \quad (2.37)$$

Se dice que una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie invariante para el sistema (2.37) si la solución del sistema diferencial $X(t)$ con condición inicial $X(0) = X_0 \in S$ satisface que $X(t) \in S$ para todo t y para todo $X_0 \in S$.

A modo de ejemplo, en la Fig. 2.8 hemos representado una esfera invariante con varias órbitas de un sistema contenida en ella

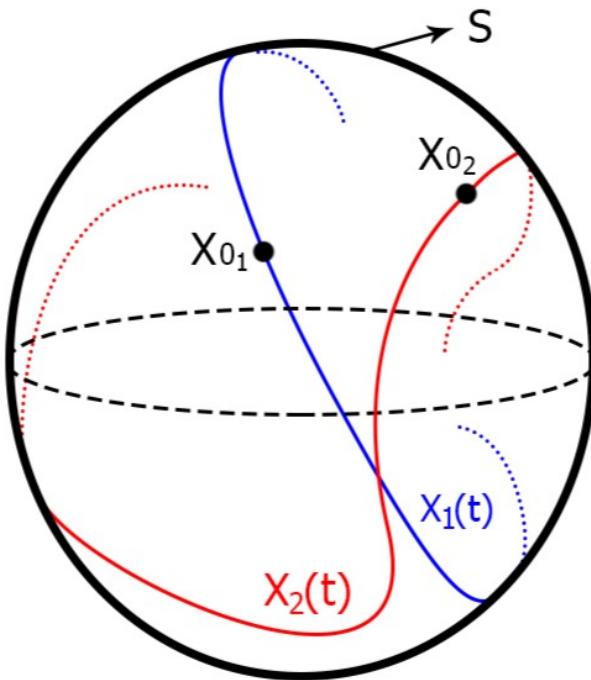


Figura 2.8 : Esfera con dos órbitas solución $X_1(t)$, $X_2(t)$ con condiciones iniciales $X_1(0) = X_{01}$ y $X_2(0) = X_{02}$, contenidas en ella.

Desde el Teorema 1 de [10], sabemos que existe un conjunto de superficies invariantes para el sistema (2.31). La descripción de estas superficies invariantes se detalla en el siguiente resultado. Se enunciará dicho teorema en este trabajo ya que nos será muy importante tenerlo presente.

Teorema 2.1 (Teorema 1 de [10]). *Consideremos el sistema (2.31) con la función lineal a trozos q , dada en (2.33), y la función $W(z)$, dada en (2.34), siendo esta la derivada de dicha función q . Para cualquier $h \in \mathbb{R}$, el conjunto:*

$$S_h = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : H(x, y, z) = h\} \quad (2.38)$$

donde

$$H(x, y, z) = -a_{22}x + a_{12}y - a_{12}a_{21}z + a_{11}a_{22}q(z). \quad (2.39)$$

es una superficie invariante para el sistema (2.31).

El sistema (2.31) tiene una familia infinita de superficies invariantes en todo \mathbb{R}^3 , y la dinámica de los mismos es fundamentalmente bidimensional.

Como se deduce del Teorema 2.1 la dinámica del sistema tridimensional (2.31) se puede reducir, aplicando un cambio de variable adecuado, al estudio de un sistema bidimensional.

En este trabajo es necesario incluir la prueba de ello porque los cambios de variable nos permitirán obtener la solución periódica en el circuito.

Teorema 2.2 (Teorema 2 de [10]). Consideremos el sistema (2.31), con la función $W(z)$ dada en (2.34), y supongamos que $a_{22} \neq 0$. La dinámica del sistema (2.31) es equivalente a la dinámica del sistema lineal a trozos bidimensional

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = F(\tilde{x}) - \tilde{y}, \\ \dot{\tilde{y}} = g(\tilde{x}) - h, \end{cases} \quad (2.40)$$

donde

$$F(\tilde{x}) = \begin{cases} t_E(\tilde{x} - 1) + t_C, & \text{si } \tilde{x} > 1, \\ t_C\tilde{x}, & \text{si } |\tilde{x}| \leq 1, \\ t_E(\tilde{x} + 1) - t_C, & \text{si } \tilde{x} < -1, \end{cases} \quad (2.41)$$

$$g(\tilde{x}) = \begin{cases} d_E(\tilde{x} - 1) + d_C, & \text{si } \tilde{x} > 1, \\ d_C\tilde{x}, & \text{si } |\tilde{x}| \leq 1, \\ d_E(\tilde{x} + 1) - d_C, & \text{si } \tilde{x} < -1. \end{cases} \quad (2.42)$$

Los subíndices E y C hacen referencia a las zonas *Externas* y a la zona *Central* del sistema trizonal (2.40).

Demostación. Cuando $a_{22} \neq 0$, podemos despejar x de la ecuación $H(x, y, z) = h$, donde H está dada en (2.39)

$$x = \frac{a_{12}}{a_{22}}y + a_{11}q(z) - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}}z - \frac{h}{a_{22}}. \quad (2.43)$$

Sustituyendo la expresión de x anterior en la segunda y tercera ecuación de (2.31), conseguimos

$$\begin{cases} \dot{y} = \alpha_1y - \alpha_2z + a_{11}a_{21}q(z) - \frac{a_{21}h}{a_{22}}, \\ \dot{z} = \alpha_3y - \alpha_4z + a_{11}q(z) - \frac{h}{a_{22}}. \end{cases} \quad (2.44)$$

con

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a_{22}^2 + a_{12}a_{21}}{a_{22}}, & \alpha_2 &= \frac{a_{21}^2a_{12}}{a_{22}}, \\ \alpha_3 &= \frac{a_{12}}{a_{22}}, & \alpha_4 &= \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Seguidamente, considerando el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= z, \\ \tilde{y} &= \alpha_1z - \alpha_3y + \frac{h}{a_{22}} \end{aligned} \quad (2.46)$$

el sistema (2.44) se puede escribir en la forma (2.40), con lo que finaliza la demostración del resultado.

□

Una breve explicación del significado de los anteriores teoremas. Supongamos que $a_{22} \neq 0$ y tomamos una condición inicial $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Esto nos fija la superficie invariante S_{h_0} donde está la órbita del sistema con condición inicial X_0 . Obviamente el valor de h_0 es $h_0 = H(x_0, y_0, z_0)$, con H dada en (2.39).

A partir del valor $h = h_0$, determinamos la solución $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ del sistema (2.40) con condición inicial $\tilde{x}(0) = z_0$, $\tilde{y}(0) = \alpha_1 z_0 - \alpha_3 y_0 + \frac{h_0}{a_{22}}$. La solución $(x(t), y(t), z(t))$ del sistema (2.31) con condición inicial (x_0, y_0, z_0) está dada por:

$$\begin{cases} z(t) = \tilde{x} \\ y(t) = \frac{\alpha_1 \tilde{x}(t) + \frac{h_0}{a_{22}} - \tilde{y}(t)}{\alpha_3} \\ x(t) = \frac{a_{12}}{a_{22}} \left(\frac{\alpha_1 \tilde{x}(t) + \frac{h_0}{a_{22}} - \tilde{y}(t)}{\alpha_3} \right) + a_{11} q(\tilde{x}(t)) - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{22}} \tilde{x}(t) - \frac{h_0}{a_{22}} \end{cases} \quad (2.47)$$

Nuestro nuevo sistema de dimensión dos tiene tres zonas como vemos en (2.40), sin embargo en este trabajo nos centraremos en dos de ellas, puesto que buscaremos oscilaciones periódicas bizonales. Se hace esta aclaración ya que parte del trabajo que faremos más adelante nos permitiría hacer el estudio de tres zonas, pero no es el objetivo de este trabajo.

Capítulo 3

Sistemas Dinámicos Continuos

En este capítulo haremos un repaso de sistemas dinámicos continuos lineales a trozos puesto que como hemos visto en el sistema (2.31) hemos reducido nuestro circuito a un sistema de este tipo. Lo que necesitamos ahora es encontrar la o las soluciones de nuestro sistema y estudiar su estabilidad, la base que necesitamos para ello lo veremos en este capítulo.

3.1. Sistemas lineales planos

En esta sección vamos a analizar los sistemas dinámicos continuos de 2 ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes, ya que posteriormente describiremos nuestro circuito de esta forma. Antes que nada hay que definir lo que es un sistema dinámico continuo:

Definición 3.1. *Un sistema dinámico es un conjunto de ecuaciones de cambio que describen la evolución temporal de algún fenómeno, que puede ser de cualquier naturaleza (eléctrico, económico, cinegético...), de manera que el estado presente del sistema viene determinado por los estados anteriores. El estado del sistema queda descrito por sus variables de estado. Cuando la evolución se estudia considerando el tiempo como una variable continua, decimos que el sistema es continuo y para analizar este tipo de sistemas la regla determinista que lo gobierna es su sistema de ecuaciones diferenciales.*

Un sistema de este tipo tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + b_1 \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + b_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

Escribiendo el sistema (3.1) en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Ecribiendo el sistema (3.2) de forma mas simplificada:

$$\dot{X} = AX + B \quad (3.3)$$

Cuando $B = \vec{0}$ el sistema se dice homogéneo. Por el contrario cuando $B \neq \vec{0}$ el sistema se dice no homogéneo. Esto es importante saberlo pues los métodos para solucionar estos tipos de sistemas no son los mismos.

Tambien hay que tener en cuenta las condiciones iniciales del sistema:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Escribiendo el sistema (3.4) en forma matricial:

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = X_0 \quad (3.5)$$

Al conjunto del sistema y a sus condiciones iniciales se les denomina **Problema de Valor Inicial (PVI)**:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + B & \rightarrow \text{Sistema Diferencial (S.D.)} \\ X(t_0) = X_0 & \rightarrow \text{Condiciones Iniciales (C.I.)} \end{cases} \quad (3.6)$$

Lo primero y más importante que se debe hacer con este tipo de problemas es comprobar la existencia y unicidad de sus soluciones.

Teorema 3.1. *Existencia y unicidad*

Sean A y B continuas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, que continene el punto $X(t_0)$ entonces el P.V.I. tiene una única solución definida en dicho intervalo I para cualquier vector $X_0 \in \mathbb{R}^2$. Además, si el P.V.I. tiene coeficientes constantes en A y B la solución está definida en \mathbb{R} .

Las soluciones del sistema son el conjunto de puntos (3.7) para cada instante de tiempo que forman una curva en el plano de fases xy .

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Ahora lo lógico sería hablar de como resolver este tipo de problemas ya que es nuestro objetivo, pero no lo vamos a hacer ya que nosotros no usaremos el método tradicional de autovalores y autovectores para ello, vamos a utilizar otra técnica de reciente estudio con la que no hará falta esto, la veremos mas adelante.

Por último veamos como obtener y analizar los puntos de equilibrio del Sistema Lineal Plano. Primero escribamos el sistema (3.1) de otra forma para ver los siguientes apartados mejor:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = S(x, y) \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = V(x, y) \end{cases} \quad (3.8)$$

Definición 3.2. Los puntos (\bar{x}, \bar{y}) que anulan simultaneamente las funciones S y V del sistema (3.2) se denominan *Puntos de Equilibrio o Críticos del sistema*:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix} \\ A \bar{X} &= -b \end{aligned} \quad (3.9)$$

Si el $\det(A) \neq 0$ (3.9) el sistema posee un único punto de equilibrio, este punto se dice solución constante del sistema.

Veamos esto más en profundidad, primero tenemos que saber que el sistema que tenemos (3.8) se denomina **Autónomo** ya que la variable independiente t no aparece de manera explícita en los segundos términos.

Ahora lo que haremos es una translación del punto de equilibrio para que esté en el origen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en caso de no estarlo:

$$\begin{cases} \tilde{X} = x - \bar{x} \\ \tilde{Y} = y - \bar{y} \end{cases} \quad (3.10)$$

Por lo que ahora tenemos:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{X}}{dt} = S(\tilde{X} - \bar{x}, \tilde{Y} - \bar{x}) \\ \frac{d\tilde{Y}}{dt} = V(\tilde{X} - \bar{x}, \tilde{Y} - \bar{x}) \end{cases} \quad (3.11)$$

Donde el punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es el punto de equilibrio.

Lo que veremos a continuación es la disposición de las soluciones al rededor del punto de equilibrio y la estabilidad o no del mismo. Considerando el sistema autónomo lineal con punto de equilibrio en el origen que hemos obtenido tras el cambio de variable:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Como vemos con el cambio de variable no se ha modificado la matriz A que es la que nos dirá todo respecto a la estabilidad del punto crítico, veremos los tres casos que se estudian en este trabajo: Foco Asintóticamente Estable, Foco Asintóticamente Inestable y Centro. Pero hay muchos más y, por supuesto, combinaciones de todos ellos, lo cual complica estos problemas en gran medida.

Para saber la estabilidad de los puntos debemos estudiar el polinomio característico de la matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ \text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) \\ \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) &= 0 \\ \text{Autovalores} \rightarrow \lambda &= \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A)}}{2} \end{aligned}$$

- Foco Asintóticamente Estable

Las curvas solución tienden al punto crítico. Este caso se da para:

- $\text{tr}(A) < 0$
- $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) < 0$

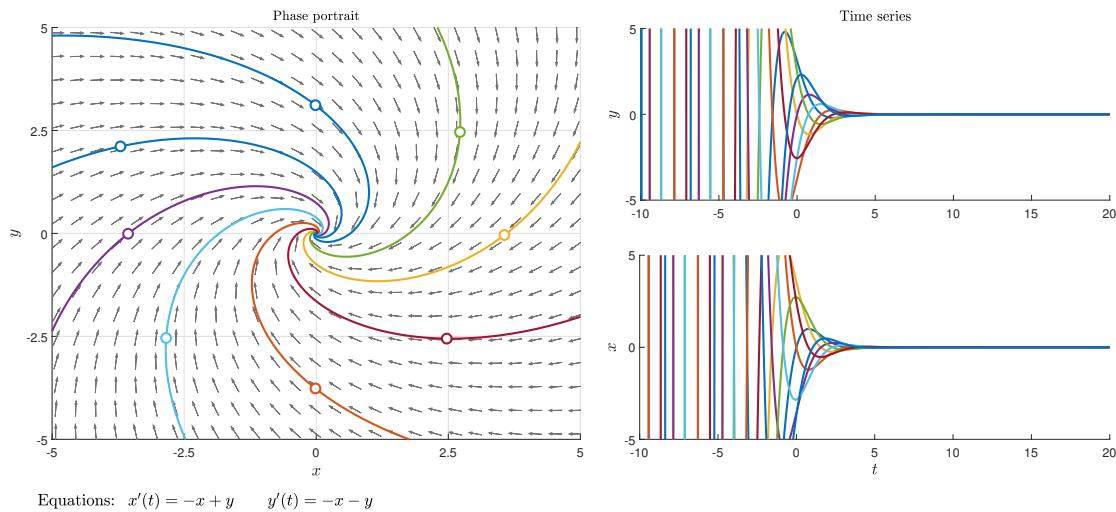


Figura 3.1 : Foco Asintóticamente Estable visto en el plano de fases xy (izquierda) y la variación de x e y en el tiempo (derecha).

La matriz A del la *Fig. 3.1* es $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

- $\text{tr}(A) = -2 < 0$
- $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) = 4 - 4(2) < 0$

- Foco Asintóticamente Inestable

Las curvas solución tienden al alejarse del punto crítico. Este caso se da para:

- $\text{tr}(A) > 0$
- $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) < 0$

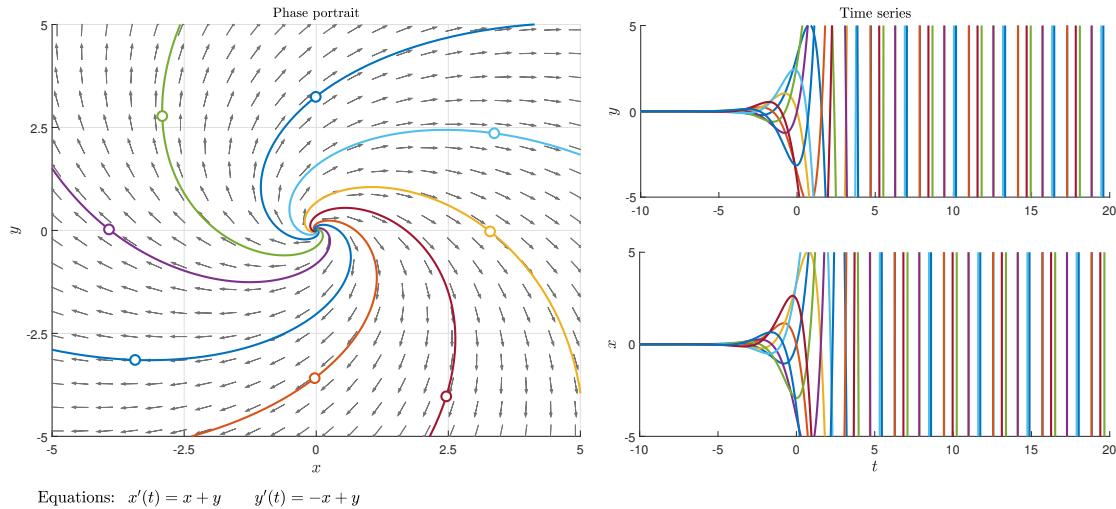


Figura 3.2 : Foco Asintóticamente Inestable visto en el plano de fases xy (izquierda) y la variación de x e y en el tiempo (derecha).

La matriz A del la [Fig. 3.2](#) es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- $\text{tr}(A) = 2 > 0$
- $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) = 4 - 4(2) < 0$

- Centro

Las curvas solución son concéntricas al punto crítico. Este caso se da para:

- $\text{tr}(A) = 0$
- $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) < 0$

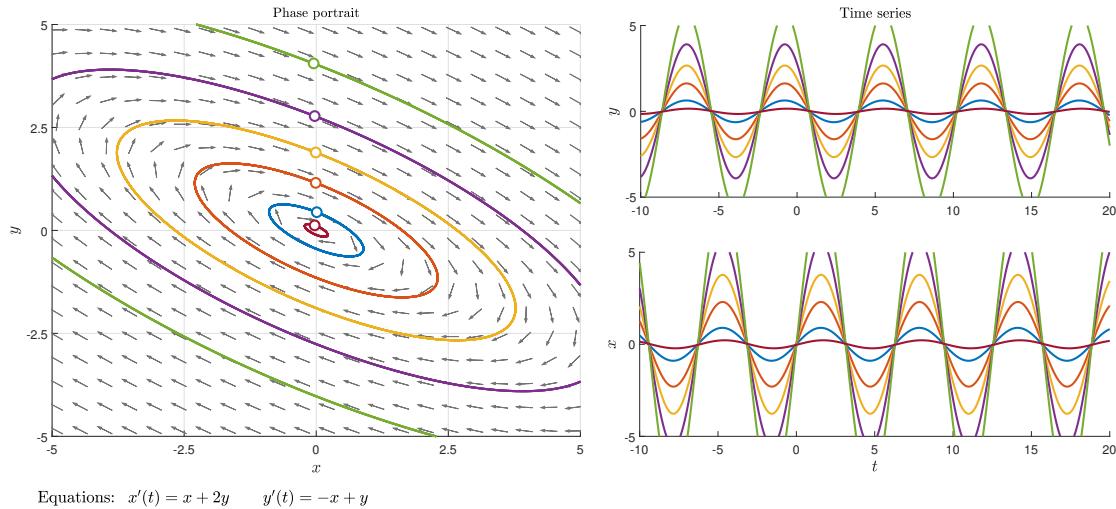


Figura 3.3 : Centro en el plano de fases xy (izquierda) y la variacion de x e y en el tiempo (derecha).

La matriz A del la [Fig. 3.3](#) es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

- $\text{tr}(A) = 1 - 1 = 0$
- $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) = 0 - 4(1) < 0$

3.2. Sistemas lineales a trozos bizonales

En esta sección vamos a ver como estudiar los sistemas continuos dinámicos lineales a trozos de dos zonas y veremos sus propiedades de cara a la obtención de una órbita periódica y estudiar su amplitud y periodo.

También veremos como utilizar las formas canónicas para reducir el número de parámetros que influyen en el sistema y como apoyarnos en dichas formas canónicas y las propiedades que nos portan a la hora de estudiar la oscilación periódica de nuestro circuito.

Definición 3.3. *Un sistema dinámico continuo lineal a trozos plano con dos zonas es un sistema de ecuaciones diferenciales con la siguiente forma:*

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = S(x) = \begin{cases} A_1x + b_1 & \text{si } x^T \cdot w + \delta \leq 0 \\ A_2x + b_2 & \text{si } x^T \cdot w + \delta < 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Donde $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, las matrices A_1 y A_2 son reales de orden 2, además $b_1, b_2, w \in \mathbb{R}^2$ con $w \neq \vec{0}$ y $\delta \in \mathbb{R}$ y se satisface la condición de continuidad

$$A_1x + b_1 = A_2x + b_2 \quad (3.15)$$

Sobre la recta de separación de las dos zonas: $x^T \cdot w + \delta = 0$

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SISTEMA 3.14

Para cada $x^0 \in \mathbb{R}^2$, el problema de valores iniciales (3.16) tiene una solución única $x(t)$ definida para todo t real.

$$\begin{cases} \dot{x} = S(x) \\ x(0) = x^0 \end{cases} \quad (3.16)$$

A continuación veremos la forma canónica más común para los sistemas bizonales que coloca la recta separación en el eje de ordenadas $x_1 = 0$.

Definición 3.4. *Todo sistema dinámico continuo lineal a trozos plano con dos zonas puede escribirse de la siguiente forma:*

$$\dot{x} = S(x) = \begin{cases} B_1x + c & \text{si } x_1 \leq 0 \\ B_2x + c & \text{si } x_1 < 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

S(x)? pero yo tengo dos variables x1 y x2, es S(x1, x2)?

Con $x = (x_1, x_2)^T, c \in \mathbb{R}^2$ y las matrices B_1, B_2 comparten sus dos últimas columnas por continuidad, esto es:

$$B_1 - B_2 = (B_1 - B_2)e_1e_1^T \quad (3.18)$$

multiplicado los e?

Siendo $e_1 = (1, 0)^T$ el primer vector de la base canónica \mathbb{R}^2 . Además, por continuidad también, se puede ver que $c_1 = c_2 = c$.

Demostración: Basta con realizar una simetría para que el vector w normal a la recta $x^T \cdot w + \delta = 0$, se transforme en el vector $e_1 = (1, 0)^T$ se puede hacer usando matrices de Householder [8]. Por último con una translación hacemos que la nueva recta de separación $x_1 = 0$ (ahora vertical) pase por el origen. Por lo que el sistema queda con la forma: **y que pasa con δ ? por que la recta se llama x_1 , la puedo llamar solo x? menos lio con x_1 . Pero x^T y w son vectores? en lugar de la recta $x=0$ se podria usar la $x=-1$?**

$$\dot{x} = \begin{cases} B_1 x + c_1 & \text{si } x_1 \leq 0 \\ B_2 x + c_2 & \text{si } x_1 < 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Con B_1 y B_2 matrices de orden 2 y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2$. Nuevamente por continuidad se debe satisfacer:

$$B_1 x + c_1 = B_2 x + c_2 \quad \text{si } x_1 = 0 \quad (3.20)$$

Como el punto $(0, 0)^T$ está en la recta de separación $x_1 = 0$, sustituyendo en (3.20) se tiene que $c_1 = c_2$ por lo que:

$$B_1 x = B_2 x \quad \text{si } x_1 = 0 \quad (3.21)$$

Como el vector $(0, 1)^T$ está sobre la recta de separación $x_1 = 0$, se tiene por tanto que las dos últimas columnas de B_1 y B_2 son iguales, y además no olvidemos que antes hemos visto que $c_1 = c_2 = c$.

Se ha reducido bastante el número de parámetros, ahora tenemos 8, 6 de ellos vienen de las matrices B_1 y B_2 y 2 de c . Para seguir reduciendo parámetros tengamos en cuenta que estamos buscando oscilaciones y que no aparecerán en sistemas unidimensionales por lo que el primer término de las segundas columnas de las matrices B_1 y B_2 no puede ser nulo (condición de observabilidad [9]). Mediante el cambio de variable oportuno lo convertiremos en (-1) aquí lo vemos, en primer lugar escribimos el sistema (3.19) de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} b_{11}^1 & b_{12} \\ b_{21}^1 & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} b_{11}^2 & b_{12} \\ b_{21}^2 & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 < 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Y le aplicamos el cambio de variable (recordando que $b_{12} \neq 0$):

$$X_2 = -b_{12} x_2 - c_1 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{-X_2 - c_1}{b_{12}} \quad (3.23)$$

Para el caso $x_1 \leq 0$ del sistema (3.22) aplicando el cambio de variable (3.23):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= b_{11}^1 x_1 + b_{12} x_2 + c - 1 = b_{11}^1 x_1 + b_{12} \left(\frac{-X_2 - c_1}{b_{12}} \right) + c_1 = b_{11}^1 x_1 - X_2 \\ \dot{X}_2 &= -b_{12} \dot{x}_2 = -b_{12} (b_{21}^1 x_1 + b_{22} x_2 + c_2) \\ &= -b_{12} b_{21}^1 x_1 + b_{22} (-b_{12} x_2) - b_{12} c_2 \\ &= -b_{12} b_{21}^1 x_1 + b_{22} (X_2 + c_1) - b_{12} c_2 \\ &= -b_{12} b_{21}^1 x_1 + b_{22} X_2 + b_{22} c_1 - b_{12} c_2\end{aligned}\tag{3.24}$$

De forma análoga para $x_1 > 0$ del sistema (3.22):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = b_{11}^2 x_1 - X_2 \\ \dot{X}_2 = -b_{12} b_{21}^2 x_1 + b_{22} X_2 + b_{22} c_1 - b_{12} c_2 \end{cases}\tag{3.25}$$

Sustituyendo (3.24) y (3.25) en el sistema (3.22), tomando $c_{11}^i = b_{11}^i$; $c_{21}^i = -b_{12} b_{21}^i$; $c_{22} = b_{22}$; $d_2 = b_{22} c_1 - b_{12} c_2$ y renombrando X_2 como x_2 :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} c_{11}^1 & -1 \\ c_{21}^1 & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} c_{11}^2 & -1 \\ c_{21}^2 & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 < 0 \end{cases}\tag{3.26}$$

Hemos conseguido eliminar otros dos parámetros del sistema, además solo hemos realizado cambios lineales por lo que las matrices características son semejantes, es decir, no hemos variado las características del sistema. Lo que nos queda es ya pasar a la famosa forma canónica de Liénard:

Teorema 3.2. *Existe un cambio de variable que transforma el sistema (3.26) en la forma canónica de Liénard, sin modificar la traza y el determinante de la matriz característica del sistema ya que son invariates algebraicos:*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > 0 \end{cases} \quad \text{con } a \in \{-1, 0, 1\}\tag{3.27}$$

Demostración: Usando el siguiente cambio de variable:

$$X_2 = c_{22} x_1 + x_2 \quad \rightarrow \quad x_2 = X_2 - c_{22} x_1\tag{3.28}$$

Para el caso $x_1 \leq 0$ del sistema (3.26) aplicando el cambio de variable (3.28):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= c_{11}^1 x_1 - x_2 = c_{11}^1 x_1 - (X_2 - c_{22} x_1) = x_1(c_{11}^1 + c_{22}) - X_2 \\ \dot{X}_2 &= c_{22} \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = c_{22}(c_{11}^1 x_1 - x_2) + (c_{21}^1 x_1 + c_{22} x_2 + d_2) \\ &= c_{22} c_{11}^1 x_1 - c_{22} x_2 + c_{21}^1 x_1 + c_{22} x_2 + d_2 \\ &= x_1(c_{22} c_{11}^1 + c_{21}^1) + d_2\end{aligned}\tag{3.29}$$

De forma análoga para $x_1 > 0$ del sistema (3.26):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(c_{11}^2 + c_{22}) - X_2 \\ \dot{X}_2 = x_1(c_{22} c_{11}^2 + c_{21}^2) + d_2 \end{cases}\tag{3.30}$$

Sustituyendo (3.29) y (3.30) en el sistema (3.26), tomando $t = c_{11}^1 + c_{22}$; $d = c_{22} c_{11}^1 + c_{21}^1$; $T = c_{11}^2 + c_{22}$; $D = c_{22} c_{11}^2 + c_{21}^2$ y renombrando X_2 como x_2 :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > 0 \end{cases}\tag{3.31}$$

Siendo t, d, T, D las respectivas trazas (t, T) y determinantes (d, D) de las matrices características de cada uno de los sistemas a la derecha y a la izquierda de la recta de separación $x_1 = 0$, que como ya hemos visto, no hemos modificado sus propiedades pues todos los cambios aplicados han sido lineales.

Por último vamos a ajustar d_2 . Si $d_2 = 0$ entonces el sistema ya sería igual que (3.27) pero con el parámetro $a = 0$. Si $d_2 \neq 0$ hay que aplicar el siguiente cambio:

$$X_1 = \frac{x_1}{|d_2|} \quad X_2 = \frac{x_2}{|d_2|}\tag{3.32}$$

Por lo que X_1 tiene el mismo signo que x_1 y la recta de separación sería $X_1 = 0$.

Para el caso $X_1 \leq 0$ del sistema (3.31) aplicando el cambio de variable (3.32):

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= \frac{\dot{x}_1}{|d_2|} = \frac{tx_1 - x_2}{|d_2|} = t \frac{x_1}{|d_2|} - \frac{x_2}{|d_2|} = tX_1 - X_2 \\ \dot{X}_2 &= \frac{\dot{x}_2}{|d_2|} = \frac{dx_1 - 0 + d_2}{|d_2|} = d \frac{x_1}{|d_2|} + \frac{d_2}{|d_2|} = dX_1 + \frac{d_2}{|d_2|}\end{aligned}\tag{3.33}$$

De forma análoga para $x_1 > 0$ del sistema (3.26):

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = TX_1 - X_2 \\ \dot{X}_2 = DX_1 + \frac{d_2}{|d_2|} \end{cases} \quad (3.34)$$

Démonos cuenta que cuando dividimos d_2 entre su valor absoluto lo que estamos obteniendo es $-1, 1, 0$ dependiendo de si d_2 es negativo, positivo o cero, por lo que usaremos la función signo sgn :

$$sgn(d_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } d_2 > 0 \\ 0 & \text{si } d_2 = 0 \\ -1 & \text{si } d_2 < 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

Sustituyendo (3.33) y (3.34) en el sistema (3.31), tomando $a = -sgn(d_2)$ **a=-d2** **eso esta bien??** y renombrando X_1 como x_1 y X_2 como x_2 :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

Para ubicar de una manera más gráfica lo que tenemos en (3.36):

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \right. \quad (3.37)$$

$x_1 = 0$

Podemos darnos cuenta de que las ecuaciones corresponden a las dos zonas izquierda y derecha de la recta de separación $x_1 = 0$ así que vamos a hacer unos cambios de nombres a las variables del sistema (3.36) simplemente para que los nombres sean un poco mas descriptivos. Finalmente el sistema en la forma canónica de Liénard nos queda de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} T_L & -1 \\ D_L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x \leq 0 \\ \begin{pmatrix} T_R & -1 \\ D_R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

De una manera más gráfica sería:

$$\left(\begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} T_L & -1 \\ D_L & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} 0 \\ a \end{array} \right) \quad \left| \quad \left(\begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} T_R & -1 \\ D_R & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} 0 \\ a \end{array} \right) \quad (3.39) \right.$$

$x = 0$

Capítulo 4

Semiacplcaciones de Poincaré

En el estudio de sistemas dinámicos, la **aplicación de Poincaré** es una herramienta de gran utilidad para estudiar el comportamiento de un determinado sistema. Se trata de delimitar una superficie o recta (llamada sección de Poincaré), en el espacio de fases de nuestro sistema, de tal manera que las curvas solución de nuestro sistema transpasen dicha sección para poder estudiar así el comportamiento de las trayectorias. Lo interesante de esta aplicación es que lo que estudiamos son los puntos de intersección con la sección de Poincaré, aunque no podemos obviar el comportamiento de la trayectoria y el tiempo para el estudio.

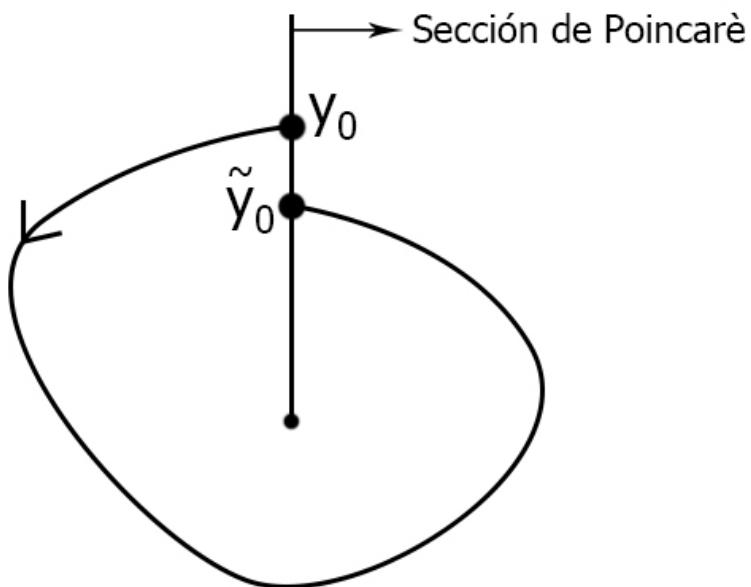


Figura 4.1 : Punto y_0 y su imagen \tilde{y}_0 mediante la aplicación de Poincaré. Esta órbita no es periódica

parrafo entero Como vemos en la *Fig. 4.1* la dinámica de estudio sería establecer un punto inicial y_0 , definir una sección de Poincaré que corte a la curva solución y por último analizar como avanza dicha curva en el tiempo esperando a que corte de nuevo a la sección de Poincaré. Finalmente si la órbita vuelve a cortar en el mismo punto $y_0 = \tilde{y}_0$ diremos que dicha órbita es periódica.

En este trabajo hablaremos de la *semiaplicación de Poincaré*, es decir, analizaremos una de las dos mitades de la órbita. Esto lo haremos ya que como nuestro estudio es de un sistema a trozos (3.38), ya tenemos una separación en la recta $x = 0$ la cual usaremos de sección de Poincaré, y como a la izquierda y a la derecha de dicha sección tenemos sistemas diferentes debemos estudiarlos de manera independiente.

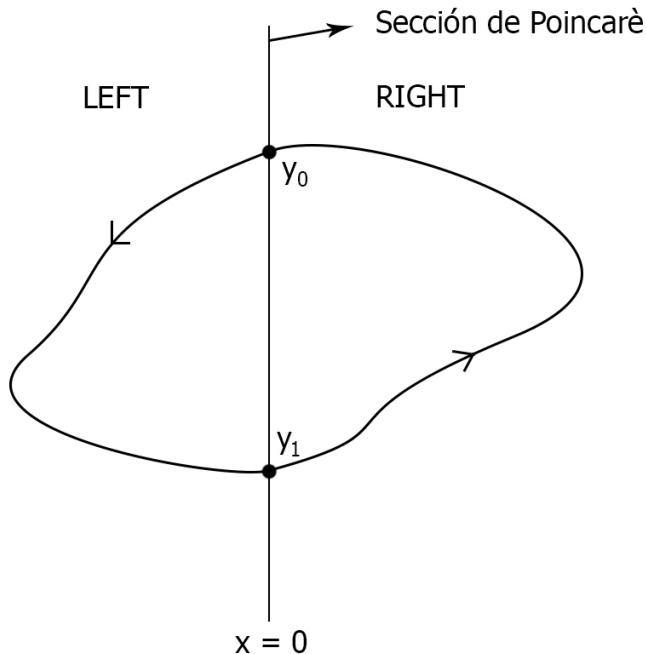


Figura 4.2 : Semiaplicación derecha e izquierda las cuales forman una órbita periódica

cambiar parrafo Tendremos un punto de corte y_0 de nuestra órbita solución en la sección de Poincaré y buscaremos el siguiente punto de corte y_1 mediante la semiaplicación izquierda, finalmente mediante la semiaplicación derecha comprobamos si la órbita vuelve a cortar a la sección de Poincaré en el mismo punto y_0 (órbita periódica, ver Fig. 4.2) o si no corta en el mismo punto y_0 (órbita no periódica).

Para definir de forma apropiada una semiaplicación de Poincaré, consideraremos el sistema (3.1), que mediante los cambios de variable adecuados podemos escribir en forma canónica de Lienard como ya hemos visto a lo largo de la Sección 3.2. En dicha sección se hace para un sistema a trozos, pero para esta parte consideraremos un único sistema, que puede ser el derecho o el izquierdo, por lo que la nomenclatura que usaremos en esta sección para dicho sistema será:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Definiendo la sección de Poincaré como $\Sigma = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ donde nos referiremos con Σ^L a la zona izquierda de la sección y Σ^R a la zona derecha de la sección (recordemos que los índices R y L harán alusión a las zonas derecha e izquierda). Si evaluamos la primera ecuación de (4.1) en la sección de Poincaré Σ , tenemos $\dot{x}|_{\Sigma} = -y$, pudiéndose deducir el sentido de la órbita:

- La órbita va de Σ^L a Σ^R para $y < 0$.
- La órbita va de Σ^R a Σ^L para $y > 0$.

Asumiremos $a^2 + D^2 \neq 0$, ya que de no ser así, curva solución no cortaría de nuevo a Σ . Esto se puede deducir estudiando la segunda ecuación del sistema (4.1) para el caso contrario $a = D = 0 \rightarrow \dot{y} = Dx + a = 0$, y por lo tanto \dot{y} es constante.

Vamos a centrarnos en la zona izquierda de la sección de Poicaré Σ^L , la cual se define de la siguiente manera:

Definición 4.1. Consideremos el punto $(0, y_0) \in \Sigma$ con $y_0 \geq 0$, denominaremos por $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ la solución del sistema (4.1), que para el instante inicial $t = 0$ cumple que $\phi(0) = (0, y_0)$. Si existe un valor de tiempo $\tau > 0$ para el que se cumple $\phi_1(\tau) = 0$ y $\phi_1(t) < 0$ para todo $t \in (0, \tau)$, decimos que la imagen de y_0 mediante la semiaplicación izquierda de Poincaré $P_L(y_0) = \phi_2(\tau) \leq 0$. El valor de tiempo τ se denomina semitiempo de vuelo izquierdo.

La definición de la semiaplicación de Poincaré derecha P_R puede hacerse a partir de la semiaplicación izquierda ya que el sistema (4.1) no varía sus propiedades cuando se le aplica el cambio de variable $(x, y, a) \longleftrightarrow (-x, -y, -a)$.

A continuación se puede ver la representación gráfica de la semiaplicación izquierda, *Fig. 4.3*, y derecha, *Fig. 4.4*, con la nomenclatura adoptada y las correspondientes definiciones de sus dominios \mathcal{D} . En [13] se puede consultar más en profundidad la definición de estos.

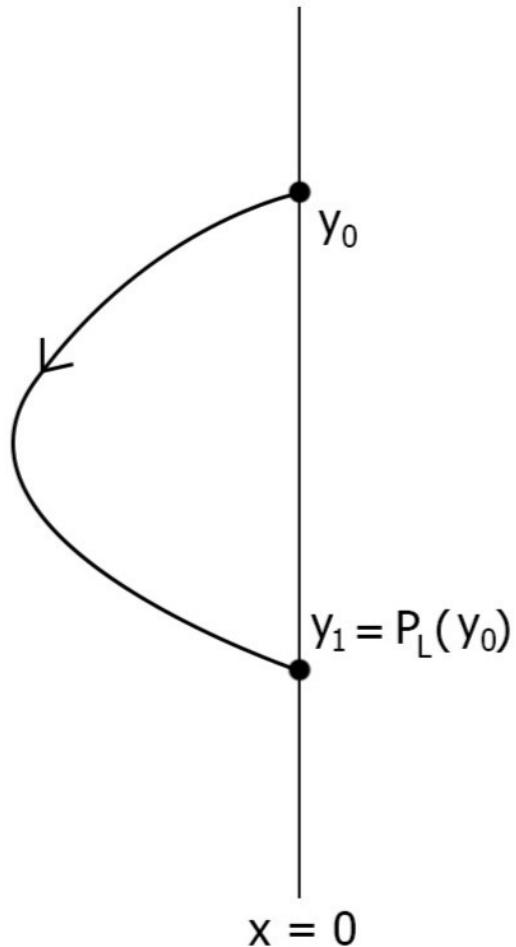


Figura 4.3 : Semiaplicación de Poincaré Izquierda

Dominio de definición de la semiaplicación izquierda:

$$\begin{aligned} P_L : \mathcal{D}_L &\subset [0, +\infty) \longrightarrow (-\infty, 0] \\ y_0 &\longrightarrow y_1 \end{aligned} \tag{4.2}$$

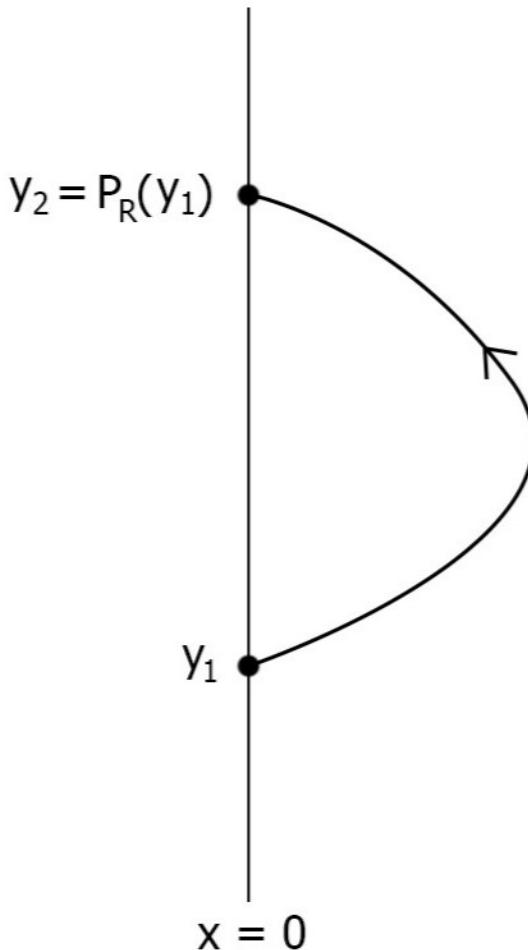


Figura 4.4 : Semiaplicación de Poincaré Derecha

Dominio de definición de la semiaplicación derecha:

$$\begin{aligned} P_R : \mathcal{D}_R &\subset (-\infty, 0] \longrightarrow [0, +\infty) \\ y_1 &\longrightarrow y_2 \end{aligned} \tag{4.3}$$

La Definición 4.1 invita a estudiar la dinámica del sistema mediante el cálculo explícito de sus soluciones, este es el método clásico, el cual conlleva una gran cantidad de posibles casos debidos a los espectros (conjunto de autovalores) de las matrices de cada sistema. Casos que deben analizarse uno a uno, aplicando diferentes herramientas para cada uno de ellos. Esto se traduce en gran dificultad para el estudio y obtención de aparentemente distintos resultados para el mismo sistema dependiendo de qué herramienta matemática usemos para su análisis. Para evitar esta problemática usaremos la caracterización integral de la semiaplicación de Poincaré, la cual presentaremos en la sección 4.1, y puede verse en [13].

4.1. Caracterización integral de la semiaplicación de Poincaré

Antes de ver las expresiones de la Caracterización Integral se va a presentar el **Valor Principal de Cauchy** ya que se utiliza en las mismas.

Definición 4.2. Consideremos un intervalo $[a, b]$ que contiene al origen y una función f continua en $[a, b] \setminus \{0\}$, el Valor Principal de Cauchy se define como:

$$PV \left\{ \int_a^b f(x)dx \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{-\epsilon} f(x)dx + \int_{+\epsilon}^b f(x)dx \right) \quad (4.4)$$

En [13],[16] se puede consultar más en profundidad el Valor Principal de Cauchy.

En la siguiente página presentaremos las expresiones de la caracterización integral izquierda y derecha y algunas propiedades de las mismas.

Caracterización integral de la semiaplicación de Poincaré izquierda:

$$PV \left\{ \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy \right\} = \frac{k_L \pi T_L}{D_L \sqrt{4D_L - T_L^2}} \quad (4.5)$$

donde

$$k_L = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \\ 2 & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$y_0 \in \mathcal{D}_L \quad e \quad y_1 \in P_L(\mathcal{D}_L)$$

Siendo $P_L(\mathcal{D}_L)$ el recorrido de P_L .

Caracterización integral de la semiaplicación de Poincaré derecha:

$$PV \left\{ \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_R y^2 - a T_R y + a^2} dy \right\} = \frac{-k_R \pi T_R}{D_R \sqrt{4D_R - T_R^2}} \quad (4.6)$$

donde

$$k_R = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \\ 2 & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

$$y_1 \in \mathcal{D}_L \quad e \quad y_1 \in P_R(\mathcal{D}_R)$$

Siendo $P_R(\mathcal{D}_R)$ el recorrido de P_R .

En las siguientes figuras veremos ejemplos de P_L , P_R y P_R^{-1} que forman una órbita periódica (*Fig. 4.7*, *Fig. 4.8*) o por el contrario no formando dicha órbita periódica (*Fig. 4.5*, *Fig. 4.6*).

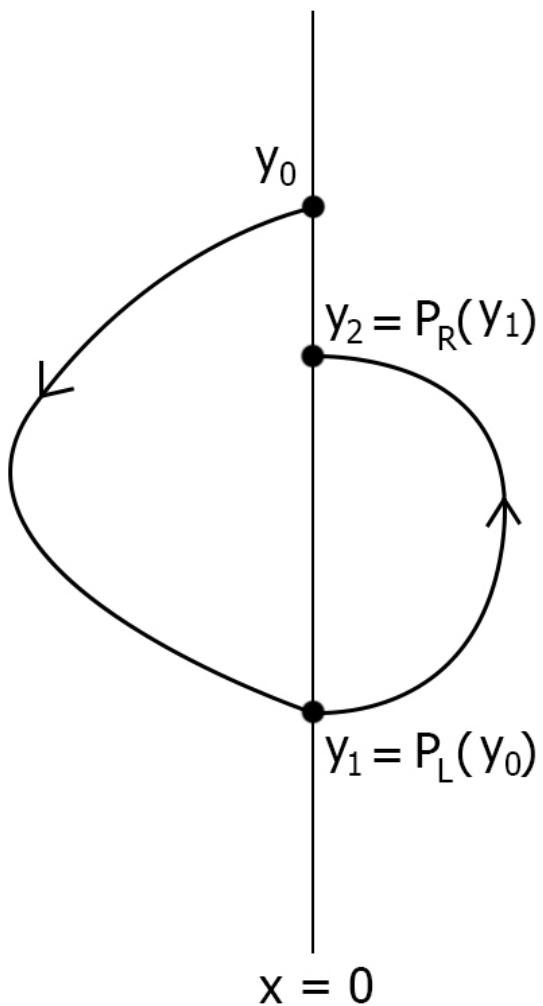


Figura 4.5 : Semiaplicación izquierda del punto y_0 y semiaplicación derecha del punto y_1 con diferentes valores y_0, y_2 por lo que no se ha cerrado la órbita.

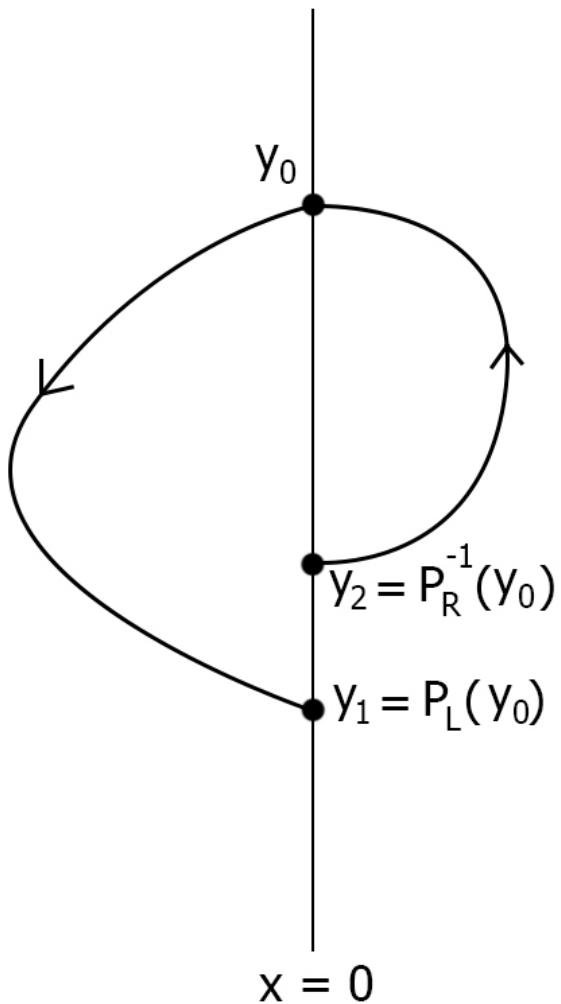


Figura 4.6 : Semiaplicación izquierda del punto y_0 y semiaplicación inversa derecha del punto y_0 con diferentes valores y_1, y_2 por lo que no se ha cerrado la órbita.

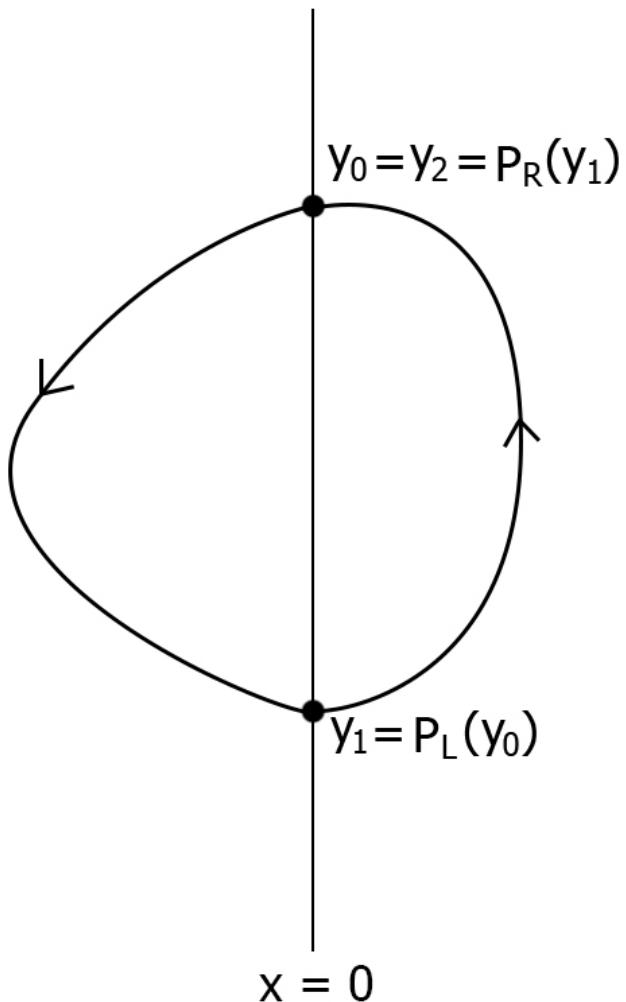


Figura 4.7 : Semiaplicación izquierda del punto y_0 y semiaplicación derecha del punto y_1 con mismos valores y_0, y_2 por lo que si se ha cerrado la órbita, formándose una órbita periódica.

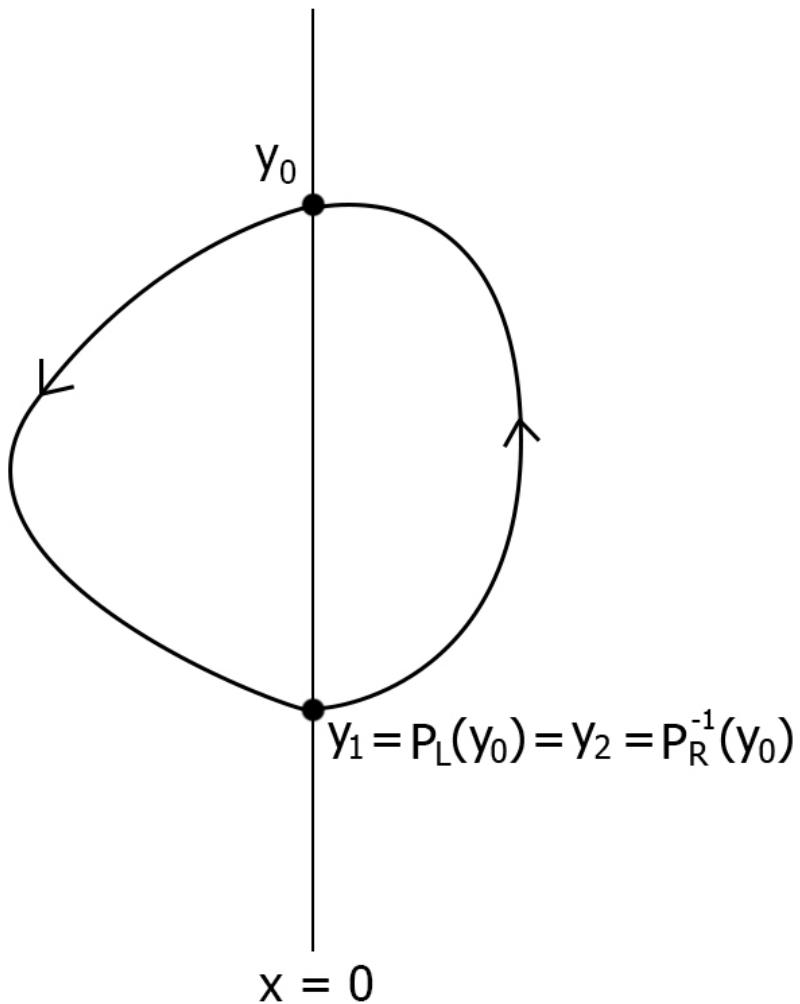


Figura 4.8 : Semiaplicación izquierda del punto y_0 y semiaplicación inversa derecha del punto y_0 con mismos valores y_1, y_2 por lo que si se ha cerrado la órbita formándose una órbita periódica.

Para encontrar una oscilación periódica debemos buscar valores $y_0^* \in \mathcal{D}_L$, $y_1^* \in \mathcal{D}_R$ tales que

$$\begin{cases} P_L(y_0^*) = y_1^*, \\ P_R(y_1^*) = y_0^*, \end{cases}$$

de manera equivalente

$$\begin{cases} P_L(y_0^*) = y_1^*, \\ P_R^{-1}(y_0^*) = y_1^*, \end{cases}$$

de modo que

$$P_L(y_0^*) = P_R^{-1}(y_0^*),$$

$$y_0^* \in \mathcal{D}_L \cap P_R(\mathcal{D}_R),$$

$$y_1 = P_L(y_0) \quad \text{con} \quad y_0 \in \mathcal{D}_L, \quad y_1 = P_R^{-1}(y_0) \quad \text{con} \quad y_0 \in P_R(\mathcal{D}_R).$$

Recordando de los intervalos de dominio (4.2)-(4.3) que $y_0 \geq 0$ e $y_1 \leq 0$, si representamos las curvas de nivel $y_1 = P_L(y_0)$ e $y_1 = P_R^{-1}(y_0)$ y observamos el cuarto cuadrante veríamos una gráfica como la de la [Fig. 4.9](#).

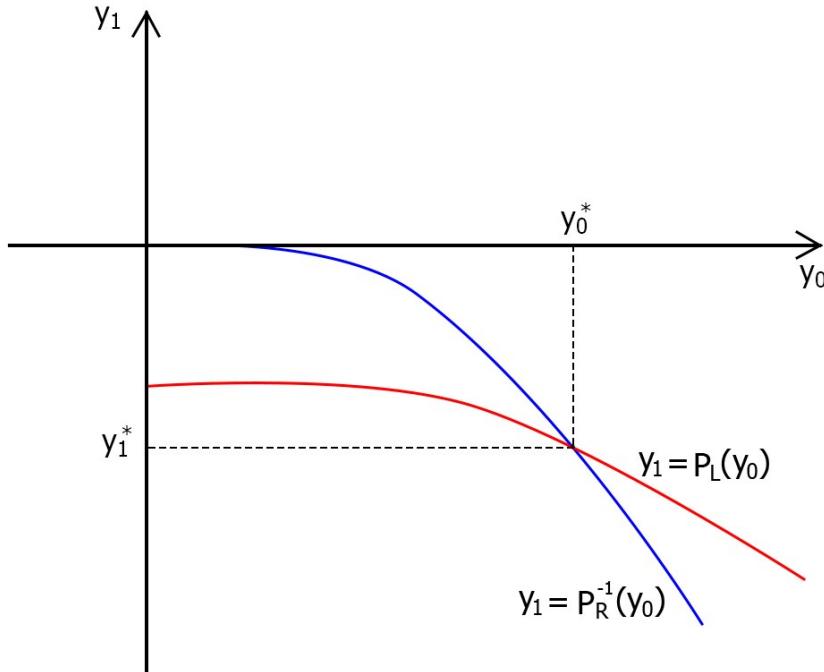


Figura 4.9 : Punto de corte entre $y_1 = P_L(y_0)$ e $y_1 = P_R^{-1}(y_0)$

Vamos a ver un ejemplo de la Caracterización Integral de la semiaplicación de Poincaré en MATLAB para entender un poco mejor la estrategia de búsqueda de la oscilación periódica.

```
% Ejemplo 1
a=-1; % Pto. de equilibrio en zona IZQUIERDA
kL=2; kR=0; % kL,R en función del signo de aL,R
TL=0.3; TR=-0.5; % Condiciones para que exista oscilación
DL=1; DR=1; % Condiciones para que exista oscilación

y0 = 1.5; % Punto y0 > 0 de prueba

y1_L = semipoinca(kL,a,TL,DL,y0)
y1_R = semipoinca(kR,a,TR,DR,y0)

>> Ejemplo_1

y1_L =
-3.5193

y1_R =
-2.3065
```

Función usada en “Ejemplo 1”:

```
function y1 = semipoinca(k,a,T,D,y0)
% Calcula la semiaplicación en el intervalo y1 -> y0
% Valores de entrada k,a,T,D,y0.
% Dado y0 devuelve y1
inicial = -y0;
cte = (k*pi*T)/(D*sqrt(4*D-T^2));
ecuacion = @(y1) integral(@(y) (-y./((D.*y.^2)-(a.*T.*y)
+(a.^2))),y1,y0)-cte;
y1 = fzero(ecuacion,inicial);
end
```

La función *semipoingca* es la aplicación directa de la caracterización integral en MATLAB. Veamos que se está haciendo:

Primero vamos a reordenar por ejemplo la expresión de la caracterización izquierda (4.5) (con la expresión de la caracterización derecha el procedimiento es el mismo):

$$\int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy - \frac{k_L \pi T_L}{D_L \sqrt{4 D_L - T_L^2}} = 0 \quad (4.7)$$

como vemos en *semipoingca* tenemos como argumentos de entrada k, a, T, D, y_0 y como argumento de salida y_1 , por lo que la ecuación (4.7) se puede reducir a:

$$f(y_1) = 0 \quad (4.8)$$

finalmente la ecuación (4.8) ya está en la forma adecuada para resolverla con la función *fzero* de MATLAB, introduciendo como punto inicial $-y_0$. La función *fzero* resuelve de manera numérica una ecuación tipo $f(x) = 0$ a partir de un punto inicial x_0 dado.

El código de “Ejemplo 1” describe las características de los sistemas a la izquierda y a la derecha, establece un punto de prueba $y_0 = 1.5$ y llama a la función *semipoingca* para calcular la semiaplicación izquierda y la semiaplicación inversa derecha. Como se ve obtenemos valores diferentes, de hecho la semiaplicación izquierda tiene un valor mayor que la derecha, gráficamente podría ser perfectamente lo representado en la Fig. 4.6.

Como hemos visto para usar *fzero* necesitamos un punto inicial, sin entrar mucho en detalle de resolución numérica, este punto cuanto más cercano a la solución lo eligamos mas fiable y rápida será dicha solución, por ello vamos a representar de manera gráfica las semiaplicaciones izquierda y derecha para un intervalo de puntos $y_0 \in [0 \ 10]$ y veamos si existe un punto de corte que nos indique que para un y_0 las imágenes izquierda y derecha son las mismas.

```
% Ejemplo 2
a=-1; % Pto. de equilibrio en zona IZQUIERDA
kL=2; kR=0; % kL,R en funcion del signo de aL,R
TL=0.3; TR=-0.5; % Condiciones para que exista oscilacion
DL=1; DR=1; % Condiciones para que exista oscilacion

fplot(@(y0)semipoinca(kL,a,TL,DL,y0),[0 10], 'r');
xlabel('y0');
ylabel('y1');
hold on;

fplot(@(y0)semipoinca(kR,a,TR,DR,y0),[0 10], 'b');
xlabel('y0');
ylabel('y1');
hold on;

grid on;
legend('Semiaplicacion Izquierda','Semiaplicacion Inversa
Derecha');
shg
```

En este caso usamos *fplot* la cual va evaluando la función continuamente con valores de y_0 desde cero hasta diez, se pintará de rojo la semiaplicación izquierda y de azul la semiaplicación derecha

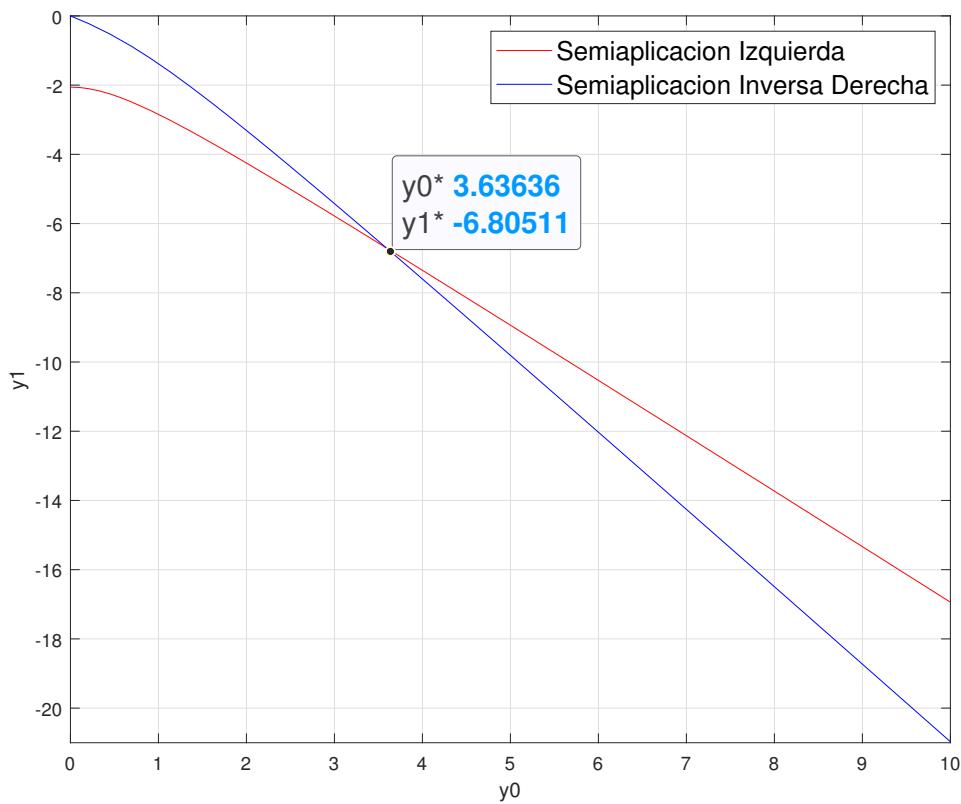


Figura 4.10 : Gráfica obtenida de la semiaplicación izquierda y la semiaplicación inversa derecha en el cuarto cuadrante de “Ejemplo 2”

Como vemos en la *Fig. 4.10* efectivamente se cortan las gráficas, simplemente pinchando más o menos en el punto de corte vemos que las semiaplicaciones izquierda y derecha tendrán la misma imagen $y_1 \approx -6.80511$ cuando $y_0 \approx 3.63636$.

Ya hemos obtenido un punto que estará muy cercano a la solución que buscamos, ahora vamos a calcularla exactamente de manera numérica usando *fsolve*, pero primero hay que escribir correctamente la función en MATLAB

```
% Ejemplo 3
a=-1; % Pto. de equilibrio en zona IZQUIERDA
kL=2; kR=0; % kL,R en funcion del signo de aL,R
TL=0.3; TR=-0.5; % Condiciones para que exista oscilacion
DL=1; DR=1; % Condiciones para que exista oscilacion

Punto_Inicial = [3.63636 -6.80511];

funcion = @(Y) fsolvepoinca(kL,kR,a,TL,TR,DL,DR,Y);

Punto_Solucion = fsolve(funcion,Punto_Inicial);

y0_Solucion = Punto_Solucion(1)
y1_Solucion = Punto_Solucion(2)

>> Ejemplo_3

Equation solved.

fsolve completed because the vector of function values is
near zero
as measured by the value of the function tolerance, and
the problem appears regular as measured by the gradient.

<stopping criteria details>

y0_Solucion =
3.5912

y1_Solucion =
-6.7065
```

Funciones usadas en “Ejemplo 3”:

```

function H = fsolvepoinca(kL,kR,a,TL,TR,DL,DR,Y)
%Funciones para fsolve en la semiaplicacion de poincare
H(1)=semipoincay1y0(kL,a,TL,DL,Y);
H(2)=semipoincay1y0(kR,a,TR,DR,Y);
end

function valor = semipoincay1y0(k,a,T,D,Y)
% Resuelve Integral-cte = 0, dado y0 e y1
cte = (k*pi*T)/(D*sqrt(4*D-T^2));
y0=Y(1);
y1=Y(2);
valor = integral(@(y) (-y ./((D.*y.^2)-(a.*T.*y)+(a.^2))), ...
    y1,y0)-cte;
end

```

Efectivamente como se puede ver en el resultado de “Ejemplo 3” los valores que hemos obtenidos son muy parecidos a los que vimos en la [Fig. 4.10](#). Podemos decir entonces, que para el sistema que hemos estudiado tenemos una oscilación periódica que va desde $y_0 \simeq 3.5912$ hasta $y_1 \simeq -6.7065$.

Los argumentos de entrada de *fsolvepoinca* son los parámetros de los sistemas de la derecha y de la izquierda $k_L, k_R, a_L, a_R, T_L, T_R, D_L, D_R$ además de un vector de dos componentes Y , este vector contiene el **punto inicial?**, que como vemos en el código de “Ejemplo 3” le hemos asignado el punto de corte que más o menos obtuvimos de la gráfica de la [Fig. 4.10](#).

La función *fsolve* del código de “Ejemplo 3” buscará el punto (y_0^*, y_1^*) en que las curvas de las semiaplicación izquierda y la semiaplicación inversa derecha se cortan.

Finalmente vamos a comprobar con una simulación que el estudio que hemos hecho sea correcto. Para ello hay que reescribir las ecuaciones para introducirlo en el software de MATLAB. Tenemos un sistema a trozos como el (3.38), el cual podemos escribir de la siguiente manera haciendo uso de los valores absolutos. También podríamos haber utilizado la función de MATLAB que define funciones a trozos o la función signo.

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2} (x(T_R + T_L) + |x|(T_R - T_L)) - y, \\ \dot{y} = \frac{1}{2} (x(D_R + D_L) + |x|(D_R - D_L)) - a, \end{cases} \quad (4.9)$$

$$T_L = 0.3, \quad T_R = -0.5, \quad D_L = D_R = 1, \quad a_L = a_R = a = -1.$$

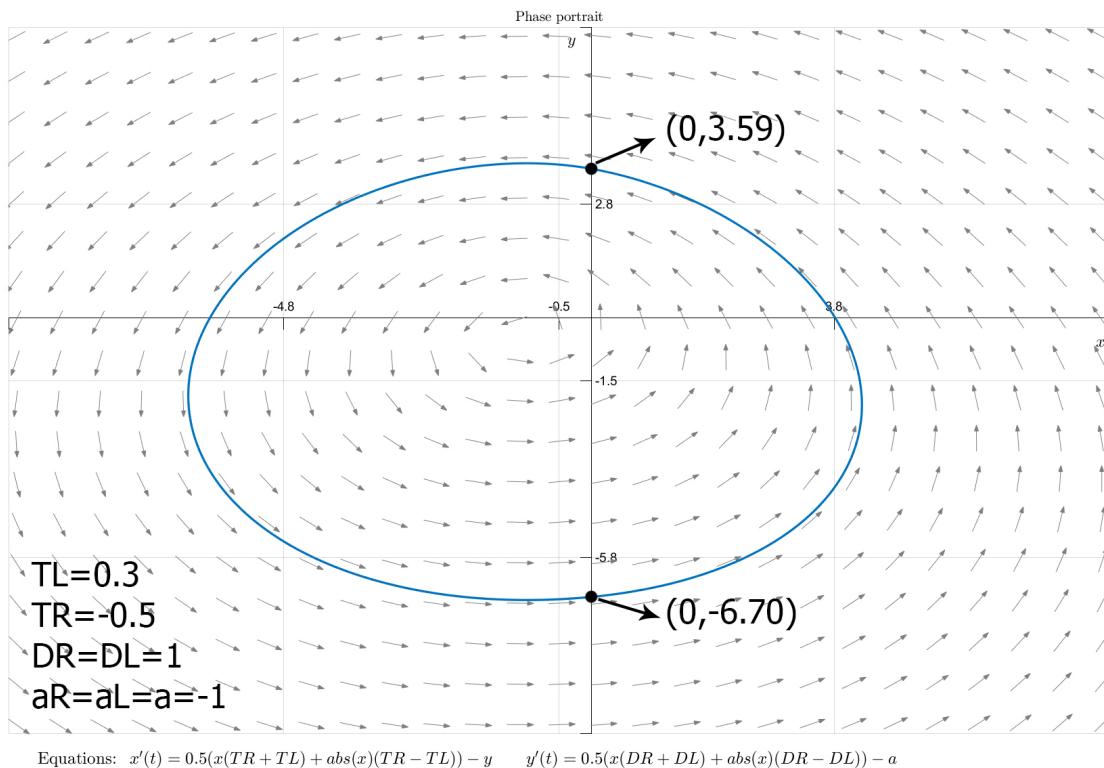


Figura 4.11 : Oscilación periódica que hemos determinado previamente con MATLAB

Capítulo 5

Bifurcaciones

reescribir introducción hablando de bifurcaciones globales y locales, luego de los dos casos: mover punto de equilibrio y cambiar estabilidad del punto de equilibrio La forma de que aparezca una oscilación periódica en un sistema dinámico es mediante bifurcaciones. Las bifurcaciones se presentan cuando variamos de manera progresiva uno o varios parámetros del sistema, llamados parámetros de control o de bifurcación. Esta variación puede producir una bifurcación debido a la creación o destrucción de un punto de equilibrio (bifurcación Hopf-Like) o cambiando la estabilidad de algún punto de equilibrio mediante la variación del parámetro de bifurcación, este será nuestro caso. A esta bifurcación producida por la variación de la traza del sistema se le llama **Foco-Centro-Ciclo Límite**, pero antes de presentarla vamos a hacer el análisis del punto de equilibrio y la estabilidad del sistema que estamos estudiando y veamos el concepto de ciclo-límite para posteriormente ver como generar esta bifurcación en nuestro circuito.

5.1. Análisis del punto de equilibrio

Para hacer el análisis del punto de equilibrio y de la estabilidad primero volvamos a recordar el sistema que tenemos. Nosotros estamos estudiando el sistema, dinámico, autónomo, lineal y continuo a trozos bizona en forma canónica de Lienard ([\(3.38\)](#)).

Podemos obtener los puntos de equilibrio de cada una de las zonas igualando a cero el sistema, por ejemplo para la zona izquierda tenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_L & -1 \\ D_L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} T_L x - y = 0 \\ D_L x - a = 0 \end{cases} \longrightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{a}{D_L}, \frac{aT_L}{D_L} \right) \quad \text{si } D_L \neq 0 \quad (5.1)$$

Análogamente para la zona derecha tendríamos el punto de equilibrio:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{a}{D_R}, \frac{aT_R}{D_R} \right) \quad \text{si } D_R \neq 0 \quad (5.2)$$

En las siguientes figuras veremos la representación gráfica de las posibles posiciones de los puntos de equilibrio (5.1)-(5.2) en función del signo de a

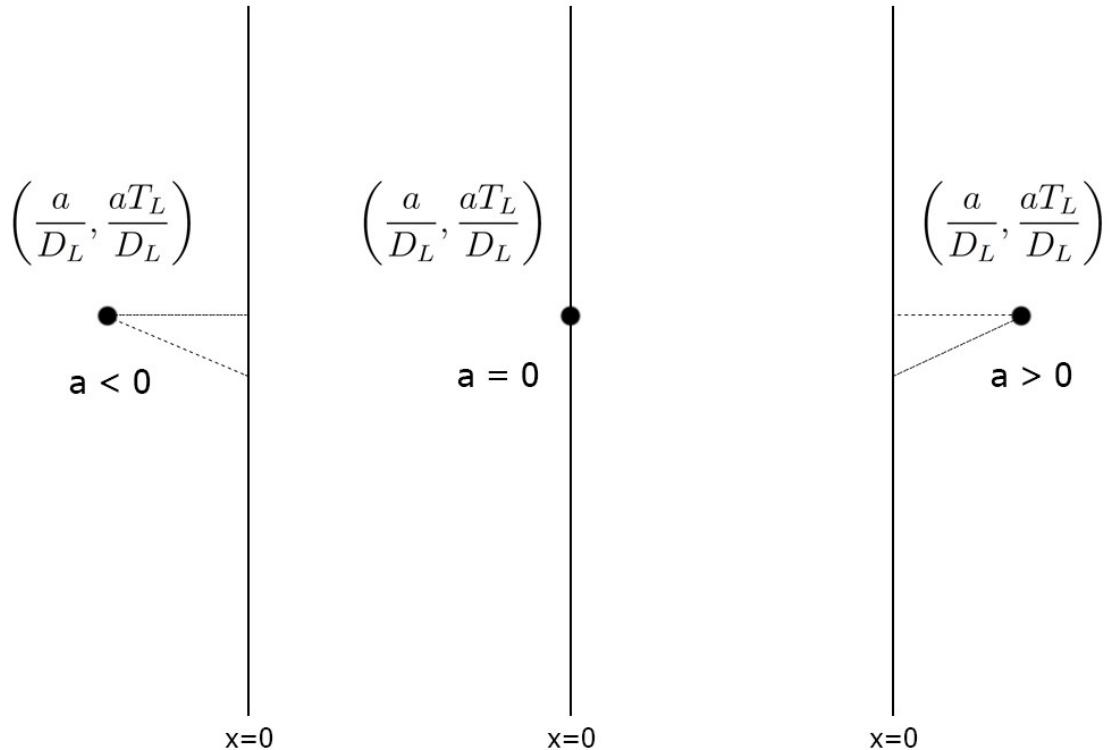


Figura 5.1 : Posición del punto de equilibrio de la zona izquierda dependiendo del signo de a .

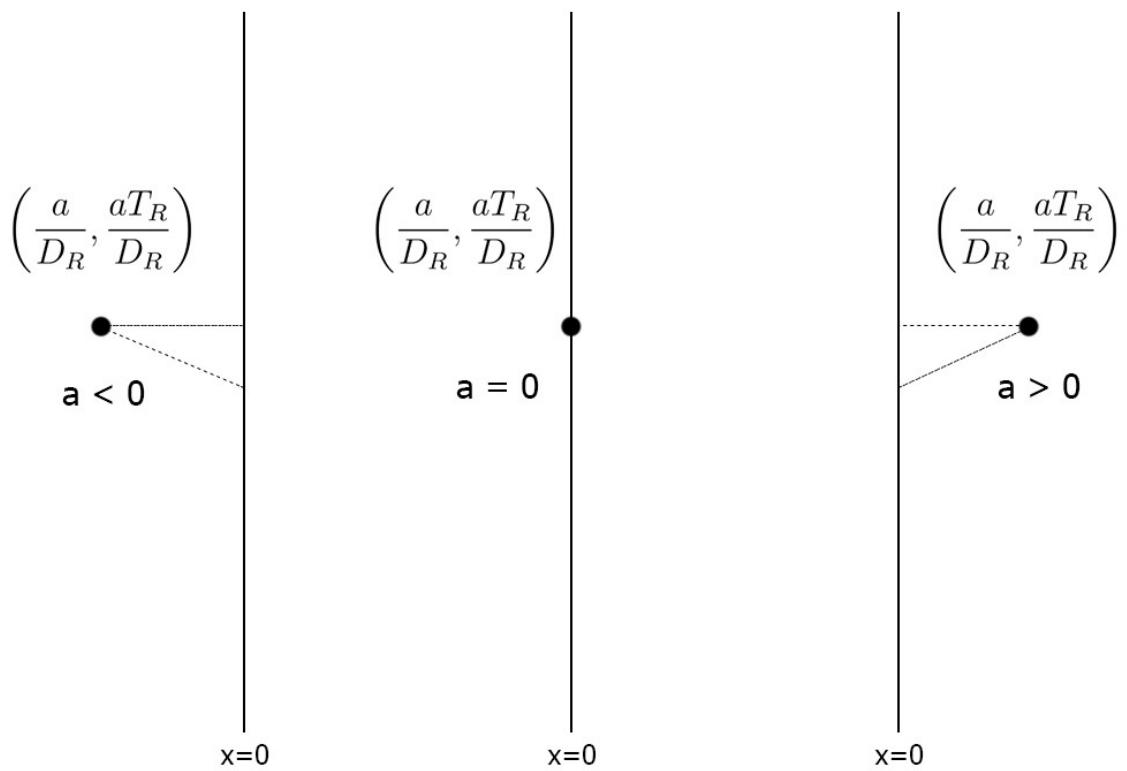


Figura 5.2 : Posición del punto de equilibrio de la zona derecha dependiendo del signo de a .

Aqui van los puntos de equilibrio virtuales

Una vez obtenido el punto de equilibrio podemos analizar la estabilidad como ya hicimos en (3.13), veámoslo de nuevo con la nueva nomenclatura que hemos elegido. El polinomio característico de la zona izquierda sería:

$$\begin{aligned} P_{A_L}(\lambda) &= \lambda^2 - \text{tr}(A_L)\lambda + \det(A_L) \\ &= \lambda^2 - T_L\lambda + D_L = 0 \\ \text{Autovalores} \rightarrow \quad \lambda &= \frac{T_L \pm \sqrt{T_L^2 - 4D_L}}{2} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Como se puede comprobar, el polinomio característico (5.3) es análogo al del sistema (3.13) el cual ya analizamos, así que estaremos buscando:

- $T_L^2 - 4D_L < 0$ por lo que $D_L > 0$.
- $T_L < 0$ para tener un foco asintóticamente estable.
- $T_L = 0$ para tener un centro.
- $T_L > 0$ para tener un foco asintóticamente inestable.

Se puede ver que el cambio en la estabilidad del punto de equilibrio lo produce un cambio en la traza, en nuestro caso será la traza izquierda. Este cambio de la traza izquierda en nuestro sistema se traducirá en cambiar físicamente el valor de algún componente del circuito.

5.2. Ciclo-Límite

El siguiente concepto que debemos conocer es el de **Ciclo-Límite**. Un Ciclo-Límite es una solución periódica del sistema la cual está aislada, de manera local o global, del resto de soluciones periódicas. Del mismo modo que los puntos de equilibrio pueden tener diferentes estabilidades, hay tres posibles estabilidades para un ciclo límite.

- Ciclo-Límite Asintóticamente Estable

No importa si elegimos las condiciones iniciales dentro o fuera del Ciclo-Límite, las curvas solución tienden al Ciclo-Límite.

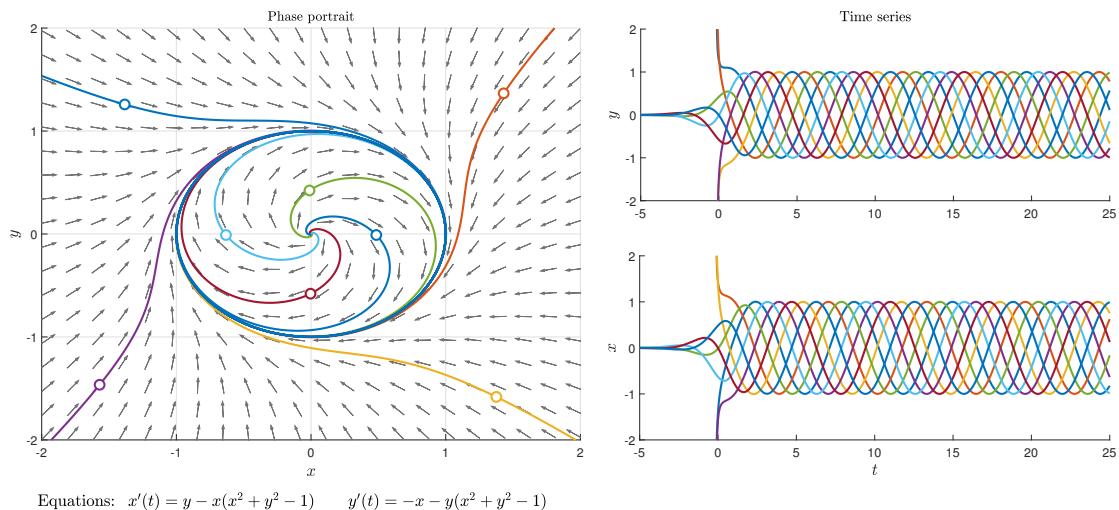


Figura 5.3 : Ciclo-Límite Asintóticamente Estable con sentido horario de giro

- Ciclo-Límite Asintóticamente Inestable

Si elegimos las condiciones iniciales dentro del Ciclo-Límite, las curvas solución tienden a cero. Si elegimos las condiciones iniciales fuera del Ciclo-Límite, las curvas solución tienden a infinito.

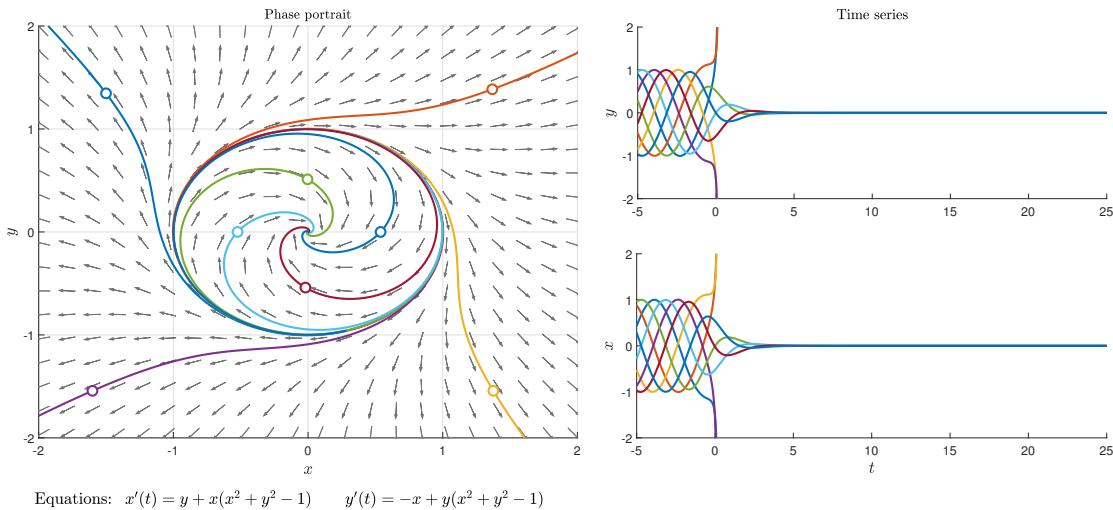


Figura 5.4 : Ciclo-Límite Asintóticamente Inestable con sentido horario de giro

- Ciclo-Límite Semi Asintóticamente Estable

Si elegimos las condiciones iniciales dentro del Ciclo-Límite, las curvas solución tienden a cero. Si elegimos las condiciones iniciales fuera del Ciclo-Límite, las curvas solución tienden al Ciclo-Límite.

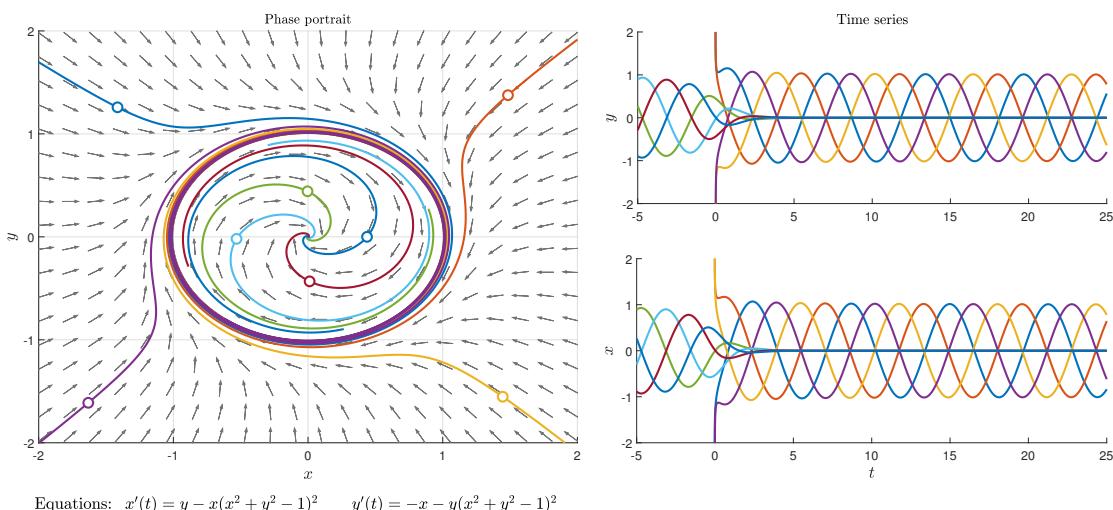


Figura 5.5 : Ciclo-Límite Semi Asintóticamente Estable con sentido horario de giro

El Ciclo-Límite que más nos interesa es el estable, ya que sin importar donde eligamos las condiciones iniciales siempre tenderemos a la oscilación periódica, además, si nuestro sistema sufre alguna perturbación que lo saque de la oscilación periódica siempre tenderá a reconducirse nuevamente hacia ella.

5.3. Bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite y su cálculo mediante desarrollo en series.

El estudio de los Ciclos-Límites históricamente se ha hecho de manera particular para cada sistema, primero hay que estudiar el punto de equilibrio y su estabilidad, hacer el análisis para saber si existe oscilación periódica y finalmente comprobar que dicha oscilación periódica esté aislada, lo cual no es nada sencillo. En nuestro caso no hará falta que hagamos este tipo de estudio gracias a que hemos sido capaces de escribir nuestro sistema (2.30) de la manera (2.40) y este último en la forma (3.38) por lo que ya tenemos trabajos donde se hace este análisis para sistemas de este tipo y se corrobora la existencia de la bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite en los mismos, ver: [10], el Capítulo que inicia en la página 335 de [14] y las Secciones 8.1 y 3.6 de [15], en concreto de este último el Teorema 3.27. En los anteriores trabajos se hace un análisis tradicional del problema, nosotros para elloaremos uso de la Caracterización integral que ya hemos visto, pero vamos a utilizar algunos conceptos que se ven en dichos trabajos, conceptos como la elección de un parámetro de bifurcación, puntos de equilibrios virtuales y requisitos que deben tener los parámetros del sistema. Cumpliendo esta serie de requisitos en los parámetros del sistema, los cuales veremos mas adelante, podemos conseguir que se produzca el cambio de estabilidad Foco Asintóticamente Estable-Centro-Foco Asintóticamente Inestable en el punto de equilibrio del sistema y por ello obteniendo el Ciclo-Límite (ya que se produce la bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite), que será nuestra oscilación periódica.

Vamos a reescribir el Teorema 3.27 de [15] pero adaptando la nomenclatura a la de nuestro estudio

Teorema 5.1. *Considerando el sistema (3.38), donde tomamos T_L como parámetro de bifurcación (esto es, suponemos que el resto de parámetros permanecen fijos), elegimos $a < 0$ y $D_L > 0$. El sistema experimenta una bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite al pasar T_L por el valor cero. Es decir, de la configuración de Centro para $T_L = 0$, ver Fig. 5.7, se produce un Ciclo-Límite (que nace de la órbita periódica del Centro que es tangente a la sección de Poincaré) cuando $T_L T_R < 0$ y $|T_L|$ es lo suficientemente pequeño. El Ciclo-Límite que nace es Asintóticamente Estable si $T_L > 0$, ver Fig. 5.3, e Inestable cuando $T_L < 0$, ver Fig. 5.4.*

Veamos las condiciones para que se deben cumplir en nuestras ecuaciones y sus consecuencias para que se cumpla el Teorema 5.1 en nuestro sistema (3.38):

- $a_R = a_L = a < 0$ para que el punto de equilibrio de la zona Izquierda esté contenido en la zona $x < 0$, ver Fig. 5.1, y que el posible punto de equilibrio de la zona Derecha tambien lo esté (punto de quilibrio virtual).
- Ya que $a_L < 0$ y queremos que el polinomio característico tenga raices imaginarias para tener una configuración de foco en nuestro punto de equilibrio, debemos tener $D_L > 0$, ver (5.3) y (5.1).
- Como hemos establecido $a_R < 0$, el posible punto de equilibrio de la zona Derecha estaría ubicado en la zona $x < 0$, ver (5.2), por ello podemos elegir:
 - No hay punto de equilibrio $\rightarrow D_R = 0$
 - Si hay punto de equilibrio y es virtual $\rightarrow D_R \neq 0$
- Nuestro parámetro de bifurcación será T_L , por ello lo haremos variar de negativo a positivo haciendolo pasar por cero, $T_L < 0 \rightarrow T_L = 0 \rightarrow T_L > 0$ y siempre para un valor pequeño de $|T_L|$. Lo hacemos de esta manera para que el Ciclo-Límite que obtengamos sea Estable y no Inestable
- Tenemos que $T_L T_R < 0$ con $T_L > 0$, por ello $T_R < 0$.

En las siguientes figuras veremos gráficamente como se produce la bifurcacion tomando como parámetro de control T_L .

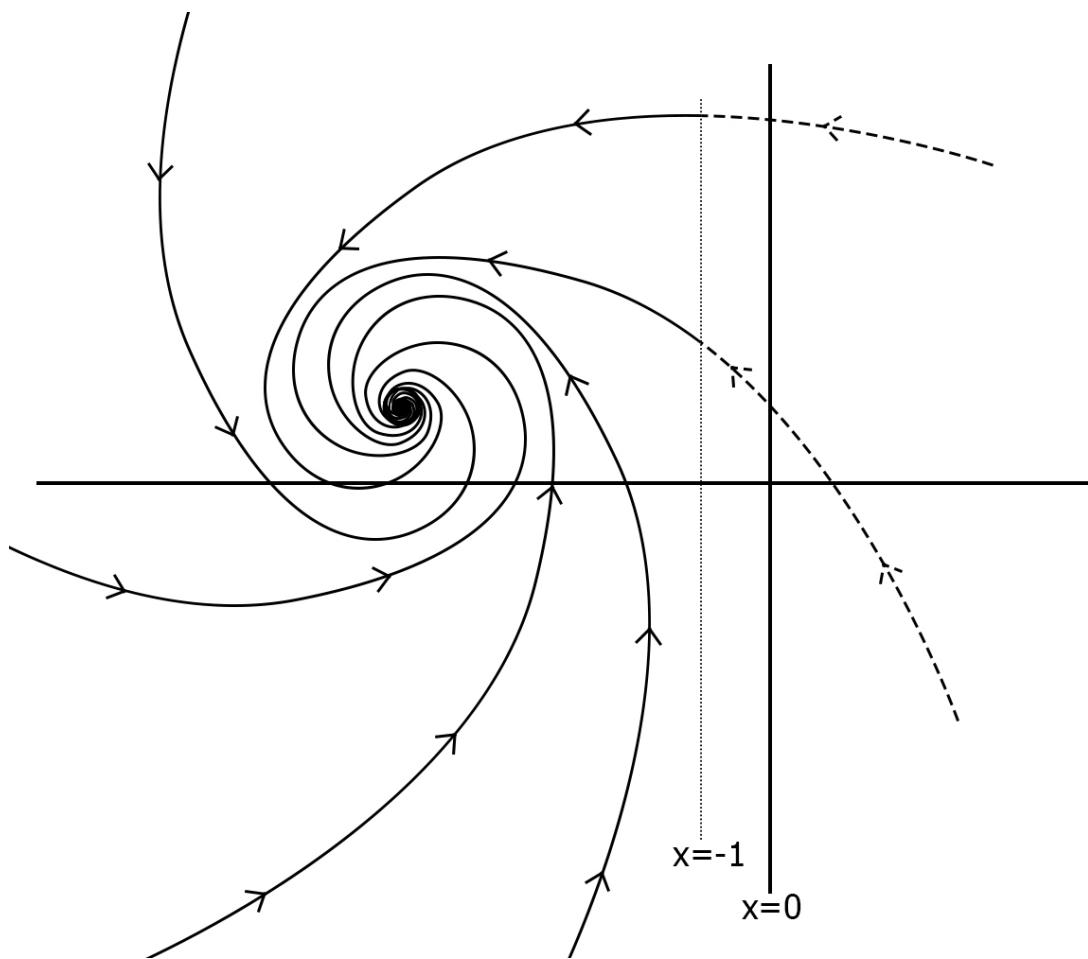


Figura 5.6 : Foco Asintóticamente Estable con sentido antihorario de giro y con la Sección de Poincaré en $x = -1$

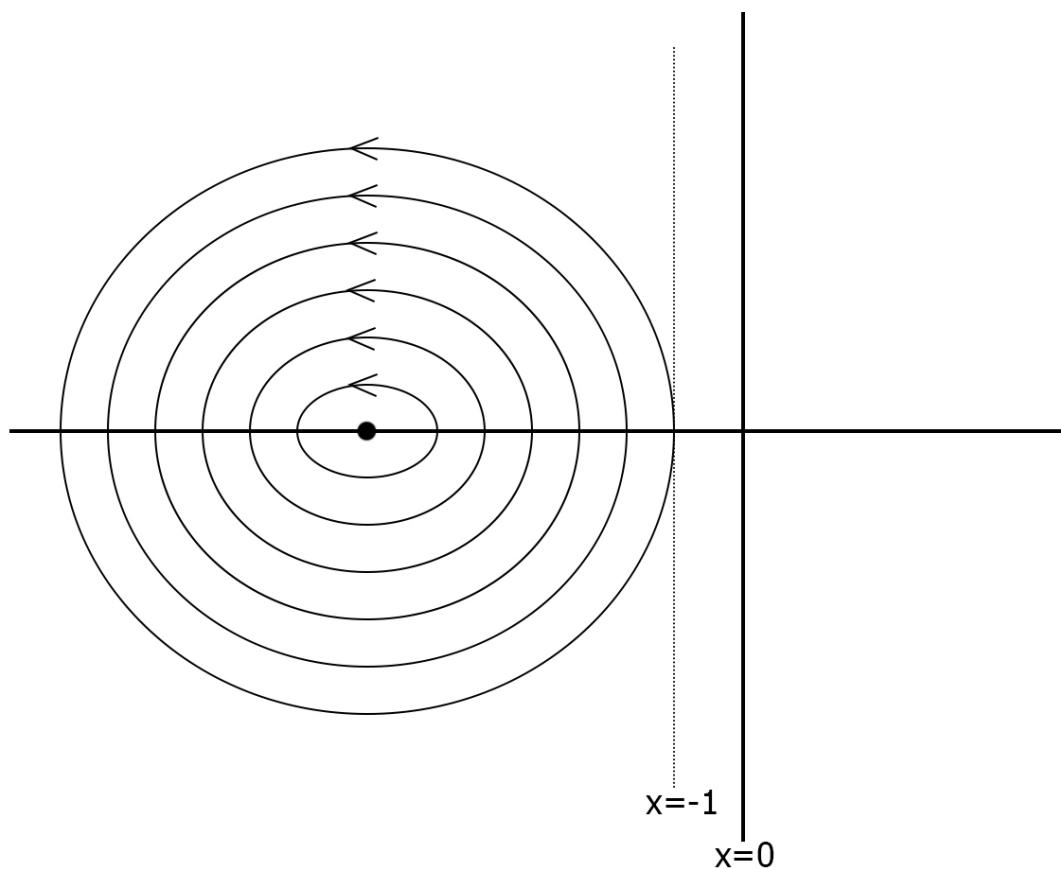


Figura 5.7 : Centro con sentido con sentido antihorario de giro y con la Sección de Poincaré en $x = -1$

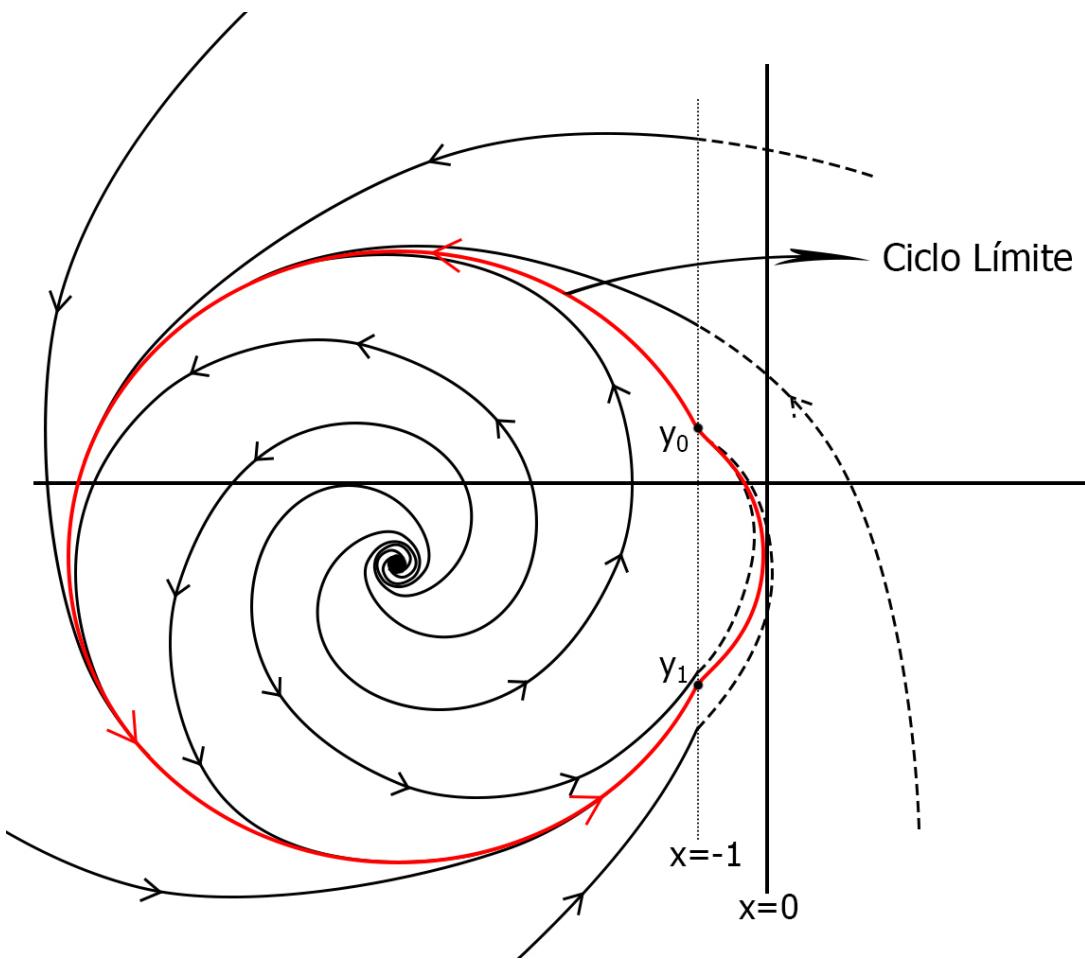


Figura 5.8 : Ciclo-Límite Asintóticamente Estable con sentido antihorario de giro y con la Sección de Poincaré en $x = -1$

Para la demostración del Teorema 5.1 haremos uso principalmente de la Caracterización Integral de la semiaplicación de Poincaré, los desarrollos en series de MacLaurin y el Teorema de la Función Implícita, este último aún no lo hemos presentado.

Teorema 5.2 (Función Implícita). *Supongamos que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cuyas derivadas parciales existen y son continuas, con $f(x_0, y_0) = 0$.*

Si $\partial f / \partial y \neq 0$, entonces existe una función g definida en un intervalo abierto I que contiene a x_0 , de forma que $y_0 = g(x_0)$ y además

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in I$$

Es más, g es derivable y con derivada continua en I .

Ahora veremos la demostración del Teorema 5.1 reescribir, por que realmente no vemos la demostracion completa paso a paso

Demostración. Supongamos que nuestro sistema (3.38) posee una órbita periódica como la de la Fig. 4.8, queremos calcular los puntos y_0, y_1 que ciernen dicha órbita, para ello haremos uso de la semiaplicación Izquierda y Derecha, (4.5)-(4.6). Si la órbita es cerrada y continua podemos formar el sistema enfatizar en lo de la continuidad, cuando hablo de que todo este estudio es para un desarrollo local? al final cuando ya haya usado los desarrollos en series y el teorema de la funcion implicita?

$$\begin{cases} PV \left\{ \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy \right\} = \frac{k_L \pi T_L}{D_L \sqrt{4 D_L - T_L^2}} \\ PV \left\{ \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_R y^2 - a T_R y + a^2} dy \right\} = \frac{-k_R \pi T_R}{D_L \sqrt{4 D_L - T_L^2}} \end{cases} \quad (5.4)$$

Recordemos del Teorema 5.1 que son constantes en nuestro sistema $D_L, D_R, a, k_L, k_R, T_R$, con $a < 0$ por lo que k_L y k_R serían $k_L = 2$ y $k_R = 0$. Luego, en (5.4) tenemos

$$\begin{cases} \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy - \frac{k_L \pi T_L}{D_L \sqrt{4 D_L - T_L^2}} = 0 \\ \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_R y^2 - a T_R y + a^2} dy = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\begin{cases} F_1(y_0, y_1, T_L) = 0 \\ F_1(y_0, y_1) = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

En (5.6) tenemos un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas, por lo que el objetivo será llegar a un sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas, y_0 y T_L . Para ello primero definiremos $y_1 = f_2(y_0)$ y luego $y_0 = f_1(T_L)$. Parte de este procedimiento se realiza en [11], debido a su extensión y complejidad queda fuera de los márgenes de este trabajo, por ello vamos a exponer los resultados directamente

Como se ha dicho el primer objetivo es pasar de $F_2 = (y_0, y_1) \rightarrow y_1 = f_2(y_0)$. Esto se realiza en la Proposición 3.1 de [11] mediante un desarrollo en series de MacLaurin, obtendiéndose:

$$y_1 = -y_0 - \frac{2T_R}{3a}y_0^2 - \frac{4T_R^2}{9a^2}y_0^3 + \dots \quad (5.7)$$

Ahora podemos escribir la primera expresión de (5.5) de la siguiente manera

$$\int_{-y_0 - \frac{2T_R}{3a}y_0^2 + \dots}^{y_0} \frac{-y}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy - \frac{k_L \pi T_L}{D_L \sqrt{4 D_L - T_L^2}} = 0 \quad (5.8)$$

$$\tilde{F}_1(y_0, T_L) = 0$$

Comprobemos haciendo uso del Teorema 5.2 si existe de manera local alguna función que nos permita definir $y_0 = f_1(T_L)$. Cuando se realizan las derivadas parciales de $\tilde{F}_1(y_0, T_L) = 0$ obtenemos:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_0} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_1}{\partial T_L} = \frac{k_L \pi}{2 D_L^{3/2}} \quad (5.9)$$

Como la derivada parcial de la función \tilde{F}_1 respecto y_0 es cero no podemos expresar $y_0 = f_1(T_L)$, pero como la derivada parcial de la función \tilde{F}_1 respecto T_L es distinto de cero, eso significa que existe una única función que nos permite definir $T_L = f_1(y_0)$ de manera local. Esta función se puede calcular haciendo un desarrollo en series de MacLaurin de (5.8), obteniéndose:

$$T_L = \frac{2 D_L^{3/2} T_R}{3 a_L^2 a_R \pi} y_0^3 + \frac{2 D_L^{3/2} T_R^2}{9 a_L^2 a_R^2 \pi} y_0^4 - \dots \quad (5.10)$$

Realizando una inversión de la serie anterior podemos finalmente definir $y_0 = f_1(T_L)$:

$$\begin{aligned} y_0^3 &\simeq \left(\frac{3 a_L^2 a_R \pi}{2 D_L^{3/2} T_R} \right) \cdot (T_L) + \dots \\ y_0 &\simeq \left(\frac{3 a_L^2 a_R \pi}{2 D_L^{3/2} T_R} \right)^{1/3} \cdot (T_L)^{1/3} + \dots \quad \text{para } T_R \neq 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Las expresiones (5.7) y (5.11) son las que usaremos más adelante para calcular los puntos y_0, y_1 . Con esto queda finalizada la Demostración 5.3.

□

Se puede calcular el periodo de la oscilación mediante la obtención de los semitiempos de vuelo izquierdo y derecho, nuevamente la obtención de estas expresiones se escapa de los objetivos de este trabajo por lo que únicamente las presentaremos. Se puede consultar el Teorema 19 de [13] para profundizar más en este apartado.

Definiremos el periodo de la oscilación T_P como la suma del semitiempo de vuelo izquierdo τ_L y el semitiempo de vuelo derecho τ_R . A continuación veremos las expresiones de los semitiempos de vuelo presentadas en [13].

Semitiempo de vuelo izquierdo

$$\tau_L = \frac{4\pi}{D_L \sqrt{4D_L^2 - T_L^2}} + \int_{y_1}^{y_0} \frac{a_L}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy \quad (5.12)$$

Semitiempo de vuelo derecho

$$\tau_R = \int_{y_1}^{y_0} \frac{-a_R}{D_R y^2 - a T_R y + a^2} dy \quad (5.13)$$

Recordemos que tenemos fijos los parámetros D_L, D_R, a, T_R , por lo que las anteriores expresiones (5.12)-(5.13) dependen únicamente de y_0 e y_1 . Como ya hemos visto en la Demostración 5.3 podemos escribir $y_1 = f(y_0)$ e $y_0 = f(T_L)$, por lo que las expresiones (5.12)-(5.13) tan solo dependerán de T_L . A continuación presentaremos el desarrollo en series que hemos calculado para cada semitiempo de vuelo, donde hemos sustituido y_1 por la expresión en función de y_0 que vimos en (5.7):

$$\tau_L = \frac{4\pi}{D_L \sqrt{4D_L^2 - T_L^2}} + \frac{2y_0}{a_L} - \frac{2T_R y_0^2}{3a_L a_R} + \frac{(4a_L^2 T_R^2 + 6a_R(a_L T_R T_L + a_R(-D_L + T_L^2)))y_0^3}{9a_R^2 a_L^3} \quad (5.14)$$

$$\tau_R = -\frac{2y_0}{a_R} + \frac{2T_R y_0^2}{3a_R^2} + \frac{2(3D_R - 8T_R^2)y_0^3}{9a_R^3} \quad (5.15)$$

Sumando los semitiempos anteriores obtenemos el periodo:

$$T_P = \tau_L + \tau_R = \frac{4\pi}{D_L \sqrt{4D_L^2 - T_L^2}} + \frac{2(D_R - D_L - 2T_R^2 + T_R T_L + T_L^2)y_0^3}{a_L^3} \quad (5.16)$$

Capítulo 6

Oscilación Peródica en el circuito

Ya hemos visto las herramientas matemáticas necesarias, la forma en que debemos describir nuestro circuito y las condiciones para obtener la bifurcación que nos proporcione la oscilación periódica que estamos buscando, en este capítulo se va a poner todo ello en práctica.

Lo primero es obtener las ecuaciones diferenciales del circuito y decidir cuáles serán nuestras variables de estado, esto se hizo en [\(2.24\)-\(2.25\)-\(2.26\)](#) y se establecieron como variables de estado:

- Tensión en el condensador y el memristor: $x = v_1$
- Intensidad en la bobina y la resistencia negativa: $y = i_{LR}$
- Flujo en el memristor: $z = \varphi$

Seguidamente se reordenan los coeficientes del anterior sistema para poder trabajar mas comodamente, llegando al sistema tridimensional [\(2.31\)](#), con la función $W(z)$ [\(2.34\)](#).

A continuación, gracias a las superficies invariantes [\(2.38\)](#) existentes en el sistema, podemos pasar de estudiar el sistema tridimensional [\(2.31\)](#) a uno equivalente bidimesional trizonal en forma canónica de Lienard [\(2.40\)](#), con las rectas de separación en $x = \pm 1$.

De este último sistema trizonal [\(2.40\)](#) nos fijaremos únicamente en dos de sus zonas, ya que la oscilación que se está tratando de obtener es bizona, por lo que nos fijaremos por ejemplo en las zonas a la izquierda y a la derecha de la recta de separación $x = -1$.

$$\left| \begin{array}{l} \begin{cases} \dot{x} = t_E(x+1) - t_C - y \\ \dot{y} = d_E(x+1) - d_C - h \end{cases} \\ x = -1 \end{array} \right| \quad \begin{cases} \dot{x} = t_C x - y \\ \dot{y} = d_C x - h \end{cases} \quad (6.1)$$

Pero antes de continuar debemos hacer una translación de la recta de separación $x = -1$ a la recta $x = 0$ ya que esta es una condición fundamental para el resto de herramientas que hemos presentado.

Aplicaremos a (6.1) el primer cambio de variable:

$$X = x + 1 \quad \rightarrow \quad x = X - 1 \quad y \quad \dot{X} = x \quad (6.2)$$

$$\left| \begin{array}{l} \begin{cases} \dot{X} = t_E X - t_C - y \\ \dot{y} = d_E X - d_C - h \end{cases} \\ X = 0 \end{array} \right| \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = t_C X - t_C - y \\ \dot{y} = d_C X - d_C - h \end{array} \right. \quad (6.3)$$

Aplicaremos a (6.3) el segundo cambio de variable:

$$Y = y + t_C \quad \rightarrow \quad y = Y - t_C \quad e \quad \dot{Y} = y \quad (6.4)$$

$$\left| \begin{array}{l} \begin{cases} \dot{X} = t_E X - Y \\ \dot{Y} = d_E X - d_C - h \end{cases} \\ X = 0 \end{array} \right| \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = t_C X - Y \\ \dot{Y} = d_C X - d_C - h \end{array} \right. \quad (6.5)$$

Por lo que tenemos

$$\left| \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_E & -1 \\ d_E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ d_C + h \end{pmatrix} \\ X = 0 \end{array} \right| \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_C & -1 \\ d_C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ d_C + h \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (6.6)$$

Como se puede comprobar el sistema (6.6) es equivalente al sistema en forma canónica de Liénard (3.38) que vimos a final de la Sección 3.2, por lo que todo el análisis posterior que hicimos para un sistema tipo (3.38) lo podremos aplicar a nuestro sistema (6.6). Los parámetros del sistema en relación a nuestro circuito son

$$\begin{aligned}
 T_L &= t_E = b \cdot a_{11} + a_{22} = \frac{-b}{C} + \frac{R}{L} \\
 D_L &= d_E = b \cdot a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \frac{-b}{C} \frac{R}{L} - \frac{-1}{L} \frac{1}{C} = \frac{-bR}{CL} + \frac{1}{CL} \\
 T_R &= t_C = a \cdot a_{11} + a_{22} = \frac{-a}{C} + \frac{R}{L} \\
 D_R &= d_C = a \cdot a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \frac{-a}{C} \frac{R}{L} - \frac{-1}{L} \frac{1}{C} = \frac{-aR}{CL} + \frac{1}{CL} \\
 a &= d_C + h = a \cdot a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} + h = \frac{-aR}{CL} + \frac{1}{CL} + h
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

El siguiente paso es recordar las condiciones que se estudiaron en el Teorema 5.1 para que se produzca la bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite y ajustar dichas condiciones con un parámetro del circuito, este será la resistencia negativa. Es decir, modificando la resistencia del circuito haremos que se produzca el cambio en la traza y por tanto el cambio en la estabilidad del punto de equilibrio.

- Condición I

$$a = d_C + h < 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-aR}{CL} + \frac{1}{CL} + h < 0,$$

$R > \frac{1}{a} + \frac{CL}{a} h.$

(6.8)

- Condición II

$$D_L > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-bR}{CL} + \frac{1}{CL} > 0,$$

$R < \frac{1}{b}.$

(6.9)

- Condición III

$$T_R < 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-a}{C} + \frac{R}{L} < 0,$$

$R < a \frac{L}{C}.$

(6.10)

- Condición IV

$$T_L = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-b}{C} + \frac{R}{L} = 0,$$

$T_L \begin{cases} > 0 & \text{para } R > b \frac{L}{C} \\ = 0 & \text{para } R = b \frac{L}{C} \\ < 0 & \text{para } R < b \frac{L}{C} \end{cases}$

(6.11)

Ahora ajustaremos los parámetros a, b, h, R, L, C para que las cuatro condiciones anteriores se cumplan simultáneamente

De las condiciones III y IV obtenemos la relación entre a y b :

$$a \frac{L}{C} > R = b \frac{L}{C} \quad \rightarrow \quad a > b$$

$$\text{Elegiremos } \begin{cases} a = 0.2 \\ b = 0.01 \end{cases} \quad (6.12)$$

Comprobemos la condición II:

$$R < \frac{1}{b} = \frac{1}{0.01} \quad \rightarrow \quad R < 100 \quad (6.13)$$

Ahora se establecerá el valor de R límite, para que se produzca el cambio en la traza izquierda $T_L < 0 \rightarrow T_L = 0 \rightarrow T_L > 0$, con la condición IV. Haremos que el cambio se produzca para $R = 1$ y comprobaremos la relación entre L y C que obtendremos tras ello:

$$\text{Establecemos} \quad \rightarrow \quad R = 1$$

$$\text{Condición IV} \quad \rightarrow \quad C = 0.01L$$

$$\text{Elegiremos} \quad \rightarrow \quad C = 100 \cdot 10^{-3}(F), \quad L = 10(H).$$

A continuación comprobemos la condición I para establecer el valor de h :

$$\begin{aligned} R &> \frac{1}{a} + \frac{CL}{a} h \\ R &> \frac{1}{0.2} + \frac{100 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{0.2} h \\ R &> 5 + 5h \end{aligned}$$

$$\text{Por lo que } h < 0, \quad \text{Escogeremos } h = -1.$$

$$R > 5 + 5(-1) = 0$$

Por último comprobemos la condición III:

$$R < a \frac{L}{C} \quad \rightarrow \quad R < 0.2 \frac{10}{100 \cdot 10^{-3}} = 20$$

A modo de resumen, estos serán los valores elegidos para los parámetros de nuestro sistema (6.6):

- $a = 0.2$
- $b = 0.01$
- $h = -1$
- $C = 100 \cdot 10^{-3} (F)$
- $L = 10 (H)$
- $R \stackrel{\leq}{\geq} 1 (\Omega)$

Se han elegido los anteriores valores para una mayor comodidad a la hora de hacer los cálculos pero obviamente no son valores comerciales de R, L, C . Si se quisiera implementar el circuito habría que realizar un trabajo más extenso con las inecuaciones anteriores para ajustar los parámetros a valores comerciales, además no se podría elegir libremente los valores de a y b ya que estos dependen de la curva característica flujo-carga del memristor.

A continuación pasemos a comprobar con MATLAB que efectivamente aparece el Ciclo-Límite en nuestro circuito con los valores anteriores.

Calcularemos y_0 e y_1 con las expresiones (5.7)-(5.11). En la expresión (5.7) donde apareca y_0 lo sustituiremos por (5.11), de esta manera tendremos tanto y_0 como y_1 en función de T_L , esto lo haremos ya que como vimos en (6.7) podemos escribir $T_L = f(b, C, L, R)$ y ya dijimos anteriormente que solo variaremos R del circuito, por lo que de esta manera conseguimos tener y_0 , y_1 y T_L en función de R .

```
% Ejemplo 4

% Valores del circuito
a = 0.2; R = 1.3;
b = 0.01; L = 10;
h = -1; C = 0.1;

% dc = (1-a*R)/(C*L)      % c: Central , Derecha
% de = (1-b*R)/(C*L)      % e: Exterior , Izquierda
% tc = (-a/C)+(R/L)
% te = (-b/C)+(R/L)
% as = dc + h

Y0 = @(R) (((3*pi*((1-a*R)/(C*L))+h)^3)/(2*((-a/C)+(R/L))) * ((1-b*R)/(C*L))^(3/2)) * ((-b/C)+(R/L))^(1/3);

Y1 = @(R) (-((((3*pi*((1-a*R)/(C*L))+h)^3)/(2*((-a/C)+(R/L))) * ((-b/C)+(R/L))^(1/3))) - (((2*((-a/C)+(R/L)))/(3*(h+((1-a*R)/(C*L)))))) * (((3*pi*((1-a*R)/(C*L))+h)^3)/(2*((-a/C)+(R/L))) * ((1-b*R)/(C*L))^(3/2)) * ((-b/C)+(R/L))^(1/3))^2;

periodo = @(R) (4*pi/(((1-b*R)/(C*L))*sqrt((4*((1-b*R)/(C*L))-((-b/C)+(R/L))^2))) + (2*((1-a*R)/(C*L))-((1-b*R)/(C*L)-(2*((-a/C)+(R/L))^2)+((-a/C)+(R/L))*((-b/C)+(R/L))^2)*(((3*pi*((1-a*R)/(C*L))+h)^3)/(2*((-a/C)+(R/L))*((1-b*R)/(C*L))^(3/2)))*((-b/C)+(R/L))^(1/3)))^3/(3*((1-a*R)/(C*L))-h)^3);

disp('Condiciones que deben cumplirse');
disp('de > 0, te > 0(para R > 1), a < 0, tc < 0');
de = (1-b*R)/(C*L)
te = (-b/C)+(R/L)
as = ((1-a*R)/(C*L)) + h
tc = (-a/C)+(R/L)

disp('Puntos y periodo');
Y0_punto = Y0(R)
Y1_punto = Y1(R)
periodo_punto = periodo(R)

subplot(2,1,1); fplot(Y0,[0 3]); hold on; fplot(Y1,[0 3]);
hold on; plot(R,Y0_punto,'*'); plot(R,Y1_punto,'*');
xlabel('R'); ylabel('Y');
grid on; shg; subplot(2,1,2);
fplot(periodo,[0 3]); hold on; plot(R,periodo_punto,'*');
xlabel('R'); ylabel('periodo');
grid on; shg;
```

```
>> Ejemplo_4
Condiciones que deben cumplirse
de > 0, te > 0(para R > 1), a < 0, tc < 0

de =
0.987

te =
0.03

as =
-0.26

tc =
-1.87

Puntos y periodo

Y0_punto =
0.11066

Y1_punto =
-0.16938

periodo_punto =
6.4072
```

En la siguiente página veremos la gráfica obtenida de “Ejemplo 4 TFE” donde aparecen la gráfica de Y_0 e Y_1 en función de R y la gráfica del periodo también en función de R .

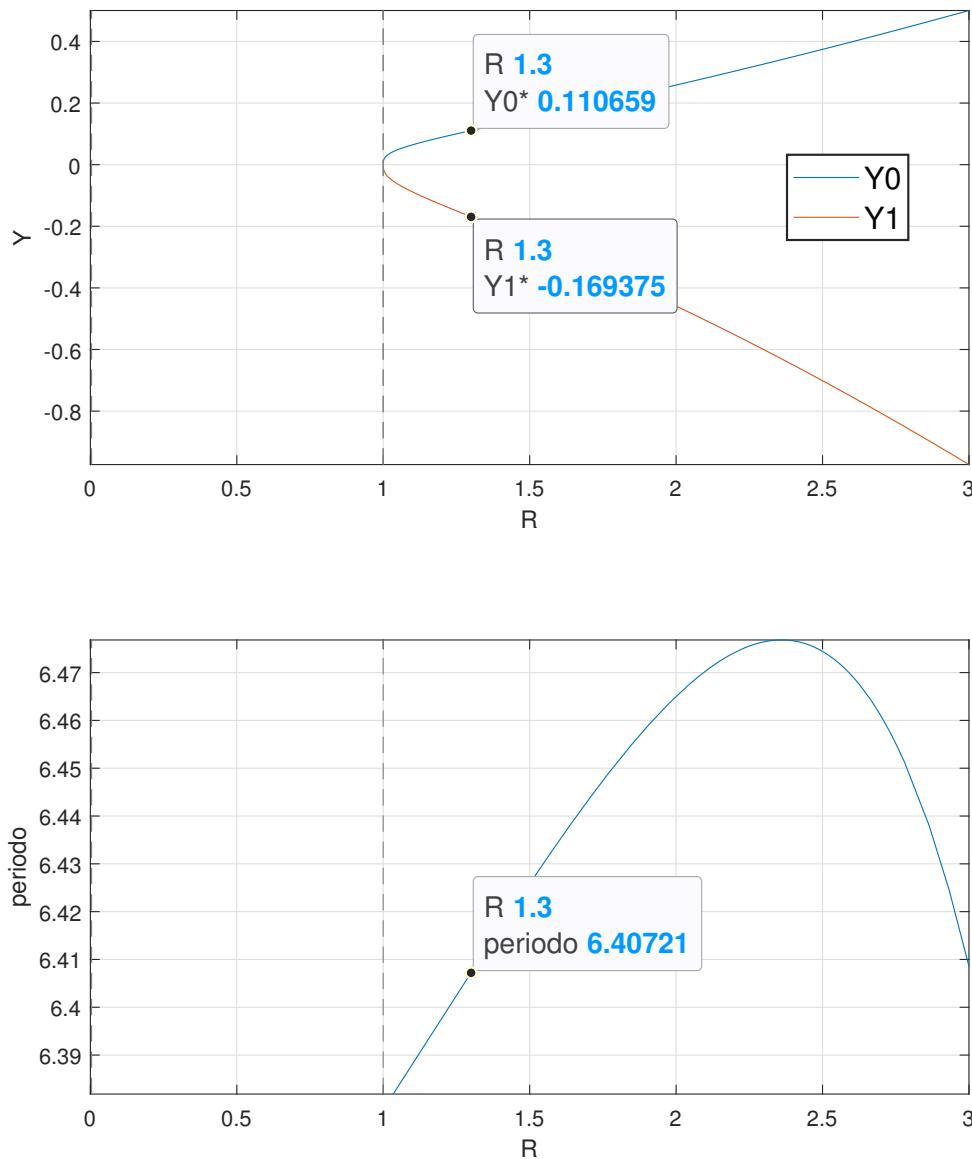


Figura 6.1 : Gráfica obtenida de “Ejemplo 4 TFE”

A continuación veremos una pequeña modificación del código “Ejemplo 4” para ver más ampliamente la gráfica de Y_0 e Y_1 en función de R y así comprobar que se cumplen las condiciones que nos aparecieron al trabajar con las inecuaciones.

```
% Ejemplo 5
```

```
% Valores del circuito
a = 0.2; R = 1.3;
b = 0.01; L = 10;
h = -1; C = 0.1;

% dc = (1-a*R)/(C*L)      % c: Central , Derecha
% de = (1-b*R)/(C*L)      % e: Exterior , Izquierda
% tc = (-a/C)+(R/L)
% te = (-b/C)+(R/L)
% as = dc + h

Y0 = @(R) (((3*pi*((1-a*R)/(C*L))+h)^3)/(2*((-a/C)+(R/L)))*
((1-b*R)/(C*L))^(3/2)))*((-b/C)+(R/L))^(1/3);

Y1 = @(R) (-((((3*pi*((1-a*R)/(C*L))+h)^3)/(2*((-a/C)+(R/
L))*((1-b*R)/(C*L))^(3/2)))*((-b/C)+(R/L))^(1/3)))
-(((2*((-a/C)+(R/L)))/(3*(h+((1-a*R)/(C*L))))))
*(((3*pi*((1-a*R)/(C*L))+h)^3)/(2*((-a/C)+(R/L)))
*((1-b*R)/(C*L))^(3/2)))*((-b/C)+(R/L))^(1/3))^2;

periodo = @(R) (4*pi/(((1-b*R)/(C*L))*sqrt((4*((1-b*R)/(C*
L))-(((-b/C)+(R/L))^2)))) + (2*((1-a*R)/(C*L))-((1-
b*R)/(C*L))-(2*((-a/C)+(R/L))^2)+(((-a/C)+(R/L))*((-b/
C)+(R/L)))+((-b/C)+(R/L))^2)*(((3*pi*((1-a*R)/(C*L))
+h)^3)/(2*((-a/C)+(R/L))*((1-b*R)/(C*L))^(3/2)))*((-b/
C)+(R/L))^(1/3))^3/(3*((1-a*R)/(C*L))-h)^3));

fplot(Y0,[0 25]);
hold on;
fplot(Y1,[0 25]);
xlabel('R');
ylabel('Y');
legend('Y0','Y1');
grid on;
shg;
```

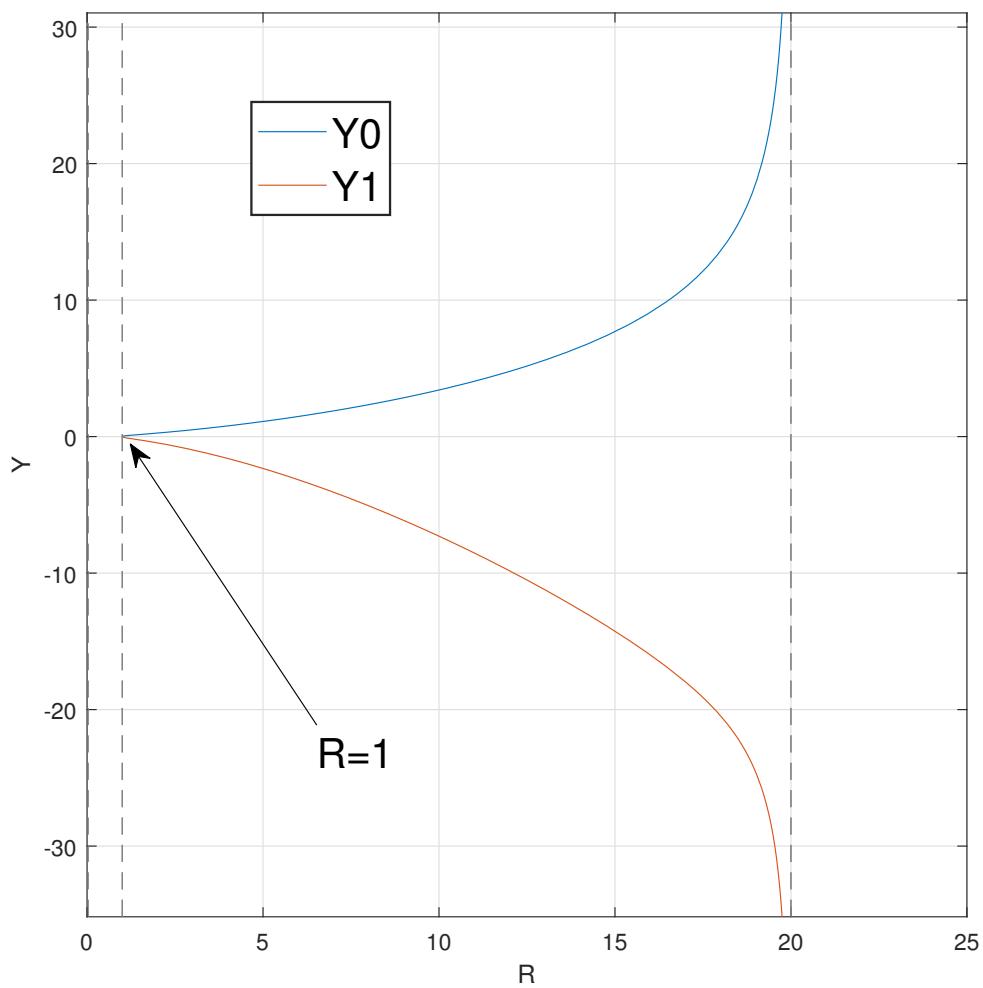


Figura 6.2 : Gráfica obtenida de “Ejemplo 5”

Como se puede comprobar en la [Fig. 6.2](#) se cumplen las condiciones que establecimos en la página [como referencia una página de mi propio trabajo?](#), estas eran: $R < 20$ y $R > 1$ para que aparezca el Ciclo-Límite, es decir, se empiecen a obtener valores de corte $Y_0 > 0$ e $Y_1 < 0$ con la recta de separación $X = 0$.

Para finalizar el estudio vamos a ver gráficamente el Ciclo-Límite, para ello hay que reescribir el sistema (2.40) haciendo uso de los valores absolutos, la función de MATLAB que define funciones a trozos o la función signo como ya hicimos en (4.9).

$$\begin{cases} \dot{x} = t_E x - y + (t_C - t_E) \frac{1}{2} (|x+1| - |x-1|), \\ \dot{y} = d_E x + (d_C - d_E) \frac{1}{2} (|x+1| - |x-1|) - h. \end{cases} \quad (6.14)$$

Siendo t_E, t_C, d_E, d_C los vistos en (6.7), los cuales en siguiente código en MATLAB se han sustituido para dejar todos los parámetros en función de R .

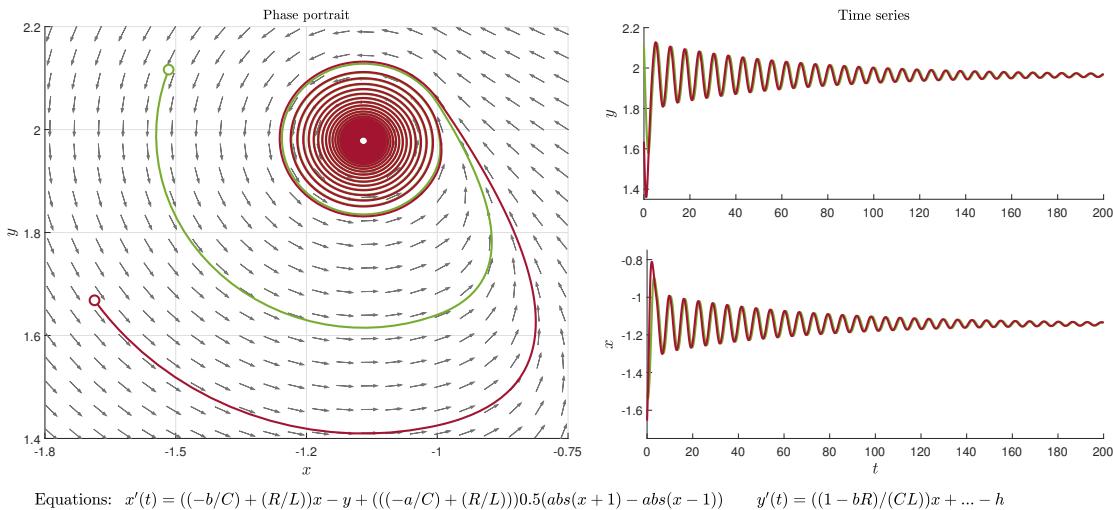


Figura 6.3 : Configuración de Foco Asintóticamente Estable para $R = 0.7$

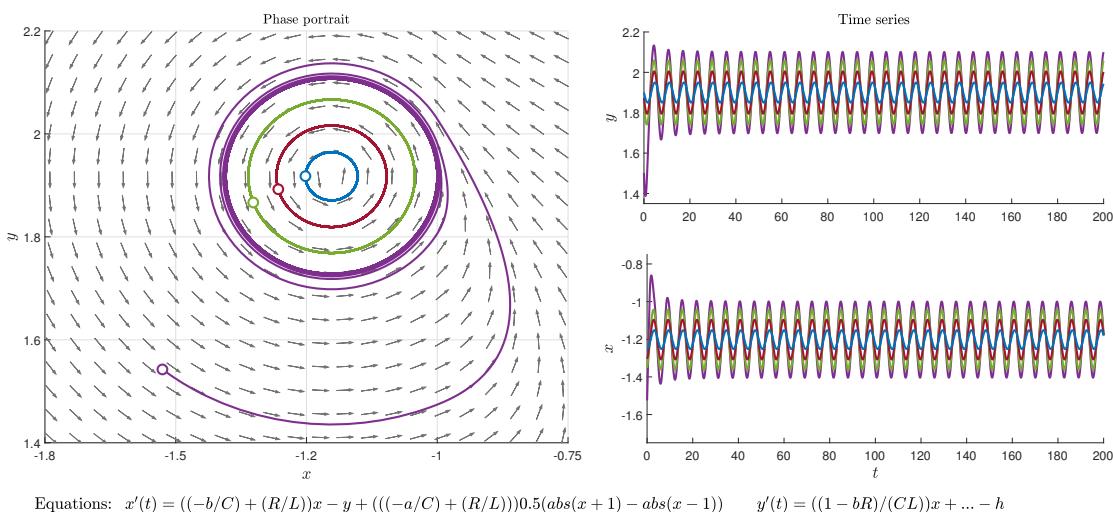


Figura 6.4 : Configuración de Centro para $R = 1$

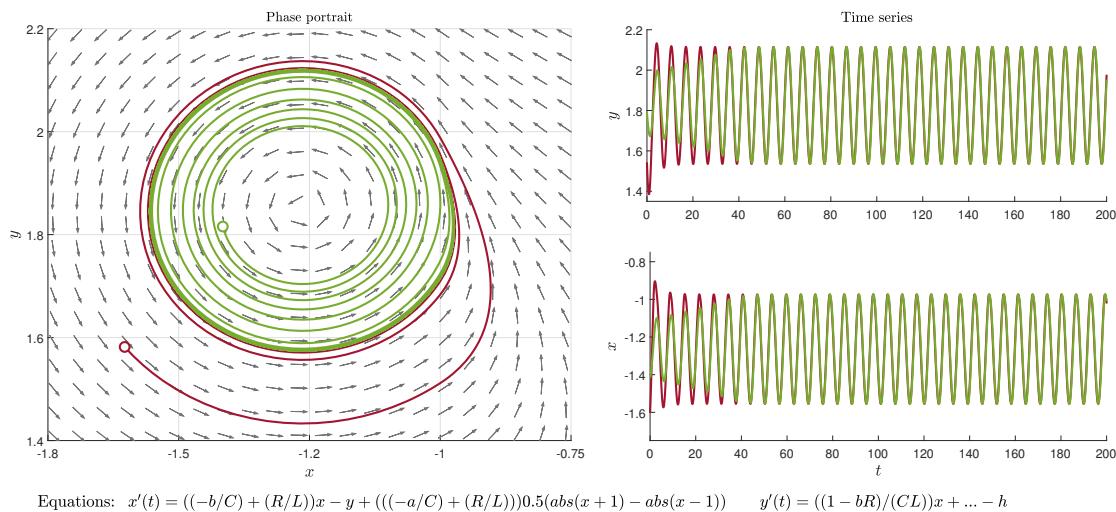


Figura 6.5 : Configuración de Foco Asintóticamente Inestable para $R = 1.3$ donde se ha producido el Ciclo-límite debido a la bifurcación estudiada.

Como se puede ver hemos obtenido en nuestro circuito el mismo comportamiento que el visto en las [Fig. 5.6](#), [Fig. 5.7](#), [Fig. 5.8](#). De hecho esas figuras se representaron con la recta de separación en $x = -1$ ya que eso es lo que ocurre en nuestro circuito. Podemos comprobar que el Ciclo-Límite efectivamente se “cuela” levemente en la zona derecha de la recta de separación $x = -1$, ver [Fig. 6.5](#).

Vamos a utilizar la función *ode45* de MATLAB para solucionar el sistema de ecuaciones diferenciales (6.14) que hemos usado para las representaciones de las [Fig. 6.3](#), [Fig. 6.4](#), [Fig. 6.5](#). Así podremos comparar los resultados que obtengamos con los que obtuvimos previamente mediante los desarrollos en series. La función *ode45* tiene una herramienta muy útil para nuestro análisis ya que nos permite definir “eventos”, en concreto estableceremos que cuando la curva solución corte a la recta $x = -1$ nos guarde el valor correspondiente de y , aparte del instante temporal en que se ha producido dicho evento. De esa forma podremos comprobar los puntos y_0 e y_1 además del periodo. Dejaremos que la función *ode45* resuelva el sistema para un valor de tiempo grande, así nos aseguraremos que los últimos valores de y que cortan a la recta $x = -1$ ya están dentro del Ciclo-Límite. En la siguiente página presentaremos el código de MATLAB utilizado para ello.

% Ejemplo 6

```
tspan = [0, 50]; % Lapso de tiempo estudiado.
x0    = [-1;1]; % Punto inicial.

[t, xy,tE,xE,iE] = ode45(@sistema, tspan, x0, odeset('
Events',@EF));

% t -> Los valores de tspan que hemos definido
% xy -> Soluciones del sistema, el primer punto es el
    inicial
% tE -> Momentos temporales para los que se produce un
    evento definido.
% xE -> Valores x e y para los que se produce un evento
    definido.
% iE -> Indice de eventos, nosotros solo definimos uno.
```

Funciones usadas en “Ejemplo 6”:

```
function F=sistema(t,X)

% Valores del circuito
a = 0.2; R = 1.3;
b = 0.01; L = 10;
h = -1; C = 0.1;

x=X(1);
y=X(2);

F=[((-b/C)+(R/L))*x - y + (((-a/C)+(R/L)))*0.5*(abs(x+1)-
abs(x-1));...
((1-b*R)/(C*L))*x + (((1-a*R)/(C*L))-((1-b*R)/(C*L)))
*0.5*(abs(x+1)-abs(x-1))-h];
end

function [valor,terminar,direccion] = EF(t,xy)

valor=(xy(1)+1);
% xy(1) es la x y buscamos x=-1 --> x+1=0

terminar=0;
% 0 (no termina), 1 (termina de integrar en el primer
    evento)

direccion=0;
% 0 (no importa el sentido)
end
```

Como se ve en “Ejemplo 6” se ha establecido el punto inicial en $(-1, 1)$, esto realmente no nos importa ya que nuestro sistema con $R > 1$ tiene una configuración de Ciclo-Límite Asintóticamente Estable por lo que con el tiempo de estudio suficiente la solución finalmente tenderá al Ciclo-Límite.

Primero vamos a obtener los últimos valores de la matriz xE ya que contendrán los últimos valores de y_0 e y_1 que cortan a la recta $x = -1$, sin olvidarnos de deshacer los cambios de variable [\(6.2\)](#) y [\(6.4\)](#) que hicimos previamente.

```
>> Ejemplo_6
>> Eventos_Finales = xE(end-1:end , :)

Eventos_Finales =
-1.0000000000000000      1.678373654662149
-1.000000000000038      1.943071409081938

>> tc = -1.87;
>> Eventos_Finales_Cambio_APLICADO = [Eventos_Finales
(:,1)+1 , Eventos_Finales(:,2)+tc]

Eventos_Finales_Cambio_APLICADO =
0.0000000000000000      -0.191626345337851
-0.000000000000038      0.073071409081938
```

Se han obtenido unos valores de $Y_0 = 0.0731$ e $Y_1 = -0.1916$ muy parecidos a los obtenidos en “Ejemplo 4” que eran $Y_0 = 0.1107$ e $Y_1 = -0.1694$.

A continuación comprobemos el periodo

```
>> Ejemplo_6
>> Tiempos_Eventos_Finales = tE(end-3:end , :)

Tiempos_Eventos_Finales =
39.611715401194630
40.523097741802857
45.940582182720519
46.902819483166091

>> Periodo = Tiempos_Eventos_Finales(end) -
    Tiempos_Eventos_Finales(end-2)

Periodo =
6.379721741363234
```

Hemos obtenido un periodo de $T_P = 6.3797$, realmente parecido al obtenido en “Ejemplo 4” que era $T_P = 6.4072$.

En las siguientes páginas veremos algunas gráficas interesantes que podemos obtener con los resultados de “Ejemplo 6”

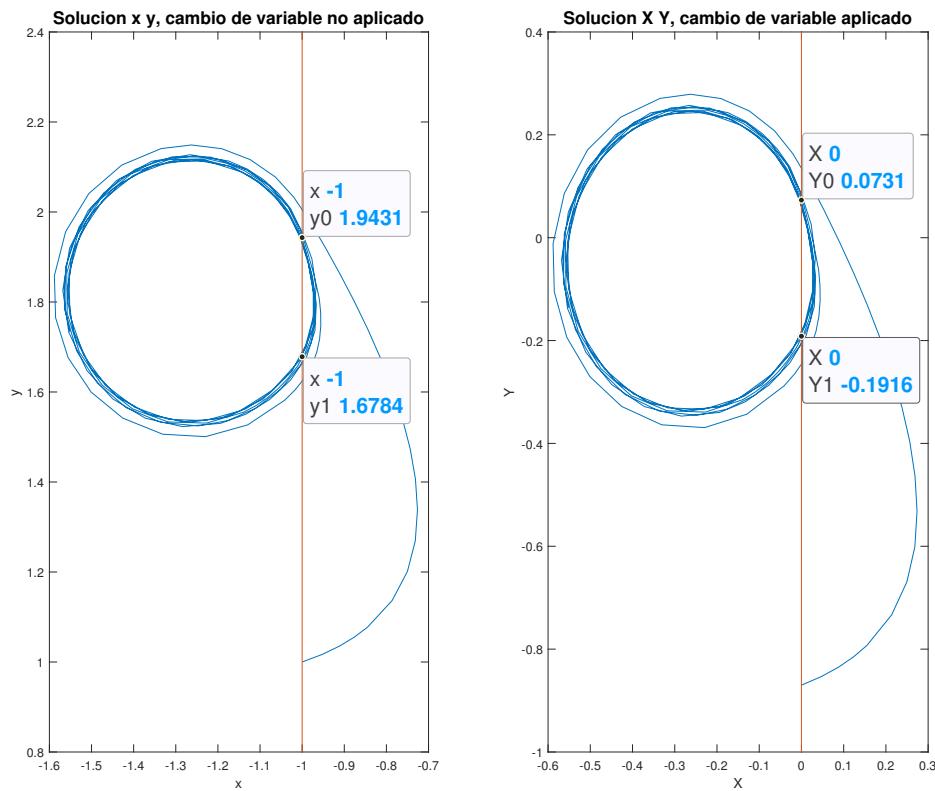


Figura 6.6 : Comparación de la representación de la matriz \mathbf{xy} de “Ejemplo 6” con el cambio de variable aplicado y no aplicado. Los puntos representados corresponden a las dos últimas componentes de $\mathbf{x}\mathbf{E}$, nuevamente con cambio de variable aplicado y no aplicado.

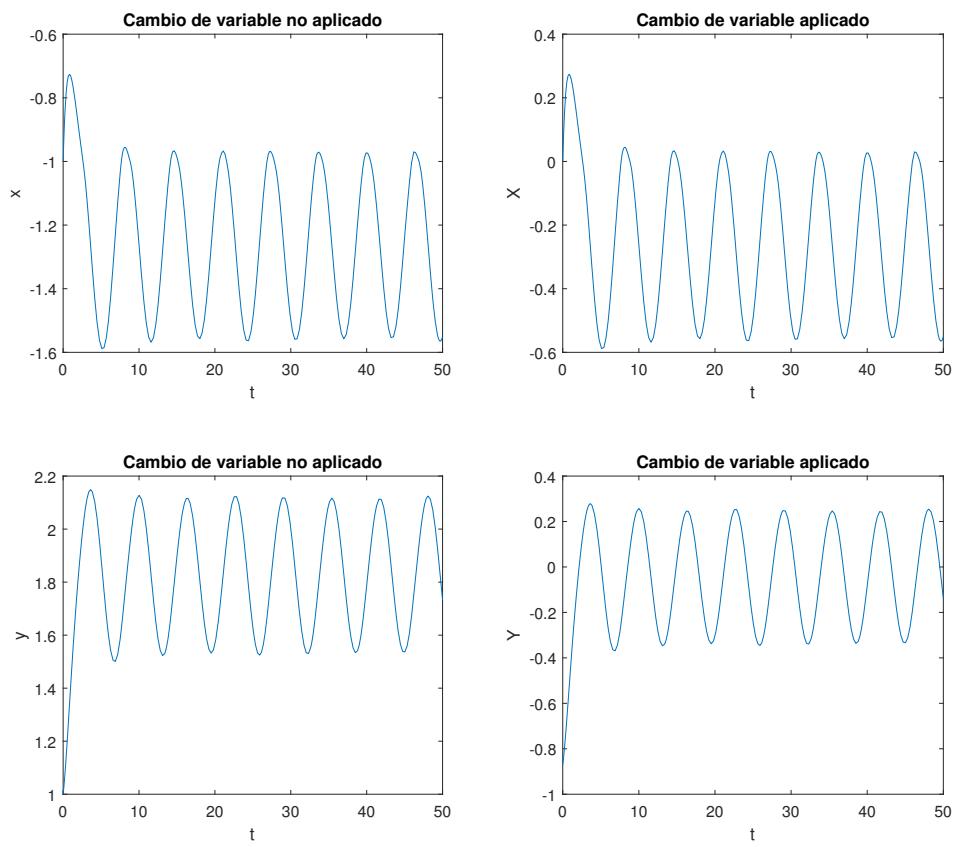


Figura 6.7 : Comparación de la representación de las componentes de la matriz xy de “Ejemplo 6” con respecto al tiempo de estudio t con el cambio de variable aplicado y no aplicado.

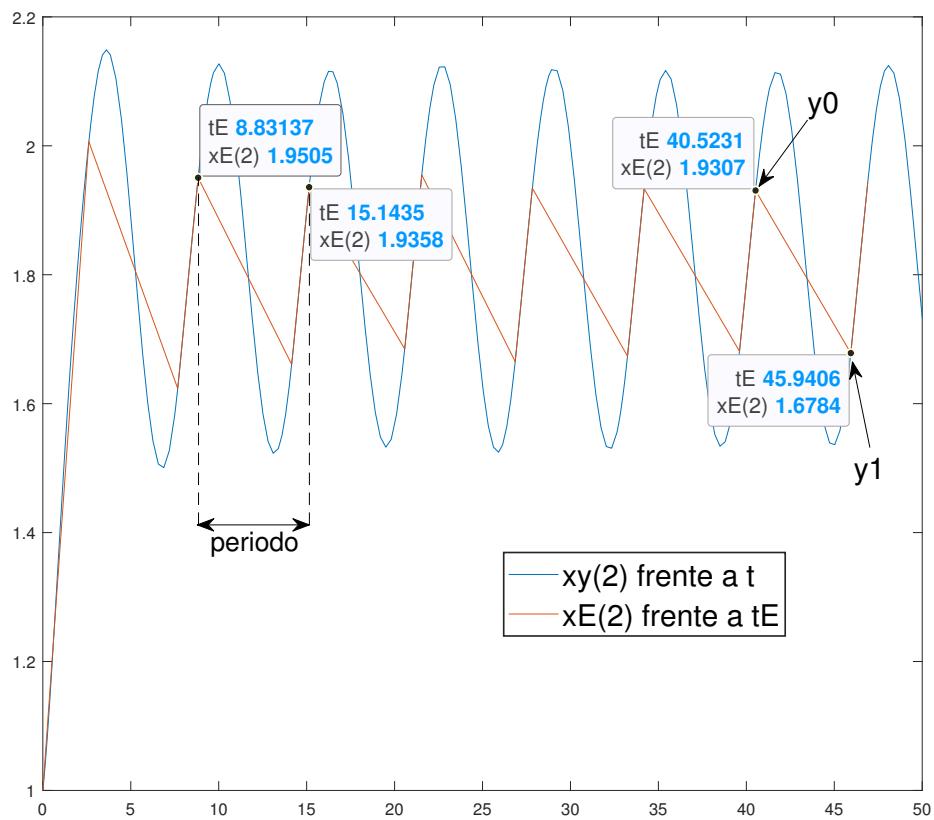


Figura 6.8 : Comparación de las gráficas de y ($xy(2)$) solución frente al tiempo de estudio t y los valores de y ($xE(2)$) para los que se produce el evento de corte con la recta $x = -1$ frente a los instantes de tiempo tE en que se produce el evento. Esta gráfica es muy interesante ya que se ven muy claramente cuales son los puntos de corte y_0 e y_1 y como medir el periodo de la oscilación

Conclusiones

Contenido del capítulo de conclusiones.

Dopado No (6.15)

Bibliografía

- [1] CHUA, L. O. Memristor – The missing circuit element. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 1971, vol. CT-18, no. 5, p. 507 to 519. DOI: 10.1109/TCT.1971.1083337.
- [2] Itoh, Makoto & Chua, Leon. (2008). Memristor oscillators. I. J. Bifurcation and Chaos. 18. 3183-3206. 10.1142/S0218127408022354.
- [3] Strukov DB, Snider GS, Stewart DR, Williams RS. The missing memristor found. *Nature*. 2008 May 1;453(7191):80-3. doi: 10.1038/nature06932. Erratum in: *Nature*. 2009 Jun 25;459(7250):1154. PMID: 18451858.
- [4] R. S. Williams, "How We Found The Missing Memristor, in *IEEE Spectrum*, vol. 45, no. 12, pp. 28-35, Dec. 2008, doi: 10.1109/MSPEC.2008.4687366.
- [5] Xiaoyue, Ji & Dong, Zhekang & Zhou, Guangdong & Lai, Chun Sing & Yan, Yunfeng & Qi, Donglian. (2021). Memristive System Based Image Processing Technology: A Review and Perspective. *Electronics*. 10. 3176. 10.3390/electronics10243176.
- [6] Caravelli, F. & Carbajal, Juan. (2018). Memristors for the Curious Outsiders. 10.31224/osf.io/c4qr9.
- [7] Llibre, Jaume & Teruel, Antonio. (2014). Introduction to the Qualitative Theory of Differential Systems: Planar, Symmetric and Continuous Piecewise Linear Systems. 10.1007/978-3-0348-0657-2.
- [8] Carmona, V. Bifurcaciones en Sistemas Dinámicos Lineales a Trozos. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, 2002.
- [9] V. Carmona, E. Freire, E. Ponce and F. Torres, "On simplifying and classifying piecewise-linear systems, in *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 49, no. 5, pp. 609-620, May 2002, doi: 10.1109/TCSI.2002.1001950.
- [10] Amador, A., Freire, E., Ponce, E., and Ros, J., "On Discontinuous Piecewise Linear Models for Memristor Oscillators", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 27, no. 6, 2017. doi:10.1142/S0218127417300221.
- [11] Carmona, Victoriano, Fernández-Sánchez, Fernando, García-Medina, Elisabeth and Novaes, Douglas D.: Properties of Poincaré half-maps for planar linear systems and some direct applications to periodic orbits of piecewise systems, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 2023, No. 22, 1-18. doi: <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2023.1.22>
- [12] Victoriano Carmona, Fernando Fernández-Sánchez, Douglas D. Novaes, Uniqueness and stability of limit cycles in planar piecewise linear differential systems without sliding region, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Volume 123, 2023, 107257, ISSN 1007-5704. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107257>.

- [13] Victoriano Carmona, Fernando Fernández-Sánchez, Integral characterization for Poincaré half-maps in planar linear systems, *Journal of Differential Equations*, Volume 305, 2021, Pages 319-346, ISSN 0022-0396, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.10.010>.
- [14] Ponce, E., Ros, J., Vela, E. (2013). The Focus-Center-Limit Cycle Bifurcation in Discontinuous Planar Piecewise Linear Systems Without Sliding. In: Ibáñez, S., Pérez del Río, J., Pumariño, A., Rodríguez, J. (eds) Progress and Challenges in Dynamical Systems. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 54. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-38830-9_21
- [15] Ponce, Enrique & Ros, Javier & Vela, Elísabet. (2022). Bifurcations in Continuous Piecewise Linear Differential Systems: Applications to Low-Dimensional Electronic Oscillators. [10.1007/978-3-031-21135-5](https://doi.org/10.1007/978-3-031-21135-5).
- [16] Bachmann, K.-H. (1977), Henrici, P., Applied and Computational Complex Analysis, Bd. I, 682 S., New York-London-Sydney-Toronto. John Wiley & sons. 1974. £ 13,50 .. Z. angew. Math. Mech., 57: 352-352. <https://doi.org/10.1002/zamm.19770570622>