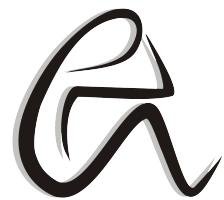




Universidad de Sevilla  
Escuela Politécnica Superior



Trabajo Fin de Grado  
Ingeniería Electrónica Industrial

*La caracterización integral de las  
semiacpliaciones de Poincaré y su aplicación a  
circuitos electrónicos: El Memristor*

**Autor:** Sergio R. Durán Martín

**Tutor:** Dr. Victoriano Carmona Centeno

**Departamento:** Matemática Aplicada II



## Resumen

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

**Palabras clave:** robótica educativa, robot modular, STM32, FreeRTOS, interfaz gráfica, impresión 3D.

## Abstract

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

**Keywords:** educational robotics, modular robot, STM32, FreeRTOS, graphic interface, 3D printing.

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Descripción del Circuito</b>	<b>5</b>
2.1	Resistencia negativa	6
2.2	Memristor	8
2.3	Variables de estado	14
2.4	Superficies invariantes	17
<b>3</b>	<b>Sistemas Dinámicos Continuos</b>	<b>21</b>
3.1	Sistemas lineales planos	21
3.2	Sistemas lineales a trozos bizonales	28
<b>4</b>	<b>Semiacpliaciones de Poincaré</b>	<b>34</b>
4.1	Caracterización integral de la semiacpliación de Poincaré	39
<b>5</b>	<b>Teoría de Bifurcaciones</b>	<b>53</b>
5.1	Análisis del punto de equilibrio	54
5.2	Ciclo Límite	56
5.3	Bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite y su cálculo mediante desarrollo en series	59
<b>6</b>	<b>Oscilación Peródica en el circuito</b>	<b>67</b>

# **Capítulo 1**

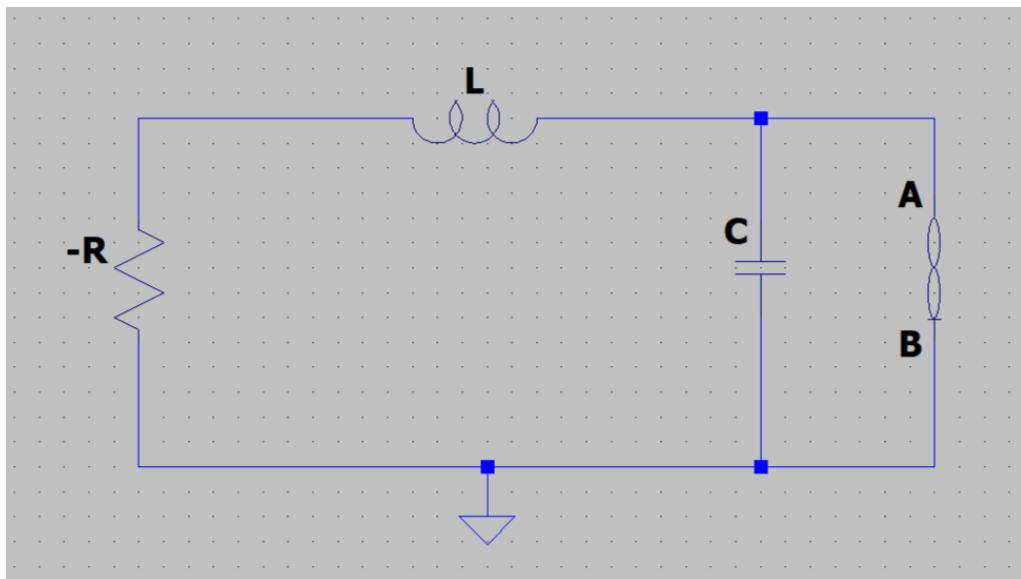
## **Introducción**

Contenido del capítulo de introducción. Contenido del capítulo 1.

# Capítulo 2

## Descripción del Circuito

El circuito que se examinará es un oscilador que incorpora una resistencia negativa, y se le ha añadido un componente que ha sido objeto de extenso estudio en tiempos recientes, el memristor. A continuación, se presenta el esquema del circuito.



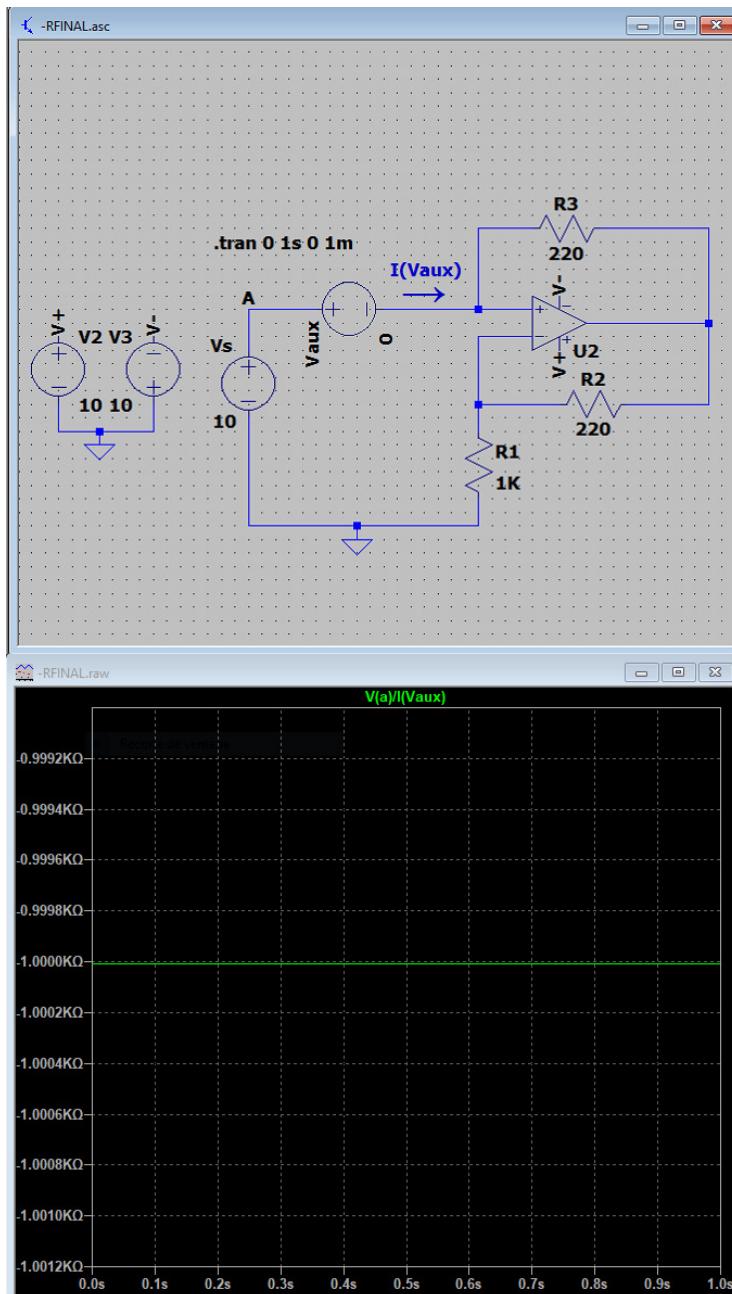
**Figura 2.1 :** Oscilador RLC con R negativa y Memristor.

Como se puede ver en la *Fig. 2.1*, no existe una fuente de señal en el circuito, y esto se debe a que el análisis hecho busca encontrar una oscilación periódica tan solo proporcionando condiciones iniciales a la bobina y el condensador, gracias al comportamiento de la resistencia negativa y del memristor.

La forma de imponer las condiciones iniciales serían las clásicas, usando fuentes de intensidad en serie y tensión en paralelo con interruptores que se abren en  $t = 0(s)$  para la bobina y el condensador respectivamente.

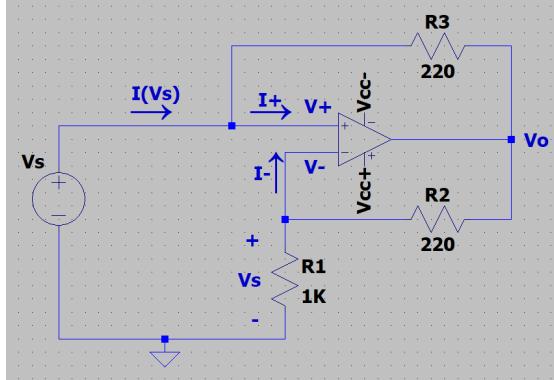
## 2.1. Resistencia negativa

Uno de los componentes clave de este circuito es la resistencia negativa, que puede construirse mediante un *Convertidor de Impedancia Negativa (NIC)*. Un NIC es un dispositivo activo, lo que significa que en lugar de disipar energía como lo haría una resistencia convencional, puede suministrar energía a un circuito, como se ilustra en la *Fig. 2.2*. En términos prácticos, un NIC se utiliza para una variedad de propósitos en circuitos eléctricos o electrónicos, como la compensación de la resistencia de carga de un sistema, la mejora de la eficiencia en la transferencia de energía y la realización de funciones específicas. En el contexto de circuitos osciladores, el NIC desempeña un papel crucial al mantener, estabilizar y controlar la frecuencia y calidad de la oscilación.



**Figura 2.2 :** Convertidor de Impedancia Negativa de -1000 Ohmios.

Una de las maneras de realizarlo es usando un amplificador operacional y 3 resistencias en la configuración que se ve en la [Fig. 2.2](#) de esta manera si elegimos las resistencias  $R_2 = R_3$ , la resistencia  $R_1$  es la que determinaría el valor de resistencia negativa, esta es la demostración:



Consideraciones para el cálculo del circuito de la [Fig. 2.3](#) con Amplificadores Operacionales:

$$V_+ = V_- \quad (2.1)$$

$$I_+ = I_- = 0 \text{ (A).} \quad (2.2)$$

**Figura 2.3 :** Parámetros circuito NIC.

Si observamos la ecuación [\(2.1\)](#), notamos que la tensión  $V_S$  recae sobre la resistencia  $R_1$  y se relaciona con la tensión de salida  $V_O$  mediante un divisor de tensión:

$$V_S = V_O \frac{R_1}{R_1 + R_2} \longrightarrow V_O = V_S \frac{R_1 + R_2}{R_1}. \quad (2.3)$$

Dada la ecuación [\(2.2\)](#), la corriente  $I(V_S)$  es la misma que fluye a través de la resistencia  $R_3$ , por lo que podemos deducir:

$$I(V_S) = \frac{V_S - V_O}{R_3}. \quad (2.4)$$

Sustituyendo la ecuación [\(2.3\)](#) en [\(2.4\)](#) y trabajando la expresión para obtener la relación entre tensión e intensidad, llegamos a:

$$I(V_S) = V_S \frac{-R_2}{R_1 R_3}. \quad (2.5)$$

Si dividimos la tensión  $V_S$  entre la intensidad  $I(V_S)$  (ecuación [\(2.5\)](#)) para obtener la impedancia de entrada del circuito, obtenemos:

$$\frac{V_S}{I(V_S)} = Z_{IN} = \frac{V_S}{V_S \frac{-R_2}{R_1 R_3}} = -R_1 \frac{R_3}{R_2}. \quad (2.6)$$

Si seleccionamos  $R_3 = R_2$  en la ecuación [\(2.6\)](#), obtendremos:

$$Z_{IN} = -R_1. \quad (2.7)$$

## 2.2. Memristor

Un componente de gran interés en este circuito es el memristor, cuya teoría fue propuesta por el científico Leon Chua en 1971 (consulta [1]). Este componente busca resolver un antiguo enigma en las relaciones entre las cuatro variables fundamentales en la teoría de circuitos: voltaje ( $v$ ), corriente ( $i$ ), carga eléctrica ( $q$ ) y flujo magnético ( $\varphi$ ). En particular, el memristor establece una relación entre la carga eléctrica y el flujo magnético de la siguiente manera (ver [2]):

$$\varphi = \varphi(q), \quad q = q(\varphi). \quad (2.8)$$

Donde la relación del voltaje y la intensidad respecto a la carga y al flujo en el tiempo es la siguiente:

$$v(t) = \frac{d\varphi}{dt}, \quad i(t) = \frac{dq}{dt}. \quad (2.9)$$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau)d\tau, \quad q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau)d\tau. \quad (2.10)$$

Derivaremos la ecuación (2.8) respecto al tiempo, y aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi(q)}{dq} \frac{dq}{dt}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.11)$$

Luego, se sustituye la relación de (2.9) en (2.11) para obtener las expresiones en (2.12):

$$v(t) = \frac{d\varphi(q)}{dq} i(t), \quad i(t) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} v(t). \quad (2.12)$$

Las dos relaciones resultantes en (2.12) se conocen como la **Memristancia**  $M(q)$  y la **Memductancia**  $W(\varphi)$ :

$$M(q) = \frac{d\varphi(q)}{dq}, \quad W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi}. \quad (2.13)$$

Por último, se presentan dos expresiones finales que describen el comportamiento del memristor:

$$\text{Memristor controlado por carga} \rightarrow v(t) = M(q) i(t). \quad (2.14)$$

$$\text{Memristor controlado por flujo} \rightarrow i(t) = W(\varphi) v(t). \quad (2.15)$$

El segundo acontecimiento de notable relevancia en relación al memristor tuvo lugar en el año 2008, cuando los laboratorios de Hewlett-Packard (HP) lograron fabricar un componente cuyo comportamiento exhibía notables similitudes con las características postuladas por Chua para el memristor. Inicialmente, el componente desarrollado por HP en 2005 había sido denominado como el “Crossbar Latch”. No obstante, no sería sino hasta 2008 que se percataron de la marcada similitud en su funcionamiento con el concepto original de memristor propuesto por Chua. La construcción de este componente resulta elegante en su simplicidad, consistiendo en dos capas superpuestas: una compuesta de dióxido de titanio puro y otra de dióxido de titanio con una deficiencia controlada de átomos de oxígeno, ambas encapsuladas entre dos electrodos de platino.

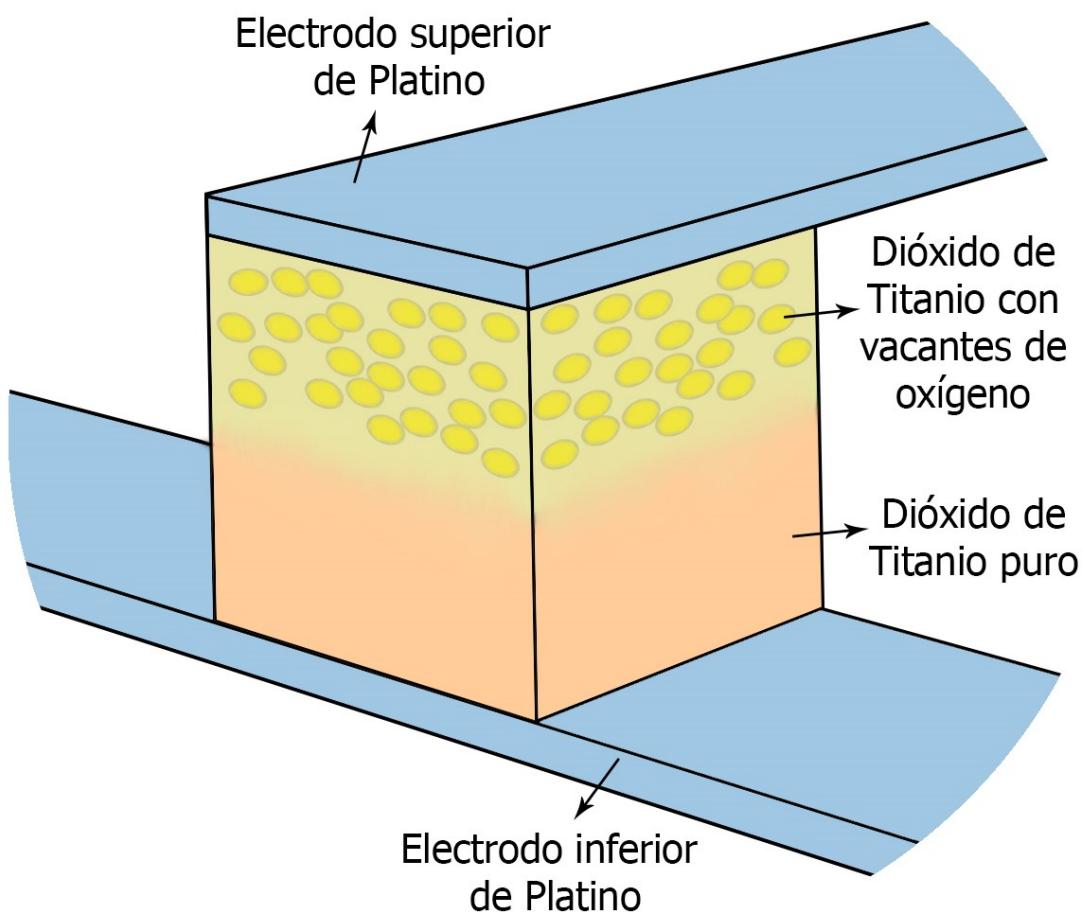


Figura 2.4 : Costrucción del memristor de HP. Ver [4].

Ahora presentaremos una serie de características del dióxido de titanio que lo convierten en un material altamente atractivo para esta aplicación:

1. **Resistencia variable:** Cuando el dióxido de titanio se dopa, su resistencia eléctrica puede cambiar en respuesta a la aplicación de una corriente o un campo eléctrico. Esto permite no solo almacenar los valores binarios típicos (1 o 0), sino también retener una gama de valores dentro de ciertos límites de operación. Este fenómeno se utiliza en las memorias ReRAM (Resistive Random-Access Memory).
2. **No volatilidad:** El dióxido de titanio puede mantener su estado de resistencia incluso cuando se interrumpe la corriente eléctrica que lo atraviesa. Esto significa que puede retener información y mantener su estado de resistencia sin requerir energía continua, lo que es fundamental para la preservación de datos.
3. **Cambios rápidos de resistencia:** Esta propiedad permite realizar operaciones de escritura y lectura de datos de manera rápida en el memristor. La velocidad de acceso es crucial para su implementación en aplicaciones de almacenamiento y procesamiento de datos.
4. **Baja potencia y tamaño compacto:** El uso eficiente de energía es otro punto fuerte del dióxido de titanio, lo que lo hace adecuado para dispositivos que operan con restricciones de potencia. Además, su tamaño compacto facilita su integración en sistemas electrónicos de diversos tamaños y aplicaciones.

La fórmula propuesta en [3] para modelar el comportamiento de este dispositivo se expresa mediante las siguientes ecuaciones:

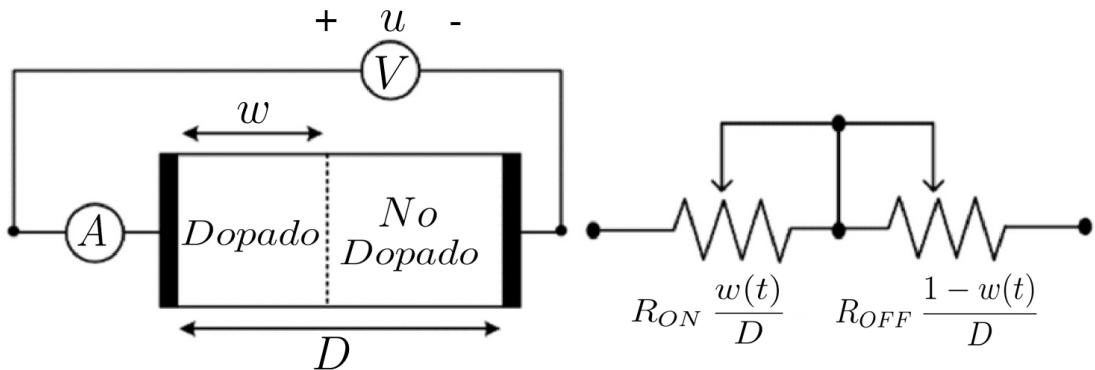
$$v(t) = \left( R_{ON} \frac{w(t)}{D} + R_{OFF} \left( 1 - \frac{w(t)}{D} \right) \right) i(t), \quad (2.16)$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = \mu_V \frac{R_{ON}}{D} q(t). \quad (2.17)$$

Integrando la ecuación (2.17) e insertándola en (2.16), teniendo en cuenta que el valor de resistencia  $R_{ON} \ll R_{OFF}$ , se obtienen las siguientes expresiones:

$$w(t) = \mu_V \frac{R_{ON}}{D} i(t), \quad (2.18)$$

$$M(q) = R_{OFF} \left( 1 - \frac{\mu_V R_{ON}}{D^2} q(t) \right). \quad (2.19)$$



**Figura 2.5 :** Esquema del memristor de HP. Ver [5].

Las ecuaciones (2.16)-(2.19) describen el comportamiento del memristor de HP, un componente fundamental en esta investigación. El esquema del memristor se muestra en la Figura 2.5.

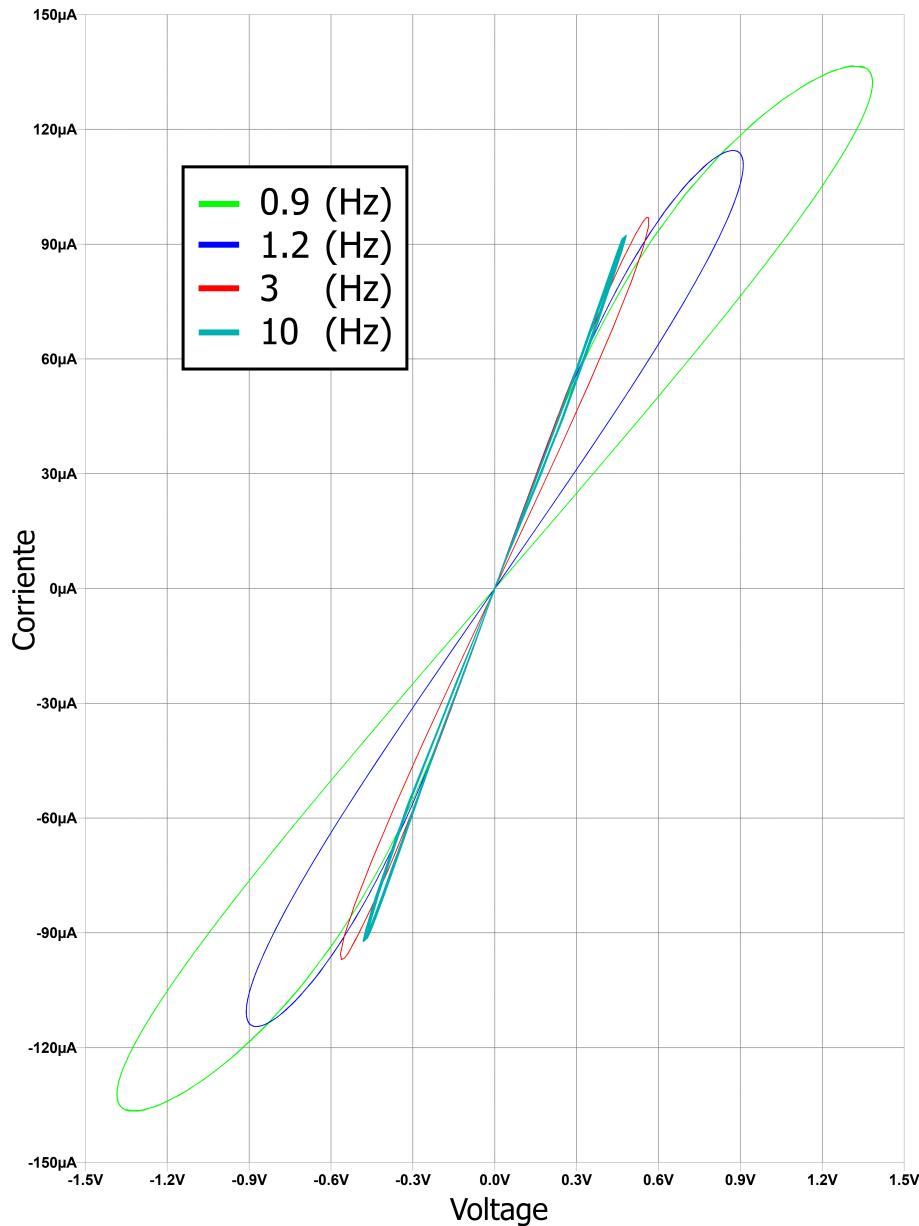
Los parámetros que intervienen en las ecuaciones [\(2.16\)-\(2.19\)](#) y que caracterizan el funcionamiento del componente son:

1.  $R_{ON}$ : Resistencia en el estado ON, que representa el valor mínimo de resistencia y es constante.
2.  $R_{OFF}$ : Resistencia en el estado OFF, que corresponde al valor máximo de resistencia y también es constante.
3.  $\mu_V$ : Movilidad iónica promedio, una constante que describe la velocidad de movimiento de las partículas iónicas en el dispositivo.
4.  $w$ : Ancho de la zona dopada, que no es constante y depende de la excitación eléctrica.
5.  $D$ : Ancho total de la lámina de dióxido de titanio, una constante que define las dimensiones físicas del dispositivo.

El funcionamiento del dispositivo es el siguiente: entre los dos electrodos de platino se encuentra una capa de dióxido de titanio puro  $TiO_2$ , que actúa como dieléctrico, y otra capa de dióxido de titanio con vacantes de oxígeno  $TiO_{2-x}$  que funciona como conductor. Las vacantes de oxígeno están cargadas positivamente, ya que la falta de átomos de oxígeno implica la pérdida de sus electrones de valencia asociados, lo que hace que el compuesto necesite atraer electrones hacia estas vacantes para mantenerse eléctricamente estable (ver [Fig. 2.4](#)).

Cuando se aplica un voltaje positivo al electrodo superior, las vacantes de oxígeno en la zona dopada son repelidas y se desplazan hacia la región de óxido de titanio puro, lo que aumenta la conductividad hasta alcanzar el valor de  $R_{ON}$ . Por otro lado, si se aplica un voltaje negativo, las vacantes de oxígeno se mueven hacia el electrodo superior, disminuyendo la conductividad hasta llegar a  $R_{OFF}$ .

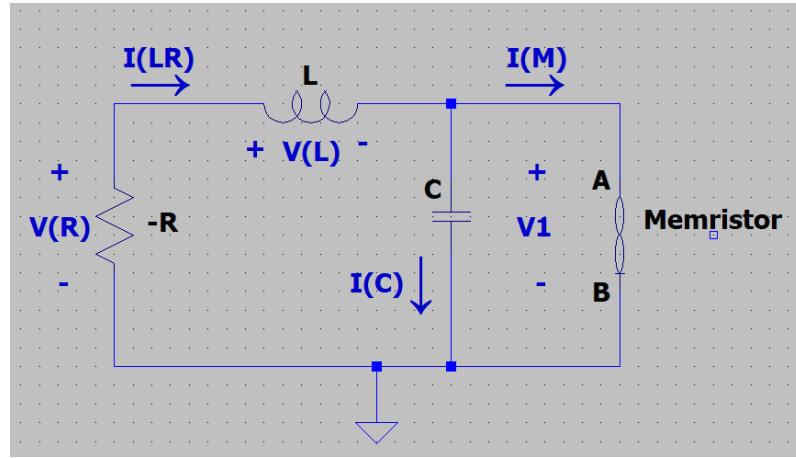
En la siguiente página, presentaremos una gráfica que muestra la respuesta del memristor ante una señal senoidal con diversas frecuencias. Esta respuesta se obtuvo utilizando un modelo de memristor de SPICE, basado en las ecuaciones de HP [\(2.16\)-\(2.19\)](#) (consulte [17]). Se puede comprobar que a medida que aumenta la frecuencia, la gráfica se asemeja cada vez más a la de una resistencia tradicional [6].



**Figura 2.6 :** Gráfica Tensión-Intensidad del Memristor de Chua ideal para una señal de entrada senoidal con varias frecuencias.

## 2.3. Variables de estado

En este trabajo realizamos un análisis matemático de una bifurcación presente en el circuito oscilador utilizando técnicas de análisis recientes. Sin embargo, antes de adentrarnos en los detalles matemáticos, es fundamental presentar el circuito y transformar sus ecuaciones eléctricas en una forma matemática que nos permita llevar a cabo un análisis exhaustivo. Comenzaremos nuestro análisis al examinar detenidamente el circuito en cuestión.



**Figura 2.7 :** Magnitudes del circuito.

Se aplican las leyes de Kirchoff al circuito de la *Fig. 2.7* y se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$i_{LR} = i_M + i_C, \quad (2.20)$$

$$v_R = v_L + v_1. \quad (2.21)$$

Reordenando estas ecuaciones, se obtiene:

$$i_C = i_{LR} - i_M, \quad (2.22)$$

$$v_L = v_R - v_1. \quad (2.23)$$

Teniendo en cuenta la relación entre la carga y el flujo con la intensidad y la tensión de las ecuaciones (2.9), así como la ecuación del memristor controlado por flujo (2.15), y aplicándolas a (2.22) y (2.23), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$C \frac{dv_1}{dt} = i_{LR} - W(\varphi) v_1, \quad (2.24)$$

$$L \frac{di_{LR}}{dt} = R i_{LR} - v_1, \quad (2.25)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = v_1. \quad (2.26)$$

En estas ecuaciones, las variables de estado seleccionadas son la intensidad ( $i_{LR}$ ) en la resistencia y la bobina, la tensión ( $v_1$ ) en el condensador y el memristor, y el flujo ( $\varphi$ ) en el memristor.

Reordenando las ecuaciones anteriores (2.24), (2.25) y (2.26), se obtiene el siguiente sistema:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{i_{LR}}{C} - W(\varphi) \frac{v_1}{C}, \quad (2.27)$$

$$\frac{di_{LR}}{dt} = \frac{R}{L} i_{LR} - \frac{v_1}{L}, \quad (2.28)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = v_1. \quad (2.29)$$

Haciendo algunos cambios a las tres anteriores ecuaciones para luego poder trabajar con las ecuaciones construimos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(y - W(z)x), \\ \frac{dy}{dt} = -\xi x + \beta y, \\ \frac{dz}{dt} = x. \end{cases} \quad (2.30)$$

Donde tenemos:

$$x = v_1, \quad y = i_{LR}, \quad z = \varphi, \quad \alpha = \frac{1}{C}, \quad \beta = \frac{R}{L}, \quad \xi = \frac{1}{L}.$$

El sistema (2.30) se puede expresar de una forma más general como sigue:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}W(z)x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \\ \frac{dz}{dt} = x. \end{cases} \quad (2.31)$$

Con:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\alpha = -\frac{1}{C}, & a_{12} &= \alpha = \frac{1}{C}, \\ a_{21} &= -\xi = -\frac{1}{L}, & a_{22} &= \beta = \frac{R}{L}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Sin embargo, aún necesitamos definir la función  $W(z)$  en el sistema (2.31). En [2], se asume que el comportamiento del memristor se puede aproximar mediante una ecuación lineal a trozos monótonamente creciente:

$$q(\varphi) = b\varphi + 0.5(a - b)(|\varphi + 1| - |\varphi - 1|). \quad (2.33)$$

donde  $a, b > 0$

Derivaremos la expresión (2.33) (recordando la ecuación (2.13)) para obtener  $W(z)$ :

$$W(z) = \frac{dq(z)}{dz} = \begin{cases} b, & z < -1, \\ a, & -1 < z < 1, \\ b, & z > 1. \end{cases} \quad (2.34)$$

Finalmente, definimos dos matrices auxiliares en el sistema (2.31) teniendo en cuenta la función  $W(z)$  (2.34)

$$A_E = \begin{pmatrix} b \cdot a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_C = \begin{pmatrix} a \cdot a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Con sus correspondientes trazas y determinantes:

$$\begin{aligned} t_E &= b \cdot a_{11} + a_{22} \\ d_E &= b \cdot a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ t_C &= a \cdot a_{11} + a_{22} \\ d_C &= a \cdot a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Con todas estas definiciones, estamos listos para continuar con el análisis. En los próximos capítulos, se describirán las técnicas utilizadas para estudiar este sistema en detalle.

## 2.4. Superficies invariantes

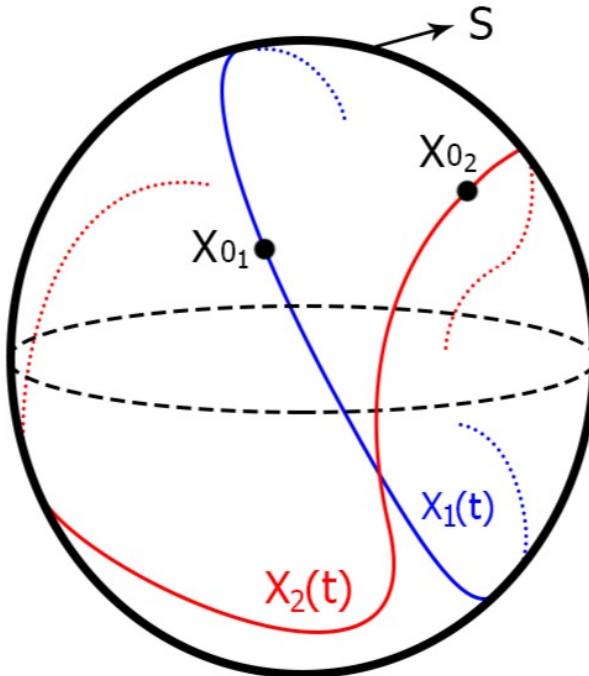
A continuación, definiremos el concepto de superficie invariante para un sistema dinámico tridimensional. Posteriormente, veremos que el sistema (2.31) posee ciertas superficies invariantes.

**Definición 2.1.** Consideremos el sistema diferencial:

$$\frac{dX}{dt} = F(X), \quad X \in \mathbb{R}^3. \quad (2.37)$$

Se dice que la superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie invariante para el sistema (2.37) si para cada  $X_0 \in S$ , la solución del sistema (2.37), con condición inicial  $X(0) = X_0$ , pertenece a la superficie  $S$  para todo  $t$ .

A modo de ejemplo, en la *Fig. 2.8* hemos representado una esfera invariante con varias órbitas de un sistema contenido en ella



**Figura 2.8 :** Esfera con dos órbitas solución  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$  con condiciones iniciales  $X_1(0) = X_{01}$  y  $X_2(0) = X_{02}$ , contenidas en ella.

Desde el Teorema 1 de [10], sabemos que existe un conjunto de superficies invariantes para el sistema (2.31). La descripción de estas superficies invariantes se detalla en el siguiente resultado. Se enunciará dicho teorema en este trabajo ya que nos será muy importante tenerlo presente.

**Teorema 2.1** (Teorema 1 de [10]). *Consideremos el sistema (2.31) con la función lineal a trozos  $q$ , dada en (2.33), y la función  $W(z)$ , dada en (2.34), siendo esta la derivada de dicha función  $q$ . Para cualquier  $h \in \mathbb{R}$ , el conjunto:*

$$S_h = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : H(x, y, z) = h\} \quad (2.38)$$

donde

$$H(x, y, z) = -a_{22}x + a_{12}y - a_{12}a_{21}z + a_{11}a_{22}q(z). \quad (2.39)$$

es una superficie invariante para el sistema (2.31).

El sistema (2.31) tiene una familia infinita de superficies invariantes en todo  $\mathbb{R}^3$ , y la dinámica de los mismos es fundamentalmente bidimensional.

Como se deduce del Teorema 2.1 la dinámica del sistema tridimensional (2.31) se puede reducir, aplicando un cambio de variable adecuado, al estudio de un sistema bidimensional. En este trabajo es necesario incluir la prueba de ello porque los cambios de variable nos permitirán obtener la solución periódica en el circuito.

**Teorema 2.2** (Teorema 2 de [10]). Consideremos el sistema (2.31), con la función  $W(z)$  dada en (2.34), y supongamos que  $a_{22} \neq 0$ . La dinámica del sistema (2.31) restringida a cada superficie invariante  $S_h$ , dada en (2.38), con  $h \in \mathbb{R}$ , es equivalente a la dinámica del sistema bidimensional:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = F(\tilde{x}) - \tilde{y}, \\ \dot{\tilde{y}} = g(\tilde{x}) - h, \end{cases} \quad (2.40)$$

donde

$$F(\tilde{x}) = \begin{cases} t_E(\tilde{x} - 1) + t_C, & \text{si } \tilde{x} > 1, \\ t_C\tilde{x}, & \text{si } |\tilde{x}| \leq 1, \\ t_E(\tilde{x} + 1) - t_C, & \text{si } \tilde{x} < -1, \end{cases} \quad (2.41)$$

$$g(\tilde{x}) = \begin{cases} d_E(\tilde{x} - 1) + d_C, & \text{si } \tilde{x} > 1, \\ d_C\tilde{x}, & \text{si } |\tilde{x}| \leq 1, \\ d_E(\tilde{x} + 1) - d_C, & \text{si } \tilde{x} < -1. \end{cases} \quad (2.42)$$

Los subíndices  $E$  y  $C$  hacen referencia a las zonas *Externas* y a la zona *Central* del sistema trizonal (2.40).

**Demostración.** Cuando  $a_{22} \neq 0$ , podemos despejar  $x$  de la ecuación  $H(x, y, z) = h$ , donde  $H$  está dada en (2.39)

$$x = \frac{a_{12}}{a_{22}}y + a_{11}q(z) - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}}z - \frac{h}{a_{22}}. \quad (2.43)$$

Sustituyendo la expresión de  $x$  anterior en la segunda y tercera ecuación de (2.31), conseguimos

$$\begin{cases} \dot{y} = \alpha_1 y - \alpha_2 z + a_{11}a_{21}q(z) - \frac{a_{21}h}{a_{22}}, \\ \dot{z} = \alpha_3 y - \alpha_4 z + a_{11}q(z) - \frac{h}{a_{22}}. \end{cases} \quad (2.44)$$

con

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a_{22}^2 + a_{12}a_{21}}{a_{22}}, & \alpha_2 &= \frac{a_{21}^2 a_{12}}{a_{22}}, \\ \alpha_3 &= \frac{a_{12}}{a_{22}}, & \alpha_4 &= \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Seguidamente, considerando el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= z, \\ \tilde{y} &= \alpha_1 z - \alpha_3 y + \frac{h}{a_{22}}\end{aligned}\tag{2.46}$$

el sistema (2.44) se puede escribir en la forma (2.40), con lo que finaliza la demostración del resultado.  $\square$

Ahora ofreceremos una breve explicación del significado de los anteriores teoremas. Supongamos que  $a_{22} \neq 0$  y tomamos una condición inicial  $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ . Esto fija la superficie invariante  $S_{h_0}$  donde está la órbita del sistema con condición inicial  $X_0$ . Obviamente el valor de  $h_0$  es  $h_0 = H(x_0, y_0, z_0)$ , con  $H$  dada en (2.39).

A partir del valor  $h = h_0$ , determinamos la solución  $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$  del sistema (2.40) con condición inicial  $\tilde{x}(0) = z_0$ ,  $\tilde{y}(0) = \alpha_1 z_0 - \alpha_3 y_0 + \frac{h_0}{a_{22}}$ . La solución  $(x(t), y(t), z(t))$  del sistema (2.31) con condición inicial  $(x_0, y_0, z_0)$  está dada por:

$$\left\{\begin{array}{l} z(t) = \tilde{x} \\ y(t) = \frac{\alpha_1 \tilde{x}(t) + \frac{h_0}{a_{22}} - \tilde{y}(t)}{\alpha_3} \\ x(t) = \frac{a_{12}}{a_{22}} \left( \frac{\alpha_1 \tilde{x}(t) + \frac{h_0}{a_{22}} - \tilde{y}(t)}{\alpha_3} \right) + a_{11} q(\tilde{x}(t)) - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{22}} \tilde{x}(t) - \frac{h_0}{a_{22}} \end{array}\right.\tag{2.47}$$

Nuestro nuevo sistema de dimensión dos tiene tres zonas como vemos en (2.40), sin embargo en este trabajo nos centraremos en dos de ellas, puesto que buscaremos oscilaciones periódicas bizonales. Se hace esta aclaración ya que parte del trabajo que faremos más adelante nos permitiría hacer el estudio de tres zonas, pero no es el objetivo de este trabajo.

# Capítulo 3

## Sistemas Dinámicos Continuos

En este capítulo, realizaremos un repaso de los sistemas dinámicos continuos lineales a trozos, ya que hemos reducido nuestro circuito a un sistema de este tipo con las ecuaciones (2.31). Ahora, lo que necesitamos es encontrar una o varias soluciones para nuestro sistema y estudiar su estabilidad. Para hacerlo, primero repasaremos los conceptos fundamentales necesarios, que servirán como base posteriormente.

### 3.1. Sistemas lineales planos

En esta sección analizaremos los sistemas dinámicos continuos de 2 ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes, ya que posteriormente describiremos nuestro circuito de esta forma. En primera instancia hay que definir lo que es un sistema dinámico continuo:

**Definición 3.1.** *Un sistema dinámico es un conjunto de ecuaciones de cambio que describen la evolución temporal de algún fenómeno, que puede ser de cualquier naturaleza (eléctrico, económico, cinegético...), de manera que el estado presente del sistema viene determinado por los estados anteriores. El estado del sistema queda descrito por sus variables de estado. Cuando la evolución se estudia considerando el tiempo como una variable continua, decimos que el sistema es continuo y para analizar este tipo de sistemas la regla determinista que lo gobierna es su sistema de ecuaciones diferenciales.*

Un sistema de este tipo tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + b_1 \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + b_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

Escribiremos el sistema (3.1) en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Se puede escribir el sistema (3.2) de forma mas simplificada:

$$\dot{X} = AX + B \quad (3.3)$$

Cuando  $B = \vec{0}$  el sistema se denomina homogéneo. Por el contrario cuando  $B \neq \vec{0}$  el sistema se denomina no homogéneo. Esto es importante saberlo pues los métodos para solucionar estos tipos de sistemas no son las mismas.

Las condiciones iniciales del sistema serán:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Escribiremos el sistema (3.4) en forma matricial:

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = X_0 \quad (3.5)$$

Al conjunto del sistema y a sus condiciones iniciales se les denomina

**Problema de Valor Inicial (PVI):**

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + B & \rightarrow \text{Sistema Diferencial (S.D.)} \\ X(t_0) = X_0 & \rightarrow \text{Condiciones Iniciales (C.I.)} \end{cases} \quad (3.6)$$

Lo primero y más importante que se debe hacer con este tipo de problemas es comprobar la existencia y unicidad de sus soluciones.

**Teorema 3.1. Existencia y unicidad**

Sean  $A$  y  $B$  continuas en un intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$ , que continene el punto  $X(t_0)$  entonces el P.V.I. tiene una única solución definida en dicho intervalo  $I$  para cualquier vector  $X_0 \in \mathbb{R}^2$ . Además, si el P.V.I. tiene coeficientes constantes en  $A$  y  $B$  la solución está definida en  $\mathbb{R}$ .

Las soluciones del sistema son un conjunto de puntos  $(x, y)$  para cada instante de tiempo que forman una curva en el plano de fases. Dichos puntos son de la forma:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Ahora lo lógico sería hablar de como resolver este tipo de problemas ya que es nuestro objetivo, pero no lo haremos, debido a que no usaremos el método tradicional de autovalores y autovectores. Para ello, vamos a utilizar otra técnica de reciente estudio con la que no hará falta realizar esto, la cual veremos más adelante.

Por último, veamos como obtener y analizar los puntos de equilibrio del Sistema lineal plano. Primero escribamos el sistema (3.1) de otra forma para ver los siguientes apartados mejor:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = S(x, y) \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = V(x, y) \end{cases} \quad (3.8)$$

**Definición 3.2.** Los puntos  $(\bar{x}, \bar{y})$  que anulan simultáneamente las funciones  $S$  y  $V$  del sistema (3.8) se denominan Puntos de Equilibrio o Críticos del sistema:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix} \\ A \bar{X} &= -b \end{aligned} \quad (3.9)$$

Si el  $\det(A) \neq 0$  de (3.9), el sistema posee un único punto de equilibrio; este punto se dice solución constante del sistema.

Antes de continuar con el análisis de los puntos de equilibrio debemos conocer que el sistema (3.8) se denomina **Autónomo** ya que la variable independiente del tiempo ( $t$ ) no aparece de manera explícita en los segundos términos de las ecuaciones.

Lo siguiente será realizar una translación del punto de equilibrio para que esté en el origen  $(0 0)^T$ , en caso de no estarlo. Para ello aplicaremos los siguientes cambios de variable:

$$\begin{cases} \tilde{X} = x - \bar{x} \\ \tilde{Y} = y - \bar{y} \end{cases} \quad (3.10)$$

Por lo que ahora tenemos:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{X}}{dt} = S(\tilde{X} - \bar{x}, \tilde{Y} - \bar{y}) \\ \frac{d\tilde{Y}}{dt} = V(\tilde{X} - \bar{x}, \tilde{Y} - \bar{y}) \end{cases} \quad (3.11)$$

Donde el punto  $(0 0)^T$  es el punto de equilibrio.

Lo que veremos a continuación es la disposición de las soluciones en torno al punto de equilibrio, y la estabilidad o no del mismo. Consideraremos el sistema autónomo lineal con punto de equilibrio en el origen que hemos obtenido tras el cambio de variable:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Como vemos, con el cambio de variable no se ha modificado la matriz  $A$  que es la que nos indicará todo respecto a la estabilidad del punto crítico. Veremos los tres casos que se estudian en este trabajo: Foco Asintóticamente Estable, Foco Asintóticamente Inestable y Centro. Pero hay muchos más y, por supuesto, combinaciones de todos ellos, lo cual complica estos problemas en gran medida.

Para saber la estabilidad de los puntos de equilibrio debemos estudiar el polinomio característico de la matriz  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ \text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} \end{cases} \quad (3.13)$$

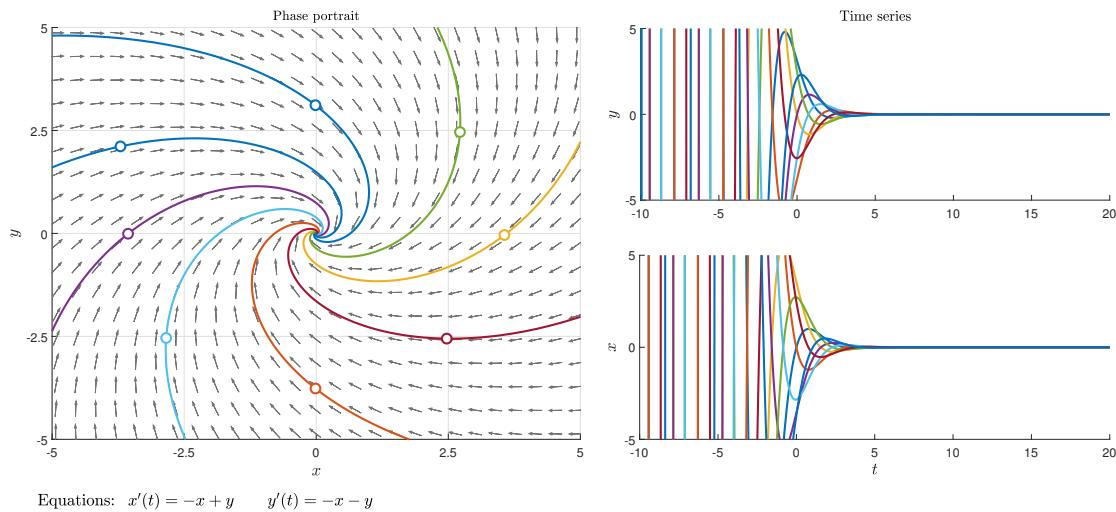
$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) \\ &\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Autovalores} \rightarrow \lambda = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A)}}{2}$$

- Foco Asintóticamente Estable

Las curvas solución tienden al punto crítico. Este caso se da para:

- $\text{tr}(A) < 0$
- $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) < 0$



**Figura 3.1 :** Foco Asintóticamente Estable visto en el plano de fases  $xy$  (izquierda) y la variacion de  $x$  e  $y$  en el tiempo (derecha).

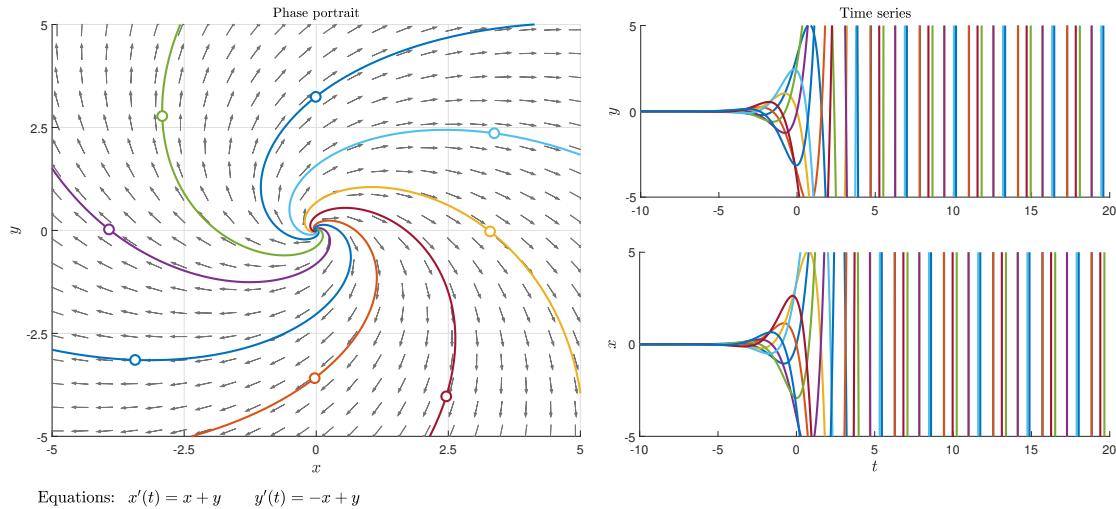
La matriz  $A$  del la [Fig. 3.1](#) es  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

- $\text{tr}(A) = -2 < 0$
- $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) = 4 - 4(2) < 0$

- Foco Asintóticamente Inestable

Las curvas solución tienden al alejarse del punto crítico. Este caso se da para:

- $\text{tr}(A) > 0$
- $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) < 0$



**Figura 3.2 :** Foco Asintóticamente Inestable visto en el plano de fases  $xy$  (izquierda) y la variacion de  $x$  e  $y$  en el tiempo (derecha).

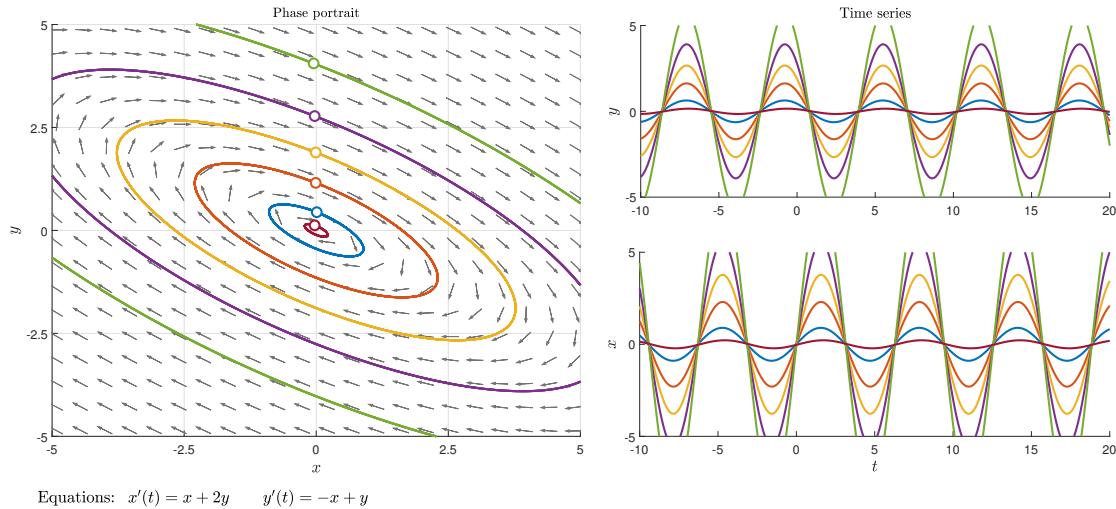
La matriz  $A$  del la [Fig. 3.2](#) es  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- $\text{tr}(A) = 2 > 0$
- $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) = 4 - 4(2) < 0$

- Centro

Las curvas solución son concéntricas al punto crítico. Este caso se da para:

- $\text{tr}(A) = 0$
- $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) < 0$



**Figura 3.3 :** Centro en el plano de fases  $xy$  (izquierda) y la variacion de  $x$  e  $y$  en el tiempo (derecha).

La matriz  $A$  del la [Fig. 3.3](#) es  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

- $\text{tr}(A) = 1 - 1 = 0$
- $\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) = 0 - 4(1) < 0$

### 3.2. Sistemas lineales a trozos bizonales

En esta sección, exploraremos el análisis de sistemas continuos dinámicos lineales divididos en dos regiones, evaluando sus propiedades en relación con la consecución de órbitas periódicas, así como el examen detallado de su amplitud y periodo.

También examinaremos el empleo de formas canónicas con el propósito de reducir el conjunto de parámetros que inciden en el sistema, aprovechando estas formas canónicas y las propiedades inherentes a ellas para analizar con mayor profundidad la oscilación periódica en nuestro circuito.

**Definición 3.3.** *Un sistema dinámico continuo lineal a trozos plano con dos zonas es un sistema de ecuaciones diferenciales con la siguiente forma:*

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = S(x) = \begin{cases} A_1x + b_1 & \text{si } x^T \cdot w + \delta \leq 0 \\ A_2x + b_2 & \text{si } x^T \cdot w + \delta < 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Donde  $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ , las matrices  $A_1$  y  $A_2$  son reales de orden 2, además  $b_1, b_2, w \in \mathbb{R}^2$  con  $w \neq \vec{0}$  y  $\delta \in \mathbb{R}$  y se satisface la condición de continuidad

$$A_1x + b_1 = A_2x + b_2 \quad (3.15)$$

Sobre la recta de separación de las dos zonas:  $x^T \cdot w + \delta = 0$

#### EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SISTEMA 3.14

Para cada  $x^0 \in \mathbb{R}^2$ , el problema de valores iniciales (3.16) tiene una solución única  $x(t)$  definida para todo  $t$  real.

$$\begin{cases} \dot{x} = S(x) \\ x(0) = x^0 \end{cases} \quad (3.16)$$

A continuación veremos la forma canónica más común para los sistemas bizonales que coloca la recta de separación en el eje de ordenadas  $x_1 = 0$ .

**Definición 3.4.** *Todo sistema dinámico continuo lineal a trozos plano con dos zonas puede escribirse de la siguiente forma:*

$$\dot{x} = S(x) = \begin{cases} B_1x + c & \text{si } x_1 \leq 0 \\ B_2x + c & \text{si } x_1 < 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Con  $x = (x_1, x_2)^T, c \in \mathbb{R}^2$  y las matrices  $B_1, B_2$  comparten sus dos últimas columnas por continuidad, esto es:

$$B_1 - B_2 = (B_1 - B_2)e_1e_1^T \quad (3.18)$$

Siendo  $e_1 = (1, 0)^T$  el primer vector de la base canónica  $\mathbb{R}^2$ . Además, por continuidad también, se puede ver que  $c_1 = c_2 = c$ .

La demostración de la anterior definición se lleva a cabo realizando una simetría para que el vector  $w$ , normal a la recta  $x^T \cdot w + \delta = 0$ , se transforme en el vector  $e_1 = (1, 0)^T$ . Esto se puede hacer usando matrices de Householder, ver [8].

Por último, con una translación hacemos que la nueva recta de separación  $x_1 = 0$  (ahora vertical) pase por el origen. Por lo que el sistema queda con la forma: **y que pasa con  $\delta$ ?**

$$\dot{x} = \begin{cases} B_1 x + c_1 & \text{si } x_1 \leq 0 \\ B_2 x + c_2 & \text{si } x_1 < 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Con  $B_1$  y  $B_2$  matrices de orden 2 y  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2$ . Nuevamente, por continuidad, se debe satisfacer:

$$B_1 x + c_1 = B_2 x + c_2 \quad \text{si } x_1 = 0 \quad (3.20)$$

Como el punto  $(0, 0)^T$  está en la recta de separación  $x_1 = 0$ , sustituyéndolo en (3.20) se tiene que  $c_1 = c_2$ , por lo que:

$$B_1 x = B_2 x \quad \text{si } x_1 = 0 \quad (3.21)$$

Como el vector  $(0, 1)^T$  está sobre la recta de separación  $x_1 = 0$  se tiene por tanto que las dos últimas columnas de  $B_1$  y  $B_2$  son iguales, sin olvidar que  $c_1 = c_2 = c$ .

Se ha reducido bastante el número de parámetros, ahora tenemos 8, donde 6 de ellos vienen de las matrices  $B_1$ ,  $B_2$  y 2 de  $c$ . Para seguir reduciendo parámetros tengamos en cuenta que estamos buscando oscilaciones y que no aparecerán en sistemas unidimensionales, por lo que el primer término de las segundas columnas de las matrices  $B_1$  y  $B_2$  no puede ser nulo (condición de observabilidad, ver [9]). Mediante el cambio de variable oportuno lo convertiremos en  $(-1)$ . En primer lugar escribimos el sistema (3.19) de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} b_{11}^1 & b_{12} \\ b_{21}^1 & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} b_{11}^2 & b_{12} \\ b_{21}^2 & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 < 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Y le aplicamos el cambio de variable (recordando que  $b_{12} \neq 0$ ):

$$X_2 = -b_{12} x_2 - c_1 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{-X_2 - c_1}{b_{12}} \quad (3.23)$$

Para el caso  $x_1 \leq 0$  del sistema (3.22) aplicando el cambio de variable (3.23):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= b_{11}^1 x_1 + b_{12} x_2 + c - 1 = b_{11}^1 x_1 + b_{12} \left( \frac{-X_2 - c_1}{b_{12}} \right) + c_1 = b_{11}^1 x_1 - X_2 \\ \dot{X}_2 &= -b_{12} \dot{x}_2 = -b_{12} (b_{21}^1 x_1 + b_{22} x_2 + c_2) \\ &= -b_{12} b_{21}^1 x_1 + b_{22} (-b_{12} x_2) - b_{12} c_2 \\ &= -b_{12} b_{21}^1 x_1 + b_{22} (X_2 + c_1) - b_{12} c_2 \\ &= -b_{12} b_{21}^1 x_1 + b_{22} X_2 + b_{22} c_1 - b_{12} c_2\end{aligned}\tag{3.24}$$

De forma análoga para  $x_1 > 0$  del sistema (3.22):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = b_{11}^2 x_1 - X_2 \\ \dot{X}_2 = -b_{12} b_{21}^2 x_1 + b_{22} X_2 + b_{22} c_1 - b_{12} c_2 \end{cases}\tag{3.25}$$

Sustituyendo (3.24) y (3.25) en el sistema (3.22), tomando  $c_{11}^i = b_{11}^i$ ,  $c_{21}^i = -b_{12} b_{21}^i$ ,  $c_{22} = b_{22}$ ,  $d_2 = b_{22} c_1 - b_{12} c_2$  y renombrando  $X_2$  como  $x_2$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} c_{11}^1 & -1 \\ c_{21}^1 & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} c_{11}^2 & -1 \\ c_{21}^2 & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 < 0 \end{cases}\tag{3.26}$$

Se ha conseguido eliminar otros dos parámetros del sistema, además solo se han realizado cambios lineales por lo que las matrices del sistema son semejantes, es decir, no hemos variado las características del sistema.

Lo que resta es pasar a la forma canónica de Liénard, lo cual se verá en el teorema de la siguiente página.

**Teorema 3.2.** Existe un cambio de variable que transforma el sistema (3.26) en la forma canónica de Liénard, sin modificar la traza y el determinante de la matriz característica del sistema ya que son invariares algebraicos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > 0 \end{cases} \quad \text{con } a \in \{-1, 0, 1\}$$
(3.27)

**Demostración.** Usando el siguiente cambio de variable:

$$X_2 = c_{22}x_1 + x_2 \quad \rightarrow \quad x_2 = X_2 - c_{22}x_1 \quad (3.28)$$

Para el caso  $x_1 \leq 0$  del sistema (3.26) aplicando el cambio de variable (3.28):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= c_{11}^1 x_1 - x_2 = c_{11}^1 x_1 - (X_2 - c_{22}x_1) = x_1(c_{11}^1 + c_{22}) - X_2 \\ \dot{X}_2 &= c_{22}\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = c_{22}(c_{11}^1 x_1 - x_2) + (c_{21}^1 x_1 + c_{22}x_2 + d_2) \\ &= c_{22}c_{11}^1 x_1 - c_{22}x_2 + c_{21}^1 x_1 + c_{22}x_2 + d_2 \\ &= x_1(c_{22}c_{11}^1 + c_{21}^1) + d_2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

De forma análoga para  $x_1 > 0$  del sistema (3.26):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(c_{11}^2 + c_{22}) - X_2 \\ \dot{X}_2 = x_1(c_{22}c_{11}^2 + c_{21}^2) + d_2 \end{cases} \quad (3.30)$$

Sustituyendo (3.29) y (3.30) en el sistema (3.26), tomando  $t = c_{11}^1 + c_{22}$ ,  $d = c_{22}c_{11}^1 + c_{21}^1$ ,  $T = c_{11}^2 + c_{22}$ ,  $D = c_{22}c_{11}^2 + c_{21}^2$  y renombrando  $X_2$  como  $x_2$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

Siendo  $t, d, T, D$  las respectivas trazas ( $t, T$ ) y determinantes ( $d, D$ ) de las matrices características de cada uno de los sistemas a la derecha y a la izquierda de la recta de separación  $x_1 = 0$ , que como ya hemos visto no hemos modificado sus propiedades, pues todos los cambios aplicados han sido lineales.

□

Por último ajustaremos el parámetro  $d_2$ . Si  $d_2 = 0$  entonces el sistema ya sería igual que (3.27) pero con el parámetro  $a = 0$ . Si  $d_2 \neq 0$  hay que aplicar el siguiente cambio:

$$X_1 = \frac{x_1}{|d_2|} \quad X_2 = \frac{x_2}{|d_2|} \quad (3.32)$$

Por lo que  $X_1$  tiene el mismo signo que  $x_1$  y la recta de separación sería  $X_1 = 0$ .

Para el caso  $X_1 \leq 0$  del sistema (3.31) aplicando el cambio de variable (3.32):

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= \frac{\dot{x}_1}{|d_2|} = \frac{tx_1 - x_2}{|d_2|} = t \frac{x_1}{|d_2|} - \frac{x_2}{|d_2|} = tX_1 - X_2 \\ \dot{X}_2 &= \frac{\dot{x}_2}{|d_2|} = \frac{dx_1 - 0 + d_2}{|d_2|} = d \frac{x_1}{|d_2|} + \frac{d_2}{|d_2|} = dX_1 + \frac{d_2}{|d_2|} \end{aligned} \quad (3.33)$$

De forma análoga para  $x_1 > 0$  del sistema (3.26):

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = TX_1 - X_2 \\ \dot{X}_2 = DX_1 + \frac{d_2}{|d_2|} \end{cases} \quad (3.34)$$

Observemos que cuando dividimos  $d_2$  entre su valor absoluto lo que estamos obteniendo es  $-1, 1, 0$  dependiendo de si  $d_2$  es negativo, positivo o cero, por lo que usaremos la función signo  $sgn$ :

$$sgn(d_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } d_2 > 0 \\ 0 & \text{si } d_2 = 0 \\ -1 & \text{si } d_2 < 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

Sustituyendo (3.33) y (3.34) en el sistema (3.31), tomando  $a = -sgn(d_2)$  **a=-d2** **eso esta bien??** y renombrando  $X_1$  como  $x_1$  y  $X_2$  como  $x_2$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

Para ubicar de una manera más gráfica lo que tenemos en (3.36):

$$\left| \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} x_1 = 0 \end{array} \right. \quad (3.37)$$

Las ecuaciones corresponden a las dos zonas izquierda y derecha de la recta de separación  $x_1 = 0$ , así que haremos unos cambios de nombre a las variables del sistema (3.36) para que los nombres sean un poco más descriptivos. Finalmente, el sistema en la forma canónica de Liénard nos queda de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} T_L & -1 \\ D_L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x \leq 0 \\ \begin{pmatrix} T_R & -1 \\ D_R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

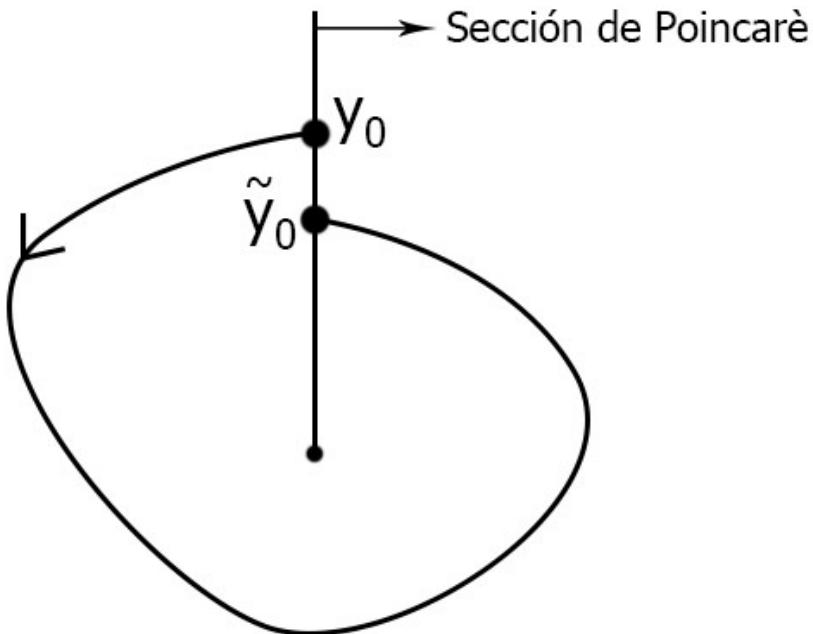
De una manera más gráfica sería:

$$\left| \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_L & -1 \\ D_L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \\ x = 0 \end{array} \right| \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_R & -1 \\ D_R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

# Capítulo 4

## Semiacplcaciones de Poincaré

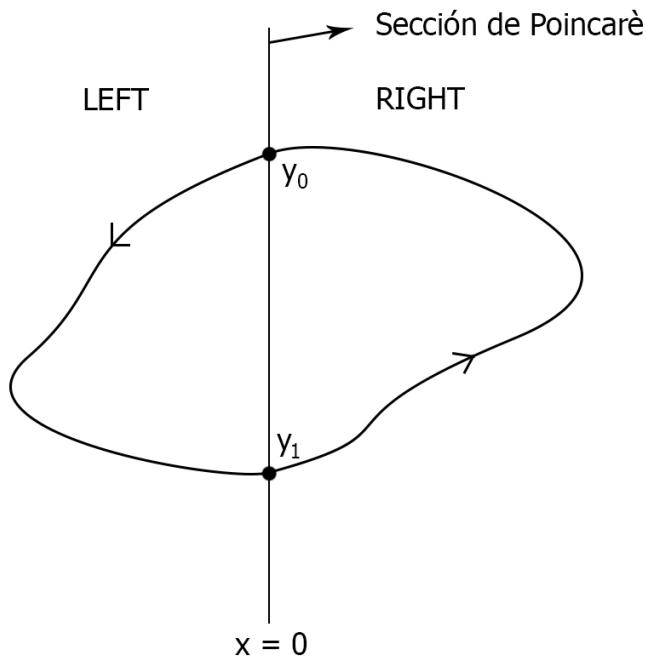
Dentro del análisis de sistemas dinámicos, la aplicación de Poincaré emerge como una herramienta de gran utilidad para investigar el comportamiento de un sistema específico. Este enfoque implica la definición de una superficie o una recta (conocida como sección de Poincaré) en el espacio de fases de nuestro sistema, de tal modo que las curva solución de nuestro sistema atraviesen esta sección, permitiéndonos así examinar el comportamiento de las trayectorias. Cabe destacar que esta aplicación se centra en los puntos de corte con la sección de Poincaré, sin dejar de considerar el análisis del comportamiento temporal y las propiedades de las trayectorias para una investigación exhaustiva.



**Figura 4.1 :** Punto  $y_0$  y su imagen  $\tilde{y}_0$  mediante la aplicación de Poincaré. Esta órbita no es periódica

Como se representa en la [Fig. 4.1](#), el enfoque de estudio implica una serie de pasos. En primer lugar, se selecciona una sección de Poincaré que corte a la curva solución, posteriormente se elige como punto inicial el punto de corte  $y_0$  de dicha curva solución con la sección de Poincaré. Luego, se procede a analizar cómo esta trayectoria evoluciona a lo largo del tiempo y si vuelve a cortar a la sección de Poincaré en un punto  $\tilde{y}_0$ . En última instancia, si la órbita vuelve a intersectar en el mismo punto, es decir,  $y_0 = \tilde{y}_0$ , podemos concluir que dicha órbita exhibe un comportamiento periódico.

En este estudio, nos enfocaremos en la semiaplicación de Poincaré, lo que significa que examinaremos una de las dos mitades de la órbita. Este enfoque se justifica ya que nuestro sistema (3.38) es un sistema a trozos, que ya presenta una división en la línea  $x = 0$ , la cual utilizaremos como nuestra sección de Poincaré. Dado que a izquierda y derecha de esta sección se presentan sistemas distintos, abordaremos su análisis de manera independiente.



**Figura 4.2 :** Semiaplicación derecha e izquierda las cuales forman una órbita periódica

En este proceso, identificaremos un punto de intersección inicial, denotado como  $y_0$ , en nuestra órbita solución en la sección de Poincaré. A continuación, procedemos a buscar el siguiente punto de intersección,  $y_1$ , empleando la semiaplicación izquierda. Posteriormente, mediante la semiaplicación derecha, evaluamos si la órbita vuelve a intersectar la sección de Poincaré en el mismo punto  $y_0$  (lo que indicaría una órbita periódica, como se ilustra en la *Fig. 4.2*), o si no lo hace (lo que indicaría una órbita no periódica).

Para una definición adecuada de la semiaplicación de Poincaré, tomaremos en consideración el sistema (3.1). Empleando las transformaciones de variable apropiadas, podemos expresarlo en la forma canónica de Liénard, como hemos analizado previamente en la Sección 3.2. En esta sección, nos enfocaremos en un único sistema, que puede ser el sistema derecho o izquierdo. Por lo tanto, en esta parte de nuestro estudio, utilizaremos la siguiente nomenclatura:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Definiendo la sección de Poincaré como  $\Sigma = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$  donde nos referiremos con  $\Sigma^L$  a la zona izquierda de la sección y  $\Sigma^R$  a la zona derecha de la sección (recordemos que los índices  $R$  y  $L$  harán alusión a las zonas derecha e izquierda). Si evaluamos la primera ecuación de (4.1) en la sección de Poincaré  $\Sigma$ , tenemos  $\dot{x}|_{\Sigma} = -y$ , pudiéndose deducir el sentido de la órbita:

- La órbita va de  $\Sigma^L$  a  $\Sigma^R$  para  $y < 0$ .
- La órbita va de  $\Sigma^R$  a  $\Sigma^L$  para  $y > 0$ .

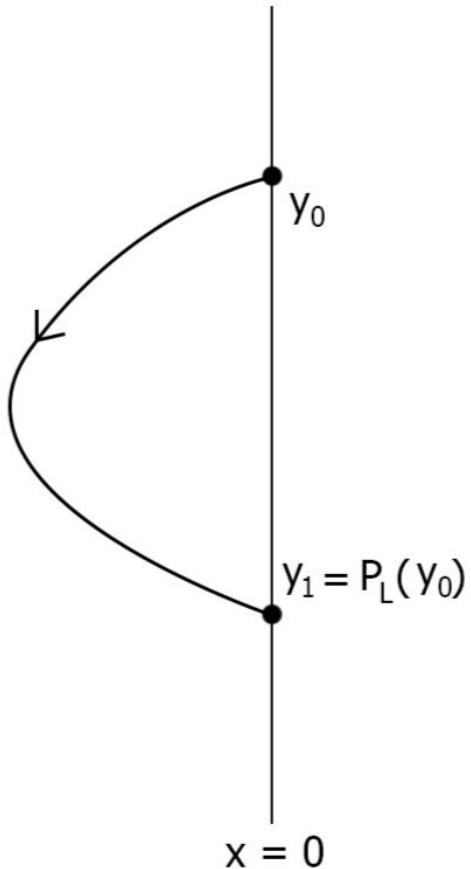
Asumiremos  $a^2 + D^2 \neq 0$ , ya que de no ser así, curva solución no cortaría de nuevo a  $\Sigma$ . Esto se puede deducir estudiando la segunda ecuación del sistema (4.1) para el caso contrario  $a = D = 0 \rightarrow \dot{y} = Dx + a = 0$ , y por lo tanto  $\dot{y}$  es constante.

Vamos a centrarnos en la zona izquierda de la sección de Poicaré  $\Sigma^L$ , la cual se define de la siguiente manera:

**Definición 4.1.** Consideremos el punto  $(0, y_0) \in \Sigma$  con  $y_0 \geq 0$ , denominaremos por  $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$  la solución del sistema (4.1), que para el instante inicial  $t = 0$  cumple que  $\phi(0) = (0, y_0)$ . Si existe un valor de tiempo  $\tau > 0$  para el que se cumple  $\phi_1(\tau) = 0$  y  $\phi_1(t) < 0$  para todo  $t \in (0, \tau)$ , decimos que la imagen de  $y_0$  mediante la semiaplicación izquierda de Poincaré  $P_L(y_0) = \phi_2(\tau) \leq 0$ . El valor de tiempo  $\tau$  se denomina semitiempo de vuelo izquierdo.

La definición de la semiaplicación de Poincaré derecha  $P_R$  puede hacerse a partir de la semiaplicación izquierda ya que el sistema (4.1) no varía sus propiedades cuando se le aplica el cambio de variable  $(x, y, a) \longleftrightarrow (-x, -y, -a)$ .

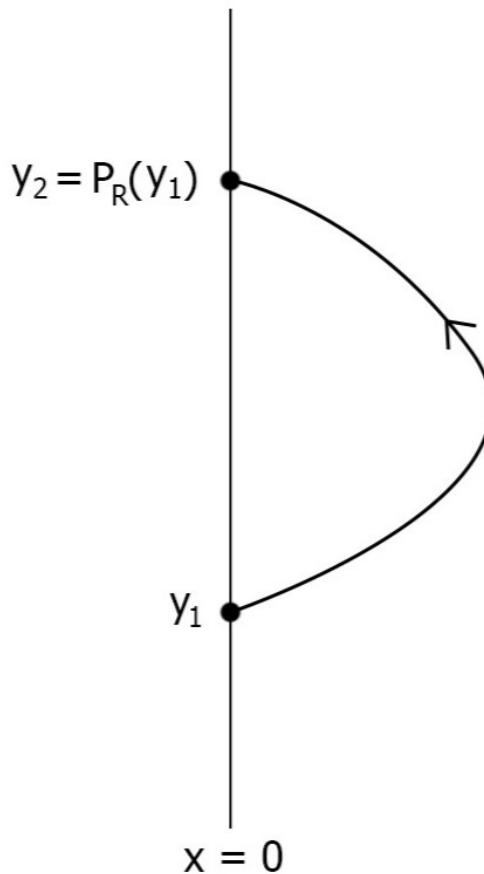
A continuación se puede ver la representación gráfica de la semiaplicación izquierda, *Fig. 4.3*, y derecha, *Fig. 4.4*, con la nomenclatura adoptada y las correspondientes definiciones de sus dominios  $\mathcal{D}$ . En [13] se puede consultar más en profundidad la definición de estos.



**Figura 4.3 :** Semiaplicación de Poincaré Izquierda

Dominio de definición de la semiaplicación izquierda:

$$\begin{aligned} P_L : \mathcal{D}_L &\subset [0, +\infty) \longrightarrow (-\infty, 0] \\ y_0 &\longrightarrow y_1 \end{aligned} \tag{4.2}$$



**Figura 4.4 :** Semiaplicación de Poincaré Derecha

Dominio de definición de la semiaplicación derecha:

$$\begin{aligned} P_R : \mathcal{D}_R &\subset (-\infty, 0] \longrightarrow [0, +\infty) \\ y_1 &\longrightarrow y_2 \end{aligned} \tag{4.3}$$

La Definición 4.1 nos invita a abordar la dinámica del sistema a través del cálculo explícito de sus soluciones, un enfoque clásico que conlleva una multiplicidad de casos debido a los espectros (conjunto de autovalores) de las matrices asociadas a cada sistema. Cada uno de estos casos requiere un análisis individual y la aplicación de diversas herramientas matemáticas específicas. Este enfoque puede dar lugar a una complicación considerable en el estudio y conducir a la obtención de resultados aparentemente divergentes para un mismo sistema, dependiendo de la elección de las herramientas matemáticas empleadas en su análisis.

Para evitar esta complejidad, optaremos por la caracterización integral de la semiaplicación de Poincaré, la cual se presenta detalladamente en la sección 4.1 y se encuentra disponible en la referencia [13]. Este enfoque nos permitirá abordar el sistema de una manera más coherente y sistemática, evitando las dificultades inherentes a la diversidad de casos que surgen en el enfoque clásico.

## 4.1. Caracterización integral de la semiaplicación de Poincaré

Antes de ver las expresiones de la Caracterización Integral se va a presentar el **Valor Principal de Cauchy** ya que se utiliza en las mismas.

**Definición 4.2.** Consideremos un intervalo  $[a, b]$  que contiene al origen y una función  $f$  continua en  $[a, b] \setminus \{0\}$ , el Valor Principal de Cauchy se define como:

$$PV \left\{ \int_a^b f(x) dx \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{-\epsilon} f(x) dx + \int_{+\epsilon}^b f(x) dx \right) \quad (4.4)$$

En [13],[16] se puede consultar más en profundidad el Valor Principal de Cauchy.

A continuación presentaremos las expresiones de la caracterización integral izquierda y derecha y algunas propiedades de las mismas.

**Caracterización integral de la semiaplicación de Poincaré izquierda:**

$$PV \left\{ \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy \right\} = \frac{k_L \pi T_L}{D_L \sqrt{4 D_L - T_L^2}} \quad (4.5)$$

donde

$$k_L = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \\ 2 & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$y_0 \in \mathcal{D}_L \quad e \quad y_1 \in P_L(\mathcal{D}_L)$$

Siendo  $P_L(\mathcal{D}_L)$  el recorrido de  $P_L$ .

**Caracterización integral de la semiaplicación de Poincaré derecha:**

$$PV \left\{ \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_R y^2 - a T_R y + a^2} dy \right\} = \frac{-k_R \pi T_R}{D_R \sqrt{4D_R - T_R^2}} \quad (4.6)$$

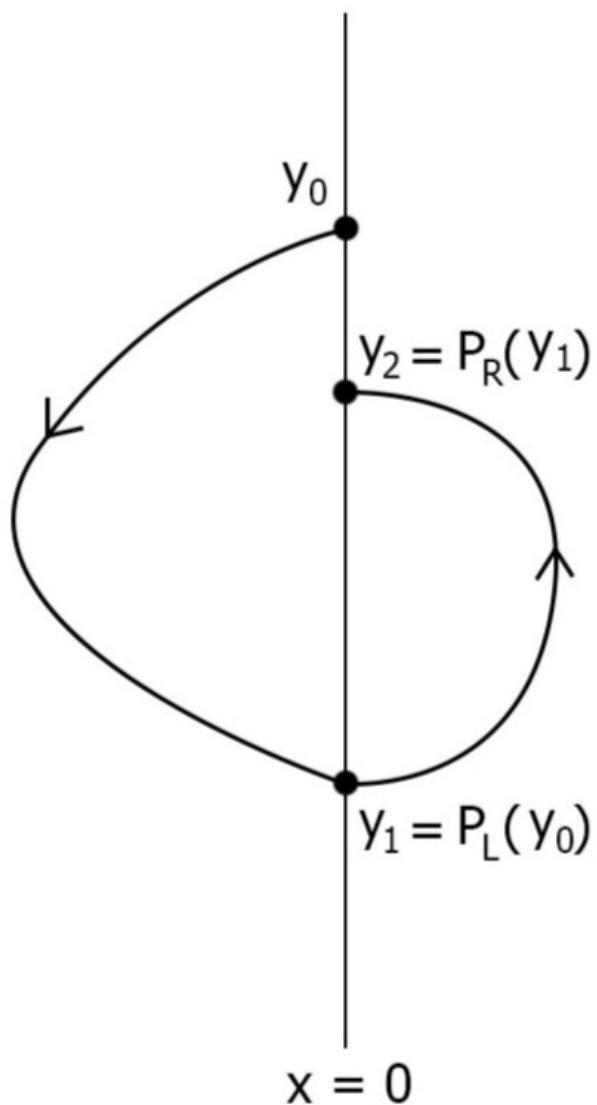
donde

$$k_R = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \\ 2 & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

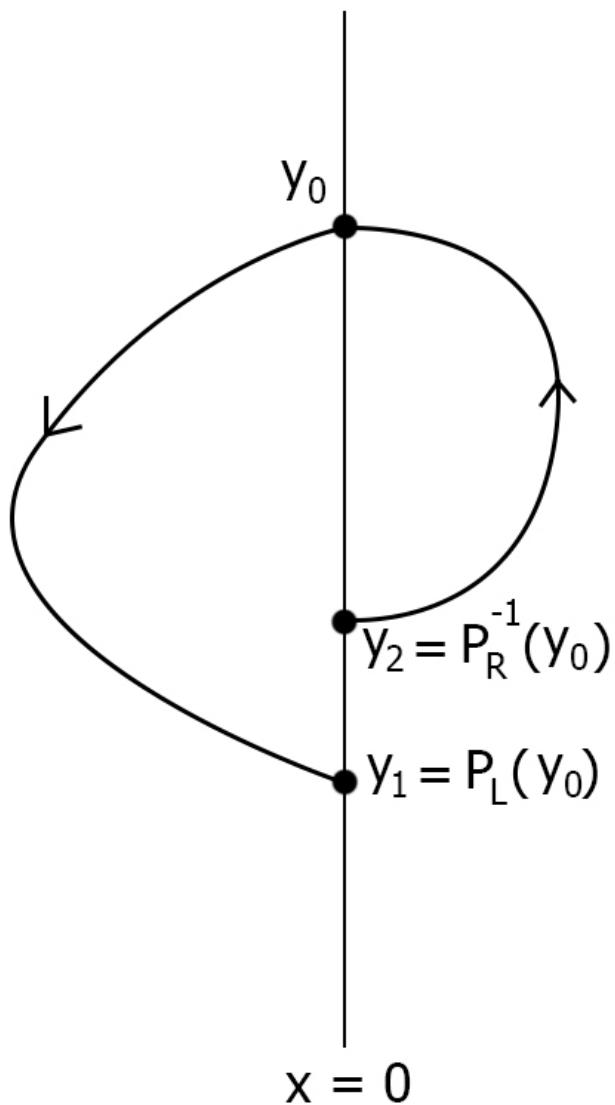
$$y_1 \in \mathcal{D}_L \quad e \quad y_1 \in P_L(\mathcal{D}_L)$$

Siendo  $P_R(\mathcal{D}_R)$  el recorrido de  $P_R$ .

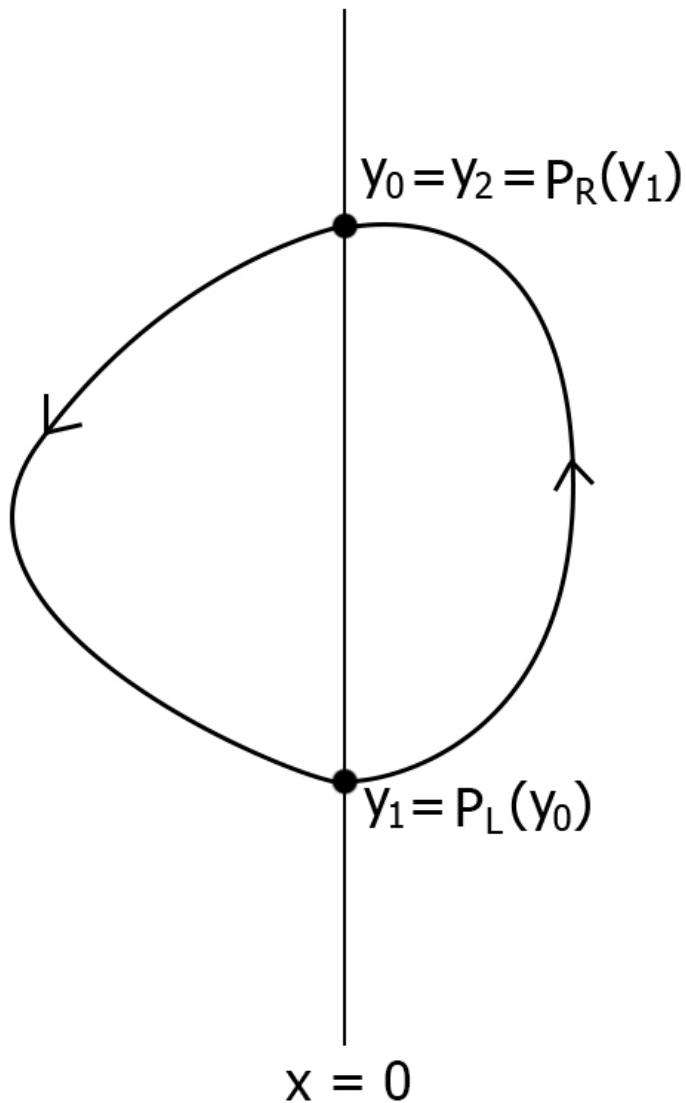
A continuación, en las siguientes páginas, observaremos ejemplos de  $P_L$ ,  $P_R$ , y  $P_R^{-1}$  que dan lugar a una órbita periódica (*Fig. 4.7*, *Fig. 4.8*) y, por otro lado, ejemplos en los que no se forma una órbita periódica (*Fig. 4.5*, *Fig. 4.6*).



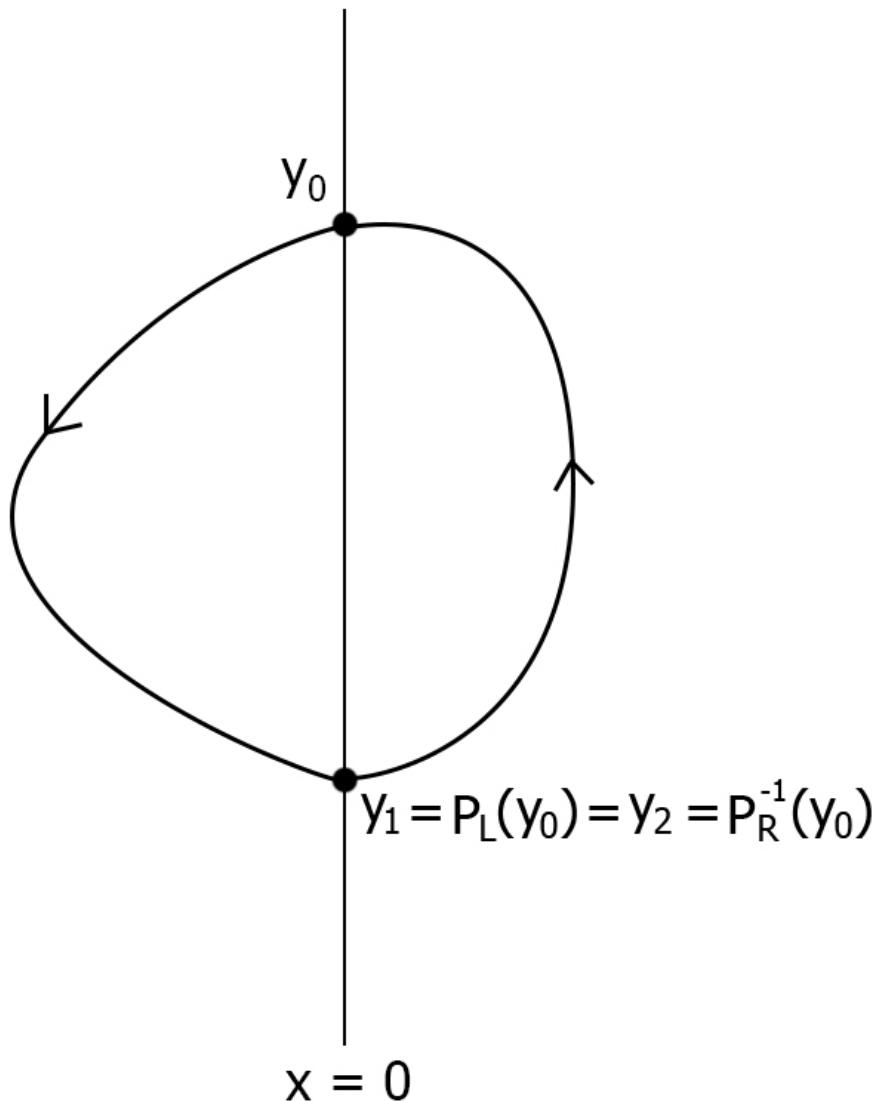
**Figura 4.5 :** Semiaplicación izquierda del punto  $y_0$  y semiaplicación derecha del punto  $y_1$  con diferentes valores  $y_0, y_2$  por lo que no se ha cerrado la órbita.



**Figura 4.6 :** Semiaplicación izquierda del punto  $y_0$  y semiaplicación inversa derecha del punto  $y_0$  con diferentes valores  $y_1, y_2$  por lo que no se ha cerrado la órbita.



**Figura 4.7 :** Semiaplicación izquierda del punto  $y_0$  y semiaplicación derecha del punto  $y_1$  con mismos valores  $y_0, y_2$  por lo que si se ha cerrado la órbita, formándose una órbita periódica.



**Figura 4.8 :** Semiaplicación izquierda del punto  $y_0$  y semiaplicación inversa derecha del punto  $y_0$  con mismos valores  $y_1, y_2$  por lo que si se ha cerrado la órbita formándose una órbita periódica.

Para encontrar una oscilación periódica debemos buscar valores  $y_0^* \in \mathcal{D}_L$ ,  $y_1^* \in \mathcal{D}_R$  tales que

$$\begin{cases} P_L(y_0^*) = y_1^*, \\ P_R(y_1^*) = y_0^*, \end{cases}$$

de manera equivalente

$$\begin{cases} P_L(y_0^*) = y_1^*, \\ P_R^{-1}(y_0^*) = y_1^*, \end{cases}$$

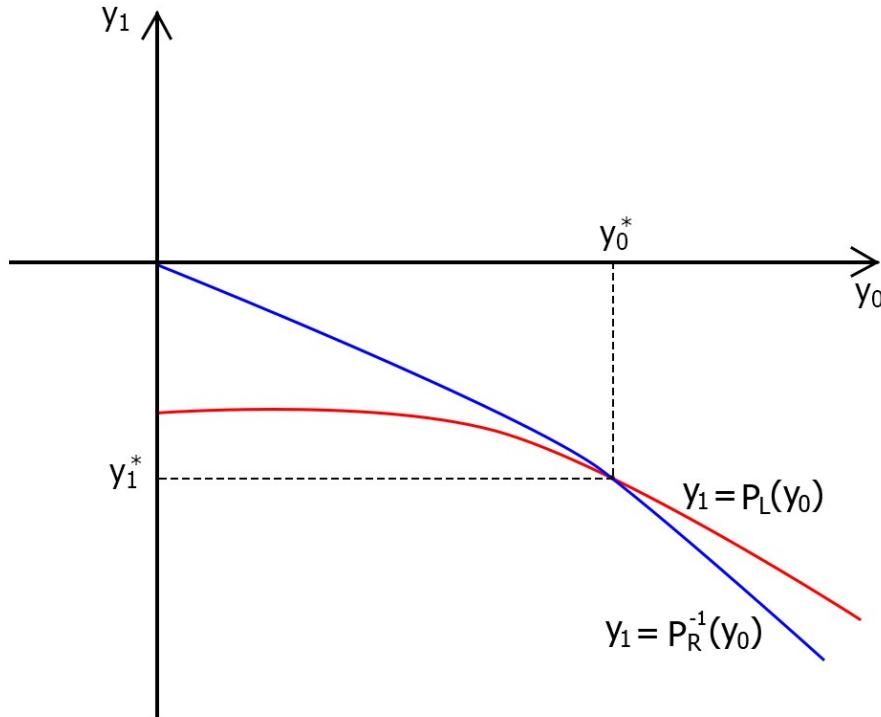
de modo que

$$P_L(y_0^*) = P_R^{-1}(y_0^*),$$

$$y_0^* \in \mathcal{D}_L \cap P_R(\mathcal{D}_R),$$

$$y_1 = P_L(y_0) \quad \text{con} \quad y_0 \in \mathcal{D}_L, \quad y_1 = P_R^{-1}(y_0) \quad \text{con} \quad y_0 \in P_R(\mathcal{D}_R).$$

Recordando de los intervalos de dominio (4.2)-(4.3) que  $y_0 \geq 0$  e  $y_1 \leq 0$ , si representamos las curvas de nivel  $y_1 = P_L(y_0)$  e  $y_1 = P_R^{-1}(y_0)$  y observamos el cuarto cuadrante veríamos una gráfica como la de la [Fig. 4.9](#).



**Figura 4.9 :** Punto de corte entre  $y_1 = P_L(y_0)$  e  $y_1 = P_R^{-1}(y_0)$

Vamos a ver un ejemplo de la Caracterización Integral de la semiaplicación de Poincaré en MATLAB para entender un poco mejor la estrategia de búsqueda de la oscilación periódica.

```
% Ejemplo 1
a=-1; % Pto. de equilibrio en zona IZQUIERDA
kL=2; kR=0; % kL,R en función del signo de aL,R
TL=0.3; TR=-0.5; % Condiciones para que exista oscilación
DL=1; DR=1; % Condiciones para que exista oscilación

y0 = 1.5; % Punto y0 > 0 de prueba

y1_L = semipoinca(kL,a,TL,DL,y0)
y1_R = semipoinca(kR,a,TR,DR,y0)

>> Ejemplo_1

y1_L =
-3.5193

y1_R =
-2.3065
```

Función usada en “Ejemplo 1”:

```
function y1 = semipoinca(k,a,T,D,y0)
% Calcula la semiaplicación en el intervalo y1 -> y0
% Valores de entrada k,a,T,D,y0.
% Dado y0 devuelve y1
inicial = -y0;
cte = (k*pi*T)/(D*sqrt(4*D-T^2));
ecuacion = @(y1) integral(@(y) (-y./((D.*y.^2)-(a.*T.*y)
+(a.^2))),y1,y0)-cte;
y1 = fzero(ecuacion,inicial);
end
```

La función *semipoingca* es la aplicación directa de la caracterización integral en MATLAB. Veamos que se está haciendo:

Primero vamos a reordenar por ejemplo la expresión de la caracterización izquierda (4.5) (con la expresión de la caracterización derecha el procedimiento es el mismo):

$$\int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy - \frac{k_L \pi T_L}{D_L \sqrt{4 D_L - T_L^2}} = 0 \quad (4.7)$$

como vemos en *semipoingca* tenemos como argumentos de entrada  $k, a, T, D, y_0$  y como argumento de salida  $y_1$ , por lo que la ecuación (4.7) se puede reducir a:

$$f(y_1) = 0 \quad (4.8)$$

finalmente la ecuación (4.8) ya está en la forma adecuada para resolverla con la función *fzero* de MATLAB, introduciendo como punto inicial  $-y_0$ . La función *fzero* resuelve de manera numérica una ecuación tipo  $f(x) = 0$  a partir de un punto inicial  $x_0$  dado.

El código de “Ejemplo 1” describe las características de los sistemas a la izquierda y a la derecha, establece un punto de prueba  $y_0 = 1.5$  y llama a la función *semipoingca* para calcular la semiaplicación izquierda y la semiaplicación inversa derecha. Como se ve obtenemos valores diferentes, de hecho la semiaplicación izquierda tiene un valor mayor que la derecha, gráficamente podría ser perfectamente lo representado en la Fig. 4.6.

Como hemos observado anteriormente, el uso de la función *fzero* requiere un punto inicial, y cuanto más cercano a la solución elijamos este punto, mayor será la velocidad de obtención de la solución y su fiabilidad. Por lo tanto, procederemos a representar de manera gráfica las semiaplicaciones izquierda y derecha en un intervalo de puntos  $y_0 \in [0, 10]$  para determinar si existe un punto de intersección que nos indique que, para un valor de  $y_0$  dado, las imágenes izquierda y derecha son idénticas.

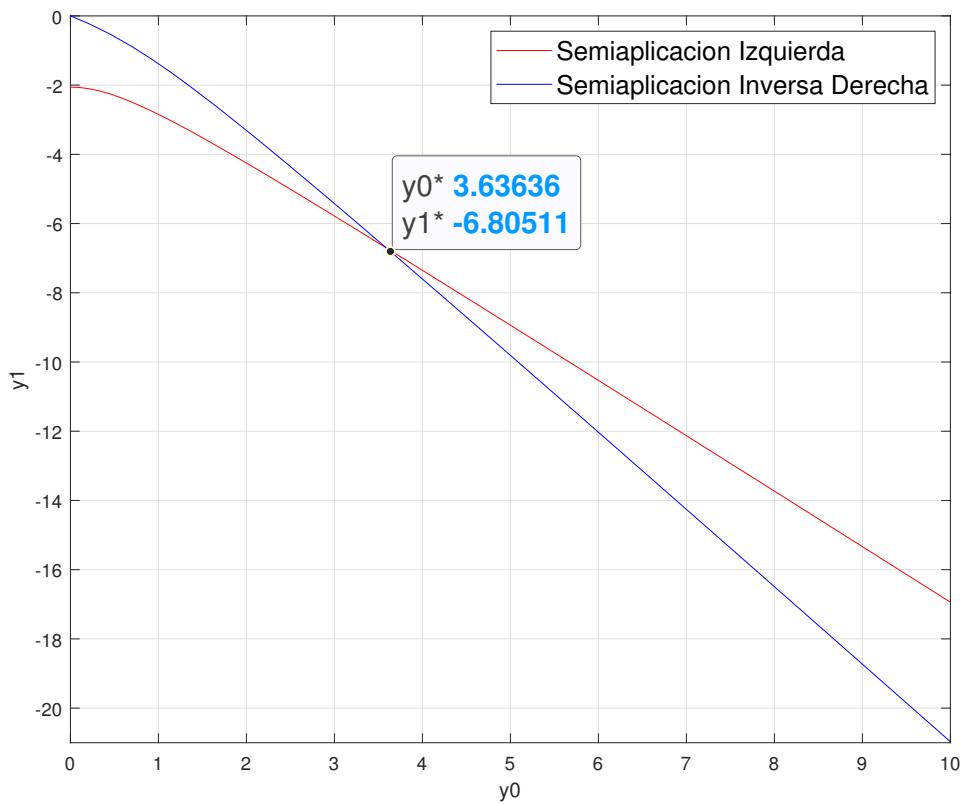
```
% Ejemplo 2
a=-1; % Pto. de equilibrio en zona IZQUIERDA
kL=2; kR=0; % kL,R en función del signo de aL,R
TL=0.3; TR=-0.5; % Condiciones para que exista oscilación
DL=1; DR=1; % Condiciones para que exista oscilación

fplot(@(y0)semipoinca(kL,a,TL,DL,y0),[0 10], 'r');
xlabel('y0');
ylabel('y1');
hold on;

fplot(@(y0)semipoinca(kR,a,TR,DR,y0),[0 10], 'b');
xlabel('y0');
ylabel('y1');
hold on;

grid on;
legend('Semiaplicacion Izquierda','Semiaplicacion Inversa
Derecha');
shg
```

En este caso, empleamos la función *fplot*, que evalúa continuamente la función para diferentes valores de  $y_0$ , abarcando un rango desde cero hasta diez como hemos definido. La representación gráfica, la cual se presenta en la siguiente página, muestra la semiaplicación izquierda en rojo y la semiaplicación inversa derecha en azul.



**Figura 4.10 :** Gráfica obtenida de la semiaplicación izquierda y la semiaplicación inversa derecha en el cuarto cuadrante de “Ejemplo 2”

Como vemos en la *Fig. 4.10* efectivamente se cortan las gráficas, simplemente pinchando más o menos en el punto de corte vemos que las semiaplicaciones izquierda y derecha tendrán la misma imagen  $y_1 \approx -6.80511$  cuando  $y_0 \approx 3.63636$ .

Una vez hemos identificado un punto cercano a la solución que buscamos, procederemos a calcularla de manera precisa utilizando *fsolve* en MATLAB. Sin embargo, antes de hacerlo, es importante asegurarse de que la función esté escrita de manera correcta en MATLAB.

```
% Ejemplo 3
a=-1; % Pto. de equilibrio en zona IZQUIERDA
kL=2; kR=0; % kL,R en funcion del signo de aL,R
TL=0.3; TR=-0.5; % Condiciones para que exista oscilacion
DL=1; DR=1; % Condiciones para que exista oscilacion

Punto_Inicial = [3.63636 -6.80511];

funcion = @(Y) fsolvepoinca(kL,kR,a,TL,TR,DL,DR,Y);

Punto_Solucion = fsolve(funcion,Punto_Inicial);

y0_Solucion = Punto_Solucion(1)
y1_Solucion = Punto_Solucion(2)

>> Ejemplo_3

Equation solved.

fsolve completed because the vector of function values is
    near zero
as measured by the value of the function tolerance, and
the problem appears regular as measured by the gradient.

<stopping criteria details>

y0_Solucion =
    3.5912

y1_Solucion =
    -6.7065
```

Funciones usadas en “Ejemplo 3”:

```

function H = fsolvepoinca(kL,kR,a,TL,TR,DL,DR,Y)
%Funciones para fsolve en la semiaplicacion de poincare
H(1)=semipoincay1y0(kL,a,TL,DL,Y);
H(2)=semipoincay1y0(kR,a,TR,DR,Y);
end

function valor = semipoincay1y0(k,a,T,D,Y)
% Resuelve Integral-cte = 0, dado y0 e y1
cte = (k*pi*T)/(D*sqrt(4*D-T^2));
y0=Y(1);
y1=Y(2);
valor = integral(@(y) (-y ./((D.*y.^2)-(a.*T.*y)+(a.^2))), ...
    y1,y0)-cte;
end

```

Efectivamente, como se puede apreciar en los resultados de “Ejemplo 3”, los valores que hemos obtenido son muy similares a los que se observaron en la *Fig. 4.10*. Por lo tanto, podemos afirmar que, para el sistema que hemos estudiado, existe una oscilación periódica que se extiende desde aproximadamente  $y_0 \simeq 3.5912$  hasta  $y_1 \simeq -6.7065$ .

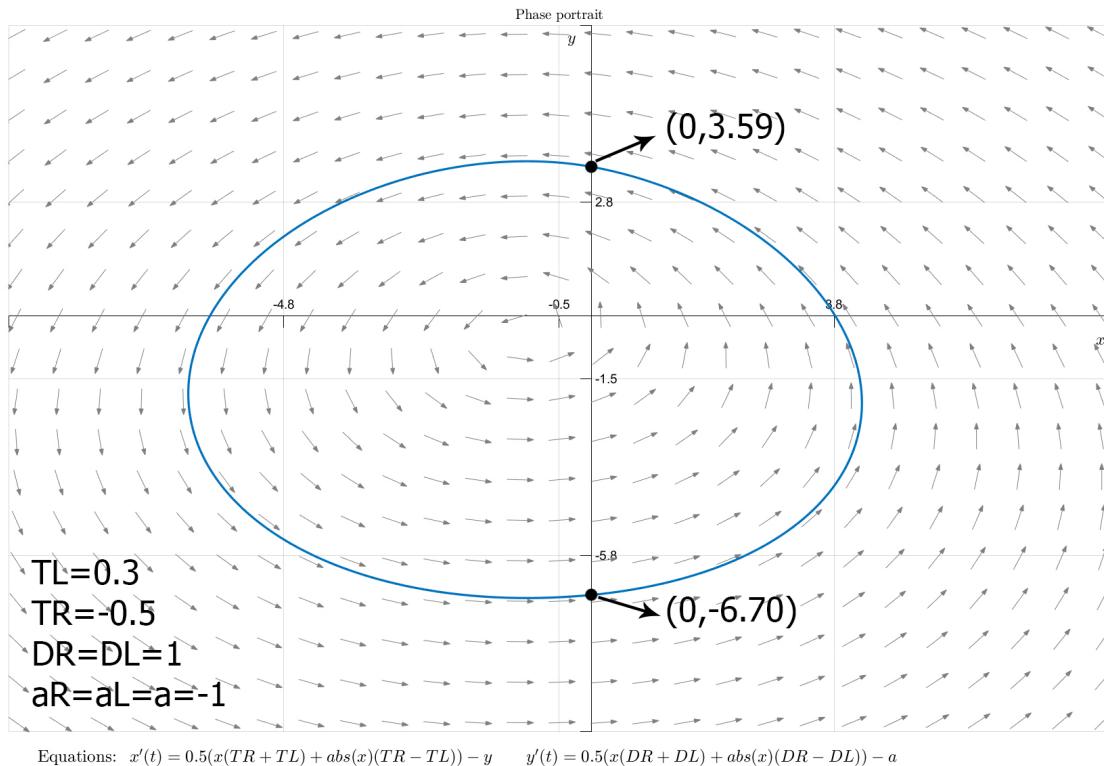
Los argumentos de entrada de la función “fsolvepoinca” incluyen los parámetros de los sistemas tanto de la derecha como de la izquierda, es decir,  $k_L$ ,  $k_R$ ,  $a_L$ ,  $a_R$ ,  $T_L$ ,  $T_R$ ,  $D_L$  y  $D_R$ . Además, se utiliza un vector de dos componentes  $Y$ , el cual contiene el **punto inicial?**. Como se puede apreciar en el código de “Ejemplo 3”, asignamos a este vector el punto de corte que aproximadamente obtuvimos a partir de la gráfica en la *Fig. 4.10*.

La función “fsolve” en el código de “Ejemplo 3” buscará el punto  $(y_0^*, y_1^*)$  en el cual las curvas de la semiaplicación izquierda y la semiaplicación inversa derecha se intersectan.

Por último, para confirmar la validez de nuestro análisis, realizaremos una simulación. Para ello, debemos reformular las ecuaciones de manera que puedan ser implementadas en MATLAB. Tenemos un sistema a trozos similar al (3.38), que podemos expresar de la siguiente manera utilizando valores absolutos. También podríamos haber utilizado la función de MATLAB que define funciones a trozos o la función “signo”.

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2} (x(T_R + T_L) + |x|(T_R - T_L)) - y, \\ \dot{y} = \frac{1}{2} (x(D_R + D_L) + |x|(D_R - D_L)) - a, \end{cases} \quad (4.9)$$

$$T_L = 0.3, \quad T_R = -0.5, \quad D_L = D_R = 1, \quad a_L = a_R = a = -1.$$



**Figura 4.11 :** Oscilación periódica que hemos determinado previamente con MATLAB

# Capítulo 5

## Teoría de Bifurcaciones

reescribir introducción hablando de bifurcaciones globales y locales, luego de los dos casos: mover punto de equilibrio y cambiar estabilidad del punto de equilibrio  
La aparición de una oscilación periódica en un sistema dinámico se da a través de lo que se conoce como bifurcaciones. En matemáticas, las bifurcaciones son eventos fundamentales que ocurren cuando variamos de manera gradual uno o varios parámetros del sistema, conocidos como parámetros de control o de bifurcación. Estos cambios pueden desencadenar bifurcaciones de diferentes tipos, incluyendo la creación o destrucción de puntos de equilibrio (bifurcación Hopf-Like) o la alteración de la estabilidad de estos puntos mediante la modificación de los parámetros de bifurcación, que es precisamente lo que abordaremos en este contexto.

En nuestro caso, nos enfocaremos en una bifurcación denominada "Foco-Centro-Ciclo Límite", la cual es provocada por la variación de la traza del sistema. Sin embargo, antes de presentar esta bifurcación, es crucial llevar a cabo un análisis detallado del punto de equilibrio y la estabilidad del sistema que estamos investigando. Asimismo, exploraremos el concepto de ciclo-límite para luego examinar cómo podemos generar esta bifurcación en nuestro circuito.

## 5.1. Análisis del punto de equilibrio

Para llevar a cabo el análisis del punto de equilibrio y de su estabilidad, recordemos primero el sistema que estamos estudiando. Se trata de un sistema dinámico, autónomo, lineal y continuo a trozos, específicamente bizonal en su forma canónica de Lienard, tal como se describe en las ecuaciones (3.38).

Podemos obtener los puntos de equilibrio de cada una de las zonas igualando a cero el sistema, por ejemplo para la zona izquierda tenemos:

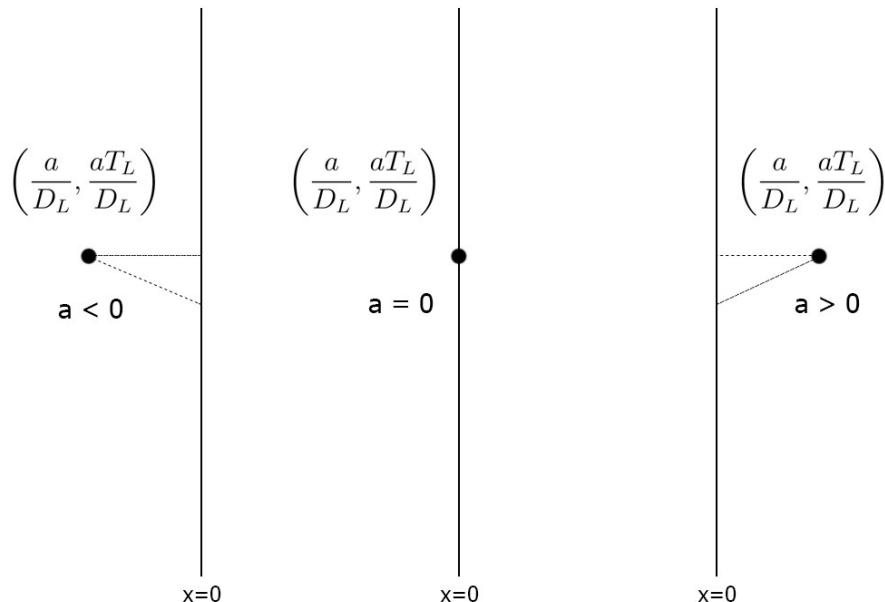
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_L & -1 \\ D_L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} T_L x - y = 0 \\ D_L x - a = 0 \end{cases} \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{a}{D_L}, \frac{aT_L}{D_L} \right) \quad \text{si } D_L \neq 0 \quad (5.1)$$

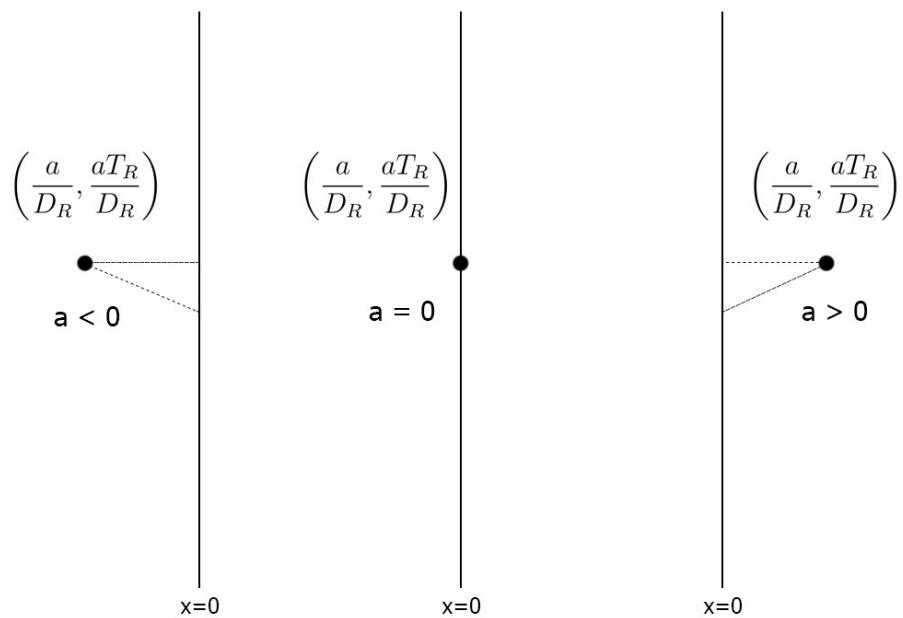
Análogamente para la zona derecha tendríamos el punto de equilibrio:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{a}{D_R}, \frac{aT_R}{D_R} \right) \quad \text{si } D_R \neq 0 \quad (5.2)$$

En las siguientes figuras veremos la representación gráfica de las posibles posiciones de los puntos de equilibrio (5.1)-(5.2) en función del signo de  $a$ .



**Figura 5.1 :** Posición del punto de equilibrio de la zona izquierda dependiendo del signo de  $a$ .



**Figura 5.2 :** Posición del punto de equilibrio de la zona derecha dependiendo del signo de  $a$ .

Aqui hablamos de los puntos de equilibrio virtuales

Una vez que hemos identificado el punto de equilibrio, podemos proceder a analizar su estabilidad, como ya lo hicimos en (3.13). Ahora, exploremos este análisis nuevamente utilizando la nueva nomenclatura que hemos adoptado. El polinomio característico de la zona izquierda se expresaría de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P_{A_L}(\lambda) &= \lambda^2 - \text{tr}(A_L)\lambda + \det(A_L) \\ &\quad \lambda^2 - T_L\lambda + D_L = 0 \\ \text{Autovalores} \rightarrow \quad \lambda &= \frac{T_L \pm \sqrt{T_L^2 - 4D_L}}{2} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Como se puede comprobar, el polinomio característico (5.3) es análogo al del sistema (3.13), el cual ya analizamos, así que estaremos buscando:

- $T_L^2 - 4D_L < 0$  por lo que  $D_L > 0$ .
- $T_L < 0$  para tener un foco asintóticamente estable.
- $T_L = 0$  para tener un centro.
- $T_L > 0$  para tener un foco asintóticamente inestable.

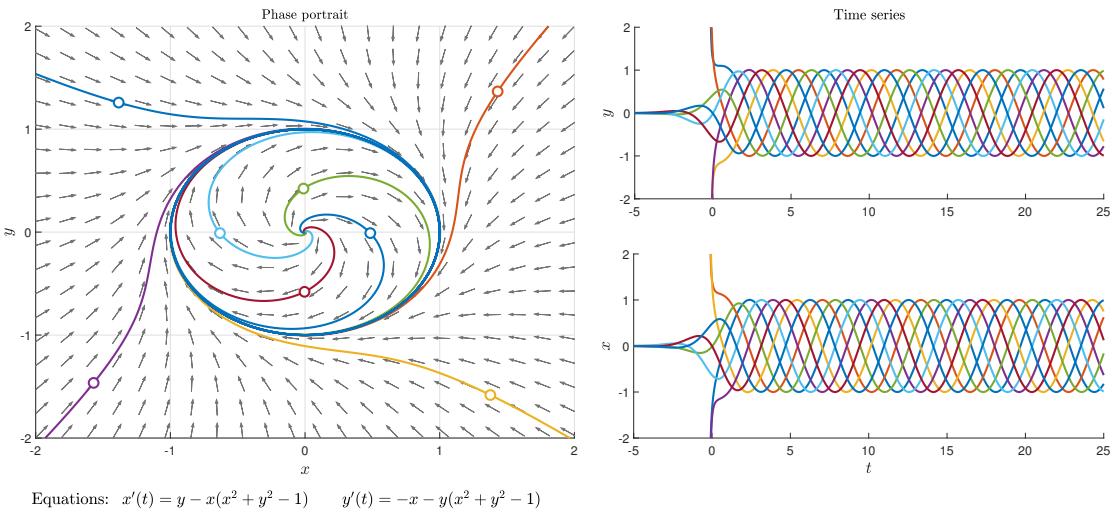
Es evidente que un cambio en la estabilidad del punto de equilibrio está directamente relacionado con una modificación en la traza, particularmente en nuestro caso, se refiere a la traza en la zona izquierda. Este ajuste en la traza de nuestro sistema se traducirá en una modificación física del valor de uno o varios componentes del circuito.

## 5.2. Ciclo Límite

El siguiente concepto crucial que debemos conocer es el de Ciclo-Límite. Un Ciclo-Límite es una solución periódica del sistema que se encuentra aislada, ya sea de manera local o global, del conjunto de otras soluciones periódicas. Al igual que los puntos de equilibrio pueden presentar diferentes niveles de estabilidad, existen varias posibles categorías de estabilidad para un ciclo límite.

- Ciclo-Límite Asintóticamente Estable

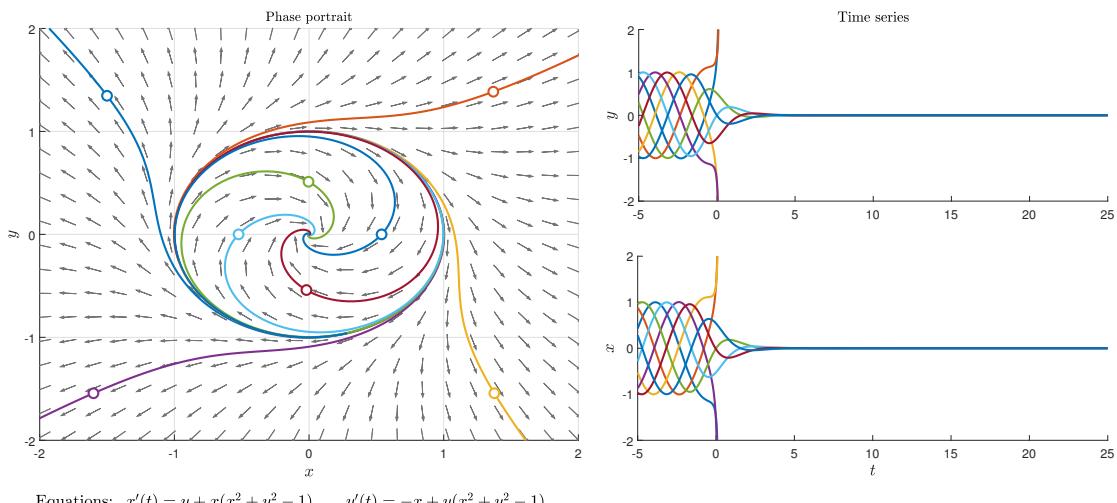
Independientemente de si seleccionamos las condiciones iniciales dentro o fuera del Ciclo-Límite, las trayectorias de las soluciones convergen hacia dicho Ciclo-Límite.



**Figura 5.3 :** Ciclo-Límite Asintóticamente Estable con sentido horario de giro

- Ciclo-Límite Asintóticamente Inestable

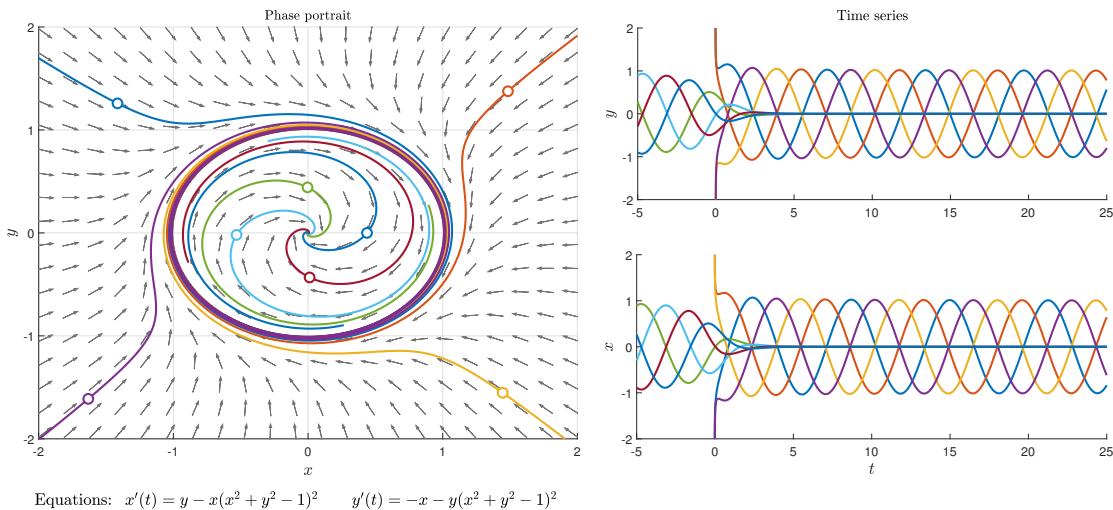
Si optamos por condiciones iniciales dentro del Ciclo-Límite, las trayectorias de las soluciones convergen hacia cero. En cambio, si seleccionamos condiciones iniciales fuera del Ciclo-Límite, las trayectorias de las soluciones tienden hacia el infinito.



**Figura 5.4 :** Ciclo-Límite Asintóticamente Inestable con sentido horario de giro

- Ciclo-Límite Semi Asintóticamente Estable

Si elegimos las condiciones iniciales dentro del Ciclo-Límite, las trayectorias de las soluciones convergen hacia cero. En contraste, si elegimos condiciones iniciales fuera del Ciclo-Límite, las trayectorias de las soluciones se dirigen hacia el Ciclo-Límite.



**Figura 5.5 :** Ciclo-Límite Semi Asintóticamente Estable con sentido horario de giro

El Ciclo-Límite de mayor interés para nosotros es el estable, dado que, sin importar dónde seleccionemos las condiciones iniciales, siempre convergeremos hacia la oscilación periódica. Además, en caso de que nuestro sistema sufra alguna perturbación que lo aleje de la oscilación periódica, este tiende a regresar y restablecer dicha oscilación.

### 5.3. Bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite y su cálculo mediante desarrollo en series

El estudio de los Ciclos-Límites ha sido históricamente realizado de manera específica para cada sistema. Por lo general, este proceso implica investigar el punto de equilibrio y su estabilidad, analizar si existe una oscilación periódica y finalmente verificar que esta oscilación periódica esté aislada, lo cual puede ser un desafío. En nuestro caso, no es necesario realizar este tipo de análisis exhaustivo debido a que hemos sido capaces de reformular nuestro sistema (2.30) en la forma (2.40) y, posteriormente, en la forma (3.38). Existen trabajos previos que han abordado el análisis de sistemas similares y han confirmado la existencia de la bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite en tales sistemas. Estos trabajos se pueden consultar en las referencias [10], el Capítulo que comienza en la página 335 de [14] y las Secciones 8.1 y 3.6 de [15], específicamente el Teorema 3.27 de este último. Aunque en esos trabajos se ha realizado un análisis convencional del problema, nosotros aplicaremos la Caracterización Integral que hemos explorado previamente. Además, incorporaremos algunos conceptos que se discuten en esos trabajos, como la selección de un parámetro de bifurcación, puntos de equilibrio virtuales y los requisitos que los parámetros del sistema deben cumplir. Mediante el cumplimiento de estos requisitos en los parámetros del sistema, los cuales se detallarán más adelante, podremos lograr un cambio en la estabilidad del punto de equilibrio, pasando de Foco Asintóticamente Estable a Centro y, finalmente, a Foco Asintóticamente Inestable. Este proceso nos llevará a obtener el Ciclo-Límite, lo que representa nuestra oscilación periódica.

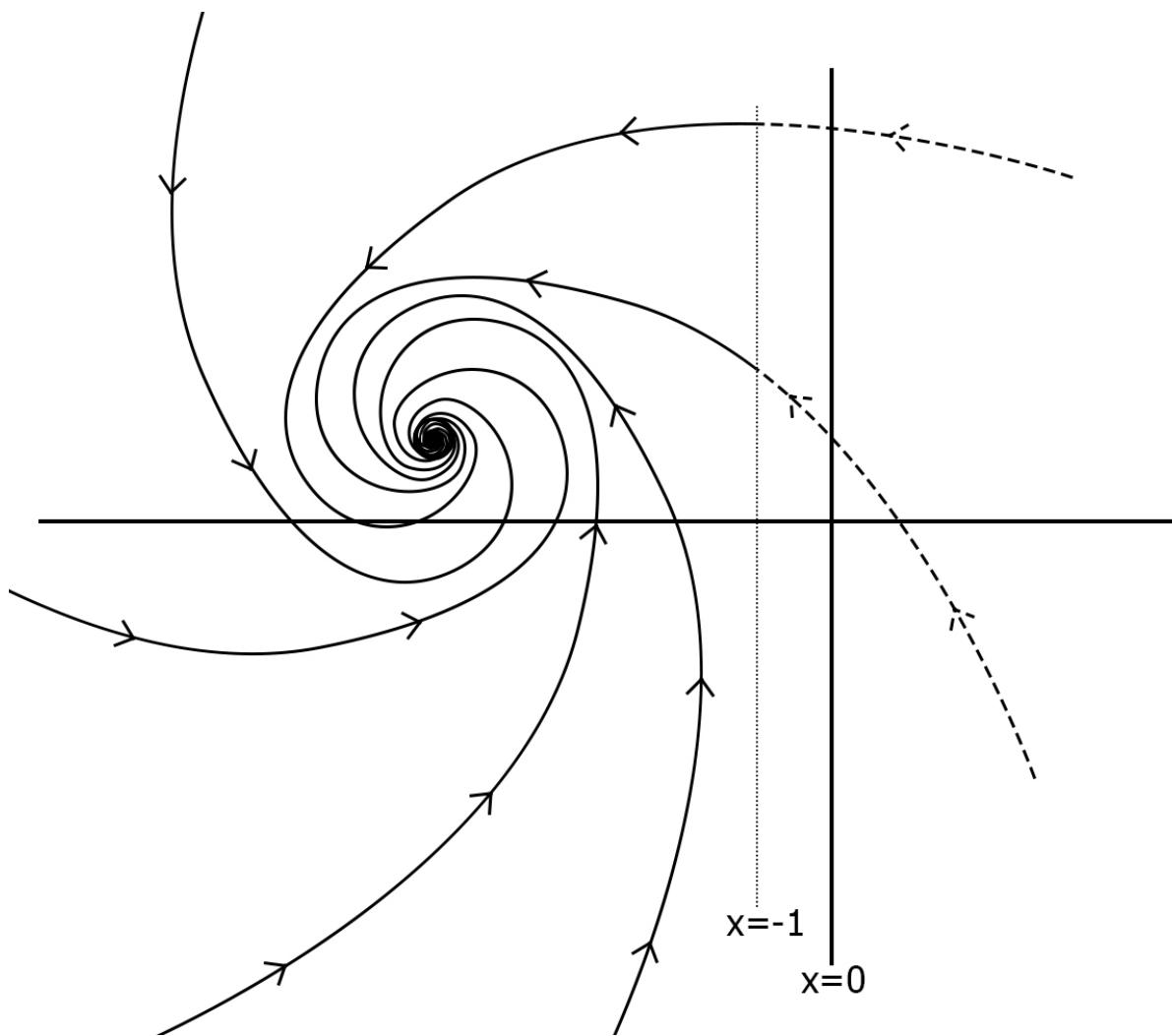
Vamos a reescribir el Teorema 3.27 de [15] pero adaptando la nomenclatura a la de nuestro estudio

**Teorema 5.1.** *Considerando el sistema (3.38), donde tomamos  $T_L$  como parámetro de bifurcación (esto es, suponemos que el resto de parámetros permanecen fijos), elegimos  $a < 0$  y  $D_L > 0$ . El sistema experimenta una bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite al pasar  $T_L$  por el valor cero. Es decir, de la configuración de Centro para  $T_L = 0$ , ver Fig. 5.7, se produce un Ciclo-Límite (que nace de la órbita periódica del Centro que es tangente a la sección de Poincaré) cuando  $T_L T_R < 0$  y  $|T_L|$  es lo suficientemente pequeño. El Ciclo-Límite que nace es Asintóticamente Estable si  $T_L > 0$ , ver Fig. 5.3, e Inestable cuando  $T_L < 0$ , ver Fig. 5.4.*

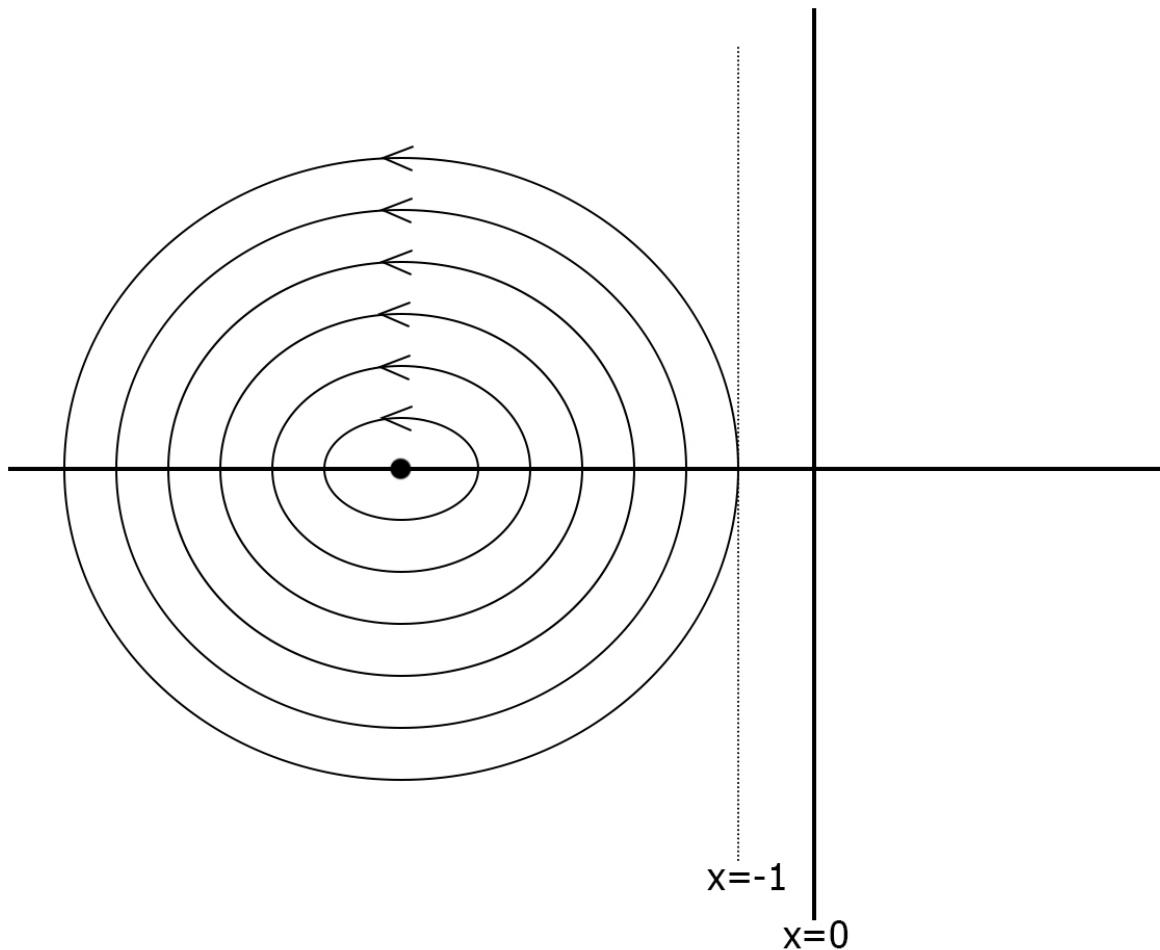
Veamos las condiciones para que se deben cumplir en nuestras ecuaciones y sus consecuencias para que se cumpla el Teorema 5.1 en nuestro sistema (3.38):

- $a_R = a_L = a < 0$  para que el punto de equilibrio de la zona Izquierda esté contenido en la zona  $x < 0$ , ver Fig. 5.1, y que el posible punto de equilibrio de la zona Derecha tambien lo esté (punto de quilibrio virtual).
- Ya que  $a_L < 0$  y queremos que el polinomio característico tenga raices imaginarias para tener una configuración de foco en nuestro punto de equilibrio, debemos tener  $D_L > 0$ , ver (5.3) y (5.1).
- Como hemos establecido  $a_R < 0$ , el posible punto de equilibrio de la zona Derecha estaría ubicado en la zona  $x < 0$ , ver (5.2), por ello podemos elegir:
  - No hay punto de equilibrio  $\rightarrow D_R = 0$
  - Si hay punto de equilibrio y es virtual  $\rightarrow D_R \neq 0$
- Nuestro parámetro de bifurcación será  $T_L$ , por ello lo haremos variar de negativo a positivo haciendolo pasar por cero,  $T_L < 0 \rightarrow T_L = 0 \rightarrow T_L > 0$  y siempre para un valor pequeño de  $|T_L|$ . Lo hacemos de esta manera para que el Ciclo-Límite que obtengamos sea Estable.
- Tenemos que  $T_L T_R < 0$  con  $T_L > 0$ , por ello  $T_R < 0$ .

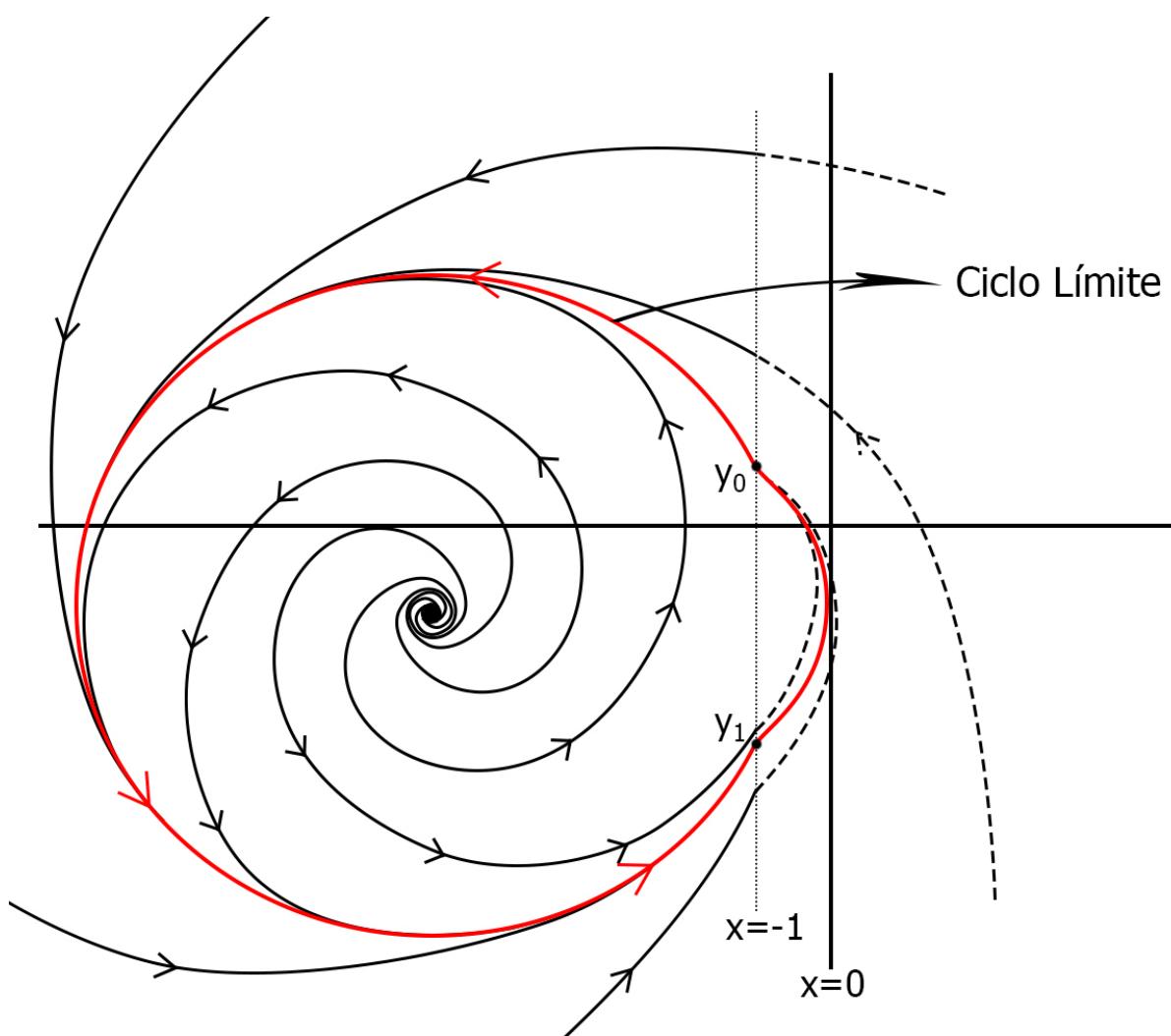
En las siguientes figuras veremos gráficamente como se produce la bifurcacion tomando como parámetro de control  $T_L$ .



**Figura 5.6 :** Foco Asintóticamente Estable con sentido antihorario de giro y con la Sección de Poincaré en  $x = -1$



**Figura 5.7 :** Centro con sentido con sentido antihorario de giro y con la Sección de Poincaré en  $x = -1$



**Figura 5.8 :** Ciclo-Límite Asintóticamente Estable con sentido antihorario de giro y con la Sección de Poincaré en  $x = -1$

Para la demostración del Teorema 5.1 haremos uso principalmente de la Caracterización Integral de la semiaplicación de Poincaré, los desarrollos en series de MacLaurin y el Teorema de la Función Implícita, este último aún no lo hemos presentado.

**Teorema 5.2** (Función Implícita). *Supongamos que  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  cuyas derivadas parciales existen y son continuas, con  $f(x_0, y_0) = 0$ .*

*Si  $\partial f / \partial y \neq 0$ , entonces existe una función  $g$  definida en un intervalo abierto  $I$  que contiene a  $x_0$ , de forma que  $y_0 = g(x_0)$  y además*

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in I$$

*Es más,  $g$  es derivable y con derivada continua en  $I$ .*

Ahora veremos la demostración del Teorema 5.1.

**Demostación.** Supongamos que nuestro sistema (3.38) posee una órbita periódica como la de la Fig. 4.8, queremos calcular los puntos  $y_0, y_1$  que cierran dicha órbita, para ello haremos uso de la semiaplicación Izquierda y Derecha, (4.5)-(4.6). Si la órbita es cerrada y continua podemos formar el sistema **enfatizar en lo de la continuidad, cuando hablo de que todo este estudio es para un desarrollo local?** al final cuando ya haya usado los desarrollos en series y el teorema de la función implícita?

$$\begin{cases} PV \left\{ \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy \right\} = \frac{k_L \pi T_L}{D_L \sqrt{4 D_L - T_L^2}} \\ PV \left\{ \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_R y^2 - a T_R y + a^2} dy \right\} = \frac{-k_R \pi T_R}{D_L \sqrt{4 D_L - T_L^2}} \end{cases} \quad (5.4)$$

Recordemos del Teorema 5.1 que son constantes en nuestro sistema  $D_L, D_R, a, k_L, k_R, T_R$ , con  $a < 0$  por lo que  $k_L$  y  $k_R$  serían  $k_L = 2$  y  $k_R = 0$ . Luego, en (5.4) tenemos

$$\begin{cases} \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy - \frac{k_L \pi T_L}{D_L \sqrt{4 D_L - T_L^2}} = 0 \\ \int_{y_1}^{y_0} \frac{-y}{D_R y^2 - a T_R y + a^2} dy = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\begin{cases} F_1(y_0, y_1, T_L) = 0 \\ F_1(y_0, y_1) = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

En (5.6) tenemos un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas, por lo que el objetivo será llegar a un sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas,  $y_0$  y  $T_L$ . Para ello primero definiremos  $y_1 = f_2(y_0)$  y luego  $y_0 = f_1(T_L)$ . Parte de este procedimiento se realiza en [11], debido a su extensión y complejidad queda fuera de los márgenes de este trabajo, por ello vamos a exponer los resultados directamente

Como se ha dicho el primer objetivo es pasar de  $F_2 = (y_0, y_1) \rightarrow y_1 = f_2(y_0)$ . Esto se realiza en la Proposición 3.1 de [11] mediante un desarrollo en series de MacLaurin, obtendiéndose:

$$y_1 = -y_0 - \frac{2T_R}{3a}y_0^2 - \frac{4T_R^2}{9a^2}y_0^3 + \dots \quad (5.7)$$

Ahora podemos escribir la primera expresión de (5.5) de la siguiente manera

$$\int_{-y_0 - \frac{2T_R}{3a}y_0^2 + \dots}^{y_0} \frac{-y}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy - \frac{k_L \pi T_L}{D_L \sqrt{4 D_L - T_L^2}} = 0 \quad (5.8)$$

$$\tilde{F}_1(y_0, T_L) = 0$$

Comprobemos haciendo uso del Teorema 5.2 si existe de manera local alguna función que nos permita definir  $y_0 = f_1(T_L)$ . Cuando se realizan las derivadas parciales de  $\tilde{F}_1(y_0, T_L) = 0$  obtenemos:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_0} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_1}{\partial T_L} = \frac{k_L \pi}{2 D_L^{3/2}} \quad (5.9)$$

Como la derivada parcial de la función  $\tilde{F}_1$  respecto  $y_0$  es cero no podemos expresar  $y_0 = f_1(T_L)$ , pero como la derivada parcial de la función  $\tilde{F}_1$  respecto  $T_L$  es distinto de cero, eso significa que existe una única función que nos permite definir  $T_L = f_1(y_0)$  de manera local. Esta función se puede calcular haciendo un desarrollo en series de MacLaurin de (5.8), obteniéndose:

$$T_L = \frac{2 D_L^{3/2} T_R}{3 a_L^2 a_R \pi} y_0^3 + \frac{2 D_L^{3/2} T_R^2}{9 a_L^2 a_R^2 \pi} y_0^4 - \dots \quad (5.10)$$

Realizando una inversión de la serie anterior podemos finalmente definir  $y_0 = f_1(T_L)$ :

$$\begin{aligned} y_0^3 &\simeq \left( \frac{3 a_L^2 a_R \pi}{2 D_L^{3/2} T_R} \right) \cdot (T_L) + \dots \\ y_0 &\simeq \left( \frac{3 a_L^2 a_R \pi}{2 D_L^{3/2} T_R} \right)^{1/3} \cdot (T_L)^{1/3} + \dots \quad \text{para } T_R \neq 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Las expresiones (5.7) y (5.11) son las que usaremos más adelante para calcular los puntos  $y_0, y_1$ . Con esto queda finalizada la Demostración 5.3.

□

Se puede calcular el periodo de la oscilación mediante la obtención de los semitiempos de vuelo izquierdo y derecho, nuevamente la obtención de estas expresiones se escapa de los objetivos de este trabajo por lo que únicamente las presentaremos. Se puede consultar el Teorema 19 de [13] para profundizar más en este apartado.

Definiremos el periodo de la oscilación  $T_P$  como la suma del semitiempo de vuelo izquierdo  $\tau_L$  y el semitiempo de vuelo derecho  $\tau_R$ . A continuación veremos las expresiones de los semitiempos de vuelo presentadas en [13].

Semitiempo de vuelo izquierdo

$$\tau_L = \frac{4\pi}{D_L \sqrt{4D_L^2 - T_L^2}} + \int_{y_1}^{y_0} \frac{a_L}{D_L y^2 - a T_L y + a^2} dy \quad (5.12)$$

Semitiempo de vuelo derecho

$$\tau_R = \int_{y_1}^{y_0} \frac{-a_R}{D_R y^2 - a T_R y + a^2} dy \quad (5.13)$$

Recordemos que tenemos fijos los parámetros  $D_L, D_R, a, T_R$ , por lo que las anteriores expresiones (5.12)-(5.13) dependen únicamente de  $y_0$  e  $y_1$ . Como ya hemos visto en la Demostración 5.3 podemos escribir  $y_1 = f(y_0)$  e  $y_0 = f(T_L)$ , por lo que las expresiones (5.12)-(5.13) tan solo dependerán de  $T_L$ . A continuación presentaremos el desarrollo en series que hemos calculado para cada semitiempo de vuelo, donde hemos sustituido  $y_1$  por la expresión en función de  $y_0$  que vimos en (5.7):

$$\tau_L = \frac{4\pi}{D_L \sqrt{4D_L^2 - T_L^2}} + \frac{2y_0}{a_L} - \frac{2T_R y_0^2}{3a_L a_R} + \frac{(4a_L^2 T_R^2 + 6a_R(a_L T_R T_L + a_R(-D_L + T_L^2)))y_0^3}{9a_R^2 a_L^3} \quad (5.14)$$

$$\tau_R = -\frac{2y_0}{a_R} + \frac{2T_R y_0^2}{3a_R^2} + \frac{2(3D_R - 8T_R^2)y_0^3}{9a_R^3} \quad (5.15)$$

Sumando los semitiempos anteriores obtenemos el periodo:

$$T_P = \tau_L + \tau_R = \frac{4\pi}{D_L \sqrt{4D_L^2 - T_L^2}} + \frac{2(D_R - D_L - 2T_R^2 + T_R T_L + T_L^2)y_0^3}{a_L^3} \quad (5.16)$$

# Capítulo 6

## Oscilación Peródica en el circuito

Ya hemos visto las herramientas matemáticas necesarias, la forma en que debemos describir nuestro circuito y las condiciones para obtener la bifurcación que nos proporcione la oscilación periódica que estamos buscando, en este capítulo se va a poner todo ello en práctica.

Lo primero es obtener las ecuaciones diferenciales del circuito y decidir cuáles serán nuestras variables de estado, esto se hizo en [\(2.24\)-\(2.25\)-\(2.26\)](#) y se establecieron como variables de estado:

- Tensión en el condensador y el memristor:  $x = v_1$
- Intensidad en la bobina y la resistencia negativa:  $y = i_{LR}$
- Flujo en el memristor:  $z = \varphi$

Seguidamente se reordenan los coeficientes del anterior sistema para poder trabajar mas comodamente, llegando al sistema tridimensional [\(2.31\)](#), con la función  $W(z)$  [\(2.34\)](#).

A continuación, gracias a las superficies invariantes [\(2.38\)](#) existentes en el sistema, podemos pasar de estudiar el sistema tridimensional [\(2.31\)](#) a uno equivalente bidimesional trizonal en forma canónica de Lienard [\(2.40\)](#), con las rectas de separación en  $\tilde{x} = \pm 1$ .

De este último sistema trizonal [\(2.40\)](#) nos fijaremos únicamente en dos de sus zonas, ya que la oscilación que se está tratando de obtener es bizona, por lo que nos fijaremos por ejemplo en las zonas a la izquierda y a la derecha de la recta de separación  $\tilde{x} = -1$ .

$$\left| \begin{array}{l} \begin{cases} \dot{x} = t_E(x+1) - t_C - y \\ \dot{y} = d_E(x+1) - d_C - h \end{cases} \\ x = -1 \end{array} \right| \quad \begin{cases} \dot{x} = t_C x - y \\ \dot{y} = d_C x - h \end{cases} \quad (6.1)$$

Pero antes de continuar debemos hacer una translación de la recta de separación  $x = -1$  a la recta  $x = 0$  ya que esta es una condición fundamental para el resto de herramientas que hemos presentado.

Aplicaremos a (6.1) el primer cambio de variable:

$$X = x + 1 \quad \rightarrow \quad x = X - 1 \quad y \quad \dot{X} = x \quad (6.2)$$

$$\left| \begin{array}{l} \begin{cases} \dot{X} = t_E X - t_C - y \\ \dot{y} = d_E X - d_C - h \end{cases} \\ X = 0 \end{array} \right| \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = t_C X - t_C - y \\ \dot{y} = d_C X - d_C - h \end{array} \right. \quad (6.3)$$

Aplicaremos a (6.3) el segundo cambio de variable:

$$Y = y + t_C \quad \rightarrow \quad y = Y - t_C \quad e \quad \dot{Y} = y \quad (6.4)$$

$$\left| \begin{array}{l} \begin{cases} \dot{X} = t_E X - Y \\ \dot{Y} = d_E X - d_C - h \end{cases} \\ X = 0 \end{array} \right| \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = t_C X - Y \\ \dot{Y} = d_C X - d_C - h \end{array} \right. \quad (6.5)$$

Por lo que tenemos

$$\left| \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_E & -1 \\ d_E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ d_C + h \end{pmatrix} \\ X = 0 \end{array} \right| \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_C & -1 \\ d_C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ d_C + h \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (6.6)$$

Como se puede comprobar el sistema (6.6) es equivalente al sistema en forma canónica de Liénard (3.38) que vimos a final de la Sección 3.2, por lo que todo el análisis posterior que hicimos para un sistema tipo (3.38) lo podremos aplicar a nuestro sistema (6.6). Los parámetros del sistema en relación a nuestro circuito son

$$\begin{aligned}
 T_L &= t_E = b \cdot a_{11} + a_{22} = \frac{-b}{C} + \frac{R}{L} \\
 D_L &= d_E = b \cdot a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \frac{-b}{C} \frac{R}{L} - \frac{-1}{L} \frac{1}{C} = \frac{-bR}{CL} + \frac{1}{CL} \\
 T_R &= t_C = a \cdot a_{11} + a_{22} = \frac{-a}{C} + \frac{R}{L} \\
 D_R &= d_C = a \cdot a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \frac{-a}{C} \frac{R}{L} - \frac{-1}{L} \frac{1}{C} = \frac{-aR}{CL} + \frac{1}{CL} \\
 a &= d_C + h = a \cdot a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} + h = \frac{-aR}{CL} + \frac{1}{CL} + h
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

El siguiente paso es recordar las condiciones que se estudiaron en el Teorema 5.1 para que se produzca la bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite y ajustar dichas condiciones con un parámetro del circuito, este será la resistencia negativa. Es decir, modificando la resistencia del circuito haremos que se produzca el cambio en la traza y por tanto el cambio en la estabilidad del punto de equilibrio.

- Condición I

$$a = d_C + h < 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-aR}{CL} + \frac{1}{CL} + h < 0,$$

$R > \frac{1}{a} + \frac{CL}{a} h.$

(6.8)

- Condición II

$$D_L > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-bR}{CL} + \frac{1}{CL} > 0,$$

$R < \frac{1}{b}.$

(6.9)

- Condición III

$$T_R < 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-a}{C} + \frac{R}{L} < 0,$$

$R < a \frac{L}{C}.$

(6.10)

- Condición IV

$$T_L = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-b}{C} + \frac{R}{L} = 0,$$

$T_L \begin{cases} > 0 & \text{para } R > b \frac{L}{C} \\ = 0 & \text{para } R = b \frac{L}{C} \\ < 0 & \text{para } R < b \frac{L}{C} \end{cases}$

(6.11)

Ahora ajustaremos los parámetros  $a, b, h, R, L, C$  para que las cuatro condiciones anteriores se cumplan simultáneamente

De las condiciones III y IV obtenemos la relación entre  $a$  y  $b$ :

$$a \frac{L}{C} > R = b \frac{L}{C} \quad \rightarrow \quad a > b$$

$$\text{Elegiremos } \begin{cases} a = 0.2 \\ b = 0.01 \end{cases} \quad (6.12)$$

Comprobemos la condición II:

$$R < \frac{1}{b} = \frac{1}{0.01} \quad \rightarrow \quad R < 100 \quad (6.13)$$

Ahora se establecerá el valor de  $R$  límite, para que se produzca el cambio en la traza izquierda  $T_L < 0 \rightarrow T_L = 0 \rightarrow T_L > 0$ , con la condición IV. Haremos que el cambio se produzca para  $R = 1$  y comprobaremos la relación entre  $L$  y  $C$  que obtendremos tras ello:

$$\text{Establecemos} \quad \rightarrow \quad R = 1$$

$$\text{Condición IV} \quad \rightarrow \quad C = 0.01L$$

$$\text{Elegiremos} \quad \rightarrow \quad C = 100 \cdot 10^{-3}(F), \quad L = 10(H).$$

A continuación comprobemos la condición I para establecer el valor de  $h$ :

$$\begin{aligned} R &> \frac{1}{a} + \frac{CL}{a} h \\ R &> \frac{1}{0.2} + \frac{100 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{0.2} h \\ R &> 5 + 5h \end{aligned}$$

$$\text{Por lo que } h < 0, \quad \text{Escogeremos } h = -1.$$

$$R > 5 + 5(-1) = 0$$

Por último comprobemos la condición III:

$$R < a \frac{L}{C} \quad \rightarrow \quad R < 0.2 \frac{10}{100 \cdot 10^{-3}} = 20$$

A modo de resumen, estos serán los valores elegidos para los parámetros de nuestro sistema (6.6):

- $a = 0.2$
- $b = 0.01$
- $h = -1$
- $C = 100 \cdot 10^{-3} (F)$
- $L = 10 (H)$
- $R \geq 1 (\Omega)$

Se han elegido los anteriores valores para una mayor comodidad a la hora de hacer los cálculos pero obviamente no son valores comerciales de  $R, L, C$ . Si se quisiera implementar el circuito habría que realizar un trabajo más extenso con las inecuaciones anteriores para ajustar los parámetros a valores comerciales, además no se podría elegir libremente los valores de  $a$  y  $b$  ya que estos dependen de la curva característica flujo-carga del memristor.

A continuación pasemos a comprobar con MATLAB que efectivamente aparece el Ciclo-Límite en nuestro circuito con los valores anteriores.

Calcularemos  $y_0$  e  $y_1$  con las expresiones (5.7)-(5.11). En la expresión (5.7) donde apareca  $y_0$  lo sustituiremos por (5.11), de esta manera tendremos tanto  $y_0$  como  $y_1$  en función de  $T_L$ , esto lo haremos ya que como vimos en (6.7) podemos escribir  $T_L = f(b, C, L, R)$  y ya dijimos anteriormente que solo variaremos  $R$  del circuito, por lo que de esta manera conseguimos tener  $y_0$ ,  $y_1$  y  $T_L$  en función de  $R$ .

```
% Ejemplo 4

% Valores del circuito
a = 0.2; R = 1.3;
b = 0.01; L = 10;
h = -1; C = 0.1;

% dc = (1-a*R)/(C*L)      % c: Central , Derecha
% de = (1-b*R)/(C*L)      % e: Exterior , Izquierda
% tc = (-a/C)+(R/L)
% te = (-b/C)+(R/L)
% as = dc + h

Y0 = @(R) (((3*pi*((1-a*R)/(C*L))+h)^3)/(2*((-a/C)+(R/L))) * ((1-b*R)/(C*L))^(3/2)) * ((-b/C)+(R/L))^(1/3);

Y1 = @(R) (-((((3*pi*((1-a*R)/(C*L))+h)^3)/(2*((-a/C)+(R/L))) * ((-b/C)+(R/L))^(1/3))) - (((2*((-a/C)+(R/L)))/(3*(h+((1-a*R)/(C*L)))))) * (((3*pi*((1-a*R)/(C*L))+h)^3)/(2*((-a/C)+(R/L))) * ((1-b*R)/(C*L))^(3/2)) * ((-b/C)+(R/L))^(1/3))^2;

periodo = @(R) (4*pi/(((1-b*R)/(C*L))*sqrt((4*((1-b*R)/(C*L))-((-b/C)+(R/L))^2))) + (2*((1-a*R)/(C*L))-((1-b*R)/(C*L))-(2*((-a/C)+(R/L))^2)+((-a/C)+(R/L))*((-b/C)+(R/L))^2)*(((3*pi*((1-a*R)/(C*L))+h)^3)/(2*((-a/C)+(R/L))*((1-b*R)/(C*L))^(3/2)))*((-b/C)+(R/L))^(1/3))^3/(3*((1-a*R)/(C*L))-h)^3);

disp('Condiciones que deben cumplirse');
disp('de > 0, te > 0(para R > 1), a < 0, tc < 0');
de = (1-b*R)/(C*L)
te = (-b/C)+(R/L)
as = ((1-a*R)/(C*L)) + h
tc = (-a/C)+(R/L)

disp('Puntos y periodo');
Y0_punto = Y0(R)
Y1_punto = Y1(R)
periodo_punto = periodo(R)

subplot(2,1,1); fplot(Y0,[0 3]); hold on; fplot(Y1,[0 3]);
hold on; plot(R,Y0_punto,'*'); plot(R,Y1_punto,'*');
xlabel('R'); ylabel('Y');
grid on; shg; subplot(2,1,2);
fplot(periodo,[0 3]); hold on; plot(R,periodo_punto,'*');
xlabel('R'); ylabel('periodo');
grid on; shg;
```

```
>> Ejemplo_4
Condiciones que deben cumplirse
de > 0, te > 0(para R > 1), a < 0, tc < 0

de =
0.987

te =
0.03

as =
-0.26

tc =
-1.87

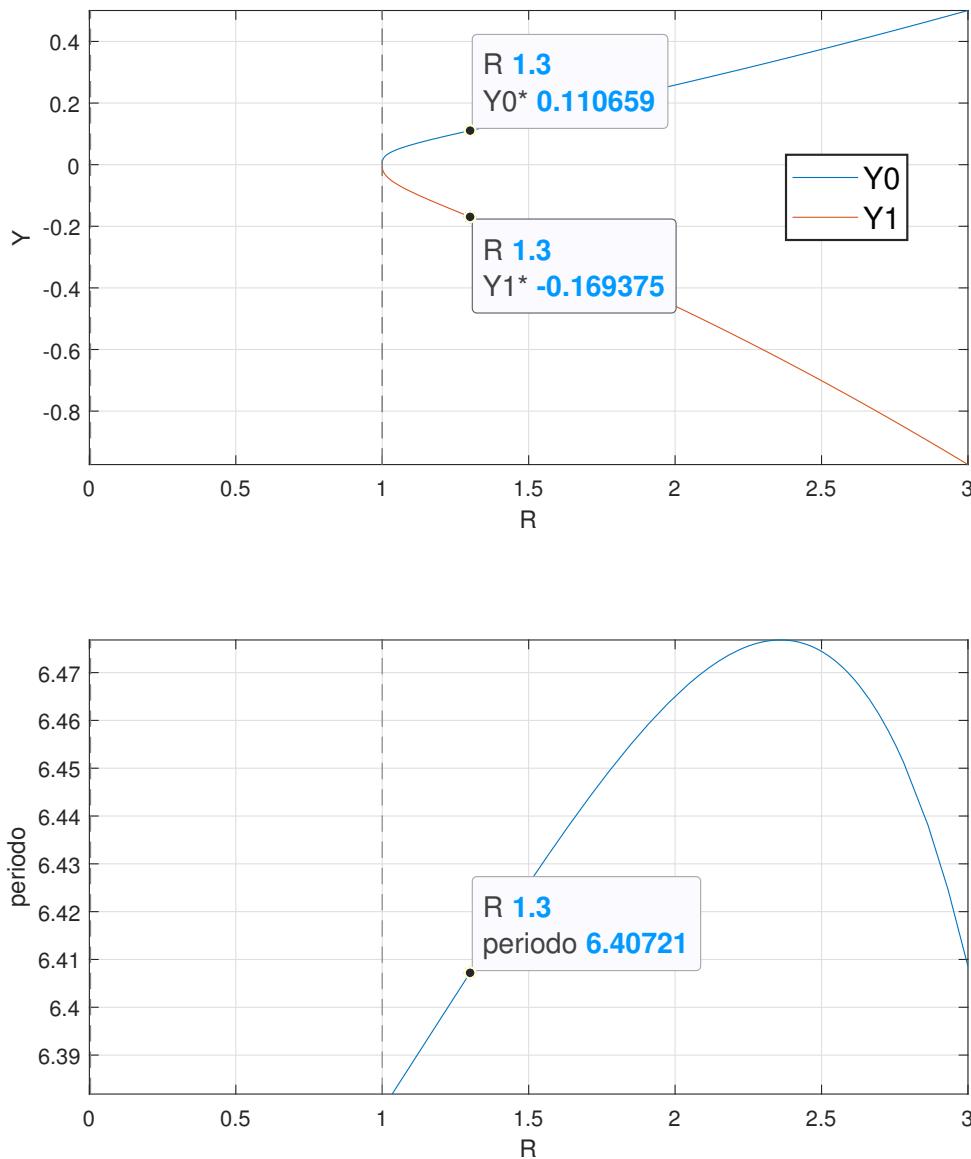
Puntos y periodo

Y0_punto =
0.11066

Y1_punto =
-0.16938

periodo_punto =
6.4072
```

En la siguiente página veremos la gráfica obtenida de “Ejemplo 4 TFE” donde aparecen la gráfica de  $Y_0$  e  $Y_1$  en función de  $R$  y la gráfica del periodo también en función de  $R$ .



**Figura 6.1 :** Gráfica obtenida de “Ejemplo 4 TFE”

A continuación veremos una pequeña modificación del código “Ejemplo 4” para ver más ampliamente la gráfica de  $Y_0$  e  $Y_1$  en función de  $R$  y así comprobar que se cumplen las condiciones que nos aparecieron al trabajar con las inecuaciones.

```
% Ejemplo 5
```

```
% Valores del circuito
a = 0.2; R = 1.3;
b = 0.01; L = 10;
h = -1; C = 0.1;

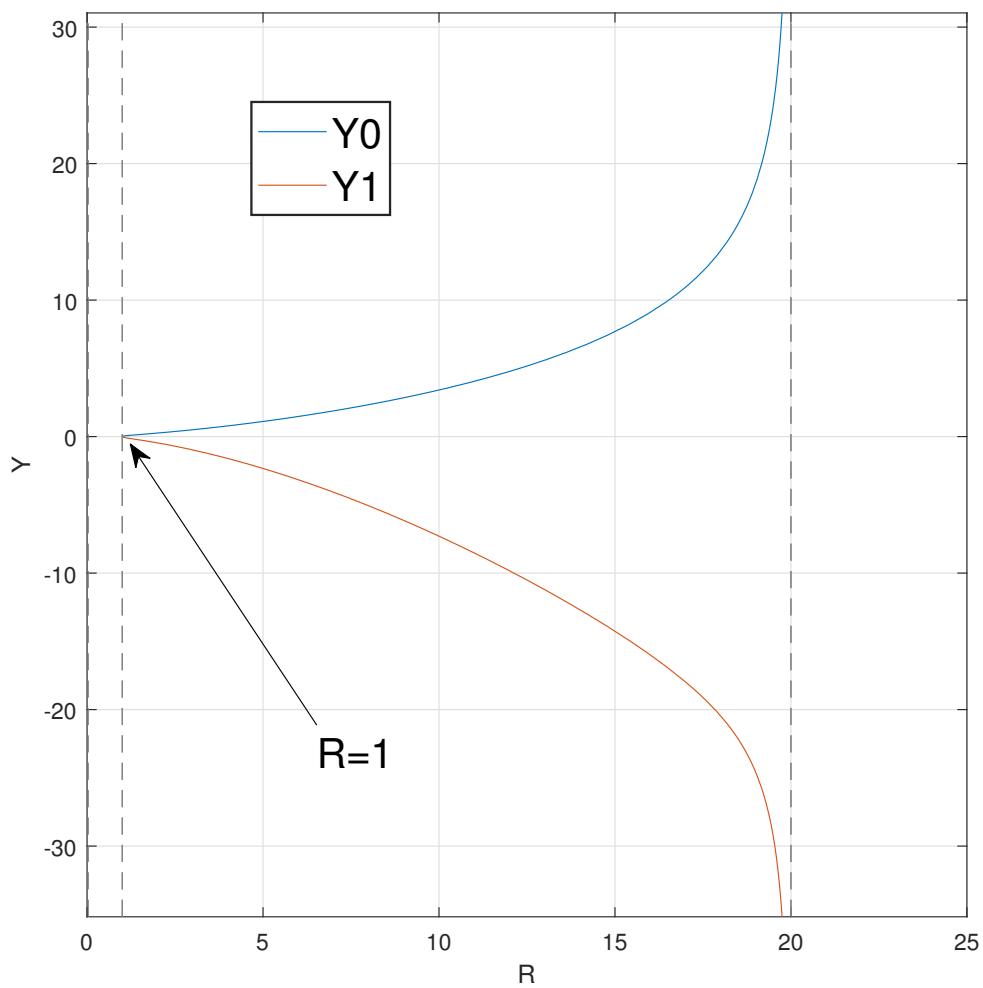
% dc = (1-a*R)/(C*L)      % c: Central , Derecha
% de = (1-b*R)/(C*L)      % e: Exterior , Izquierda
% tc = (-a/C)+(R/L)
% te = (-b/C)+(R/L)
% as = dc + h

Y0 = @(R) (((3*pi*((1-a*R)/(C*L))+h)^3)/(2*((-a/C)+(R/L)))*
((1-b*R)/(C*L))^(3/2))*((-b/C)+(R/L))^(1/3);

Y1 = @(R) (-((((3*pi*((1-a*R)/(C*L))+h)^3)/(2*((-a/C)+(R/
L)))*((1-b*R)/(C*L))^(3/2))*((-b/C)+(R/L))^(1/3))-
(((2*((-a/C)+(R/L)))/(3*(h+((1-a*R)/(C*L))))))*
((((3*pi*((1-a*R)/(C*L))+h)^3)/(2*((-a/C)+(R/L)))
*((1-b*R)/(C*L))^(3/2))*((-b/C)+(R/L))^(1/3))^2;

periodo = @(R) (4*pi/(((1-b*R)/(C*L))*sqrt((4*((1-b*R)/(C*
L))-(((-b/C)+(R/L))^2)))) + (2*((1-a*R)/(C*L))-((1-
b*R)/(C*L))-(2*((-a/C)+(R/L))^2)+(((-a/C)+(R/L))*((-b/
C)+(R/L)))+((-b/C)+(R/L))^2)*(((3*pi*((1-a*R)/(C*L))
+h)^3)/(2*((-a/C)+(R/L))*((1-b*R)/(C*L))^(3/2)))*((-b/
C)+(R/L))^(1/3))^3/(3*((1-a*R)/(C*L))-h)^3);

fplot(Y0,[0 25]);
hold on;
fplot(Y1,[0 25]);
xlabel('R');
ylabel('Y');
legend('Y0','Y1');
grid on;
shg;
```



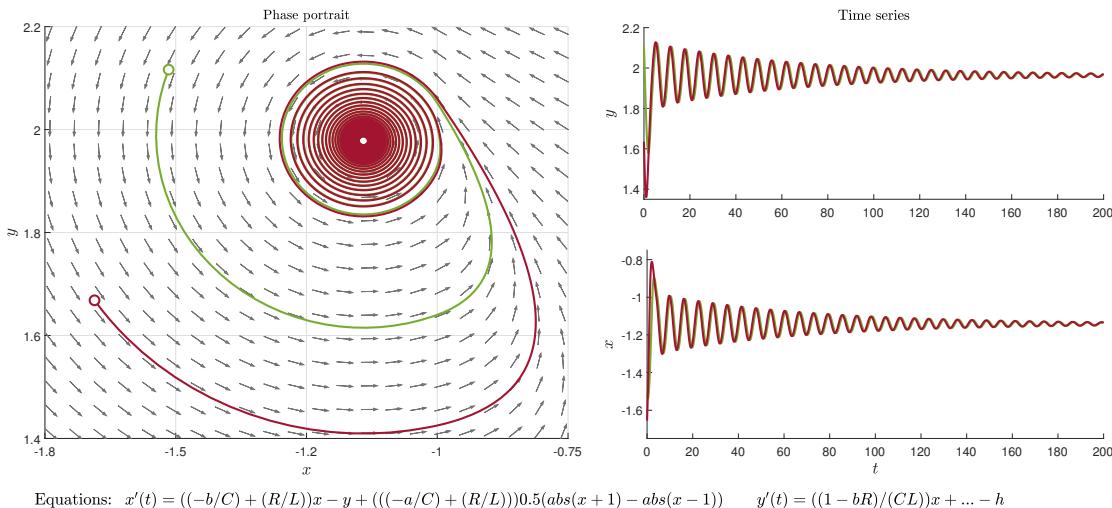
**Figura 6.2 :** Gráfica obtenida de “Ejemplo 5”

Como se puede comprobar en la *Fig. 6.2* se cumplen las condiciones que establecimos en la página [como referencia una página de mi propio trabajo?](#), estas eran:  $R < 20$  y  $R > 1$  para que aparezca el Ciclo-Límite, es decir, se empiecen a obtener valores de corte  $Y_0 > 0$  e  $Y_1 < 0$  con la recta de separación  $X = 0$ .

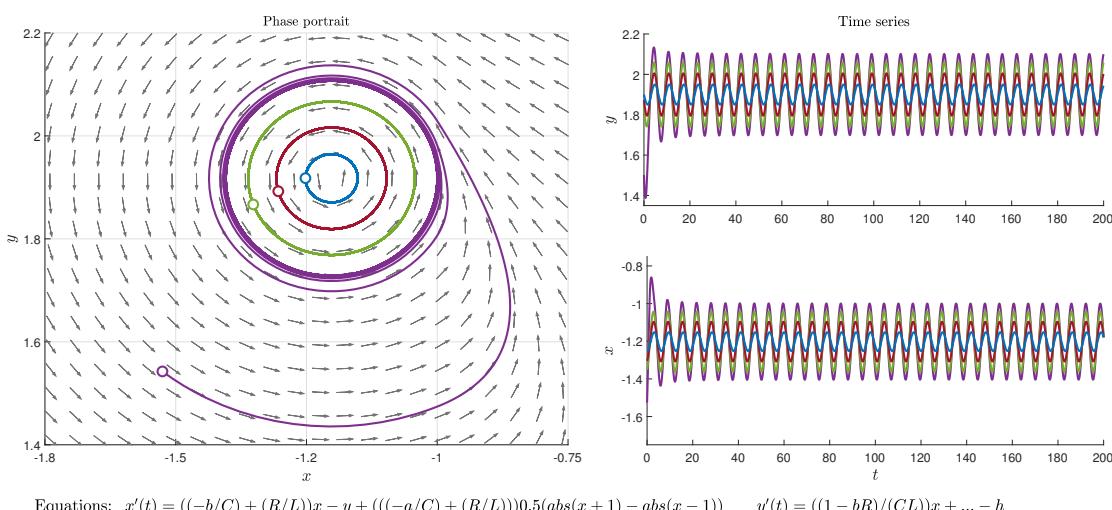
Para finalizar el estudio vamos a ver gráficamente el Ciclo-Límite, para ello hay que reescribir el sistema (2.40) haciendo uso de los valores absolutos, la función de MATLAB que define funciones a trozos o la función signo como ya hicimos en (4.9).

$$\begin{cases} \dot{x} = t_E x - y + (t_C - t_E) \frac{1}{2} (|x+1| - |x-1|), \\ \dot{y} = d_E x + (d_C - d_E) \frac{1}{2} (|x+1| - |x-1|) - h. \end{cases} \quad (6.14)$$

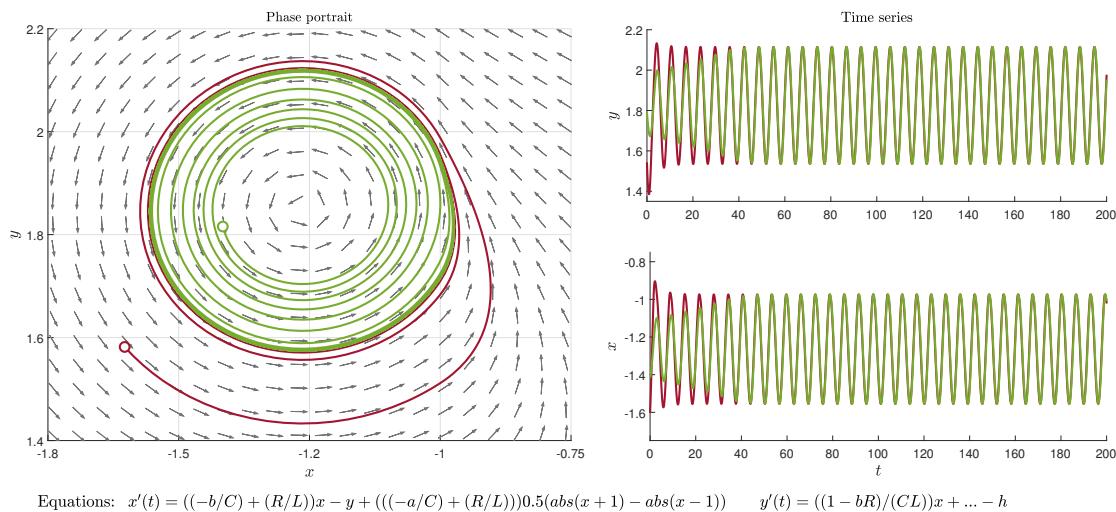
Siendo  $t_E, t_C, d_E, d_C$  los vistos en (6.7), los cuales en siguiente código en MATLAB se han sustituido para dejar todos los parámetros en función de  $R$ .



**Figura 6.3 :** Configuración de Foco Asintóticamente Estable para  $R = 0.7$



**Figura 6.4 :** Configuración de Centro para  $R = 1$



**Figura 6.5 :** Configuración de Foco Asintóticamente Inestable para  $R = 1.3$  donde se ha producido el Ciclo-límite debido a la bifurcación estudiada.

Como se puede ver hemos obtenido en nuestro circuito el mismo comportamiento que el visto en las [Fig. 5.6](#), [Fig. 5.7](#), [Fig. 5.8](#). De hecho esas figuras se representaron con la recta de separación en  $x = -1$  ya que eso es lo que ocurre en nuestro circuito. Podemos comprobar que el Ciclo-Límite efectivamente se “cuela” levemente en la zona derecha de la recta de separación  $x = -1$ , ver [Fig. 6.5](#).

Vamos a utilizar la función *ode45* de MATLAB para solucionar el sistema de ecuaciones diferenciales (6.14) que hemos usado para las representaciones de las [Fig. 6.3](#), [Fig. 6.4](#), [Fig. 6.5](#). Así podremos comparar los resultados que obtengamos con los que obtuvimos previamente mediante los desarrollos en series. La función *ode45* tiene una herramienta muy útil para nuestro análisis ya que nos permite definir “eventos”, en concreto estableceremos que cuando la curva solución corte a la recta  $x = -1$  nos guarde el valor correspondiente de  $y$ , aparte del instante temporal en que se ha producido dicho evento. De esa forma podremos comprobar los puntos  $y_0$  e  $y_1$  además del periodo. Dejaremos que la función *ode45* resuelva el sistema para un valor de tiempo grande, así nos aseguraremos que los últimos valores de  $y$  que cortan a la recta  $x = -1$  ya están dentro del Ciclo-Límite. En la siguiente página presentaremos el código de MATLAB utilizado para ello.

## % Ejemplo 6

```
tspan = [0, 50]; % Lapso de tiempo estudiado.
x0    = [-1;1]; % Punto inicial.

[t, xy,tE,xE,iE] = ode45(@sistema, tspan, x0, odeset('
Events',@EF));

% t -> Los valores de tspan que hemos definido
% xy -> Soluciones del sistema, el primer punto es el
    inicial
% tE -> Momentos temporales para los que se produce un
    evento definido.
% xE -> Valores x e y para los que se produce un evento
    definido.
% iE -> Indice de eventos, nosotros solo definimos uno.
```

Funciones usadas en “Ejemplo 6”:

```
function F=sistema(t,X)

% Valores del circuito
a = 0.2; R = 1.3;
b = 0.01; L = 10;
h = -1; C = 0.1;

x=X(1);
y=X(2);

F=[((-b/C)+(R/L))*x - y + (((-a/C)+(R/L)))*0.5*(abs(x+1)-
abs(x-1));...
((1-b*R)/(C*L))*x + (((1-a*R)/(C*L))-((1-b*R)/(C*L)))
*0.5*(abs(x+1)-abs(x-1))-h];
end

function [valor,terminar,direccion] = EF(t,xy)

valor=(xy(1)+1);
% xy(1) es la x y buscamos x=-1 --> x+1=0

terminar=0;
% 0 (no termina), 1 (termina de integrar en el primer
    evento)

direccion=0;
% 0 (no importa el sentido)
end
```

Como se ve en “Ejemplo 6” se ha establecido el punto inicial en  $(-1, 1)$ , esto realmente no nos importa ya que nuestro sistema con  $R > 1$  tiene una configuración de Ciclo-Límite Asintóticamente Estable por lo que con el tiempo de estudio suficiente la solución finalmente tenderá al Ciclo-Límite.

Primero vamos a obtener los últimos valores de la matriz  $xE$  ya que contendrán los últimos valores de  $y_0$  e  $y_1$  que cortan a la recta  $x = -1$ , sin olvidarnos de deshacer los cambios de variable [\(6.2\)](#) y [\(6.4\)](#) que hicimos previamente.

```
>> Ejemplo_6
>> Eventos_Finales = xE(end-1:end , :)

Eventos_Finales =
-1.0000000000000000      1.678373654662149
-1.000000000000038      1.943071409081938

>> tc = -1.87;
>> Eventos_Finales_Cambio_APLICADO = [Eventos_Finales
(:,1)+1 , Eventos_Finales(:,2)+tc]

Eventos_Finales_Cambio_APLICADO =
0.0000000000000000      -0.191626345337851
-0.000000000000038      0.073071409081938
```

Se han obtenido unos valores de  $Y_0 = 0.0731$  e  $Y_1 = -0.1916$  muy parecidos a los obtenidos en “Ejemplo 4” que eran  $Y_0 = 0.1107$  e  $Y_1 = -0.1694$ .

A continuación comprobemos el periodo

```
>> Ejemplo_6
>> Tiempos_Eventos_Finales = tE(end-3:end , :)

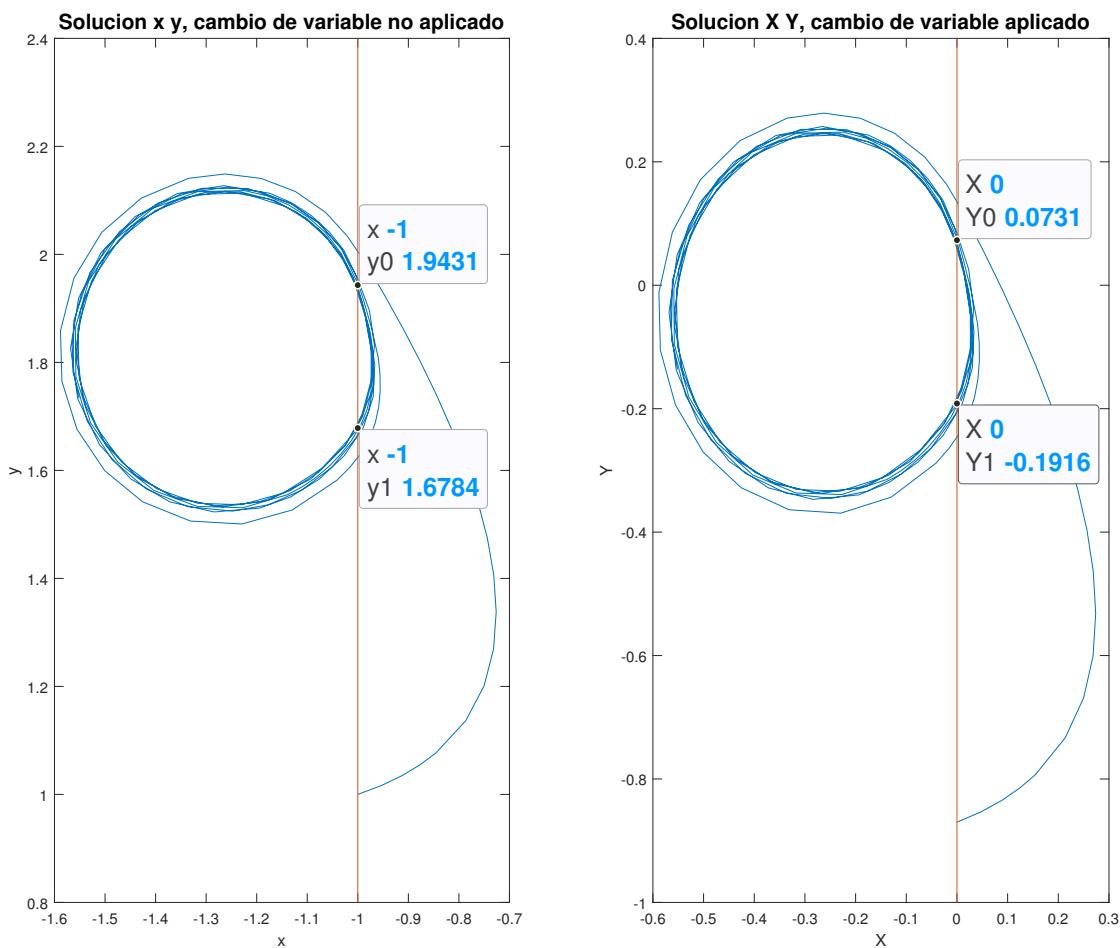
Tiempos_Eventos_Finales =
39.611715401194630
40.523097741802857
45.940582182720519
46.902819483166091

>> Periodo = Tiempos_Eventos_Finales(end) -
    Tiempos_Eventos_Finales(end-2)

Periodo =
6.379721741363234
```

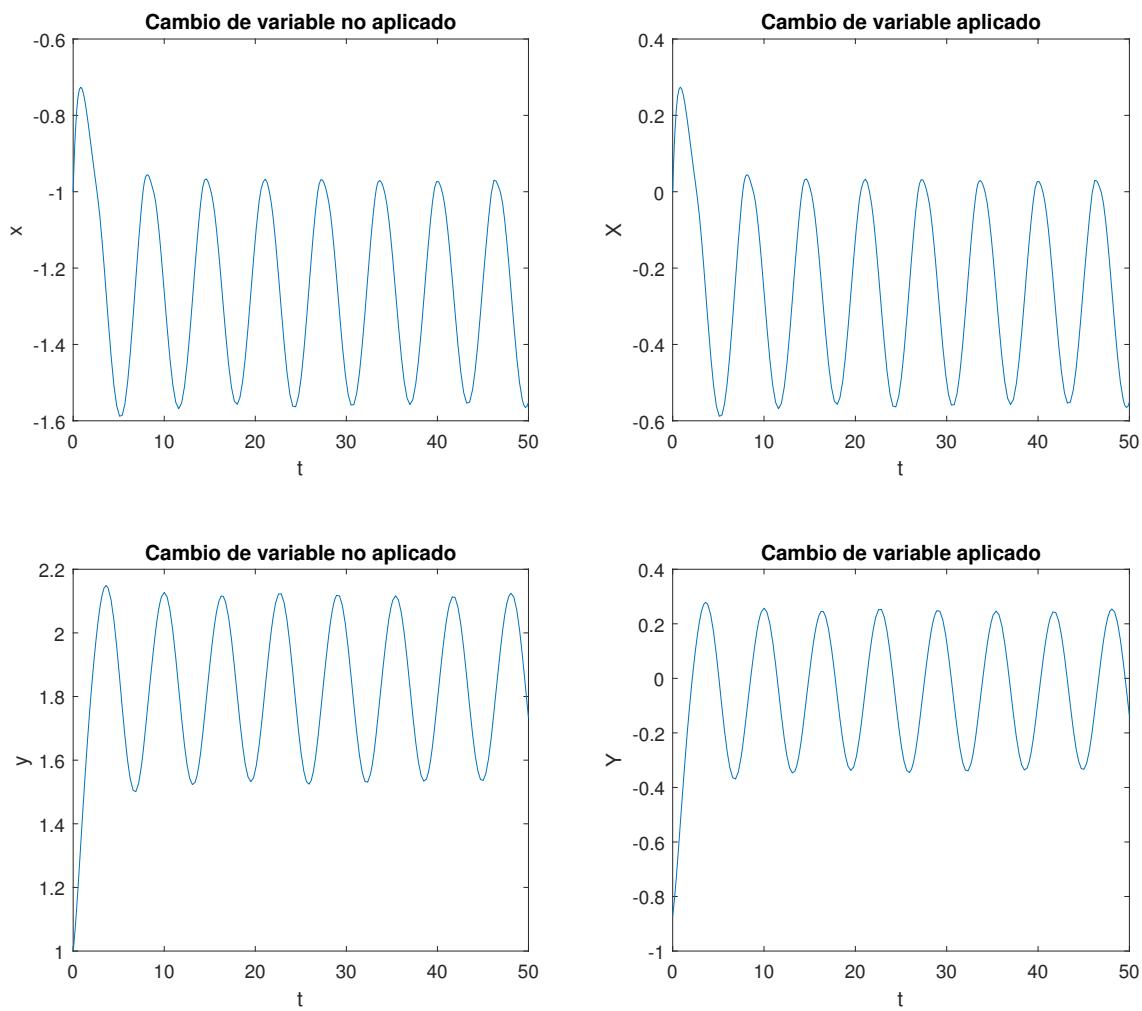
Hemos obtenido un periodo de  $T_P = 6.3797$ , realmente parecido al obtenido en “Ejemplo 4” que era  $T_P = 6.4072$ .

En las siguientes páginas veremos algunas gráficas interesantes que podemos generar con los resultados obtenidos de “Ejemplo 6”.

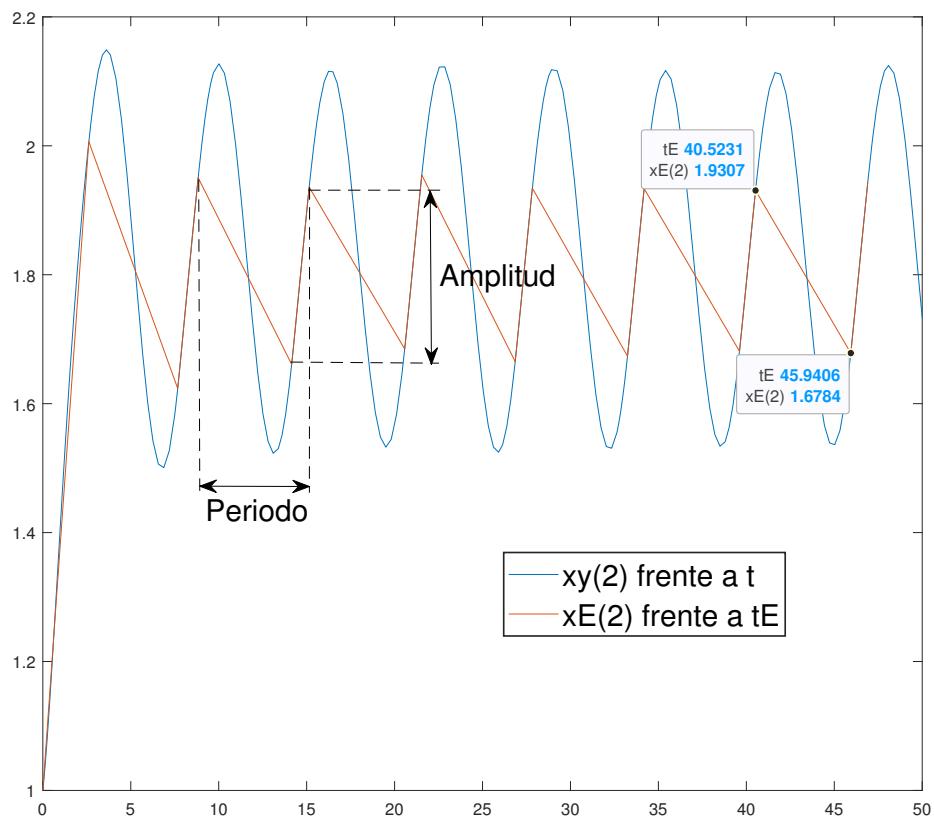


**Figura 6.6 :** Comparación de la representación de la matriz  $\mathbf{xy}$  de “Ejemplo 6” con el cambio de variable aplicado y no aplicado. Los puntos representados corresponden a las dos últimas componentes de  $\mathbf{x}\mathbf{E}$ , nuevamente con cambio de variable aplicado y no aplicado.

Se han utilizado las dos últimas componentes de  $\mathbf{x}\mathbf{E}$  en la figura anterior ya que para ese valor de tiempo la órbita solución ya ha alcanzado por completo el Ciclo Límite.



**Figura 6.7 :** Comparación de la representación de las componentes de la matriz  $xy$  de “Ejemplo 6” con respecto al tiempo de estudio  $t$  con el cambio de variable aplicado y no aplicado.



**Figura 6.8 :** Comparación de las gráficas de  $y$  ( $xy(2)$ ) solución frente al tiempo de estudio  $t$  y los valores de  $y$  ( $xE(2)$ ) para los que se produce el evento de corte con la recta  $x = -1$  frente a los instantes de tiempo  $tE$  en que se produce el evento.

La gráfica *Fig. 6.8* resulta especialmente interesante, ya que proporciona una visualización clara de los puntos de intersección  $y_0$  e  $y_1$ , así como de la manera en que se pueden medir tanto el periodo como la amplitud de la oscilación.

Las gráficas previamente presentadas se generaron utilizando “Graficas Ejemplo 6”, cuyo código se encuentra detallado en la siguiente página

```
% Graficas Ejemplo 6
Ejemplo_6

xE = round(xE,4); tc=-1.87;

    figure; subplot(1,2,1);
plot(xy(:,1) , xy(:,2));
title('Solucion x y, cambio de variable no aplicado');
xlabel('x'); ylabel('y'); hold on;
h1 = 0.8:0.001:2.4;
k1 = -1.*ones(1 , length(h1));
plot(k1,h1);
plot(xE(end,1) , xE(end,2), '*');
plot(xE(end-1,1) , xE(end-1,2), '*'); hold off;
    subplot(1,2,2);
xy_APLICADO = [xy(:,1)+1 , xy(:,2)+tc];
plot(xy_APLICADO(:,1) , xy_APLICADO(:,2))
title('Solucion X Y, cambio de variable aplicado');
xlabel('X'); ylabel('Y'); hold on;
h2 = -1:0.001:0.4;
k2 = zeros(1,length(h2));
plot(k2,h2);
xE_APLICADO = [xE(:,1)+1 , xE(:,2)+tc];
plot(xE_APLICADO(end,1) , xE_APLICADO(end,2), '*');
plot(xE_APLICADO(end-1,1) , xE_APLICADO(end-1,2), '*');
hold off;

figure;
    subplot(2,2,1);
plot(t,xy(:,1));
title('Cambio de variable no aplicado');
xlabel('t'); ylabel('x');
    subplot(2,2,3);
plot(t,xy(:,2));
title('Cambio de variable no aplicado');
xlabel('t'); ylabel('y');
    subplot(2,2,2);
plot(t,xy_APLICADO(:,1));
title('Cambio de variable aplicado');
xlabel('t'); ylabel('X');
    subplot(2,2,4);
plot(t,xy_APLICADO(:,2));
title('Cambio de variable aplicado');
xlabel('t'); ylabel('Y');

figure;
plot(t,xy(:,2)); hold on;
plot(tE,xE(:,2)); hold off;
```

El próximo y último paso de este trabajo consistirá en regresar a las ecuaciones originales del circuito (2.31) y verificar de manera efectiva la existencia de dicho Ciclo Límite, con una condición inicial  $(x_0, y_0, z_0)$ . Para lograrlo, deberemos revertir todos los cambios de variable que hemos aplicado a lo largo del estudio.

Si examinamos el sistema (6.6), es evidente que, dado que el Ciclo Límite es Estable, si seleccionamos el punto inicial  $(X_0, Y_0) = (0, 0)$ , la solución del sistema tenderá hacia el Ciclo Límite cuando pase el suficiente tiempo, como se muestra en la Fig. 6.6. Por esta razón, hemos optado por tomar el punto  $(X_0, Y_0) = (0, 0)$  como punto de partida para el proceso de deshacer las transformaciones y determinar así las condiciones iniciales adecuadas para el circuito.

El siguiente paso es deshacer los cambios de variable (6.2) y (6.4):

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) &= (X_0 - 1, Y_0 - t_c) = (0 - 1, 0 - t_C) \\ (x_0, y_0) &= (-1, -t_C) \end{aligned} \tag{6.15}$$

De hecho, en este trabajo hacemos referencia a  $\tilde{x}$  y  $\tilde{y}$  para denotar el sistema bidimensional trizonal correspondiente (2.40). Asimismo, utilizamos  $x$  e  $y$  para describir el mismo sistema, pero enfocándonos exclusivamente en las regiones derecha e izquierda de la línea de separación  $\tilde{x} = -1$ , como se observa en el sistema (6.1). De esta manera, podemos identificar directamente el punto:

$$(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = (-1, -t_C) \tag{6.16}$$

En última instancia, debemos proceder a deshacer las transformaciones de variable que se llevaron a cabo para pasar del sistema tridimensional (2.31) al sistema bidimensional (2.40). Esta tarea ya ha sido preparada en las ecuaciones (2.47), de manera que ahora solo debemos realizar la sustitución de los valores  $\tilde{x}_0$ ,  $\tilde{y}_0$  y  $h_0$ , teniendo en cuenta que previamente se estableció  $h = -1$ . De este modo, obtendremos:

$$z_0 = \tilde{x}_0 = -1 \tag{6.17a}$$

$$y_0 = \frac{\alpha_1 \tilde{x}_0 + \frac{h_0}{a_{22}} - \tilde{y}_0}{\alpha_3} = \frac{\alpha_1(-1) + \frac{(-1)}{a_{22}} - (-t_C)}{\alpha_3} = \frac{-\alpha_1 - \frac{1}{a_{22}} + t_C}{\alpha_3} \tag{6.17b}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{a_{12}}{a_{22}} y_0 + a_{11} q(\tilde{x}_0) - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{22}} \tilde{x}_0 - \frac{h_0}{a_{22}} \\ &= \frac{a_{12}}{a_{22}} \left( \frac{-\alpha_1 - \frac{1}{a_{22}} + t_C}{\alpha_3} \right) + a_{11} q(-1) - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{22}}(-1) - \frac{-1}{a_{22}} \\ &= \frac{a_{12}}{a_{22}} \left( \frac{-\alpha_1 - \frac{1}{a_{22}} + t_C}{\alpha_3} \right) + a_{11} q(-1) + \frac{a_{12} a_{21}}{a_{22}} + \frac{1}{a_{22}} \end{aligned} \tag{6.17c}$$

Los valores anteriores se calcularán haciendo uso del siguiente código

```
% Condiciones Iniciales

% valores del circuito
a = 0.2; R = 1;
b = 0.01; L = 10;
h0 = -1; C = 0.1;

% variables auxiliares
a12 = 1/C; a11 = -a12;
a21 = -1/L; a22 = -R*a21;

alpha1 = (a22^2+a21*a12)/a22;
alpha3 = a12/a22;

tc=a*a11+a22;

% Funcion q
q = @(phi) b*phi+0.5*(a-b)*(abs(phi+1)-abs(phi-1));

% punto inicial sistema bidimensional
x0tilde = -1; y0tilde = -tc;

% punto inicial sistema tridimensional
z0 = x0tilde

y0=(alpha1*x0tilde+h0/a22-y0tilde)/alpha3

x0=a12/a22*(y0)+a11*q(x0tilde)-a12*a21/a22*x0tilde-h0/a22

>> Condiciones_Iniciales

z0 =
-1

y0 =
-0.0200

x0 =
-1.7764e-15
```

Recordemos que las variables de estado son:

- $x(t)$  es la tensión ( $v_1$ ) en el condensador y el memristor.
- $y(t)$  es la intensidad ( $i_{LR}$ ) en la resistencia y la bobina.
- $z(t)$  es el flujo ( $\varphi$ ) en el memristor.

Por lo que aplicando una tensión inicial  $v_1 = -1.7764 \cdot 10^{-15} \simeq 0(v)$  y una intensidad inicial  $i_{LR} = -0.02 = -20(\text{mA})$  aparecerá el ciclo límite estable en el circuito. Vamos a comprobarlo haciendo uso de *ode45* como hicimos en “Ejemplo 6” anteriormente.

#### % Ejemplo 6 Tridimensional

```
tspan = 0:0.001:100; % Largo de tiempo estudiado.
x0     = [-1.7764e-15;-0.02;-1]; % Punto inicial.

[t, xyz] = ode45(@sistematridi, tspan, x0);

% t    -> Los valores de tspan que hemos definido
% xyz -> Soluciones del sistema, el primer punto es el
        inicial
```

Función usada en “Ejemplo 6 Tridimensional”:

```
function F=sistematridi(t,X)

% valores del circuito
a = 0.2; R = 1;
b = 0.01; L = 10;
h0 = -1; C = 0.1;

% variables auxiliares
a12 = 1/C; a11 = -a12;
a21 = -1/L; a22 = -R*a21;

x=X(1);
y=X(2);
z=X(3);

% funcion W(z)
breaks=[-Inf, -1, 1, Inf];
coefs=[b,a,b];
W=mkpp(breaks,coefs);

F=[a11*x*ppval(W,z)+a12*y ; a21*x+a22*y ; x];
end
```

Utilizando el código “Ejemplo 6 Tridimensional”, obtendremos los valores  $x$ ,  $y$ ,  $z$  como resultado del sistema (2.31). Además, variaremos el valor de  $R$  en la función ”sistematridi” para que con los siguientes tres valores  $R = 0.7$ ,  $R = 1$  y  $R = 1.3$ , lo que nos permitirá visualizar la bifurcación Foco-Centro-Ciclo Límite, tal como se ha explicado previamente. A continuación, presentaremos el código ”Bifurcacion Planos 1”, el cual se utiliza para representar en 3D los resultados obtenidos.

```
% Bifurcacion Planos 1

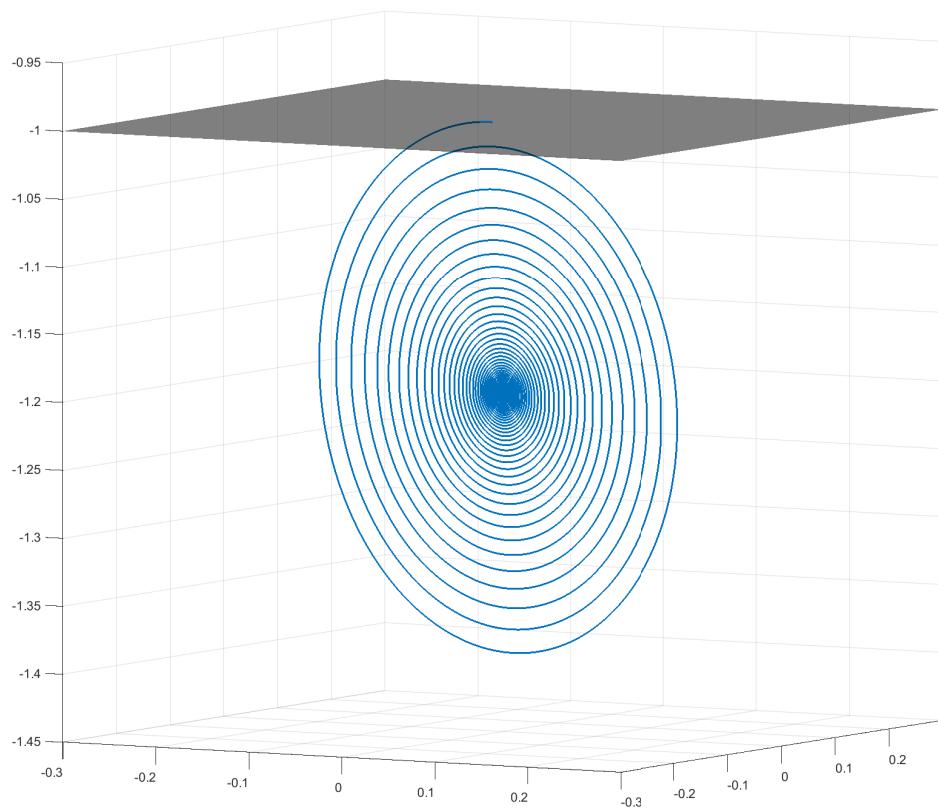
Ejemplo_6_Tridimensional

% Definir las coordenadas X e Y
[X, Y] = meshgrid(-0.3:0.00025:0.3);

% Calcular Z
Z = -1+0*X*Y;

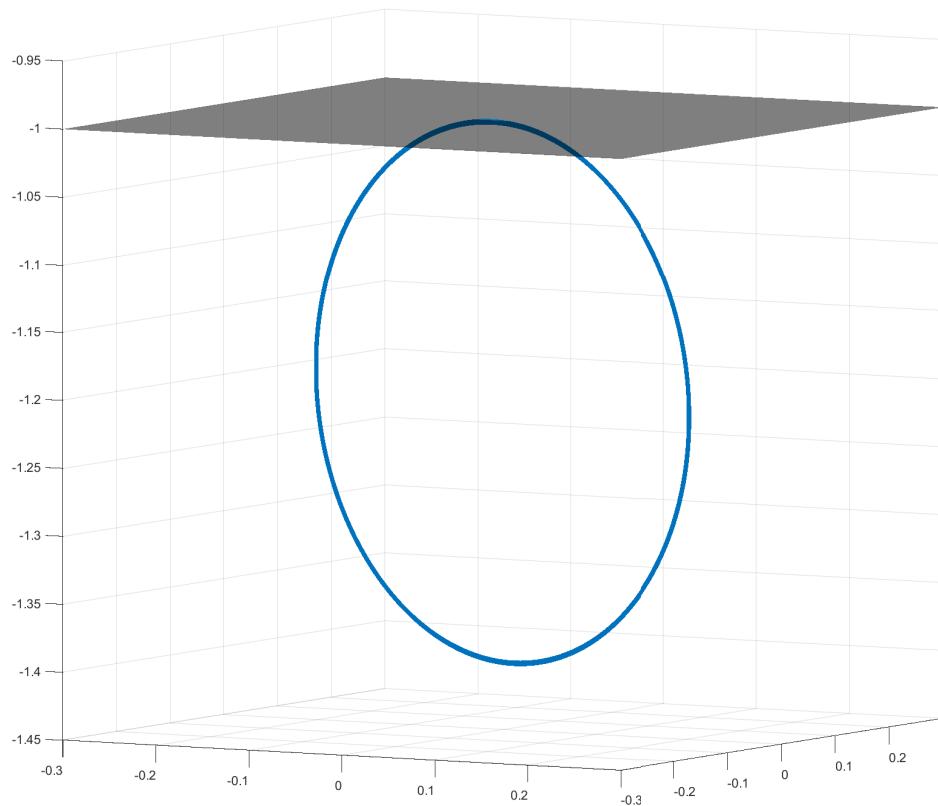
% Crear una grafica 3D
figure('Position', [0, 0, 1200, 1000]);
surf(X, Y, Z, 'FaceAlpha', 0.5, 'EdgeColor', 'none', ...
    'FaceColor', 'black');
hold on;

% Dibujar el ciclo limite
h1 = plot3(xyz(:,1),xyz(:,2),xyz(:,3), 'LineWidth', 1.5);
shg;
view(-140, 10);
axis([-0.3, 0.3, -0.3, 0.3, -1.5, -0.8]);
hold off;
```



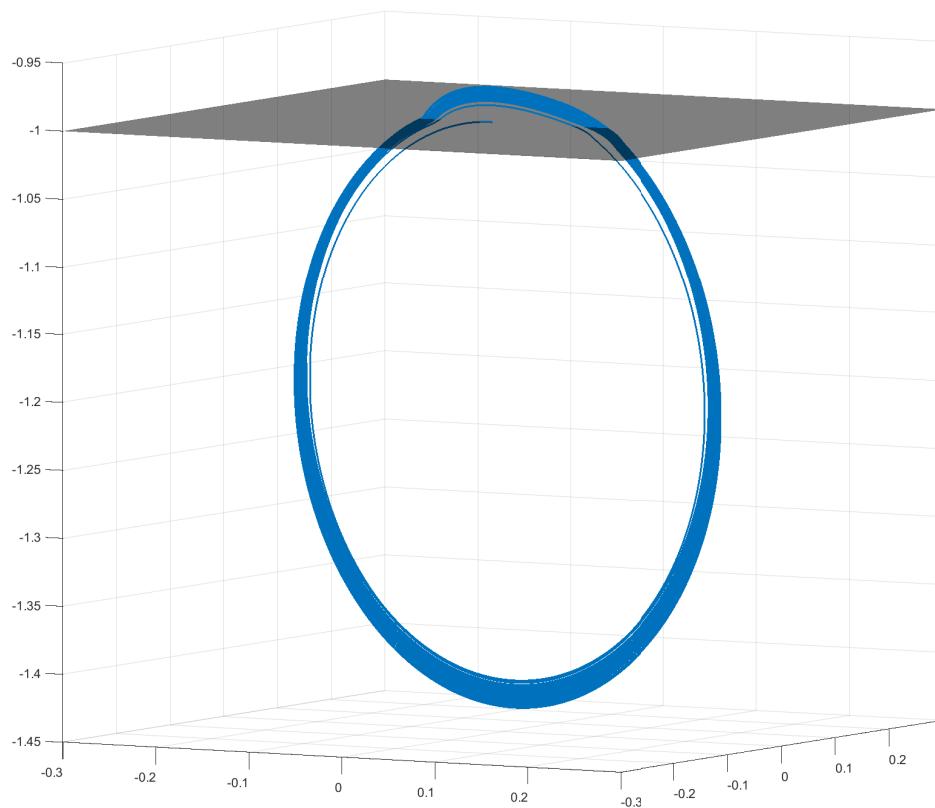
**Figura 6.9 :** Gráfica resultado de “Bifurcacion Planos 1” para un valor de  $R = 0.7$  en “sistematidi”.

En la figura anterior, se aprecia la configuración de Foco Asintóticamente Estable para un valor de  $R < 1$  en el sistema (2.31), utilizando las condiciones iniciales previamente calculadas.



**Figura 6.10 :** Gráfica resultado de “Bifurcacion Planos 1” para un valor de  $R = 1$  en “sistematidi”.

En la figura anterior, se observa la configuración de un Centro para un valor de  $R = 1$  en el sistema (2.31), utilizando las condiciones iniciales previamente calculadas. Se puede notar que la última órbita es tangente a la superficie de separación, y será precisamente de esta órbita de donde surgirá el Ciclo Límite.



**Figura 6.11 :** Gráfica resultado de “Bifurcacion Planos 1” para un valor de  $R = 1.3$  en “sistematidi”.

En la figura anterior, se representa la configuración de un Ciclo Límite Asintóticamente Estable para un valor de  $R > 1$  en el sistema (2.31), utilizando las condiciones iniciales previamente calculadas. Se puede observar cómo el Ciclo Límite efectivamente se introduce en la zona adyacente levemente.

Aunque en la *Fig. 6.11* no sea muy evidente, las dos partes del Ciclo Límite, tanto a la izquierda como a la derecha del plano de separación, están contenidas en planos distintos. Hemos demostrado previamente que la dinámica del sistema se reduce a un sistema bidimensional, para confirmar esto, basta con resolver la ecuación (2.39) para  $z$  (sustituyendo (2.33)):

$$\text{Para } z < -1 \rightarrow h_0 = -a_{22}x + a_{12}y - a_{12}a_{21}z_1 + a_{11}a_{22}(b(z_1 + 1) - a)$$

$$z_1 = -\frac{h_0 + a_{22}x - a_{12}y + a_{11}a_{22}(a - b)}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}b} \quad (6.18a)$$

$$\text{Para } z > -1 \rightarrow h_0 = -a_{22}x + a_{12}y - a_{12}a_{21}z_2 + a_{11}a_{22}(az_2)$$

$$z_2 = -\frac{h_0 + a_{22}x - a_{12}y}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}a} \quad (6.18b)$$

A continuación, presentaremos el código utilizado para representar ambos planos, lo que nos permitirá observar con mayor claridad que, efectivamente, no son el mismo.

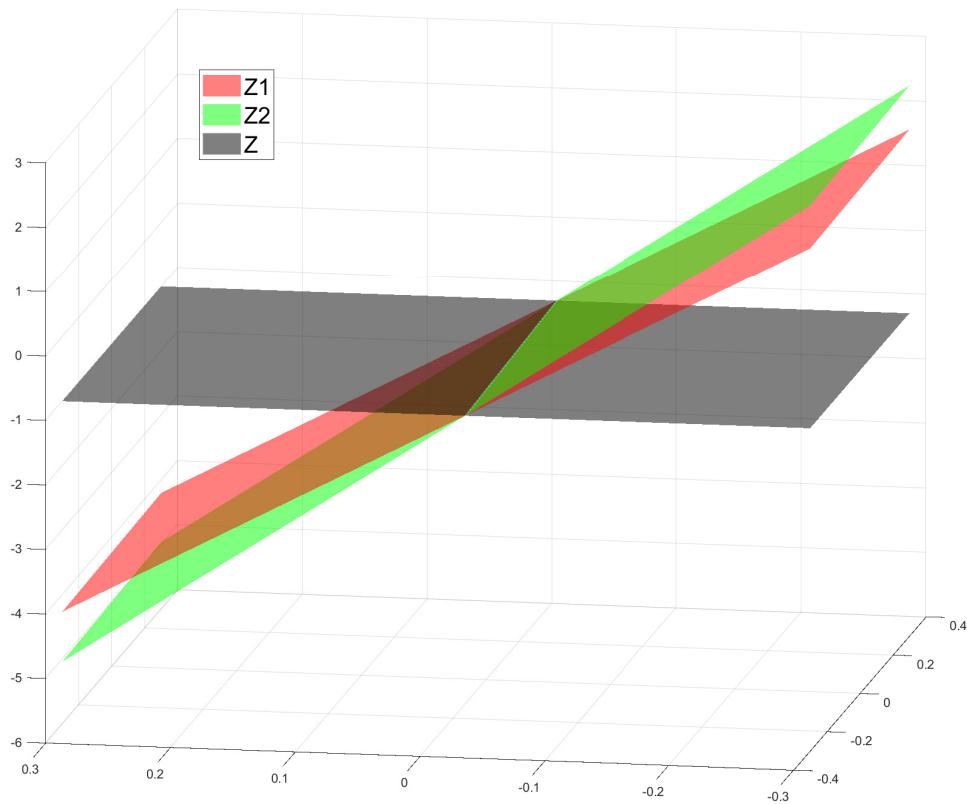
```
% Bifurcacion Planos 2

Ejemplo_6_Tridimensional

% Definir las coordenadas X e Y
[X, Y] = meshgrid(-0.3:0.00025:0.3);

% Calcular Z, Z1 y Z2
Z = -1+0*X*Y;
Z1 = -(h0 + a22*X - a12*Y + a11*a22*(a - b))/(a12*a21 - a11*a22*b);
Z2 = -(h0 + a22*X - a12*Y)/(a12*a21 - a*a11*a22);

% Visualizar diferencia entre planos
figure('Position', [0, 0, 1200, 1000]);
surf(X, Y, Z1, 'FaceAlpha', 0.5, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'red');
hold on;
surf(X, Y, Z2, 'FaceAlpha', 0.5, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'green');
surf(X, Y, Z, 'FaceAlpha', 0.5, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'black');
hold off;
view(-80, 15);
```



**Figura 6.12 :** Gráfica resultado de “Bifurcacion Planos 2”.

Como se puede comprobar en la figura anterior, en el plano rojo por debajo de  $z = -1$  se encuentra la porción del Ciclo Límite correspondiente a  $z < -1$ , mientras que en el plano verde por encima de  $z = -1$  se halla la pequeña parte del Ciclo Límite que se extiende hacia la siguiente zona. Por último, presentaremos una figura que compara las tres figuras anteriores ([Fig. 6.9](#), [Fig. 6.10](#), [Fig. 6.11](#)) junto con los planos de la [Fig. 6.12](#). Para ello, utilizaremos “Bifurcacion Planos 3” para generar las figuras (que se guardarán manualmente con los nombres ‘foco25.fig’, ‘centro25.fig’ y ‘ciclo25.fig’), y posteriormente las combinaremos utilizando “Bifurcacion Combinar Planos”.

```
% Bifurcacion Planos 3

Ejemplo_6_Tridimensional

% Definir las coordenadas X e Y

[X, Y] = meshgrid(-0.3:0.00025:0.3);

% Calcular Z, Z1 y Z2
Z = -1+0*X*Y;
Z1 = -(h0 + a22*X - a12*Y + a11*a22*(a - b))/(a12*a21 -
a11*a22*b);
Z2 = -(h0 + a22*X - a12*Y)/(a12*a21 - a*a11*a22);

% Visualizar diferencia entre planos
figure('Position', [0, 0, 1200, 1000]);
surf(X, Y, Z1, 'FaceAlpha', 0.5, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'red');
hold on;
surf(X, Y, Z2, 'FaceAlpha', 0.5, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'green');
surf(X, Y, Z, 'FaceAlpha', 0.5, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'black');
hold off;
view(-80, 15);

% Ocultar los valores no deseados en Z1 y Z2
Z1(Z1 > -1) = NaN;
Z2(Z2 < -1) = NaN;

% Crear una grafica 3D
figure('Position', [0, 0, 1200, 1000]);
surf(X, Y, Z1, 'FaceAlpha', 0.5, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'red');
hold on;
surf(X, Y, Z2, 'FaceAlpha', 0.5, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'green');
surf(X, Y, Z, 'FaceAlpha', 0.5, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'black');

% Dibujar el ciclo limite
h1 = plot3(xyz(:,1),xyz(:,2),xyz(:,3), 'LineWidth', 1.5);
shg;
view(-140, 10);
axis([-0.3, 0.3, -0.3, 0.3, -1.5, -0.8]);
hold off;
```

```
% Bifurcacion Combinar Planos

% Abre las figuras existentes
h1 = openfig('foco25.fig','reuse','invisible');
h2 = openfig('centro25.fig','reuse','invisible');
h3 = openfig('ciclo25.fig','reuse','invisible');

% Define la misma vista 3D para todas las figuras
azimuth = 30; % Angulo azimutal (grados)
elevation = 10; % Angulo de elevacion (grados)

% Crea una nueva figura con tres subplots
figure('units','normalized','outerposition',[0 0 1 1])

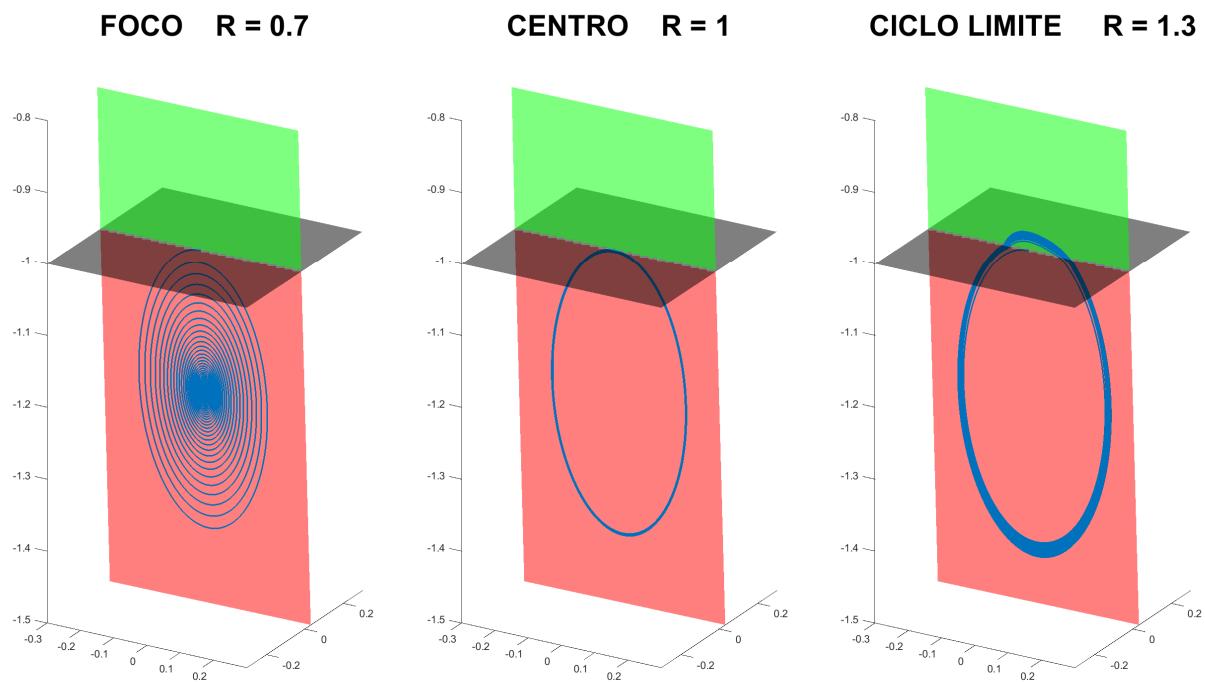
% Configura los subplots
s1 = subplot(1,3,1);
axis([-0.3, 0.3, -0.3, 0.3, -1.5, -0.8]);
view(azimuth, elevation);

s2 = subplot(1,3,2);
axis([-0.3, 0.3, -0.3, 0.3, -1.5, -0.8]);
view(azimuth, elevation);

s3 = subplot(1,3,3);
axis([-0.3, 0.3, -0.3, 0.3, -1.5, -0.8]);
view(azimuth, elevation);

% Copia y muestra las figuras en los subplots
copyobj(allchild(get(h1,'CurrentAxes')), s1);
copyobj(allchild(get(h2,'CurrentAxes')), s2);
copyobj(allchild(get(h3,'CurrentAxes')), s3);

% Ajusta los titulos de los subplots
title(s1, '\fontsize{28}FOCO R = 0.7');
title(s2, '\fontsize{28}CENTRO R = 1');
title(s3, '\fontsize{28}CICLO LIMITE R = 1.3');
```



**Figura 6.13 :** Gráfica resultado de “Bifurcacion Combinar Planos”.

# **Conclusiones**

Contenido del capítulo de conclusiones.

# Bibliografía

- [1] CHUA, L. O. Memristor – The missing circuit element. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 1971, vol. CT-18, no. 5, p. 507 to 519. DOI: 10.1109/TCT.1971.1083337.
- [2] Itoh, Makoto & Chua, Leon. (2008). Memristor oscillators. I. J. Bifurcation and Chaos. 18. 3183-3206. 10.1142/S0218127408022354.
- [3] Strukov DB, Snider GS, Stewart DR, Williams RS. The missing memristor found. *Nature*. 2008 May 1;453(7191):80-3. doi: 10.1038/nature06932. Erratum in: *Nature*. 2009 Jun 25;459(7250):1154. PMID: 18451858.
- [4] R. S. Williams, "How We Found The Missing Memristor, in *IEEE Spectrum*, vol. 45, no. 12, pp. 28-35, Dec. 2008, doi: 10.1109/MSPEC.2008.4687366.
- [5] Xiaoyue, Ji & Dong, Zhekang & Zhou, Guangdong & Lai, Chun Sing & Yan, Yunfeng & Qi, Donglian. (2021). Memristive System Based Image Processing Technology: A Review and Perspective. *Electronics*. 10. 3176. 10.3390/electronics10243176.
- [6] Caravelli, F. & Carbajal, Juan. (2018). Memristors for the Curious Outsiders. 10.31224/osf.io/c4qr9.
- [7] Llibre, Jaume & Teruel, Antonio. (2014). Introduction to the Qualitative Theory of Differential Systems: Planar, Symmetric and Continuous Piecewise Linear Systems. 10.1007/978-3-0348-0657-2.
- [8] Carmona, V. Bifurcaciones en Sistemas Dinámicos Lineales a Trozos. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, 2002.
- [9] V. Carmona, E. Freire, E. Ponce and F. Torres, "On simplifying and classifying piecewise-linear systems, in *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 49, no. 5, pp. 609-620, May 2002, doi: 10.1109/TCSI.2002.1001950.
- [10] Amador, A., Freire, E., Ponce, E., and Ros, J., "On Discontinuous Piecewise Linear Models for Memristor Oscillators", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 27, no. 6, 2017. doi:10.1142/S0218127417300221.
- [11] Carmona, Victoriano, Fernández-Sánchez, Fernando, García-Medina, Elisabeth and Novaes, Douglas D.: Properties of Poincaré half-maps for planar linear systems and some direct applications to periodic orbits of piecewise systems, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 2023, No. 22, 1-18. doi: <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2023.1.22>
- [12] Victoriano Carmona, Fernando Fernández-Sánchez, Douglas D. Novaes, Uniqueness and stability of limit cycles in planar piecewise linear differential systems without sliding region, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Volume 123, 2023, 107257, ISSN 1007-5704. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107257>.

- [13] Victoriano Carmona, Fernando Fernández-Sánchez, Integral characterization for Poincaré half-maps in planar linear systems, *Journal of Differential Equations*, Volume 305, 2021, Pages 319-346, ISSN 0022-0396, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.10.010>.
- [14] Ponce, E., Ros, J., Vela, E. (2013). The Focus-Center-Limit Cycle Bifurcation in Discontinuous Planar Piecewise Linear Systems Without Sliding. In: Ibáñez, S., Pérez del Río, J., Pumariño, A., Rodríguez, J. (eds) Progress and Challenges in Dynamical Systems. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 54. Springer, Berlin, Heidelberg. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-38830-9\\_21](https://doi.org/10.1007/978-3-642-38830-9_21)
- [15] Ponce, Enrique & Ros, Javier & Vela, Elísabet. (2022). Bifurcations in Continuous Piecewise Linear Differential Systems: Applications to Low-Dimensional Electronic Oscillators. [10.1007/978-3-031-21135-5](https://doi.org/10.1007/978-3-031-21135-5).
- [16] Bachmann, K.-H. (1977), Henrici, P., Applied and Computational Complex Analysis, Bd. I, 682 S., New York-London-Sydney-Toronto. John Wiley & sons. 1974. £ 13,50 .. Z. angew. Math. Mech., 57: 352-352. <https://doi.org/10.1002/zamm.19770570622>
- [17] Bielek, Zdenek & Bielek, Dalibor & V, Biolkova. (2009). SPICE Model of Memristor with Nonlinear Dopant Drift. *Radioengineering*. 18.