Exercicios da aula 2 de estatística

Sérgio da Silva dos Santos Júnior
Professores: Dilson Damião, Eliza Melo e Mauricio Thiel

2024/2

1 Exercício 1

Deduzir as equações de ajuste linear para o caso que as incertezas em "y" são diferentes em cada ponto.

Para o ajuste da reta na medida em que as incertezas em y são distintas, a função dos parâmetros "a" e "b" a serem minimizados é dada por:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i} \right]^2 > 0$$

É possível expandir a função da forma que:

$$S(a,b) = \frac{\overline{y^2} - 2a\overline{xy} - 2b\overline{y} + a^2\overline{x^2} + 2ab\overline{x} + b^2}{\sigma^2} > 0$$

onde

$$\frac{1}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{{\sigma_i}^2} \qquad\qquad \omega_i = (\frac{\sigma}{\sigma_i})^2 \rightarrow \sum_{i=1}^{N} \omega_1 = 1$$

Como σ^2 e $\overline{x^2} > 0$, os valores de a e b podem ser escritos como:

$$\begin{cases} a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sigma^2}{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i - \overline{x}}{\sigma_i^2} \\ \\ b = \overline{y} - a\overline{x} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2} y_i - a\overline{x} \end{cases}$$

As incertezas podem ser escritas como:

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_x^2} \quad e \quad \sigma_b^2 = \overline{x^2}\sigma_a^2$$

Para a minimalização:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \\ \\ \frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}(y_i - ax_i - b) = 0 \\ \\ \frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}(y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases}$$

Reescrevendo:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right) a + \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right) b = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \\ \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right) a + \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}\right) b = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{\sigma_i^2} \end{cases}$$

Podendo serem escritas como:

$$\overline{x^2}a + \overline{x}b = \overline{xy}$$

$$\overline{x}a + b = \overline{y}$$

Com isso:

$$a = \frac{\sigma_x y}{\sigma_x^2} \quad e \quad b = \overline{y} - a\overline{x} \qquad\qquad \sigma_a = \frac{\sigma}{\sigma_x} \quad e \quad \sigma_b = \sigma_a\sqrt{\overline{x^2}}$$

2 Exercício 2

Temos que a seção de choque é dada por:

$$\sigma = \frac{N_T - N_B}{\mathcal{L}}$$

onde N_T é o número total de eventos, N_B é o número de eventos esperados e (L) é a luminosidade integrada. Temos:

$N_T = 2567$, $N_B = 1223,5$ e $\mathcal{L} = 25\text{fb}^{-1}$

Para a seção de choque temos:

$$\sigma = \frac{2567 - 1223,5}{25} = 53,74\text{fb}$$

Para a incerteza estatística, temos:

$$\Delta\sigma_{est}^2 = \frac{\sqrt{N_T + N_B}}{\mathcal{L}}$$

Onde encontramos:

$$\Delta\sigma_{est}^2 = \frac{\sqrt{2567 + 1223,5}}{25} = \frac{61,5670}{25} = 2,46\text{fb}$$

Para a incerteza sistemática: $\frac{1}{10}\sigma$, com isso:

$$\sigma_{sist} = 5,374\text{fb}$$

Logo, a seção de choque será:

$$\sigma = (53,74 \pm 2,46 \pm 5,374)\,\text{fb}$$

3 Exercício 3

A distribuição de Poisson é dada por:

$$P(n;s,b) = \frac{(s+b)^n e^{-(s+b)}}{n!}$$

Temos que n=0 e b=0,07, logo:

$$P(0;s,0,7) = e^{-(s+0,07)}$$

Para P(0;s,0,07)$\geq 0,05$:

$$e^{-(s+0,07)} \geq 0,05$$

Aplicando o logaritmo natural:

$$-(s+0,07) \geq -ln(0,05)$$
$$-s-0,07 \geq -2,9957$$
$$s \approx 2,9257$$

Se tratando de um número inteiro de eventos, podemos definir:

$$s = 3\ \ eventos.$$

4 Exercício 4

A função é definida por:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - f(x_i))^2}{\sigma_i^2}$$

É esperado que quanto mais próximo o valor da média de χ^2 se aproxime do número de graus de liberdade *ndf*, melhor seja o ajuste em relação aos dados obtidos, com isso o ideal é que haja o comportamento de:

$$\frac{\chi^2}{ndf} \to 1$$