UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE TECNOLOGIA
CURSO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

TÓPICOS DE APOIO A DISCIPLINAS DE SEMESTRES INICIAIS

MTM1019 - CÁLCULO “A”

MAPLE 12

professores:

Profª. Drª. Andrea Schwertner Charão (tutora do PET-CC)
Prof. Dr. Marcelo Yutaca Noguti (titular da disciplina apoiada)

ministrantes:

Fernando Lima Rivas (colaborador PET-CC)
Frederico Artur Limberger (bolsista PET-CC)
Larissa Rodrigues Lautert (bolsista PET-CC)

Santa Maria, maio de 2009.

Sumário

1. Objetivos Gerais e Específicos

Esta apostila foi elaborada com o objetivo de servir como material didático complementar, e para consultas futuras, quando do desenvolvimento da atividade de ensino **Tópicos de Apoio a Disciplinas de Semestres Iniciais – Cálculo A**, do curso de **Ciência da Computação**, sendo desenvolvida pelo **PET-CC,** no âmbito da **UFSM**.

Especificamente, selecionou-se informações básicas sobre o software **Maple 12**, de modo que este material seja útil no entendimento dos conceitos envolvendo o Cálculo Diferencial e Integral, juntamente com a utilização de uma ferramenta computacional.

2. Informações Iniciais

2.1 Computação Numérica

Envolve as quatro operações aritméticas básicas, e também cálculos de valores de funções matemáticas e operações sofisticadas como cálculo de raízes de um polinômio ou dos autovalores de uma matriz, sendo que tanto os dados iniciais quanto os finais (que podem não ser exatos, por exemplo 1/3 “1 dividido por 3”) são **números**.

2.2 Computação Algébrica (Simbólica)

Representa os objetos matemáticos por **símbolos**, não necessariamente numéricos. Esses símbolos podem representar números inteiros, números racionais, números complexos, números algébricos e também estruturas mais complexas e abstratas como polinômios, matrizes, sistemas de equações, grupos, anéis, etc.

O objetivo é obter resultados exatos, fórmulas “fechadas”, baseadas nas regras usuais da Álgebra. Por exemplo, um programa de Computação Algébrica efetua cálculos com a raiz quadrada de dois sem a necessidade de representá-la em forma decimal aproximada. Em vez de se preocupar com aproximações numéricas, o programa conhece as regras e propriedades algébricas dos objetos envolvidos. Ele sabe que o objeto “raiz quadrada de dois” é positivo e que elevado ao quadrado resulta dois e isso basta para efetuar cálculos em inúmeras situações. Um programa de Computação Algébrica também percebe que a soma X + X tem como resultado 2X, sem ser necessário atribuir um valor numérico para X.

No Brasil, a computação algébrica vem sendo utilizada desde a década de 80.

2.3 Sistemas de Computação Algébrica (Sistemas de Manipulação Simbólica)

É o programa ou conjunto de programas relacionados com a disciplina de **Computação Algébrica**, também conhecida como **Computação Simbólica**, **Álgebra Computacional**, **Manipulação de Fórmulas** ou **Manipulação Simbólica**.

Áreas da ciência e da tecnologia em que a Computação Algébrica vem sendo utilizada: **Mecânica Celeste**, **Acústica**, **Relatividade Geral**, **Química**, **Teoria dos Números**, **Teoria dos Grupos**, **Análise Numérica**, **Robótica**, **Metalurgia**, etc.

São divididos em duas categorias:

2.3.1 Sistemas de Uso Específico

Desenvolvidos para resolver problemas em áreas específicas da Física ou da Matemática. Exemplos: **SHEEP** (para Teoria da Relatividade Geral), **CAMAL** (para Mecânica Celeste), **GAP** (para Teoria dos Grupos e o Macaulay para Geometria Algébrica);

2.3.2 Sistemas de Uso Geral

Possuem não só recursos **algébricos**, mas também podem incorporar recursos **numéricos** ou **gráficos**, além de serem verdadeiras linguagens de programação para cálculos analíticos. Possuem grande número de funções e operações matemáticas de modo a permitirem que seus usuários obtenham prontamente respostas analíticas para cálculos envolvendo fatorações, trigonometria, logaritmos, polinômios, limites, derivadas, integrais, equações diferenciais, sistemas de equações, séries de potências, transformadas de Laplace, transformadas de Fourier, cálculo matricial, formas diferenciais, etc.

Exemplos:

- **Reduce:** um dos mais antigos sistemas de uso geral, surgiu no final dos anos 60;
- **Derive:** um dos menores e mais eficientes sistemas já criado. Nos anos 80 chamava-se **MuMATH**;
- **Mathematica:** o primeiro a incorporar recursos algébricos, numéricos, gráficos e funcionar também como linguagem de programação. É um dos atuais grandes sistemas de uso geral;
- **Maple:** é o objeto de estudo desta atividade;

3. Maple

3.1 Histórico

Começou a ser desenvolvido em 1981 pelo Grupo de Computação Simbólica na Universidade de Waterloo em Waterloo, no Canadá, província de Ontário.

Desde 1988 tem sido desenvolvido e comercializado pela **Maplesoft**, uma companhia canadense também baseada em Waterloo.

3.2 Características

É um **software proprietário**, tendo uma versão para estudantes. Esta não contêm limitações computacionais, mas há menos documentação impressa, disponível eletronicamente. É o mesmo que acontece com a diferença entre as edições de estudante e profissional do **Mathematica**.

Versão atual: Maple 13.0.

Gênero: Sistema de Álgebra Computacional - esta expressão deve-se ao fato de que o Maple permite ao usuário fazer cálculos não somente com números, mas também com símbolos, fórmulas, expressões, equações e assim por diante. Pode-se usar essa capacidade simbólica para obter soluções analíticas exatas para muitos problemas matemáticos, por exemplo, diferenciação, integração, sistemas de equações, expansão de funções em séries, problemas em Álgebra Linear, etc. Sistemas de computação algébrica, em particular o Maple, são poderosas ferramentas para estudiosos em matemática, matemática quântica, modelagem estatística e análise de dados, ótica, criptografia, ciência computacional (informática), astrofísica, física, química, biologia, engenharia, enfim, para todos aqueles que necessitam de respostas rápidas e precisas para determinados problemas matemáticos.

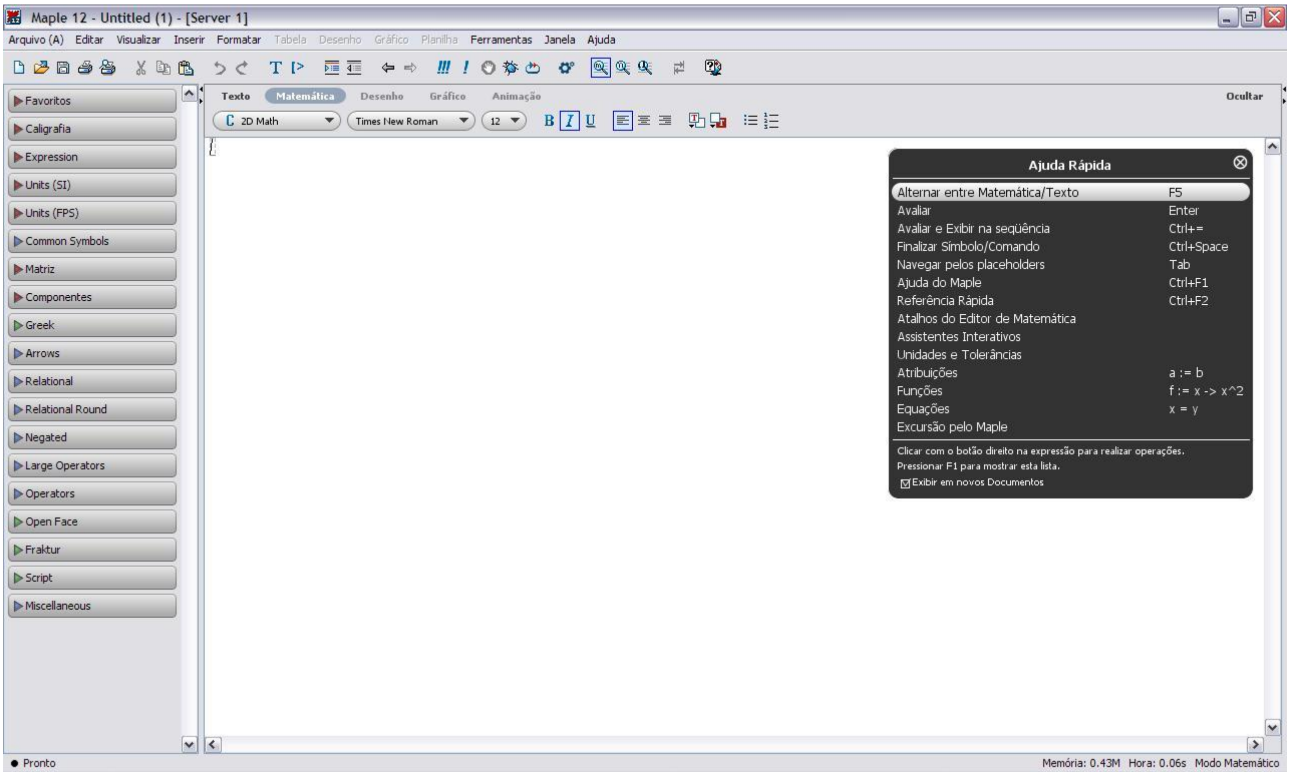
Sistema Operacional: multiplataforma.

Quando o Maple é iniciado ele carrega o seu **núcleo (kernel)**. Este, corresponde a 10% do programa e foi elaborado em **linguagem C**. É ele quem faz as operações aritméticas básicas, interpreta os comandos digitados e mostra resultados. A parte do programa que não faz parte do núcleo, cerca de 90% do total, foi escrito na própria linguagem do Maple e consiste de duas partes: a **biblioteca principal** e um conjunto de vários **pacotes (packages)** separados. Assim como os comandos que fazem parte do núcleo, os comandos da biblioteca principal são carregados automaticamente na hora da inicialização e estão prontos para serem usados.

3.3 Layout

Nesta atividade utilizaremos o **Maple 12**. Ao abrirmos o software primeiramente nos é apresentada a **worksheet (prompt ou folha de trabalho)**, na qual podemos acionar funções do aplicativo, produzir textos, hipertextos, cálculos, obter gráficos e animações, etc. A interface gráfica deste aplicativo não oferece dificuldades para os usuários.

A seguir esta a captura de tela apresentando o software logo após ser aberto:



3.4 Regras e Comandos Básicos

3.4.1 Sintaxe

Acompanhando a evolução do software, a sintaxe dos comandos também foi modificada. Em versões anteriores, no início e no fim de toda instrução de cunho matemático era **obrigatório** o uso dos símbolos “**[>**” e “**;**”, respectivamente. Porém, **no Maple 12 isto não é mais necessário**, e mesmo quando utilizados o software aceitará normalmente. A utilização do “**:**” ao final de um comando continua com o mesmo fim, ou seja, quando desejamos que um determinado comando seja guardado na memória do Maple e não exibido na tela.

Exemplos:

1) >7+5; R.: Error, invalid >
2) >7+5 R.: Error, invalid >
3) >7+5: R.: Error, invalid >
4) [>7+5 R.: 5
5) [>7+5; R.: 5
6) [>7+5: R.: o valor 5 é copiado na memória
7) 7+5 R.: 5
8) 7+5; R.: 5
9) 7+5: R.: o valor 5 é copiado na memória

3.4.2 Operações Básicas

! fatorial
^ potenciação
/ divisão
*** multiplicação**
+ adição
- subtração

As operações acima já estão na ordem de precedência (de cima para baixo), ou seja, o Maple realiza primeiro:

Exemplos:

1) 4^2*1+10 R.: 26
2) (11*4^5)/(-5+14*3) R.: 11264/27
3) 2+2-8*3/2 R.: -8

PS: no caso do exemplo 3), o Maple efetua primeiro a divisão 3/2, multiplica o resultado por 8, efetua a soma 2+2, e por último efetua a subtração 4-12;

Pode-se utilizar parênteses **( )** , sendo que assim modifica-se a ordem de precedência. Porém, colchetes **[ ]** e chaves **{ }** devem ser evitados para este fim.

Exemplos:

1) (2+2-8)*3/2 R.: -6
2) {2+2-8*3}/2 R.: 1/2*{-20}

3.4.3 Representação Decimal

Quando se realiza operações numéricas, a menos que os tipos numéricos sejam **float** (números em representação decimal) o Maple retorna sempre o resultado exato na forma simbólica.
Exemplos:

1) 1/2+5; 30/9; Pi; exp(2); ln(2) R.: 11/2, 10/3, p, e^2, ln(2)

Em alguns casos para se obter o número na **forma decimal** basta acrescentar um ponto após o número. Isso faz com que o Maple leia o número em aritmética de ponto flutuante.
Exemplos:

1) 1/2+5.; 30./9; ln(2.) R.: 5.500000000, 3.33333333, 0.6931471806

Uma forma mais geral é usar o comando **evalf** (avaliar como ponto flutuante) para se obter uma representação decimal de um número. Por default o sistema utiliza dez algarismos significativos.
Exemplo:

1) evalf(176/47) R.: 3.744680851

3.4.4 Último Valor Calculado

O símbolo **"%"** apresenta o último valor calculado na forma de número decimal. É utilizado em conjunto com o comando evalf
Exemplos:

1) 1/3 R.: 1/3;
2) evalf(%) R.: .3333333333;

3.4.5 Vários Comandos em Uma Mesma Linha (ou Um Mesmo Comando em Várias Linhas)

No caso de utilizar-se vários comandos em uma mesma linha deve-se separá-los por "**;**".
Exemplo:

1) 1+2; 2+3; 3+4 R.: 3 5 7

PS: um mesmo comando pode utilizar várias linhas, desde que em um único **colchete**;

3.4.6 Help

O sistema de ajuda por ser acessado pelo botão **help** presente na **barra de menus**, ou digitando-se o sinal **?** seguido da expressão da qual se deseja informação.
Exemplo:

1) ?limit R.: o Maple apresentada informações variadas sobre o comando **limit**

3.4.7 Mensagens de Erro

Ao encontrar uma falha em um comando o Maple responde com uma mensagem de erro. Na mensagem vem indicado o **tipo de falha**, e **o cursor localiza a primeira falha**. Os principais erros são: **sintaxe inadequada**, como equívoco na digitação, nome incorreto do comando, uso de palavras reservadas, ou ainda **erro de domínio de funções matemáticas**, **cálculos que excedem a capacidade de memória ou de computação do sistema ou aplicativo**, etc.

Exemplos:

1)7/0 R.: Error, numeric exception: division by zero
2) 6*-1; R.: Error, invalid product/quotient
3) tan(Pi/2) R.: Error, (in tan) numeric exception: division by zero
4) 1234567890^9876543210; R.: Error, numeric exception: overflow

3.4.8 Comentários

O que está após o símbolo **"#"** o programa **ignora (desconsidera)**. Isto é útil para o usuário escrever comentários para consultas futuras, como por exemplo, o significado do comando que está usando.

Exemplo:

1) 33! #fatorial de 33 R.: 8683317618811886495518194401280000000

3.4.9 Atribuições

Uma atribuição ocorre utilizando-se o símbolo "**:=**", **A:=B**. Significa que o lado direito B é a definição do lado esquerdo A, ou seja, atribui-se B a A, ou também, A vale B.

Exemplos:

1) A1:=x*sqrt(7) R.: $A1 := x\sqrt{7}$
2) A1^2 R.: $7x^2$

3.4.10 Operações Simbólicas

São realizadas através dos comandos **expand** (expandir), **factor** (fatorar) e **simplify** (simplificar).

Exemplos:

1) A2:=(x^3*y+x^3-y^4-y^3)/(y+1) R.: $A2 := \dfrac{x^3 y + x^3 - y^4 - y^3}{y+1}$
2) simplify(A2) R.: $-y^3 + x^3$
3) A3:=factor(A2) R.: $A3 := (x-y)(x^2 + xy + y^2)$
4) expand(A3) R.: $-y^3 + x^3$

3.4.11 Resolvendo Equações e Sistemas

O comando **solve** serve para **resolver** equações e sistemas diversos.
Exemplos:

1) equa1:=x^3+3*x^2-4=0 R.: $equa1 := x^3 + 3x^2 - 4 = 0$
solve(equa1) R.: 1,-2,-2

Quando a equação possui mais de uma variável, é fundamental indicar ao sistema a incógnita do problema.
Exemplos:

1) equa2:=2*x+y=0 R.: $equa2 := 2x + y = 0$
2) solve(equa2,x) R.: (-1/2)y
3) solve(equa2,y) R.: -2x

3.4.12 "Zerando" a Memória

Através do comando **restart** a memória do Maple é **"zerada**", ou seja, qualquer dado que está arqmazenado é apagado, por exemplo, atribuições a variáveis.
Exemplo:

1) restart # após o enter não aparecerá nada na tela, porém a tudo que havia na memória foi apagado.

3.5 Tópicos de Cálculo

3.5.1 Construindo Funções

Para definir-se uma função de uma variável primeiramente escolhe-se um nome para a mesma, por exemplo "**f**". Após, digita-se o nome seguido do comando de atribuição "**:=**". A seguir digita-se o nome da variável, depois o comando de transformação "**->**". Finalmente digita-se a lei de formação da função propriamente dita.

f:=(variáveis) -> (expressão contendo variáveis)

Exemplos:

1) f := x -> (x^2)*sin(x) R.: $f := x \rightarrow x^2 \sin(x)$
2) g:=t->2+t^2+3*t^3+6*t^4 R.: $g := t \rightarrow 2 + t^2 + 3t^3 + 6t^4$

Após a entrada das expressões das funções, elas ficam memorizadas e podem ser chamadas a qualquer instante, bastando digitar o nome da função e o ponto ou a variável que se quer calcular a função.
Exemplos:

1) f(x) R.: $x^2 \sin(x)$
2) g(2.76) R.: 420.8583066

Caso o usuário entre com uma nova função com um nome já utilizado, a primeira atribuição do nome será apagada da memória e só ficará disponível a nova definição da função.

3.5.2 Funções Usuais (Elementares)

O Maple reconhece uma grande variedade de funções.
Exemplos:

1) exp(x) # função exponencial
2) abs(x) # função modular
3) sin(x) # função seno   Exemplo: solve(sin(Pi)) R.: 0
4) cos(x) # função cosseno   Exemplo: solve(cos(Pi)) R.: -1
5) tan(x) # função tangente
6) sec(x) # função secante
7) csc(x) # função cossecante
8) cot(x) # função cotangente
9) arcsin(x) # função arcoseno
10) arccos(x) # função arcocosseno
11) log10(x) # função logaritma
12) ln(x) # função logaritmo natural (neperiano)

3.5.3 Gráficos de Funções 2D

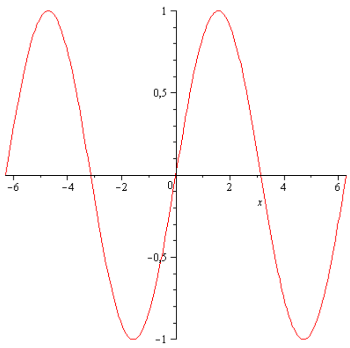
Seja uma função qualquer de uma variável y=f(x). o comando para traçar o gráfico de f é **plot**, o qual possui algumas variações e sua sintaxe dependendo do que se deseja traçar. A sintaxe básica é a seguinte:

plot (f,h,v,ops) ,onde:

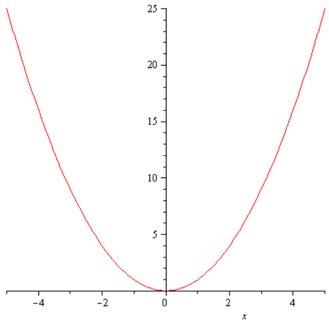
f = expressão ou nome da função;
h = intervalo no eixo das abscissas (eixo x);
v = intervalo no eixo das ordenadas (eixo y);
ops = opções de visualização e formatação;

Os parâmetros **f** e **h** no comando plot são **obrigatórios**, enquanto que os parâmetros **v** e **ops** são **opcionais**.
Exemplos:

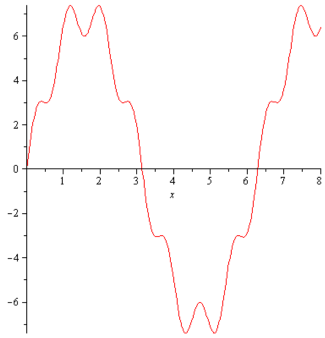
1) plot(sin(x),x=-2*Pi..2*Pi) R.:



2) plot(x^2,x=-5..5) R.:



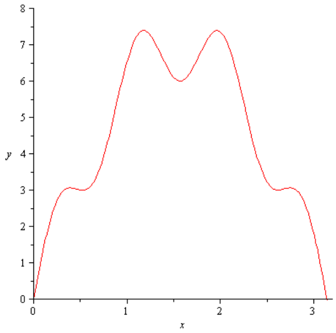
3) f:=x->7*sin(x)+sin(7*x) R.:
plot(f(x),x=0..8)



Quando o parâmetro v não é colocado o Maple automaticamente atribui ao “eixo y” o maior e o menor dos valores funcionais correspondentes ao intervalo h. O parâmetro v é útil quando deseja-se focalizar determinadas partes do gráfico.

Exemplo:

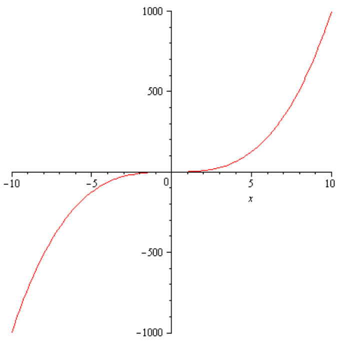
1) plot(f(x),x=0..3.2,y=0..8) R.:



Uma outra situação em que é conveniente atribuir uma variação no parâmetro v, é quando se deseja modificar a escala do gráfico.

Exemplo:

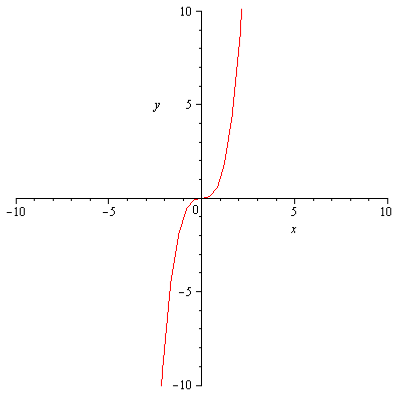
1) plot(x^3,x=-10..10) R.:



O gráfico está completamente fora de escala. Podemos contornar este problema atribuindo uma variação conveniente no parâmetro v.

Exemplo:

1) plot(x^3,x=-10..10,y=-10..10) R.:



3.5.3.1 Relembrando o Conceito de Parametrização

Uma curva plana é um conjunto C de pares ordenados da forma (f(t),g(t)) onde as funções f e g são contínuas em um intervalo **I**. O gráfico da curva C é o conjunto de todos os pontos do plano cartesiano que são da forma P(t)=(f(t),g(t)), onde t varia em **I**. As equações x=f(t) e y=g(t), onde t∈ I, são chamadas **equações paramétricas** de C, e **t** é o **parâmetro**.

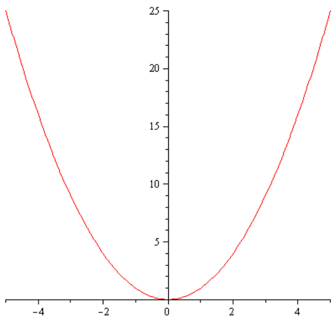
Para traçarmos o gráfico de uma curva na forma paramétrica no Maple, utilizamos a seguinte sintaxe:

plot([f(t),g(t),t=a..b],h,v,ops) ,onde:

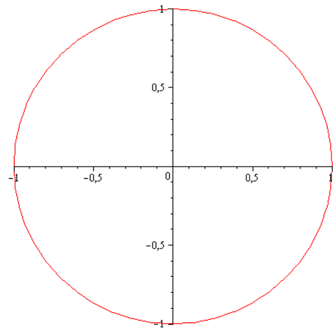
f e **g** = funções contínuas (que dependem do parâmetro t) no intervalo de variação de t;
t = a..b é o intervalo de variação de t;
h, **v** e **ops** = opções já vistas anteriormente, no caso de gráficos de funções (itens opcionais).

Exemplos:

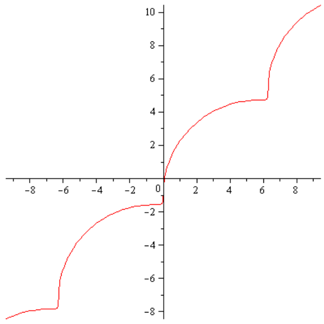
1) plot([t,t^2,t=-5..5]) R.:



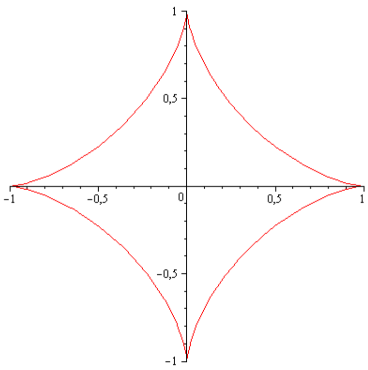
1) plot([cos(t),sin(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained) R.:



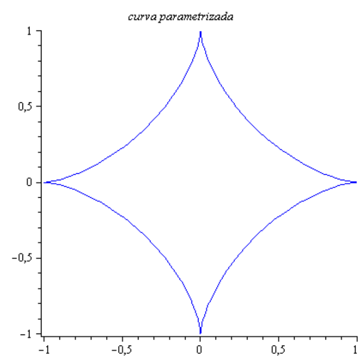
3) plot([t-sin(t),t-cos(t),t=-3*Pi..3*Pi]) R.:



4) plot([cos(t)^3,sin(t)^3,t=-Pi..Pi]) R.:



5) plot([cos(t)^3,sin(t)^3,t=-Pi..Pi],
color=blue,axes=framed,title='curva parametrizada') R.:

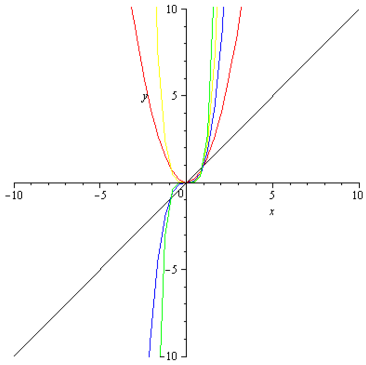


É possível no Maple traçar diversos gráficos de funções de uma só vez, ou seja, em uma única tela. Para isso, basta usar o comando plot colocando, no espaço reservado para a função,uma lista de funções, ou seja:

plot([f1,f2,...,fn],h,v,ops)

Exemplo:

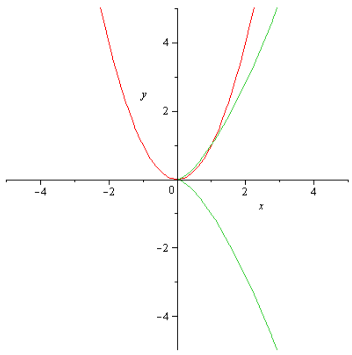
1) plot([x,x^2,x^3,x^4,x^5],x=-10..10,y=-10..10, color=[black,red,blue,yellow,green]) R.:



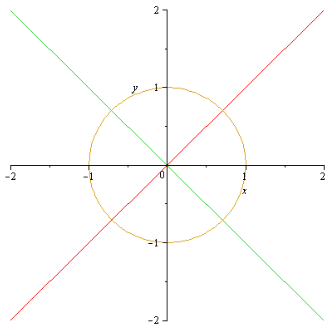
Também é possível utilizando a mesma sintaxe acima, “misturar” gráficos de funções com gráficos de curvas dadas pelas suas equações paramétricas.

Exemplos:

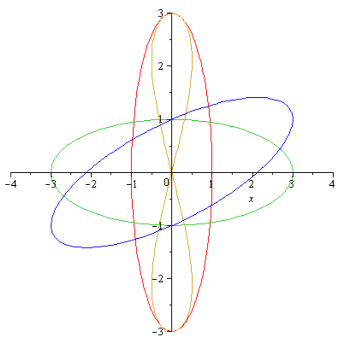
1) plot([x^2,[t^2,t^3,t=-5..5]],x=-5..5,y=-5..5) R.:



2) plot([x,-x,[sin(x),cos(x),x=0..2*Pi]],x=-2..2,y=-2..2) R.:



3) plot([[sin(x),3*cos(x),x=0..2*Pi], [3*sin(x),cos(x),x=0..2*Pi],[sin(x)*cos(x), 3*cos(x),x=0..2*Pi],[3*sin(x),cos(x) +sin(x),x=0..2*Pi]],x=-4..4) R.:



3.5.4 Gráficos de Funções 3D

Este tópico é parte integrante da atividade de **Tópicos de Apoio a Disciplinas de Semestres Iniciais – Cálculo "B"**, a ser ministrada no próximo semestre, portanto faz-se nesta oportunidade uma pequena abordagem.

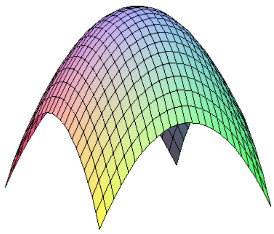
O gráfico de uma função de duas variáveis reais x e y, definida por uma expressão algébrica f(x,y), pode ser construído com o comando:

plot3d(f(x,y),x=a..b,y=c..d,op1,op2,..) ,onde:

f(x,y) = função real
x=a..b = variação da variável 1
y=c..d = variação da variável 2
op1,**op2**,.. = outras opções

Exemplo:

1) plot3d(-x^2-y^2,x=-2..2,y=-2..2)
R.: Parabolóide Hiperbólico



3.5.5 Limites

3.5.5.1 Comandos limit e Limit

Para funções reais de uma variável a sintaxe básica no cálculo de limites é a seguinte:

limit(f(x),x=a) ,onde:

f(x) = função qualquer de uma variável;
x=a = faz o papel de $x \to a$ na simbologia usual de limites utilizada na literatura, ou seja, a deve ser o valor para o qual x se torna cada vez mais próximo.

Pode-se também trabalhar com **limites no infinito**: **x = infinity** ($x \to \infty$) ou **x = -infinity** ($x \to -\infty$).

Se o comando **limit** for colocado com inicial maiúscula **Limit**, o Maple retornará a expressão simbólica de limites utilizada usualmente sem calculá-la.
Exemplos:

1) Limit(x+1,x=1) R.: $\lim_{x \to 1} (x+1)$

2) limit(x+1,x=1) R.: 2

No caso de o limite não existir o Maple dá como resposta **undefined**.

Em determinados casos o Maple também calcula o limite mesmo se a função contiver certos parâmetros indefinidos.

Exemplos:

1) g:=x->(x^(1/n)-a^(1/n))/(x-a) R.: $g := x \rightarrow \dfrac{x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}}}{x - a}$

Limit(g(x),x=a) R.: $\lim_{x \to a} \dfrac{x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}}}{x - a}$

limit(g(x),x=a) R.: $\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{a\, n}$

2) f := (x^2+5)/(x^3) R.: $\dfrac{x^2 + 5}{x^3}$

Limit(f,x=1) R.: $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 5}{x^3}$

limit(f,x=1) R.: 6

3.5.5.2 Definição de Limite Utilizando o Maple

Primeiramente vamos recordar alguns conceitos sobre limite.

Observe a seguinte função: $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{4x - 8}$.

I) Qual o valor de f(2)?

$f(2) = \dfrac{(2)^3 - 2.(2)^2}{4.(2) - 8} = \dfrac{8 - 8}{8 - 8} = \dfrac{0}{0} = \notin$, então a função f não está definida em $a = 2$ para $Dm(f) = \Re - \{2\}$.

II) O que acontece com os valores de f(x) a medida que x se aproxima cada vez mais de 2?

x	f(x)	x	f(x)
1,9	0,9025	2,1	1,1025
1,99	0,990025	2,01	1,010025
1,999	0,99900025	2,001	1,00100025
1,9999	0,9999000025	2,0001	1,0001000035
1,99999	0,99999000	2,00001	1,00001000001

Observando os valores acima somos tentados a afirmar que à medida que a variável x se aproxima cada vez mais de 2, os valores correspondents se aproximam cada vez mais de 1.

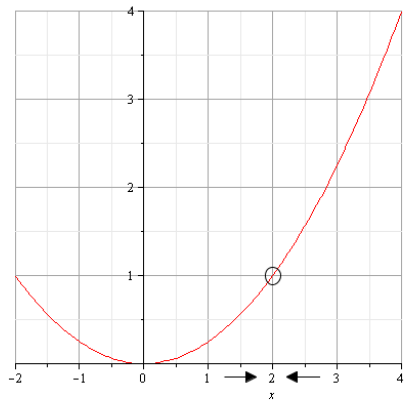
Matematicamente este fato é verdadeiro e representado pela expressão:

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^3 - 2x^2}{4x - 8} \right) = 1$$

Notação: a expressão $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ é lida como: **"limite de quando** x **tende a** a **da função** $f(x)$ **é o número** α **"**, e tem o seguinte significado: **"à medida que a variável** x **se aproxima cada vez mais do número** a**, os valores de** $f(x)$ **se aproximam cada vez mais de** α **"**.

Aproveitando o Maple, a seguir faz-se a ilustração gráfica do exemplo acima:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{4x - 8} = \frac{x^2.(x-2)}{4.(x-2)} = \frac{x^2}{4}, x \neq 2$$

Graficamente: 

3.5.6 Derivadas

3.5.6.1 Comandos diff e Diff

Quando estamos lidando com funções de uma variável podemos calcular suas derivadas através do Maple. A sintaxe básica para o cálculo da derivada de uma função f é a seguinte:

diff(f(x),x) ,onde:

f(x) = função ou expressão que se deseja obter a derivada;
x = variável em relação a qual se deseja obter a derivada;

De forma análoga ao que ocorre com o commando de limite se colocarmos o commando diff iniciando com letra maiúscula teremos a derivada na forma simbólica, ou seja, o cálculo não é efetuado.

Exemplos:

1) Diff(x^5-2*x^3+3*x,x) R.: $\frac{d}{dx}\left(x^5 - 2x^3 + 3x\right)$

2) diff(x^5-2*x^3+3*x,x) R.: $5x^4 - 6x^2 + 3$

3) Diff(x^(sin(3*x)),x) R.: $\frac{d}{dx} x^{\sin(3x)}$

4) diff(x^(sin(3*x)),x) R.: $x^{\sin(3x)}\left(3\cos(3x)\ln(x) + \frac{\sin(3x)}{x}\right)$

5) Diff((1+1/x)^x,x) R.: $\frac{d}{dx}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

6) diff((1+1/x)^x,x) R.: $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}\right)$

3.5.6.2 Derivada de Ordem Superior

No Maple para calcularmos derivadas de ordem superior, ou seja f', f'',...,$f^{(n)}$, utilizamos a seguinte sintaxe:

diff(f(x),x$n) ,onde:

x$n = número de vezes que aplica-se a derivada;

Exemplos:

1) diff(1/x,x$4) # derivada quarta R.: $\frac{24}{x^5}$

2) diff(cos(x),x$3) # derivada terceira R.: $\sin(x)$

3) diff(sqrt(x),x$4) # derivada quarta R.: $-\frac{15}{16x^{7/2}}$

3.5.6.3 Definição de Derivada Utilizando o Maple

Primeiramente, avalia-se o seguinte exemplo:

Seja $f(x) = x^2$. Pergunta-se: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = ?$

Fazendo-se os cálculos:

$$f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$
$$f(x) = x^2$$

$f(x+h)-f(x)=x^2+2xh+h^2-x^2=2xh+h^2$

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{2xh+h^2}{h}=2x+h$,então:

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$. Isto significa que a derivada de x^2 é $2x=f'(x)$.

A seguir, os mesmos conceitos acima, porém de uma forma mais teórica e utilizando-se o Maple.

Seja uma função y=f(x) definida em um conjunto $I\subset\Re$. A derivada da função f em um ponto $x_0\in I$ é o limite, se existir, dado por:

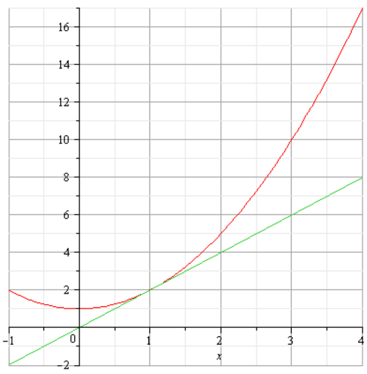
$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Caso o limite exista, sera indicado por $f'(x_0)$ **"a derivada da função f no ponto** x_0**".**

O significado geométrico de $f'(x_0)$ é o **coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de** f **em** $(x_0, f(x_0))$**.**

Exemplo:

1) No gráfico abaixo tem-se $f(x)=x^2+1$ (gráfico em vermelho), e $f'(x)=2x$ (gráfico em verde). Pode-se observer que o gráfico verde "toca" o gráfico vermelho em $x=1$, ou seja, $f'(x)=2x$ é tangente ao gráfico de $f'(x)=2x$ em $x=1$.

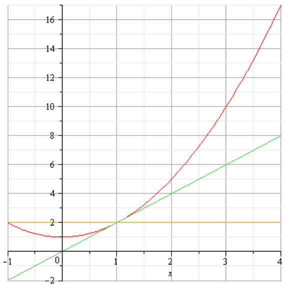


3.5.6.4 Gráfico da Função e Derivadas no Mesmo Conjunto de Eixos Coordenados

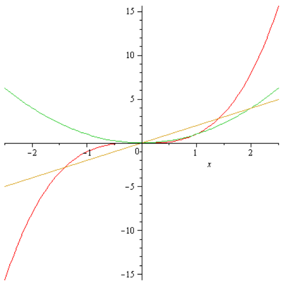
Para melhor visualizar-se graficamente é conveniente plotar o gráfico de uma função e o de suas derivadas (primeira e segunda), no mesmo conjunto de eixos cartesianos.

Exemplos:

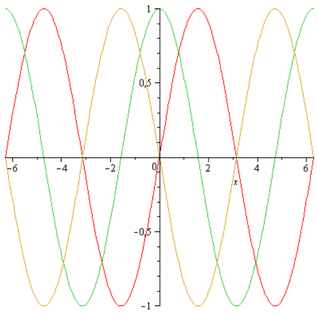
1) plot([x^2+1,2x,2],x=-2.5..2.5) R.:



2) plot([x^3,x^2,2x],x=-2.5..2.5) R.:



3) plot([sin(x),cos(x),-sin(x)],x=-2*Pi..2*Pi) R.:



3.5.7 Integrais

3.5.7.1 Comandos int e Int

Dada uma função f de uma variável podemos utilizar o Maple para o cálculo da integral de f. Os comandos são os seguintes:

integral indefinida: int(f(x),x) e **integral definida: int(f(x),x=a..b)** ,onde:

f(x) = função ou expressão a ser integrada;
x = variável de integração;
x=a..b = limites de integração, no caso de integrais definidas;

Nos comandos acima, se o Maple encontra uma solução para a integral ele automaticamente retorna a solução. Caso não seja possível encontrar a solução o Maple retorna a própria expressão digitada na forma simbólica. Aliás, para se obter a integral na forma simbólica usual na matemática basta colocar os comandos com a letra inicial em maiúscula, tanto na integral definida como na indefinida.

Exemplos:

1) Int(x^n,x)= int(x^n,x) R.: $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

2) int(exp(n*x),x) R.: $\frac{e^{n x}}{n}$

3) int(1/x,x) R.: $\ln(x)$

4) int(sqrt(a^2+u^2),u) R.: $\frac{1}{2} u \sqrt{a^2+u^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln\left(u + \sqrt{a^2+u^2}\right)$

5) int(x^2/((a+b*x)^2),x) R.: $\frac{x}{b^2} - \frac{2 a \ln(a+b x)}{b^3} - \frac{a^2}{b^3 (a+b x)}$

6) int(u^6*cos(u),u) R.: $u^6 \sin(u) + 6 u^5 \cos(u) - 30 u^4 \sin(u) - 120 u^3 \cos(u) + 360 u^2 \sin(u) - 720 \sin(u) + 720 u \cos(u)$

Podemos perceber que a presença de constantes no integrando é perfeitamente possível, daí a necessidade de se indicar a variável de integração. Nos exempos acima todas as integrais são indefinidas, e podemos notar também que o Maple não exibe a constante de integração.

Exemplos:

1) int((x^2+2*x)/(x^4+3*x^2+x),x=-0.2..3) R.: 2.224034346

2) int(sqrt(x),x=0..4) R.: $\frac{16}{3}$

3) int(x^3/(16+x^4),x=-2..2) R.: 0

3.5.7.2 Definição de Integral Utilizando o Maple

Os conceitos relacionados a **Somas de Riemann** e **Integrais** também podem ser abordados com o auxílio do Maple. A seguir estão alguns conceitos iniciais que podem ser abordados com o auxílio deste aplicativo:

Consideremos um função $f:[a,b] \to \Re$ e uma subdivisão do interval $[a,b]$ em n partes $[x_{i-1}, x_i], i = 1,2,..,n$ tais que $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Sejam $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento de c_i um ponto qualquer do i-ésimo subintervalo. A soma abaixo é chamada Soma de Riemann:

$$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + ... + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Quando f é positive em $[a,b], n \to \infty$ e os comprimentos $\Delta x_1 \to 0$, para todo i, então a Soma de Riemann tende à area de região delimitada pelo gráfico $y = f(x)$, pelas retas $x = a$, $x = b$ e pelo eixo dos x. Essa area é numericamente igual à integral de $f(x)$ no interval $[a,b]$.

O pacote **“student”** do Maple possui seis funções relacionadas com as Somas de Riemann de uma função $f(x)$ em um interval $[a,b]$. Duas delas são:

Comando **middlesum(f(x),x=a..b,n)**, onde:

f(x) = função;
x=a..b = interval de representação no eixo x;
n = número de subdivisões;

Forma inercial da Soma de Riemann, com n subintervalos de comprimentos iguais, e que escolhe cada c_i como sendo ponto médio de cada subintervalo.

Comando **middlebox(f(x),x=a..b,n)**

Constrói um gráfico relacionado com o middlesum.

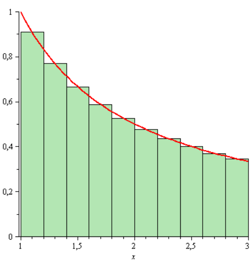
Exemplo:

1) Seja $f:[1,3]\to\Re$ definida por $f(x)=1/x$. Construir o gráfico e calcular a soma de Riemann de f com 10 subintervalos, escolhendo o ponto médio de cada subintervalo.

Para a resolução deste exemplo deve-se carregar o pacote "with(student)", dando o seguintes comandos:

with(student): # carrega o pacote student

middlebox(1/x,x=1..3,10) R.:



s:=middlesum(1/x,x=1..3,10) R.: $\frac{1}{5}\sum_{i=0}^{9}\frac{1}{\frac{11}{10}+\frac{1}{5}i}$

value(s) R.: $\frac{159708887504}{145568097675}$

evalf(s) R.: 1.097142094

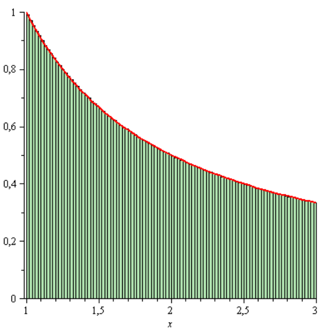
'ln(3)'=ln(3.0) R.: $ln(3) = 1.09861228$

Observa-se que o resultado obtido é próximo de ln(3), que é valor dessa area. Aumentando-se a quantidade de subintervalos para 100, a soma obtida fica ainda mais próxima de ln(3):

s2:=middlesum(1/x,x=1..3,100) R.: $\frac{1}{50}\sum_{i=0}^{99}\frac{1}{\frac{101}{100}+\frac{1}{50}i}$

evalf(s2) R.: 1.098597475

middlebox(1/x,x=1..3,100) R.:



Quando , o limited a Soma de Riemann com n subintervalos é igual a ln(3), ou seja, é igual à integral de 1/x no interval [1,3].

Limit(middlesum(1/x,x=1..3,n),n=infinity) R.: $\lim_{n \to \infty} \frac{2 \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{2\left(i + \frac{1}{2}\right)}{n}} \right)}{n}$

s:=value(%) R.: $\ln(3)$

Portanto, o valor exato da area é ln(3).

4. Referências

4.1 Referências Utilizadas na Elaboração da Apostila

4.1.1 Referências Impressas

- SWOKOWSKI, Earl W., **Cálculo Com Geometria Analítica**, Volume 1, Editora Saraiva;
- na UFSM há livros sobre Maple, porém a busca no site da biblioteca aponta apenas para livros antigos (de 1995 a 1998). Não utilizou-se nenhum destes livros devido estarem muito desatualizados e incompatíveis com a versão do software utilizada em aula (Maple 12);

4.1.2 Referências Digitais

- http://www.maplesoft.com/ - **Maple Software**;
- http://pt.wikipedia.org/wiki/Maple - **Wikipédia**, a enciclopédia livre;
- http://maple.thiagorodrigo.com.br/ - **ajuda em português sobre o Maple**, elaborada por Thiago Rodrigo Alves Carneiro, licenciado em Matemática pelo IME-USP, e coordenado pelo Prof. Alexandre M. Roma (MAP-IME-USP);
- http://www.mat.ufpb.br/lenimar/ - site pessoal do prof. da UFPB, Lenimar Nunes de Andrade. Deste site utlizou-se 2 apostilas:
1) http://www.mat.ufpb.br/lenimar/ermac.pdf - apostila: **Usando o Maple como uma Linguagem de Programação**, transparências utilizadas em um minicurso do III ERMAC (Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional), realizado na UFPB de 7 a 9 de agosto de 2003;
2) http://www.mat.ufpb.br/lenimar/ca.pdf - apostila: **Computação Algébrica**, texto superficial sobre Computacão Algébrica publicado no jornal paraibano "A UNIÃO" no dia 12/01/2002;
- http://www.symbolicnet.org - **Symbolic Mathematical Computation Information Center**. Possui conexões para cerca de 30 diferentes sistemas;
- http://www.lncc.br/~portugal/curso.pdf - apostila: **Introdução ao Maple**, Renato Portugal. Laboratório Nacional de Computação Científica: Petrópolis, RJ, 2002;
- http://www.matematica.ucb.br/sites/000/68/00000040.pdf - artigo: **Utilização do Software Maple no Ensino-Aprendizagem de Cálculo**, Vanessa Mariani;

4.2 Referências Apontadas em Mecanismos de Busca na Internet

- Andrade, Lenimar Nunes de; **Introdução à Computação Algébrica com o Maple**. Lançado em 07/2004 pela Sociedade Brasileira de Matemática, possui cerca de 250 páginas, foi elaborado de 12/2001 a 02/2002 e revisado em 04 e 05/2003. Seu objetivo é dar uma visão geral a respeito do Maple com muitos exemplos e exercícios;
- Santos, Angela Rocha dos; **Aprendendo Cálculo Com o Maple - Cálculo de Uma Variável**; Editora LTC;
- Gander, Walter; **Como Resolver Problemas em Computação Científica Usando Maple Matlab**; Editora Edgard Blucher;
- Mariani, Viviana Cocco; **Maple - Fundamentos e Aplicações**; Editora LTC;