Noções Básicas de Cálculo Diferencial e Integral com o Maple

Angela Mallmann Wendt, Fabrício Fernando Halberstadt, Fernanda Ronssani de Figueiredo[1] e Lauren Maria Mezzomo Bonaldo

PET Matemática, Curso de Matemática, Centro de Ciências Naturais e Exatas, UFSM, RS

[1] fernanda.ronssani@gmail.com

Antonio Carlos Lyrio Bidel

Curso de Matemática, Centro de Ciências Naturais e Exatas, UFSM, RS

bidelac@gmail.com

RESUMO

O estudo gráfico de elementos e situações-problema do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de graduação de matemática, por vezes, resume-se a poucos exemplos, devido às dificuldades que se encontram em desenhar manualmente funções mais complexas. Para isso, pretende-se nesse minicurso apresentar de forma sucinta os principais comandos e funções disponibilizados pelo software Maple, amplamente utilizado na visualização gráfica de funções matemáticas. Além disso, apresentar alguns problemas e discutir a sua interpretação gráfico-geométrica. Iniciaremos dando foco à plotagem e animação de gráficos de funções diversas no Maple em duas e em três dimensões. Nesta primeira parte, pretende-se trabalhar com funções clássicas como as funções seno, cosseno, cardióide, e curvas de nível, entre outras. Em seguida, serão estudados os comandos básicos para o cálculo e a plotagem de derivadas de funções bem como a interpretação geométrica desses cálculos. Num terceiro e último momento, serão abordados cálculos de integrais (definidas e indefinidas) simples, duplas e triplas no software.

Palavras-chave: Maple, Cálculo Diferencial e Integral, Gráficos, Derivadas, Integrais.

INTRODUÇÃO

Este minicurso foi desenvolvido pelos bolsistas do Grupo PET (Programa de Educação Tutorial) Matemática Angela Mallmann Wendt, Fabrício Fernando Halberstadt, Fernanda Ronssani de Figueiredo e Lauren Maria Mezzomo Bonaldo, sob orientação do Professor Tutor Antonio Carlos Lyrio Bidel, como uma proposta de qualificar a formação de bolsistas e acadêmicos na utilização de novas tecnologias aplicadas ao ensino e aprendizagem da matemática.

Neste minicurso serão abordados comandos básicos do MAPLE que podem ser utilizados no cálculo de limites, derivadas e integrais, plotagem de gráficos bidimensionais e tridimensionais, bem como animações para os mesmos.

Esta apostila contempla de forma sucinta e introdutória os principais recursos do MAPLE, uma vez que serve de apoio didático de um minicurso de curta duração.

1. COMANDOS BÁSICOS

No MAPLE, para realizar as operações básicas adição, subtração, multiplicação e divisão são usados os comandos +, -, * e /, respectivamente. De maneira geral, o Maple trabalha com números exatos na forma racional.

>(37*5+13/7)^2;

$$\frac{1710864}{49}$$

Para obtermos este resultado na sua forma decimal utiliza-se o comando *evalf*.

>(37*5+13/7)^2;

$$\frac{1710864}{49}$$

>evalf(%);

34915.591836734693878

>evalf[40](%%);

34915.59183673469387755102040816326530612

Observe que em *evalf [40](%%)* o número entre colchetes é o número de casas decimais. A quantidade de sinais de porcentagem remete ao cálculo efetuado anteriormente, por exemplo *evalf [40](%%)* representa a forma decimal do cálculo realizado há dois cálculos anteriores em *(37*5+13/7)^2*.

Outra forma de trabalhar com números decimais é a colocação de um ponto após um dos números constantes na operação.

>1./3;

0.3333333333

>(37*5+13./7)^2;

34915.59185

Para um número maior de casas decimais, deve-se defini-lo através do comando *Digits*.

>Digits := 20;

$$Digits := 20$$

>(37*5+13./7)^2;

34915.591836734693876

1.1. Algumas funções matemáticas no maple

Abaixo apresentamos uma pequena lista da sintaxe de algumas funções matemáticas no Maple:

- funções trigonométricas: *sin(x), cos(x), tan(x), cot(x), sec(x), csc(x);*
- funções trigonométricas inversas: *arcsin(x), arccos(x), arctan(x), arccot(x), arcsec(x), arccsc(x);*
- função exponencial de base e: *exp(x);*
- função logarítmica de base e: *ln(x);*
- função logarítmica de base a, sendo a>0 qualquer: *log[a](x);*

- funções hiperbólicas: *sinh(x), cosh(x), tanh(x), sech(x), csch(x), coth(x);*
- funções hiperbólicas inversas: *arcsinh(x), arccosh(x), arctanh(x), arcsech(x), arccsch(x), arccotgh(x).*

Para obter a lista completa de funções trigonométricas digite *>?inifcn.*

1.2. Funções

Podemos definir uma função no Maple por meio do sinal ->(sinal de menos seguido do sinal de maior).

```
>f:= x -> 2*x^2 - 7;
```

$$f := x \to 2x^2 - 7$$

```
>f(13);
```

$$331$$

1.3. Atribuindo nomes

Como muitas vezes é preciso realizar cálculos extensos, é necessário nomear as equações. Para isso, utiliza-se ": =".

```
>equacao := 2*x^2+5*x-3=0;
```

$$equacaa = 2x^2 + 5x - 3 = 0$$

Para encontrar as raízes da equação usa-se o comando *solve*.

```
>solve(equacao);
```

$$\frac{1}{2}, -3$$

Podemos também nomear as soluções por meio dos comandos *nome da primeira solução:= %[1]; e nome da segunda solução:= %%[2];*.

```
>x1 := %[1];
```

$$x1 := \frac{1}{2}$$

```
>x2:= %%[2];
```

$$x2 := -3$$

Note que somente o sinal de igualdade não define uma função, ela não muda o valor da variável.

```
>y=x+2;
```

$$y = x + 2$$

```
>y;
```

$$y$$

Mas com o comando "*:=*" temos:

```
>y:=x+2;
```

$$y := x + 2$$

```
>y;
```

$$x + 2$$

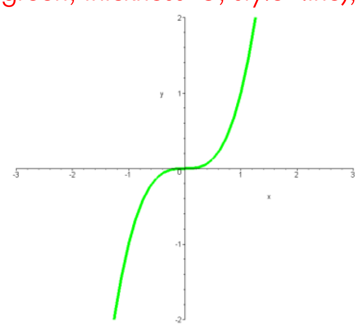
Quando não quisermos mais trabalhar com a atribuição que fizemos, é só utilizar
>y:='y';

$$y := y$$

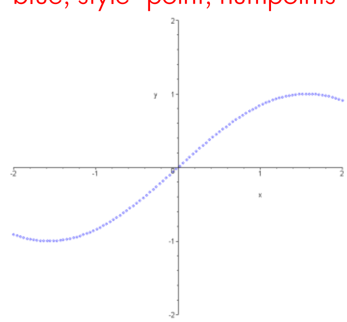
2. GRÁFICOS

O comando para traçar gráficos é o *plot* sendo que a sua forma geral é *plot(f(x), x=a..b, y=c..d,opções)*; na qual x indica o intervalo das abscissas e y o intervalo das ordenadas. Em opções define-se o estilo da visualização gráfica. Pode-se definir uma cor pelo comando *color* (podendo ser: *aquamarine, black, blue, navy, coral, cyan, brown, gold, green, gray, grey, khaki, magenta,maroon, orange, pink, plum, red, sienna, tan, turquoise, violet, wheat, white, yellow*), *thickness* (espessura da linha) e *style* (tipo de linha, podendo ser*: point, patch, line, patchnogrid, polygonoutline, polygon e default*).

>plot(x^3, x=-3..3, y=-2..2, color=green, thickness=5, style=line);

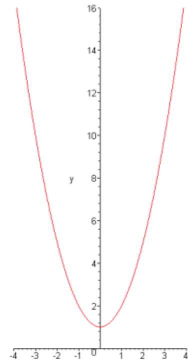


>plot(sin(x), x=-2..2, y=-2..2, color=blue, style=point, numpoints=100);

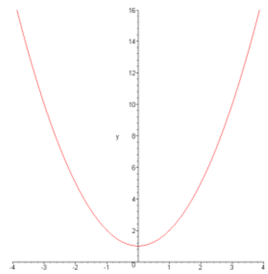


2.1. Escala

Utiliza-se *constrained* (ambos os eixos com a mesma escala) ou *unconstrained* (os eixos não possuem necessariamente a mesma escala).
> plot(x^2+1,x=-4..4,y=0..16,scaling=constrained);

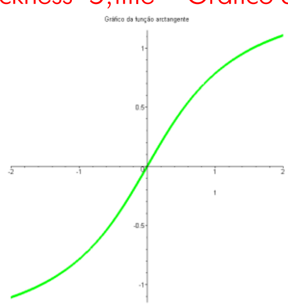


>plot(x^2+1,x=-4..4,y=0..16,scaling=unconstrained);

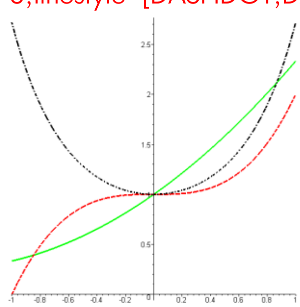


2.2. Outros recursos

O Maple disponibiliza também recursos auxiliares na visualização dos gráficos.
>plot(arctan(t),t=-2..2,color=green,thickness=5,title= `Gráfico da função arctangente`);

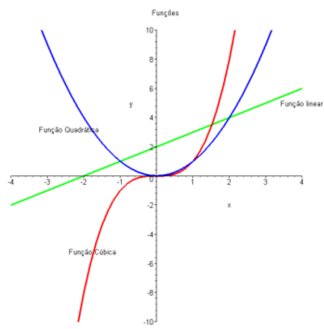


Podemos inserir mais de uma função em um mesmo gráfico.
>plot([exp(x^2),1+x^3,1+x+x^2/3],x=-1..1,color=[black,red,green],thickness=3,linestyle=[DASHDOT,DASH,SOLID]);



Observação: Para trocar de linha sem executar o comando, é necessário que se tecle SHIFT + ENTER.

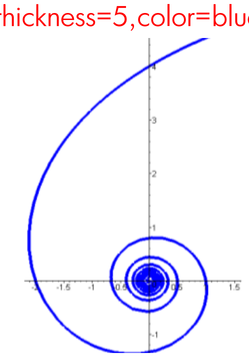
```
> restart:with(plots):
g:=plot([x^2,x^3,x+2],x=-4..4,y=-10..10,thickness=3,color=[blue,red,green],title=`Funções`):
t1:=textplot([-2.4,3.2,`Função Quadrática`]):
t2:=textplot([-1.75,-5.2,`Função Cúbica`]):
t3:=textplot([4,5,`Função linear`]):
display([g,t1,t2,t3]);
```



2.3. Funções Parametrizadas

O comando para plotar funções parametrizadas é: *plot([x(t),y(t),t=a..b],opções)*; abaixo construímos o gráfico da curva paramétrica definida por: *x(t)= tcos(2Pi/t), y(t)= tsen(2Pi/t), t= [0,5].*

```
>plot([t*cos(2*Pi/t),t*sin(2*Pi/t),t=0..5],thickness=5,color=blue,scaling=constrained);
```

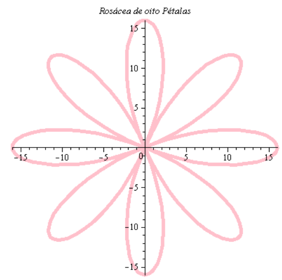


2.4. Coordenadas Polares

A forma para plotar gráficos de funções em coordenadas polares é *polarplot(r(theta),theta=a..b,opções) ou plot([x(t), y(t),t=a..b],coords=polar).*

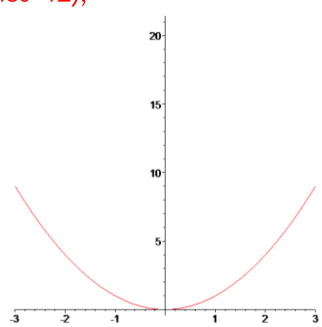
Abaixo temos o gráfico de uma rosácea de oito pétalas:

```
>plot(-16*cos(4*theta),theta=0..2*Pi,coords=polar, thickness=5,color=pink,title= Rosácea de oito Pétalas);
```

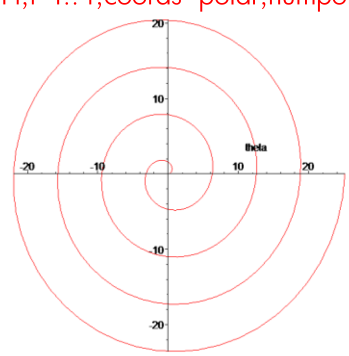


2.5. Animação de gráficos de uma variável

O comando para animação de gráficos é: *plots[animate](f(x,t),x=a..b,t=c..d, frames=n);* onde f(x,t) é uma expressão (ou função) de duas variáveis.
A variação de x corresponde ao domínio das funções envolvidas na animação, enquanto que a variação do t corresponde às posições intermediárias.
O valor t=c corresponde ao gráfico inicial e t=d corresponde ao gráfico final. O total de *n* gráficos construídos é controlado com a opção *frames = n.*
>with(plots):
>animate(x^2+t,x=-3..3,t=0..12,frames=12);



>plots[animate](theta/t,theta=0..8*Pi,t=1..4,coords=polar,numpoints=200);



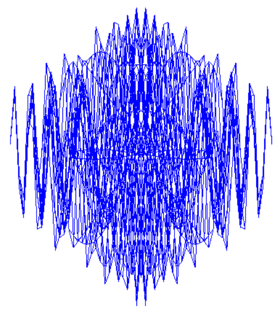
2.6. Gráficos de duas Variáveis

Para plotar um gráfico de uma função f(x,y) de duas variáveis é necessária a utilização do comando *plot3d*, o qual possui algumas variações em sua sintaxe dependendo do que se deseja traçar. A sintaxe básica é a seguinte: plot3d(f(x,y), x=a..b, y=c..d,opções); onde os parâmetros "f(x,y)", "x=a..b" e "y=c..d" são obrigatórios enquanto que o parâmetro "opções" é opcional.

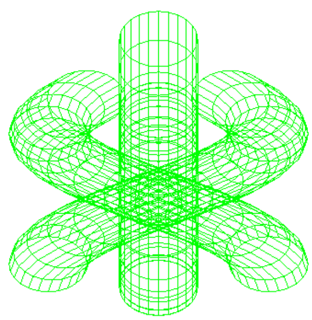
2.6.1. Alguns Comandos

Os gráficos podem ser personalizados também com os comandos: *grid=[m,n]* usado para refinar o desenho do gráfico, m é o número de pontos na direção da primeira coordenada, e n no da segunda coordenada; *style*, que pode ser: *point, hidden, patch, wireframe, contour, patchnogrid, patchcontour, surface, surfacecontour, surfacewireframe, wireframeopaque* ou *line.*
Exemplos:

```
> plot3d( sin(x*y), x=-5..5, y=-5..5, grid=[30,30],style=line,color=blue);
```

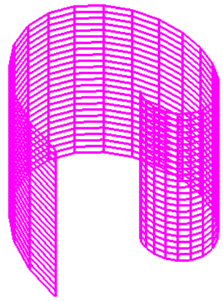


```
>c1:= [cos(x)-2*sin(0.4*y),sin(x)-2*sin(0.4*y),y]:
c2:= [cos(x)+2*sin(0.4*y),sin(x)+2*sin(0.4*y),y]:
c3:= [cos(x)+2*cos(0.4*y),sin(x)-2*cos(0.4*y),y]:
c4:= [cos(x)-2*cos(0.4*y),sin(x)+2*cos(0.4*y),y]:
plot3d({c1,c2,c3,c4},x=0..2*Pi,y=0..10,grid=[25,15],style=line,color=green);
```

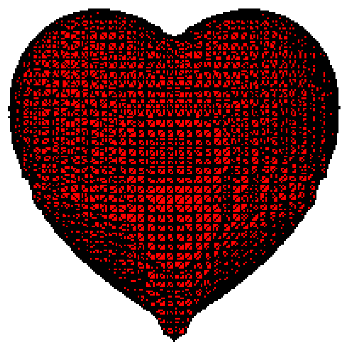


```
> sphereplot(1 + theta + phi, theta=0..2*Pi, phi=0..Pi,style=line,thickness=3);
```

```
> cylinderplot(3*theta + 2, theta=0..2*Pi, z=-5..5, color=magenta, thickness=3, style=line);
```



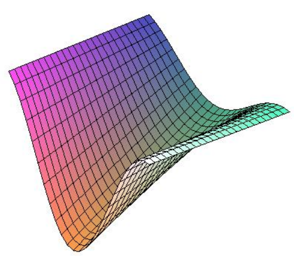
>implicitplot3d((x^2+(9/4)*y^2+z^2-1)^3-x^2*z^3-(9/80)*y^2*z^2=0, x=-1.5..1.5, y=-1.5..1.5,z=-1.5..1.5,color=red,style=patch,numpoints=90000);



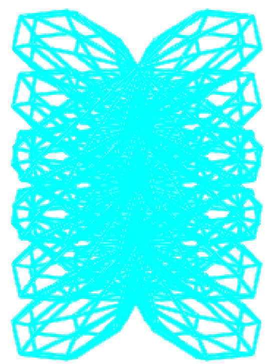
2.7. Animação de gráficos de duas variáveis

Exemplos:

> animate3d(x*sin(t*u),x=1..3,t=1..4,u=2..4);



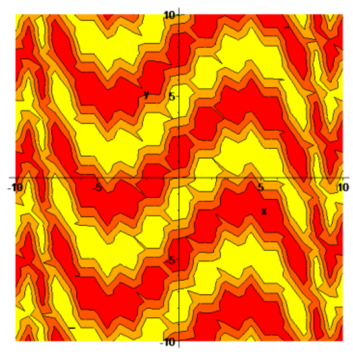
> animate3d(cos(t*x)*sin(t*y),x=-Pi..Pi, y=-Pi..Pi,t=1..2,style=line,thickness=2,color=cyan, coords=cylindrical);



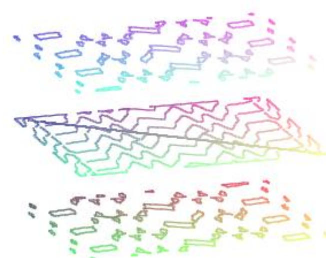
2.8. Curvas de nível

Exemplos:

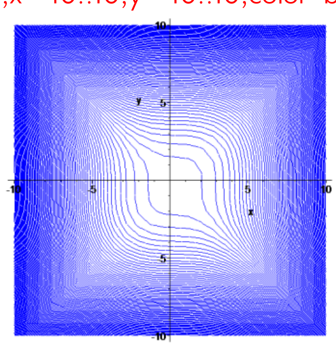
> contourplot(sin(x^3-y),x=-10..10,y=-10..10,contours=3,filled=true);



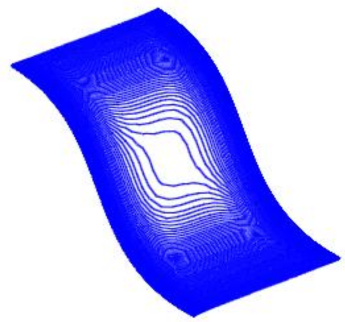
>plot3d(sin(x^3-y),x=-10..10,y=-10..10, style=contour, contours=3,filled=true);



>contourplot(x^3+y^3-x^2+y^2+x-5,x=-10..10,y=-10..10,color=blue,contours=300);



```
>plot3d(x^3+y^3-x^2+y^2+x-5,x=-10..10,y=-10..10,color=blue, style=contour, contours=300);
```



3. LIMITES

Para calcular o limite de uma função quando a variável tende a certo valor, é necessário utilizar o comando *limit*. Por exemplo: *limit(f(t), t=a)*, onde *a* é a variação. *Limit* é utilizado para deixar indicado o limite, já o comando *limit* é utilizado para resolver o limite. O uso do *Limit* combinado com o *limit* pode melhorar a apresentação do resultado.

```
>Limit(cos(a*x)/(b*x), x=1);
```

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cos(a\,x)}{b\,x}$$

```
>limit(cos(a*x)/(b*x), x=1);
```

$$\frac{\cos(a)}{b}$$

```
>Limit(cos(a*x)/(b*x), x=1)= limit(cos(a*x)/(b*x), x=1);
```

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cos(a\,x)}{b\,x} = \frac{\cos(a)}{b}$$

3.1. Limite de funções

```
>Limit((x^3+5*x^2)/(x^4+x^5),x=0)=limit((x^3+5*x^2)/(x^4+x^5),x=0);
```

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 5\,x^2}{x^4 + x^5} = \infty$$

3.2. Limites Laterais

Para calcular limites laterais acrescenta-se uma opção *left* ou *right* aos comandos *limit* e ou *Limit*. Se for acrescentada a opção *left*, então, será calculado o limite lateral à esquerda. Se for acrescentado *right*, então o limite será lateral à direita.

```
>Limit(cos(Pi*x)/x, x=0, left)= limit(cos(Pi*x)/x, x=0, left);
```

$$\lim_{x \to 0-} \frac{\cos(\pi\, x)}{x} = -\infty$$

>Limit(cos(Pi*x)/x, x=0, right)= limit(cos(Pi*x)/x, x=0, right);

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\cos(\pi\, x)}{x} = \infty$$

>Limit(cos(Pi*x)/x, x=0)= limit(cos(Pi*x)/x, x=0);

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\pi\, x)}{x} = \mathit{undefined}$$

3.3. Pontos de Descontinuidade

Para calcular o limite de funções não contínuas devemos utilizar os limites laterais.

>f:=piecewise(x<2,3*x,x>=2,x^3);

$$f := \begin{cases} 3\,x & x < 2 \\ x^3 & 2 \le x \end{cases}$$

>limit(f,x=2,left);

$$6$$

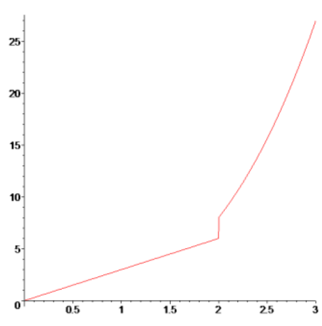
>limit(f,x=2,right);

$$8$$

>limit(f,x=2);

$$\mathit{undefined}$$

>plot(f,x=-0..3);



3.4. Limites no infinito

Para calcular limites no infinito, isto é, com a variável tendendo a +∞ ou -∞, utilizamos *-infinity* ou *infinity* para a variável.

>Limit((1/x)*sin(x), x=infinity)=limit((1/x)*sin(x), x=infinity);

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

>Limit(x^3+x^2-3, x=-infinity)=limit(x^3+x^2-3, x=-infinity);

$$\lim_{x \to (-\infty)} x^3 + x^2 - 3 = -\infty$$

4. DERIVADAS

Para calcular derivadas utiliza-se basicamente o comando *diff(f,x)*.
Exemplo:
>f:=x^3+tan(x)+100;

$$f := x^3 + \tan(x) + 100$$

>diff(f,x);

$$3x^2 + 1 + \tan(x)^2$$

4.1. Derivação de ordem *n* em relação a uma variável

Para calcular este tipo de derivada o comando é praticamente o mesmo, pois a ordem da derivada está relacionada com o número de "x" que atribuímos dentro do comando *diff(f,x)*. Por exemplo: se quisermos saber qual é a derivada terceira de uma função f(x), basta colocarmos "três x_s" no comando, ou seja, *diff(f,x,x,x)*. Portanto o comando para derivação de ordem n em relação a uma variável é *diff(f,x,x,...,x)*. Para simplificar o comando *diff(f,x,x,...,x)*, basta colocar *diff(f,x$n)*.
Exemplos:
>f:= x^5+ x^3+ exp(x);

$$f := x^5 + x^3 + \mathbf{e}^x$$

>diff(f,x);

$$5x^4 + 3x^2 + \mathbf{e}^x$$

>diff(f,x,x);

$$20x^3 + 6x + \mathbf{e}^x$$

>diff(f,x,x,x);

$$60x^2 + 6 + \mathbf{e}^x$$

>diff(f,x$4);

$$120x + \mathbf{e}^x$$

>diff(f,x$9);

$$\mathbf{e}^x$$

>diff(f,x$15);

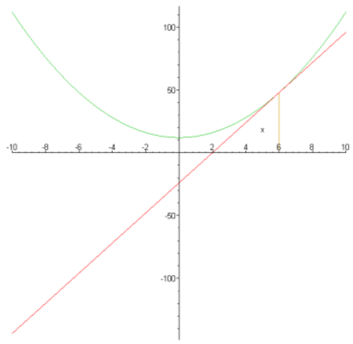
$$\mathbf{e}^x$$

4.2. Reta tangente

Alguns exemplos com retas tangentes:

>with(student):

>showtangent(x^2+12,x=6);



Analisemos como se comporta a reta tangente a um ponto em relação à função nesse ponto.

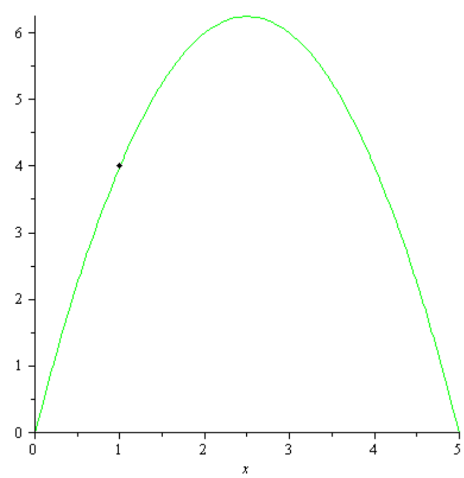
>with(plots):
>g:=x->-x^2+5*x;

$$g := x \to -x^2 + 5x$$

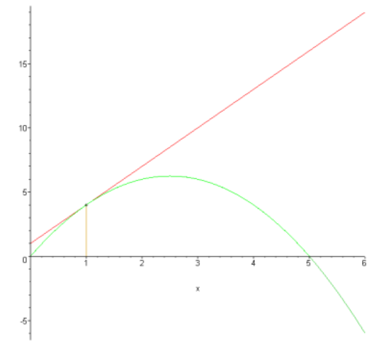
>a := plot(g(x), x=0..5, color = green):
>p := [[1, g(1)]];

$$p := [[1, 4]]$$

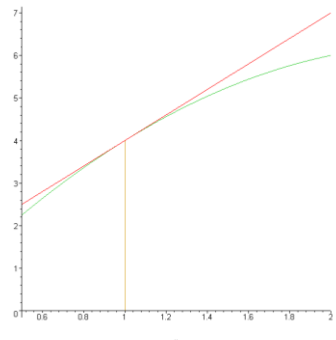
>b := plot(p, x=0..5, style=point, symbol=diamond, color=black):
>display([a, b]);



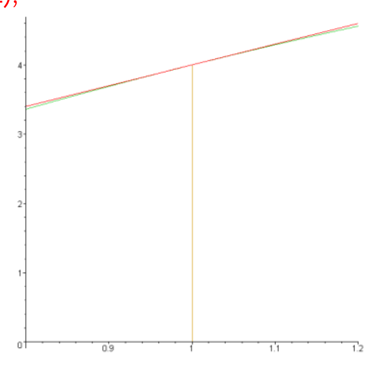
>with(student):
>c := showtangent(g(x),x=1, x=0..6):
> display(a, b, c);



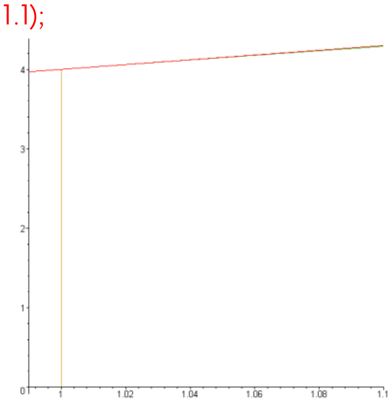
>showtangent(g(x), x=1, x=0.5..2);



>showtangent(g(x), x=1, x=0.8..1.2);



>showtangent(g(x), x=1, x=0.99..1.1);



5. INTEGRAIS

O Maple possui diversos recursos para o cálculo de integrais indefinidas, definidas e impróprias.

5.1. Integrais de funções

A integral (primitiva) de uma função definida por uma expressão algébrica *f(x)* é calculada com o comando *int(f(x),x)*. Esse comando também possui uma forma inercial: *Int(f(x),x)*. A forma inercial não efetua cálculos, apenas mostra a integral no formato usual o que, em determinadas situações, pode ser bastante útil.

Exemplos:

>int(2*x,x);

$$x^2$$

>int(2*x*y,x);

$$x^2\,y$$

>int(2*x*y,y);

$$x\,y^2$$

5.2. Integrais definidas e impróprias

Uma integral definida em um intervalo *[a,b]* é calculada com um comando do tipo *int (f(x),x=a..b)*. Integrais impróprias são fornecidas como integrais definidas. Nesses casos, podemos ter *a* ou *b* iguais a +℠ ou −℠.

>Int(x/(x^2+16),x=a..0);

$$\int_a^0 \frac{x}{x^2+16}\,dx$$

>int(x/(x^2+16),x=a..0);

$$-\frac{1}{2}\ln(a^2+16)+2\ln(2)$$

>Int(exp(-2*t)*t^2*ln(t),t=-infinity..0);

$$\int_{-\infty}^0 \mathbf{e}^{(-2\,t)}\,t^2\ln(t)\,dt$$

>int(exp(-2*t)*t^2*ln(t),t=-infinity..0);

$$\infty$$

5.3. Integrais duplas e triplas

Podemos calcular uma integral dupla da seguinte forma: Int (Int (f(x,y), x=a..b), y=c..d).
Exemplo:
>(Int(Int(2*x,x=-2..5),x=0..6));

$$2\int_0^6\int_{-2}^5 x\,dx\,dx$$

>int(int(2*x,x=-2..5),x=0..6);

$$126$$

A forma inercial da integral dupla de uma função de duas variáveis, definida por uma expressão algébrica f(x,y) nas variáveis x, y, z , no Maple, corresponde ao comando: Doubleint (f(x,y), x=a..b, y=c..d), onde a..b e c..d denotam a variação do x e do y, respectivamente.
>with(student):
>Doubleint(x^2+2*y,x=y..3*y,y=1..2):%=value(%);

$$\int_1^2\int_y^{3y} x^2+2\,y\,dx\,dy=\frac{251}{6}$$

Analogamente, a forma inercial da integral tripla de uma função de três variáveis, definida por uma expressão algébrica f(x,y,z) nas variáveis x, y , é dada por: Tripleint (f(x,y,z), x=a..b, y=c..d, z=e..f), onde a..b, c..d e e..f denotam a variação do x, y e do z, respectivamente. Tripleint é equivalente a três comandos Int encaixados: Int (Int (Int (f(x,y,z), x=a..b), y=c..d), z=e..f).
>Tripleint(x*y*z,x,y,z):%=value(%);

$$\int\int\int x\,y\,z\,dx\,dy\,dz=\frac{x^2\,y^2\,z^2}{8}$$

>Tripleint(x*y*z, z=0..sqrt(4-y^2),y=0..2*x, x=0..3):%=value(%);

$$\int_0^3\int_0^{2x}\int_0^{\sqrt{4-y^2}} x\,y\,z\,dz\,dy\,dx=-162$$

BIBLIOGRAFIA

ANDRADE, L. N.; Introdução à computação algébrica com o Maple. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

PORTUGAL, R.; Introdução ao Maple. Petrópolis - RJ, 2002.