

# What is...

## The Finite Difference Method?

Federico Wiesner Urbina, Miguel Sandoval Cardozo, Sergio Arango Arango  
Email: f.wiesner@uniandes.edu.co, m.sandovalc@uniandes.edu.co, s.arangoa@uniandes.edu.co

### I. INTRODUCCIÓN

Para muchas ecuaciones diferenciales es difícil encontrar una solución analítica con los métodos conocidos, por lo que se utilizan métodos numéricos para aproximarse a un resultado. Uno de estos métodos es el de diferencias finitas, que se centra en la definición formal de derivada; como su nombre indica, utiliza diferencias finitas en vez de infinitesimales para encontrar un resultado. En el presente artículo se explorará este método, su aplicación a la ecuación de calor tanto en una como en dos dimensiones y las condiciones del mismo para ser estable y para converger

### II. MÉTODO

La definición formal de derivada para funciones diferenciales es:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

En un computador no se puede evaluar el límite hacia 0 de un valor; pero se puede demostrar que al escoger un valor arbitrariamente pequeño para  $h$  se tiene una aproximación aceptable para la derivada. Hay tres maneras de llevar a cabo la aproximación: diferencias hacia adelante, hacia atrás y centrales. Todas hacen uso del hecho de que la derivada de una función en un punto  $x$  es una aproximación lineal al valor de la función en otros puntos dentro de una vecindad de  $x$ , siguiendo que:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \epsilon(h)$$

En la anterior ecuación,  $\epsilon(h)$  es el término de error y se cumple que es de orden cuadrático ( $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|h|} \epsilon(h) = 0$ ). Desde aquí se habla de diferencias hacia adelante pues es como se implementó el código, pero el desarrollo es análogo para los otros casos. El método plantea la aproximación de la derivada usando un operador lineal, definido como  $\Delta_h$  sobre funciones real valuadas dado por  $\Delta_h(f) = f(x+h) - f(x)$ . Es fácil verificar que este operador es una derivación; es decir, que cumple la regla de Leibniz. Al comparar el operador con la derivada se puede usar la aproximación lineal y el Teorema de Taylor para afirmar que

$$\frac{\Delta_h(f)}{h} - f'(x) = O(h)$$

Lo cual implica que  $h \rightarrow 0$  implica  $\frac{\Delta_h(f)}{h} - f'(x) \rightarrow 0$ . Cabe mencionar que el método de diferencias centradas tiene error cuadrático pero no se implementó por preocupaciones de estabilidad, mencionadas más adelante.

Para segundas derivadas, la fórmula es la siguiente:

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}.$$

De manera equivalente,

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

. Para esa expresión también es verdadera la formulación anterior y se conserva el error de orden  $O(h)$ . Entonces la ecuación con la que se trabaja en el computador es la misma de la segunda derivada pero con un  $h$  finito.

El método funciona definiendo un valor para  $h$ , el tamaño de paso, y así se podrán aproximar las derivadas. El objetivo es poder resolver numéricamente un sistema de ecuaciones diferenciales parciales utilizando estas definiciones y un tamaño de paso apropiado. La función dependerá de más de una variable, ya que este método se puede aplicar a ecuaciones diferenciales con derivadas parciales tanto espaciales como de tiempo. Nótese que el objetivo es determinar los valores de una función para el siguiente tiempo en una posición específica del espacio, en este orden de ideas lo que hace el método de diferencias finitas es encontrar una relación entre el valor actual de la función y los valores encontrados para tiempos anteriores. En términos de las ciencias de la computación esto se llama programación dinámica, es decir que se guardan los valores anteriores para obtener los siguientes. Gráficamente lo que se hace es llenar las filas de una matriz de abajo hacia arriba en dónde para rellenar una casilla se utilizan los valores de las filas anteriores. Es claro que es fundamental definir condiciones iniciales del problema (como en todas las ecuaciones diferenciales) pero además hay que tener condiciones en la frontera del objeto en el que estamos trabajando, pues el objetivo es ver cómo se comporta la función si mantenemos estable la frontera del objeto. Ahora se presentará un ejemplo aplicado para ilustrar bien el método:

### III. LA ECUACIÓN DEL CALOR UNIDIMENSIONAL

Se tiene una vara de un metal cualquiera de largo  $L$  con su coeficiente de difusión térmica  $k$ . Sea  $u(x, t)$  la función que describe el calor de un objeto dependiendo del tiempo  $t$  y de la punto de la vara  $x$  que se está observando. La ecuación diferencial que describe el calor es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Utilizando las fórmulas ya vistas, una aproximación a esta ecuación está dada por:

$$\frac{u(x, t+h_t) - u(x, t)}{h_t} = k \frac{u(x-h_x, t) - 2u(x, t) + u(x+h_x, t)}{h_x^2}$$

$$u(x, t+h_t) = r(u(x-h_x, t) - 2u(x, t) + u(x+h_x, t)) + u(x, t),$$

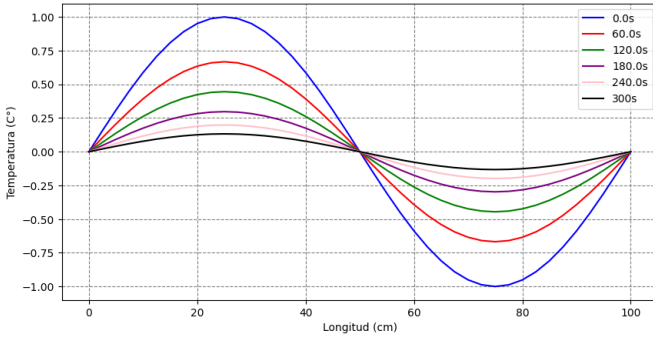
$$r = \frac{kh_t}{h_x^2}.$$

Esta última ecuación ya permite hallar el calor en el siguiente tiempo que se quiera medir, pues simplemente hay que observar el calor en el tiempo anterior alrededor del punto, un paso antes y un paso después. Al dar condiciones iniciales (es decir en  $t = 0$ ), ya se tiene toda la información necesaria para llenar hasta el tiempo que queramos, basta llenar toda la información para los tiempos anteriores. []

Aplicando esto, tómense las siguientes condiciones iniciales: sea dada una vara de 100cm hecha de plata ( $k = 1,71 \frac{cm^2}{s}$ ), aferrada en los extremos por bloques de hielo, es decir que la temperatura en  $x = 0$  y en  $x = 100$  es  $0^\circ C$  para todo el tiempo y el comportamiento inicial a lo largo de la vara es:

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right).$$

Si se quieren medir 300 segundos de tiempo para ver qué sucede con el calor en la vara, podemos dividir este intervalo temporal en 12000 partes, es decir  $h_t = 0,025$ , y se divide la vara en 40 secciones, es decir  $h_x = 2,5$ . Con estas suposiciones, se obtienen los siguientes resultados:



Es claro que la temperatura de la vara se va estabilizando con el paso del tiempo, que es el comportamiento esperado dadas las condiciones de frontera.

#### IV. LA ECUACIÓN DEL CALOR EN DIMENSIONES MAYORES

El planteamiento general de la ecuación de calor es similar al de una dimensión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u.$$

El planteamiento para las derivadas sigue siendo exactamente el mismo, sencillamente se introducen términos para las derivadas espaciales en las otras direcciones. La expresión que se obtiene es

$$\frac{u(x, y, z, t+h_t) - u(x, y, z, t)}{h_t} =$$

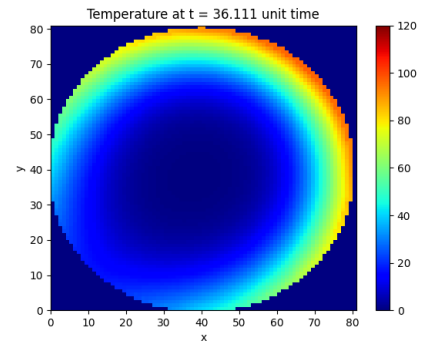
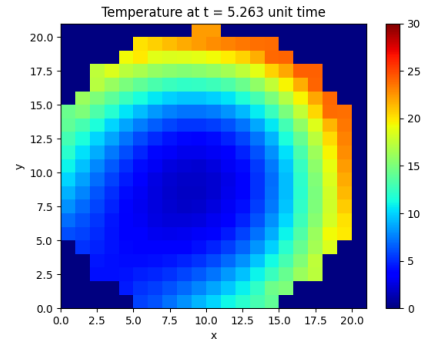
$$k \left( \frac{u(x-h_x, y, z, t) - 2u(x, y, z, t) + u(x+h_x, y, z, t)}{h_x^2} \right.$$

$$+ \frac{u(x, y-h_y, z, t) - 2u(x, y, z, t) + u(x, y+h_y, z, t)}{h_y^2}$$

$$+ \frac{u(x, y, z-h_z, t) - 2u(x, y, z, t) + u(x, y, z+h_z, t)}{h_z^2}$$

Nuevamente, la única incógnita es  $u(x, y, z, t+h_t)$  y se procede computacionalmente para despejar. Hay que tener en cuenta que la estructura de datos para almacenar los resultados debe ser un tensor de 4 dimensiones y se deben tener condiciones iniciales y condiciones de bordes conocidas. Para el presente proyecto se implementó en dos dimensiones para un dominio circular. El reto estaba en poder pasar del caso obvio de una placa a cualquier dominio bidimensional, los detalles están en el código adjunto.

Se tiene un dominio circular de radio  $r$  centrado en  $(a, b)$  para el cual su temperatura inicial es 0 en el interior y la temperatura en la frontera se mantiene constante siguiendo una función  $U_{front}(x, y) = ||(x, y)||$ . Para este caso también se utiliza un  $k$  de  $1,71 cm^2/s$ . En las imágenes se pueden ver resultados en diferentes tiempos, el código incluye una animación.



#### V. CONVERGENCIA DEL MÉTODO

En el método se demostró que hay una convergencia lineal a la derivada. Cabe aclarar que la convergencia del método no se refiere a la convergencia del algoritmo implementado. El algoritmo lo que hace es recibir una discretización del dominio dada por el tamaño de los cambios en tiempo y espacio  $dt, dx$  como  $h$ . Dada una discretización, el algoritmo implementado calcula los valores puntuales que dictan las ecuaciones de diferencias finitas sobre la discretización del dominio, que

aproximan a las ecuaciones diferenciales originales del modelo, precisamente por el diferencial finito  $h$ .

En resumen el retorno del algoritmo son los valores determinados por la discretización de las ecuaciones en los puntos dados por la discretización del dominio.

Por lo tanto el punto de vista de convergencia se refiere en cuánto a la selección de la discretización, o mejor dicho dado que la discretización es uniforme, la selección del tamaño de los diferenciales.

Si se toma el límite de las ecuaciones en diferencias finitas, cuando los diferenciales tienden a cero, se obtiene nuevamente las ecuaciones diferenciales originales del modelo. A su vez la discretización del dominio se acerca cada vez más al dominio original cuando la discretización es más fina. Por lo que el método puede realizarse de manera arbitrariamente precisa.

## VI. CONCLUSIONES

Se pudo probar que el problema está bien condicionado y en las implementaciones no hubo problemas de estabilidad. De hecho en la literatura se encuentra que, salvo funciones periódicas para la implementación con diferencias centradas, es raro encontrar problemas de estabilidad. También se demostró que el error es de orden lineal y que por lo tanto converge a medida que se reduce el  $h$ . Aparte de la demostración, las diferentes imágenes de la placa bidimensional dan fe de ello: en la tercera se puede apreciar que el aumento en la resolución del problema deja ver muchas más regiones isotérmicas que el de menor finura.

En cuanto a la complejidad algorítmica, esta depende de la dimensión sobre la que se trabaja. El planteamiento de diferencias finitas es una composición de sumas y productos (típicamente  $O(1)$ ) y se realiza sobre un conjunto de  $n^d$  elementos donde  $d$  corresponde a la dimensión del objeto. Nótese que el tiempo no juega un papel en la complejidad pues todos los valores de cada operación están en un mismo nivel de tiempo. Por lo tanto, la complejidad temporal es  $O(n^d)$ . En cambio, el requerimiento en memoria sí tiene la dimensión del tiempo y como se mencionó anteriormente, el tensor que almacena la respuesta es de tamaño  $O(n^{d+1})$ .

A pesar del aparente gran orden, resolver ecuaciones diferenciales en tiempo polinomial es bastante deseable y se expuso una solución con implementación bastante sencilla y poderosa. Se concluye que el método de elementos finitos es útil por su simplicidad, su tiempo y uso de memoria polinomiales y por su convergencia del error.

## REFERENCIAS

Loskor, W. Z., y Sarkar, R. (2022). A numerical solution of heat equation for several thermal diffusivity using finite difference scheme with stability conditions. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 10(2), 449–465.

<https://tobydriscoll.net/fnc-julia/localapprox/fd-converge.html>

<https://hplgit.github.io/num-methods-for-PDEs/doc/pub/wave/html/.wave001.html>