# Proyecto II

# Modelos Matemáticos para la Gestión Financiera

Andrés Mugnier, Sergio Arango

# Índice general

# Capítulo 1

# Simulación de proceso de Wiener

## 1.1. Introducción

Considere un activo, cuyo precio en el tiempo $S$ sigue un camino aleatorio descrito por la ecuación diferencial estocástica:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

donde $W(t)$ es un *proceso de Wiener*. Vamos a simular 10 realizaciones de este proceso para diferentes valores de *drift* $\mu$ y *volatilidad* $\sigma$. Para todas las gráficas que mostraremos a continuación se tomará un proceso con $t_0 = 0$, $t_{\text{máx}} = 10$, $S(0) = 1$, y con 60 muestras entre $t_0$ y $t_{\text{máx}}$. Para todas las figuras se simulará también el comportamiento de la caminata $dS = \mu S dt$. Es decir, una caminata sin volatilidad para poder comparar todos los resultados.

## 1.2. Algoritmo

El algoritmo es esencialmente el mismo que para simular el proceso de Wiener, con tan solo expandiendo el cambio por producido por Wiener $\sigma$ y añadiendo un shift fijo de $\mu$. El algoritmo para simular el proceso de Wiener funciona primero, discretizando el intervalo de tiempo sobre el cuál se va a simular, luego se inicia el primer valor producido por el proceso como un valor fijo (también se puede como una variable aleatoria independiente), y de ahí en adelante todo valor siguiente se computa como la suma del valor anterior más la variable aleatoria independiente que es el cambio entre ese valor pasado y el nuevo, en el caso de Wiener siendo esta una normal con valor esperado 0 y varianza $\Delta t$. Para el caso del activo se inicia con un valor determinista $S_0$. A continuación la implementación:

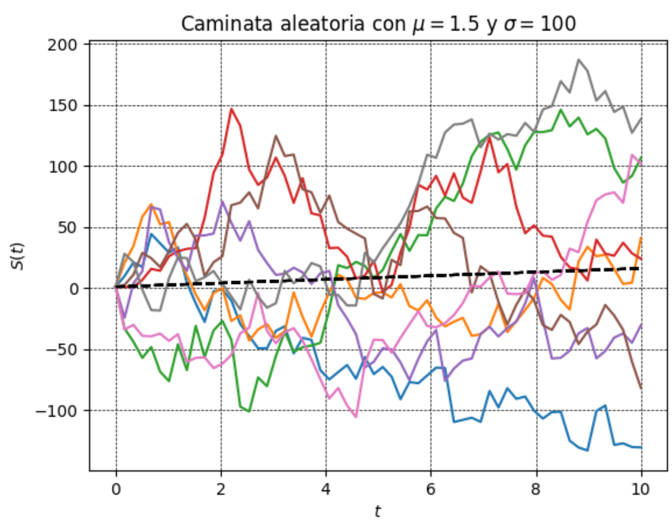
```python
#Activo
def pricesimu(S0,mu,sigma,t):

  y = [S0]
  for i in range(1,len(t)):
      step = t[i]-t[i-1]
      d = step*mu + sigma*np.random.normal(scale=step)
      if y[i-1]==0:
        yi = 0
      else:
        yi = max(y[i-1] + d,0)
      y.append(yi)
  return np.array(y)
```

(a)

Implementación Proceso Estocástico del Activo

## 1.3. Resultados

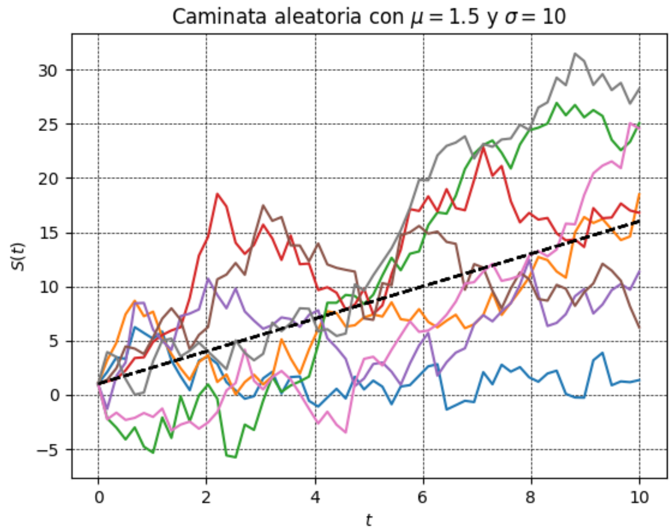
- Caminatas aleatorias con $\mu = 1{,}5$ y $\sigma = 100$:




(b)

Simulación para $\mu = 1{,}5$ y $\sigma = 100$

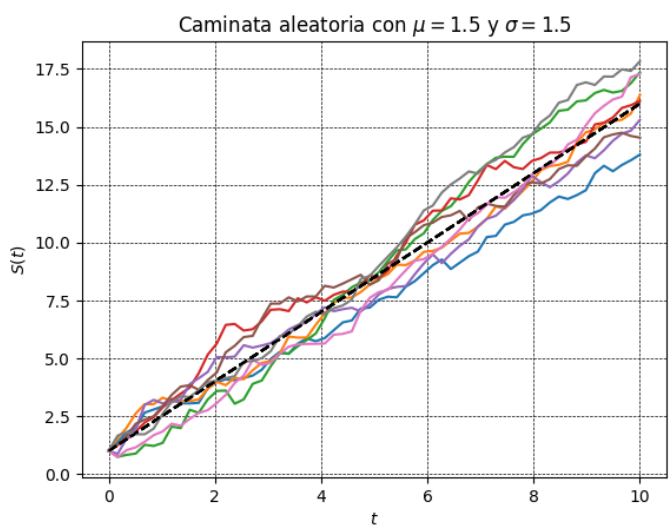
- Caminatas aleatorias con $\mu = 1{,}5$ y $\sigma = 10$




(c)

Simulación para $\mu = 1{,}5$ y $\sigma = 10$

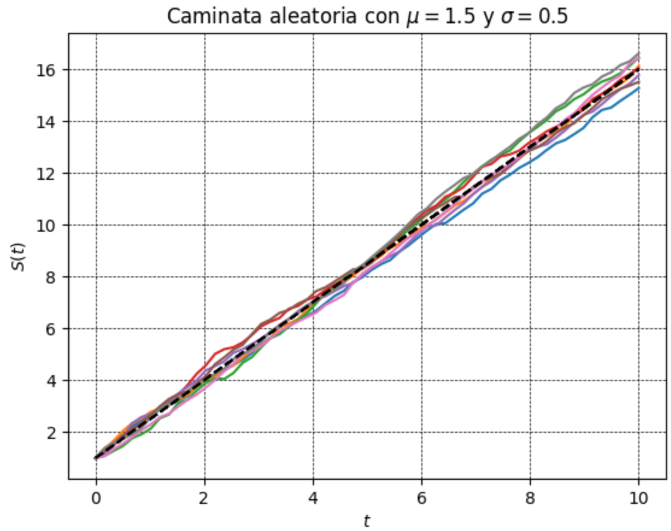
- Caminatas aleatorias con $\mu = 1{,}5$ y $\sigma = 1{,}5$




(d)

Simulación para $\mu = 1{,}5$ y $\sigma = 1{,}5$

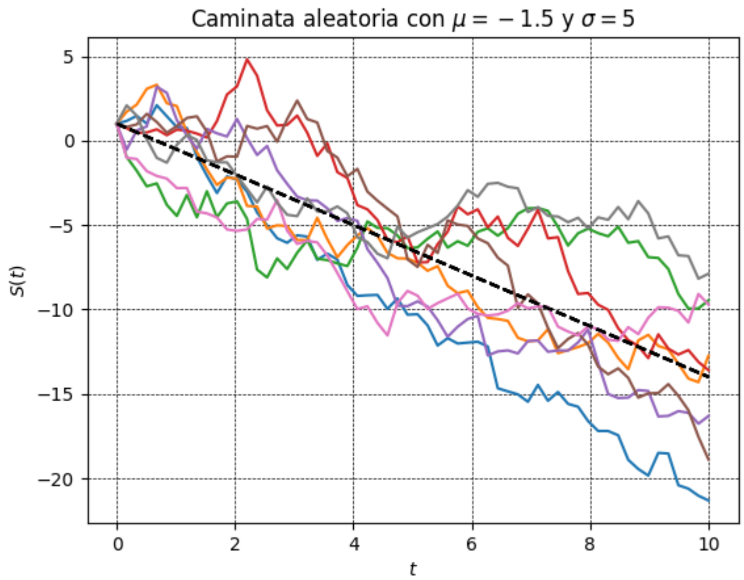
- Caminatas aleatorias con $\mu = 1{,}5$ y $\sigma = 0{,}5$




(e)

Simulación para $\mu = 1{,}5$ y $\sigma = 0{,}5$

- Caminatas aleatorias con $\mu = -1{,}5$ y $\sigma = 5$




(f)

Simulación para $\mu = -1{,}5$ y $\sigma = 5$

En las figuras anteriores vemos varios casos:

- En la primera figura tenemos $\sigma = 100 \gg \mu = 1{,}5$ donde podemos observar que el comportamiento aleatorio domina la tendencia del activo cuando no hay aleatoriedad (la linea negra punteada).

- En la segunda figura tenemos $\sigma = 10 > \mu = 1{,}5$, mientras que en la tercera tenemos $\sigma = 1{,}5 = \mu$ y en la cuarta tenemos $\mu = 1{,}5 > \sigma = 0{,}5$. Vemos que al tener valores de volatilidad más cercanos al valor del drift, la tendencia a seguir la linea punteada aumenta. Es decir, si $\sigma$ es muy cercano a $\mu$ o $\sigma$ es muy cercano a 0, todas las caminatas están menos dispersas al rededor de la linea negra punteada.

- Finalmnte, por completitud simulamos 10 caminatas aleatorias con $\mu = -1{,}5$ y $\sigma = 5$. En este experimento vemos que en general todas las caminatas aleatorias tienen una tendencia a *decrecer* en el tiempo. Es decir, el activo se está depreciando en el tiempo.

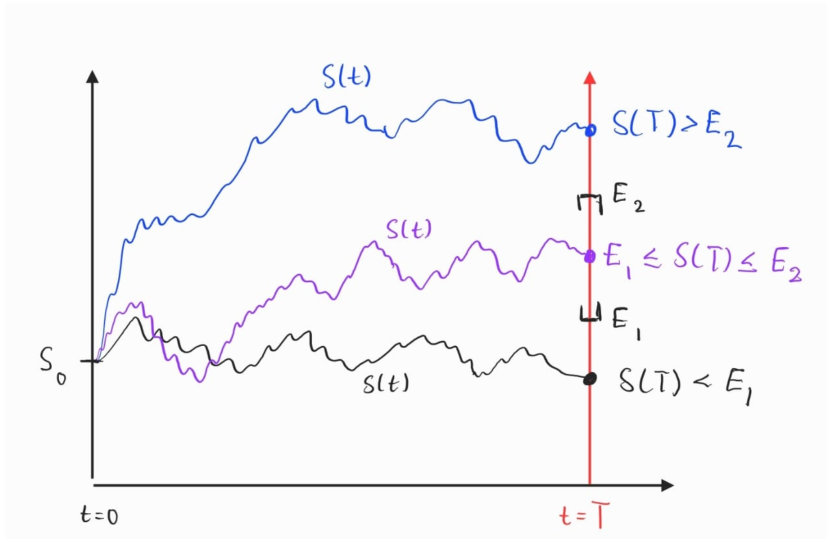
# Capítulo 2

# Opción Call tipo ventana

## 2.1. Introducción y Condiciones de frontera

Ahora consideramos un opción *call ventana* donde tenemos una opción call europea que solo se puede ejercer si el precio del activo $S$ está en un rango de valores $E_1 \leq S(T) \leq E_2$ al momento de la madurez $T$ por un precio de strike $E$. El precio del activo $S$ se comporta con el modelo camino aleatorio del punto anterior.

Ahora, las condiciones de frontera serán similares a las de una opción call, solo que tenemos que añadir la restricción de que solo se puede ejercer cuando $E_1 \leq S(T) \leq E_2$. Primero veamos la condición en la fecha de vencimiento. Si $t = T$ entonces tenemos tres casos posibles: que $S(T)$ esté por debajo de la ventana ($S(T) < E_1$ mostrado en negro), que $S(T)$ esté por encima de la ventana ($S(T) > E_2$ mostrado en azul), o que $S(T)$ esté dentro de la ventana ($E_1 \leq S(T) \leq E_2$ mostrado en morado).




(a)

Condicione de frontera opción call ventana

En los dos primeros casos, tenemos que $C(S,T) = 0$, pues por definición del contrato, este no se puede ejercer. En el tercer caso, como $S(T)$ está dentro de la ventana, podemos ejercerla como una opción call usual donde el precio strike es $E$. Es decir, el precio de la opción es $max(S - E, 0)$. Por lo que el limite inferior de del rango del contrato se vuelve insignificante. Resumimos esto de la siguiente manera:

$$C(S,T) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad S < E_1 \\ max(S-E,0) & \text{si } E_1 \leq S \leq E_2 \\ 0 & \text{si } S > E_2 \end{cases}$$

Que es igual a

$$C(S,T) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad S < E \\ S-E & \text{si } E \leq S \leq E_2 \\ 0 & \text{si } S > E_2 \end{cases}$$

Esto es suponiendo que $E_1 \leq E \leq E_2$.

La siguiente condición de frontera es cuando $S = 0$. En este caso tenemos que $C(0,t) = 0$ pues $S$ si el activo subyacente vale 0, esperamos que un derivado del mismo activo valga 0. La última condición de frontera es cuando $S \longrightarrow \infty$. En este caso, a diferencia de la opción call usual, tenemos que $C(S,t)$ no puede ser arbitariamente grande, pues si $S > E_2$ entonces la probabilidad de que $S$ vuelve a estar dentro de la ventana, en el tiempo restante, es arbitrariamente pequeña. En este caso tenemos que $\lim\limits_{S \longrightarrow \infty} C(S,t) = 0$.

## 2.2. Portafolio Propuesto

Sea $\Pi = C - \Delta S$, compuesto por una opción call tipo ventana y $\Delta$ unidades del activo $S$ en corto. El comportamiento del portafolio a través del tiempo está definido por la ecuación diferencial estocástica:

$$d\Pi = dC - \Delta(S,t)dS$$

Además se impone la restricción de que el portafolio tendrá un objetivo determinista así que se comportara al igual que el activo libre de riesgo, es decir:

$$d\Pi = \Pi r dt$$

. Sin haber fijado todavía $\Delta$, el propósito es encontrar uno que haga cumplir esta propiedad.

## 2.3. Ecuación Diferencial Estocástica de Black-Scholes

Al ser $C(S,t)$ un proceso estocástico derivado del proceso estocástico $S$ se le puede aplicar el Lema de Ito, además se asume que $S$ sigue el proceso estocástico propuesto en el capítulo 1, de done salen las siguientes igualdades para remplazarlas en la ecuación diferencial estocástica original que describe el comportamiento del portafolio:

$$dC = \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} dW + \left( \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{\partial C}{\partial t} \right) dt$$

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

Al remplazar se tiene:

$$d\Pi = \sigma S \left( \frac{\partial C}{\partial S} - \Delta \right) dW + \left( \mu S \left( \frac{\partial C}{\partial S} - \Delta \right) + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{\partial C}{\partial t} \right) dt$$

Esta es la ecuación diferencial estocástica de Black-Scholes.

## 2.4. Ecuación Diferencial Parcial de Black-Scholes

Un claro candidato de $\Delta$ que elimina el comportamiento aleatorio del portafolio (que es lo que describe esta ecuación) es $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$. Al hacer efectivo este candidato el comportamiento del portafolio entonces queda:

$$d\Pi = \left( \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{\partial C}{\partial t} \right) dt$$

Al remplazar $d\Pi = \Pi r dt$, $\Pi = C - \Delta S$ y $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$ se tiene

$$\left(\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{\partial C}{\partial t}\right) dt = \left(C - \frac{\partial C}{\partial S}\right) r dt$$

entonces

$$\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{\partial C}{\partial t} = \left(C - \frac{\partial C}{\partial S}\right) r$$

Esta es la ecuación diferencial parcial de Black Scholes:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

## 2.5. Transformación a la ecuación de difusión

Considere el siguiente cambio de variables:

$$C = Ev(x,\tau), \quad S = Ee^x, \quad t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \tag{2.1}$$

Bajo este cambio de variables, tenemos las siguientes relaciones entre los diferenciales:

- $\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial Ev}{\partial t} = E\frac{\partial v}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} \Longrightarrow \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2}$ y así: $\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{E\sigma^2}{2}\frac{\partial v}{\partial \tau}$
- $\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial Ev}{\partial S} = E\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} \Longrightarrow x = \log\left(\frac{S}{E}\right),\ ,\ \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S} \Longrightarrow \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{E}{S}\frac{\partial v}{\partial x}$
- $\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = -\frac{E}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{E}{S}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{E}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{E}{S}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\frac{\partial x}{\partial S} = -\frac{E}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{E}{S^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$. Por lo que $\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{E}{S^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$

reemplazando estas relaciones en la E.D.P de Black-Scholes, obtenemos:

$$-\frac{E\sigma^2}{2}\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{E}{S^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{E}{S}\frac{E}{S}\frac{\partial v}{\partial x} - Ev = 0$$

que al simplificar y al definir $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ se reduce a :

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv$$

con este cambio de variables, las condiciones de frontera se convierten en :

- $v(x,0) = \frac{1}{E}C(S,T) = \begin{cases} 0 & \text{si } Ee^x < E \\ \frac{1}{E}\left(Ee^x - E\right) & \text{si } E \leq Ee^x \leq E \\ 0 & \text{si } Ee^x > E_2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \log\left(\frac{E_2}{E}\right) \\ 0 & \text{si } x > \log\left(\frac{E_2}{E}\right) \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} v(x,\tau) = \lim\limits_{S\longrightarrow\infty} \frac{C(S,t)}{E} = 0$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} v(x,\tau) = \lim\limits_{S\longrightarrow 0} \frac{C(s,t)}{E_1} = 0$

Ahora, debemos realizar un nuevo cambio de variable dado por:

$$v(x,\tau) = e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)$$

donde $\alpha, \beta$ son constantes por determinar. De acá obtenemos las siguientes relaciones entre los diferenciales:

- $\frac{\partial v}{\partial x} = \alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x}$
- $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \alpha^2 e^{\alpha x+\beta\tau}u + 2\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x} + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
- $\frac{\partial v}{\partial \tau} = \beta e^{\alpha x+\beta\tau}u + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial \tau}$

Si simplificamos estas ecuaciones obtenemos:

- $\frac{\partial v}{\partial x} = e^{\alpha x\beta\tau}\Big(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}\Big)$
- $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^{\alpha x+\beta\tau}\Big(\alpha^2 u + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)$
- $\frac{\partial v}{\partial \tau} = e^{\alpha x+\beta\tau}\Big(\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau}\Big)$

si reemplazamos estas ecuaciones en la E.D.P obtenemos:

$$\Big(\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau}\Big) = \Big(\alpha^2 u + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big) + (k-1)\Big(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}\Big) - ku$$

simplificando:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x} + \Big(\alpha^2 u + 2\alpha + (k-1)\Big)\frac{\partial u}{\partial x} + \Big(\alpha^2 - \beta + (k-1)\alpha - k\Big)u$$

luego, si tomamos $\alpha = \frac{1-k}{2}$ y $\beta = -\frac{(1+k)^2}{4}$ obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

que es precisamente la ecuación de difusión. Ahora, las condiciones iniciales son:

- $u(x,0) = v(x,0) = e^{-(\alpha x+\beta\tau)} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-(\alpha-1)x} - e^{-\alpha x} & \text{si } 0 \leq x \leq \log\big(\frac{E_2}{E}\big) \\ 0 & \text{si } x > \log\big(\frac{E_2}{E}\big) \end{cases}$

- $\lim_{x\longrightarrow\infty} u(x,\tau) = e^{-(\alpha x+\beta\tau)}v(x,\tau) = 0$
- $\lim_{x\longrightarrow-\infty} u(x,\tau) = \lim_{x\longrightarrow-\infty} e^{-(\alpha x+\beta\tau)}v(x,\tau) = 0$

Por los argumentos que vimos en clase, sabemos que la solución a un problema de este estilo para $\tau > 0$ es de la forma:

$$u(x,\tau) = \mathbb{E}_{N(x,\sqrt{2\tau})}(g)$$

donde $N(x,\sqrt{2\tau})$ es una distribución normal con media $x$ y varianza $2\tau$ y $g$ es $u(x,0)$ como se halló en el paso anterior. Para hallar una forma cerrada, debemos deshacer las sustituciones que realizamos en el punto anterior:

$$\mathbb{E}_{N(x,\sqrt{2\tau})}(g) = \int_{\mathbb{R}} g(s)\frac{1}{\sqrt{2\tau}}f_Z(\frac{s-x}{\sqrt{2\tau}})ds = \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\frac{\log\left(\frac{E_2}{E}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}} \left(e^{-(\alpha-1)(x+\sqrt{2\tau}y)} - e^{-\alpha(x+\sqrt{2\tau}y)}\right)f_Z(y)\,dy$$

donde $f_Z$ es la densidad de una normal estándar.Esto es igual a:

$$e^{-(\alpha-1)x}\int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\frac{\log\left(\frac{E_2}{E}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{-(\alpha-1)(\sqrt{2\tau}y)}f_Z(y)\,dy - e^{-\alpha x}\int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\frac{\log\left(\frac{E_2}{E}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\alpha(\sqrt{2\tau}y)}f_Z(y)\,dy = I_1 - I_2 \quad (2.2)$$

Si resolvemos la integral de la derecha ($I_2$), la solución de la integral de la izquierda ($I_1$) se realiza de forma análoga. Resolvamos entonces la integral de la derecha que reescribimos como:

$$e^{-\alpha x}\int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\frac{\log\left(\frac{E_2}{E}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\alpha(\sqrt{2\tau}y)}\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dy$$

y si reorganizamos los exponenciales como

$$-\frac{y^2}{2} - \alpha(\sqrt{2\tau}y) = -\frac{1}{2}(y+\alpha\sqrt{2\tau})^2 + \alpha^2\tau$$

entonces esta integral toma la forma:

$$e^{-\alpha x+\alpha^2\tau}\int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\frac{\log\left(\frac{E_2}{E}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}} \frac{e^{-\frac{(y+\alpha\sqrt{2\tau})^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dy$$

y si realizamos la sustitución $w = y + \alpha\sqrt{2\tau}$ obtenemos:

$$e^{-\alpha x+\alpha^2\tau}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}}^{\frac{\log\left(\frac{E_2}{E}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}} \frac{e^{-\frac{w^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dw = \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}}^{\frac{\log\left(\frac{E_2}{E}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}} f_Z(w)\,dw$$

Si $F_Z$ es la función de distribución acumulada de una variable aleatoria con distribución normal estándar entonces podemos reescribir esta integral como:

$$e^{-\alpha x+\alpha^2\tau}\Big[F_Z\Big(\frac{\log(\frac{E_2}{E})-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\Big)-F_Z\Big(-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\Big)\Big]=I_2$$

y recuerde que $I_1$ se resuelve de forma análoga a $I_2$ pero reemplazando $\alpha$ por $\alpha-1$. Por lo que

$$u(x,\tau)=I_1-I_2$$

donde

$$I_1=e^{-(\alpha-1)x+(\alpha-1)^2\tau}\Big[F_Z\Big(\frac{\log(\frac{E_2}{E})-x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\Big)-F_Z\Big(-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\Big)\Big]$$

y

$$I_2=e^{-\alpha x+\alpha^2\tau}\Big[F_Z\Big(\frac{\log(\frac{E_2}{E})-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\Big)-F_Z\Big(-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\Big)\Big]$$

Luego, si deshacemos los cambios de variables realizados para llegar la ecuación de difusión:

$$C(S.t)=Ev(x(S),\tau(t))=Ee^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)$$

obtenemos:

$$Ee^{\alpha x+\beta\tau}\Big[I_1-I_2\Big]$$

que es igual a :

$$Ee^{x+((\alpha-1)^2+\beta)\tau}\Big[F_Z\Big(\frac{\log(\frac{E_2}{E})-x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\Big)-F_Z\Big(-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\Big)\Big]$$
$$-Ee^{(\alpha^2+\beta)\tau}\Big[F_Z\Big(\frac{\log(\frac{E_2}{E}-x)}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\Big)-F_Z\Big(-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\Big)\Big]$$

y ahora escogemos $\alpha$ y $\beta$ para que cumplan las relaciones $\beta+(\alpha-1)^2$ y $\beta+\alpha^2=-k$ y así la ecuación anterior se transforma en :

$$Ee^{x}\Big[F_Z\Big(\frac{\log(\frac{E_2}{E})-x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\Big)-F_Z\Big(\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\Big)\Big]$$
$$-Ee^{-k\tau}\Big[F_Z\Big(\frac{\log(\frac{E_2}{E})-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\Big)-F_Z\Big(\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\Big)\Big]$$

y volviendo a las variables originales: $x = \log\left(\frac{S}{E}\right)$, $\tau = \frac{\sigma^2(T-t)}{2}$, $\sqrt{2\tau} = \sigma\sqrt{T-t}$, $\alpha = \frac{1-k}{2}$, $\alpha - 1 = -\frac{k+1}{2}$ la expresión se transforma en :

$$S\Big[F_Z\Big(\frac{\log\left(\frac{E_2}{S} + (\alpha-1)\sigma^2(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) - F_Z\Big(\frac{\log\left(\frac{E}{S}\right) + (\alpha-1)\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)\Big]$$
$$-Ee^{-k\tau}\Big[F_Z\Big(\frac{\log\left(\frac{E_2}{S}\right) + \alpha\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) - F_Z\Big(\frac{\log\left(\frac{E}{S}\right) + \alpha\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)\Big]$$

que se puede simplificar aún más con las siguiente observaciones: $(\alpha-1)\sigma^2 = -(\frac{k+1}{2})\sigma^2 = -(r + \frac{\sigma^2}{2})$, $\alpha\sigma^2 = (\frac{1-k}{2})\sigma^2 = (\frac{\sigma^2}{2} - r)$ llevándonos a la expresión:

$$\begin{aligned} C(S,t) = S\Big[F_Z\Big(\frac{\log\left(\frac{E_2}{S}\right) - (r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) - F_Z\Big(\frac{\log\left(\frac{E}{S}\right) - (r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)\Big] \\ -Ee^{-r(T-t)}\Big[F_Z\Big(\frac{\log\left(\frac{E_2}{S}\right) + (\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) - F_Z\Big(\frac{\log\left(\frac{E}{S}\right) + (\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)\Big] \end{aligned} \tag{2.3}$$

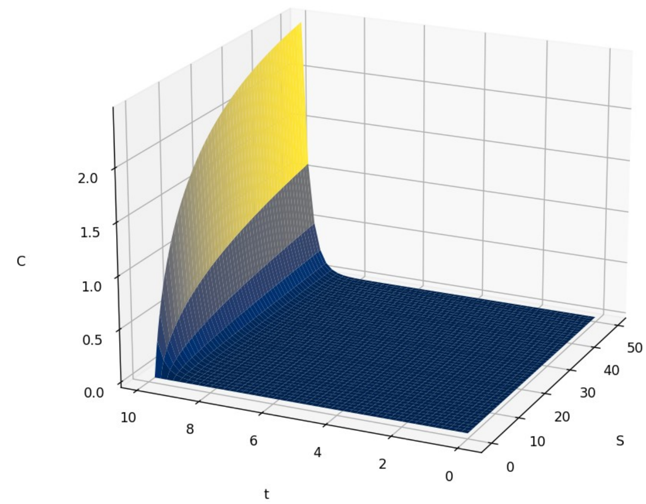
esta última ecuación 2.3 es la solución a la E.D.P de Black-Scholes para la opción ventana.

## 2.6. Visualización

A continuación se grafica la función $C(S,t)$ entre $(S,t) \in [0,50] \times [0,10]$ para distintos parámetros de la opción. El activo tiene parámetros fijos $\mu = 1$, $\sigma = 5$.

| $r$ | $T$ | $E$ | $E_2$ |
|---|---|---|---|
| 0.15 | 10 | 1 | 20 |
| 0.10 | 10 | 4 | 20 |
| 0.15 | 5 | 1 | 20 |
| 0.10 | 9 | 1 | 20 |

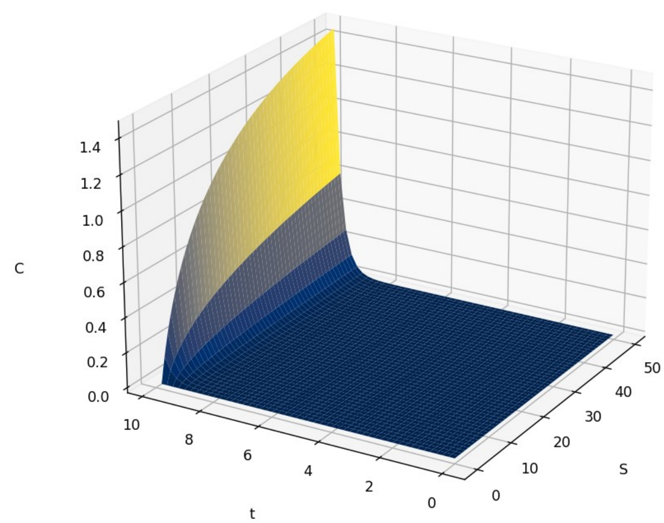
- Superficie C(S,t) primera tanda de parámetros




(b)

$r = 0{,}15$; $T = 10$; $E = 1$; $E_2 = 20$

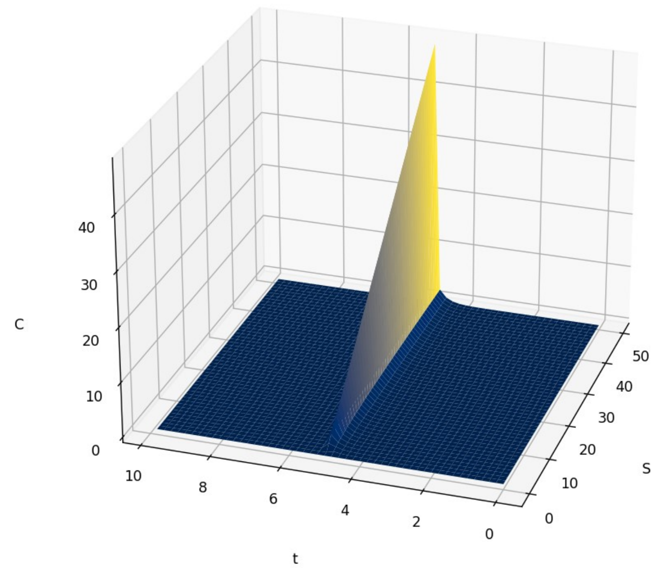
- Superficie C(S,t) segunda tanda de parámetros




(c)

$r = 0{,}10$; $T = 10$; $E = 4$; $E_2 = 20$

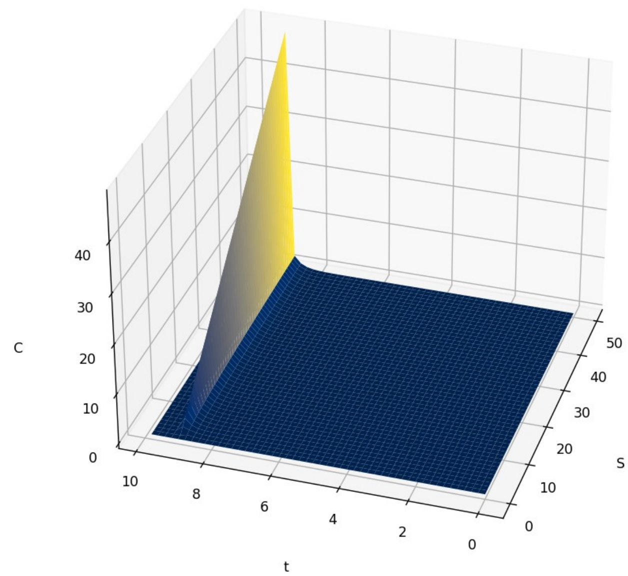
- Superficie C(S,t) tercera tanda de parámetros




(d)

$r = 0{,}15;\ T = 5;\ E = 1;\ E_2 = 20$

- Superficie C(S,t) cuarta tanda de parámetros




(e)

$r = 0{,}10$; $T = 9$; $E = 1$; $E_2 = 20$

# Capítulo 3

# Simulaciones con Opción

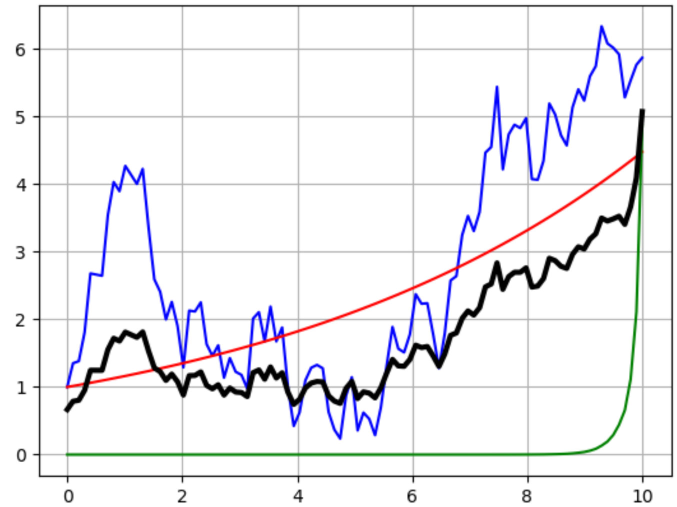
## 3.1. Resultados

A continuación se considera el portafolio compuesto uniformemente por: el activo, una opción call ventana sobre el activo, y el activo libre de riesgo. Para el activo se utiliza el algoritmo descrito arriba y para la opción se toman los valores en el tiempo de la realización del proceso del activo.

A continuación se muestra las ejecuciones de la simulación con los mismos 4 conjuntos de parámetros que las superficies de $C$ previas. Nuevamente, el activo tiene parámetros fijos $\mu = 1$, $\sigma = 5$.

Se muestra el valor del activo en azul, el valor del activo libre de riesgo en rojo, el valor de la opción en verde y el valor de todo el portafolio en negro.

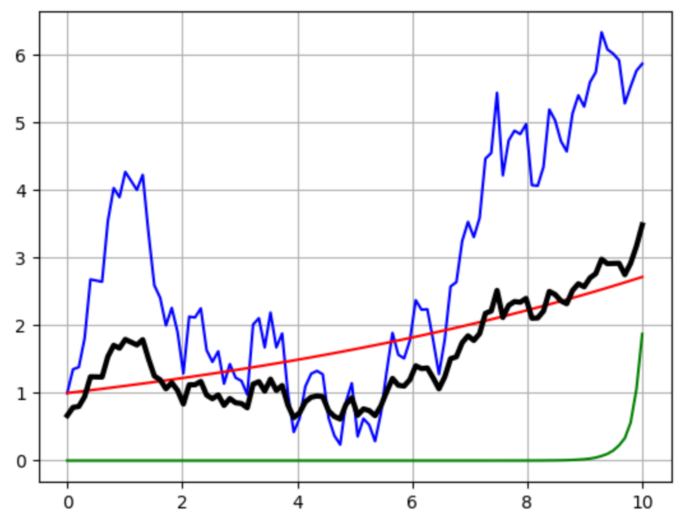
- Simulación C(S,t) primera tanda de parámetros




(a)

$r = 0{,}15$; $T = 10$; $E = 1$; $E_2 = 20$

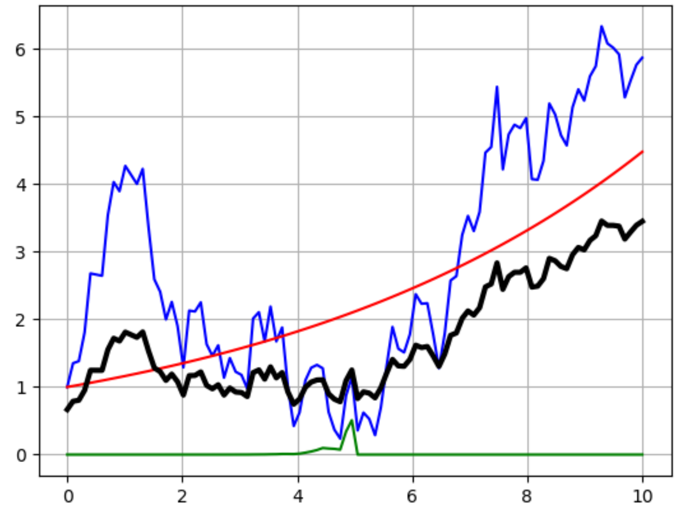
- Simulación C(S,t) segunda tanda de parámetros




(b)

$r = 0{,}10$; $T = 10$; $E = 4$; $E_2 = 20$

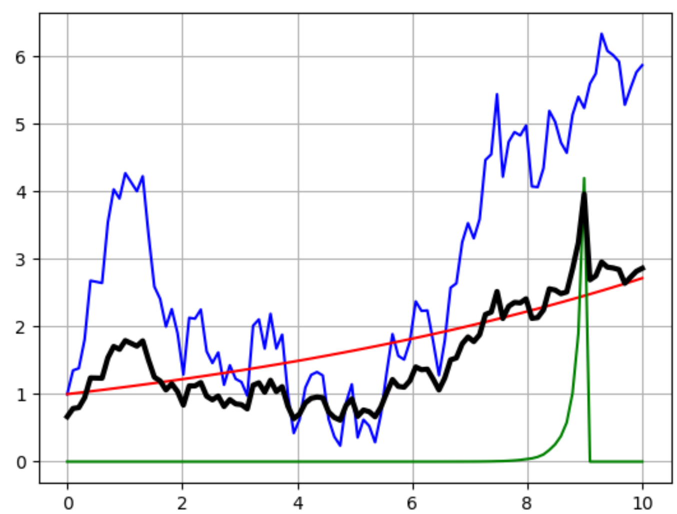
- Simulación C(S,t) tercera tanda de parámetros




(c)

$r = 0{,}15$; $T = 5$; $E = 1$; $E_2 = 20$

- Simulación C(S,t) cuarta tanda de parámetros



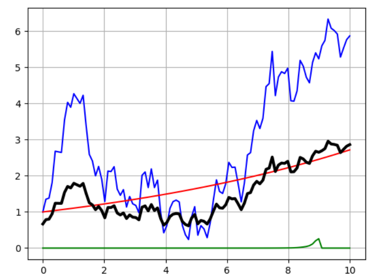

(d)

$r = 0{,}10$; $T = 9$; $E = 1$; $E_2 = 20$

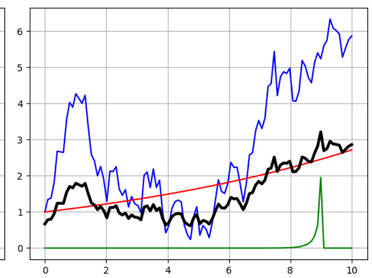
## 3.2. Observaciones

La opción parece tomar valores casi nulos mientras el vencimiento del contrato siga en el horizonte. Una vez se acerca el vencimiento del contrato, la opción aumenta su valor rápidamente de manera continua hasta la diferencia entre el valor del activo y el precio de strike, siempre y cuando el valor del activo esté por debajo del límite superior de la ventana. Además al variar el parámetro $E_2$ que define el límite superior de la ventana, se puede notar que al hacerlo más bajo el fenómeno del crecimiento del valor de la opción se da más aún cerca al vencimiento y por lo tanto tiene un crecimiento más empinado. A continuación se toma la cuarta tanda de parámetros para variar $E_2$ y observar este comportamiento.

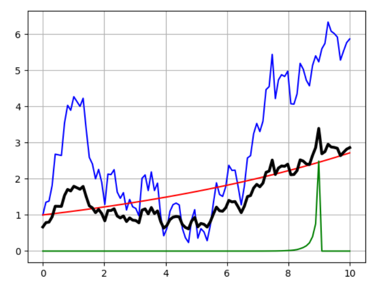
Se fija $r = 0{,}15$; $T = 10$; $E = 1$, a continuación se varía $E_2$



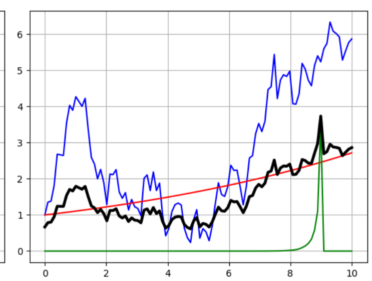
$E_2 = 3$



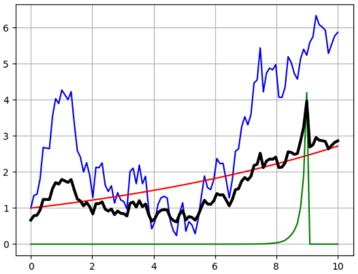
$E_2 = 6$



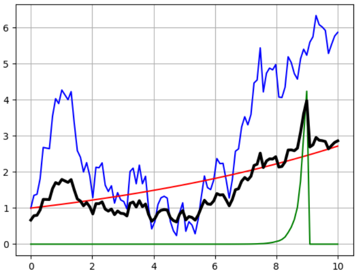
$E_2 = 7$



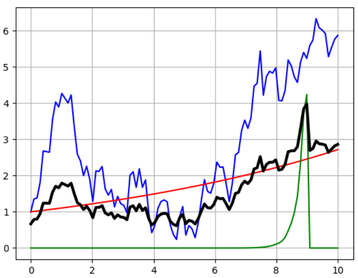
$E_2 = 10$



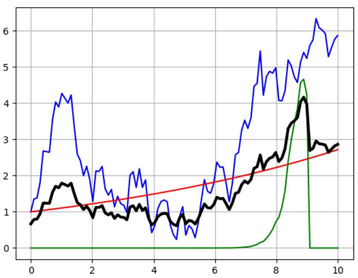
$E_2 = 20$



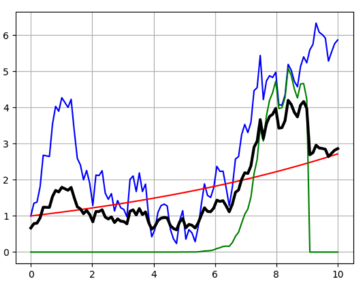
$E_2 = 50$



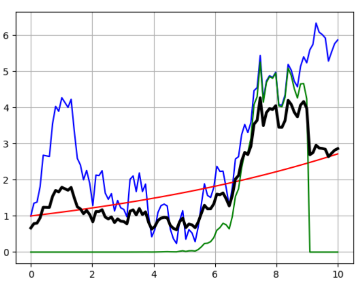
$E_2 = 100$



$E_2 = 10000$



$E_2 = 10000000000$



$E_2 = 100000000000000$

## 3.3. Conclusión

El parámetro $E_2$ le dice a la opción call con ventana que tanto comportarse como una opción call sin ventana, es decir mientras mayor sea este mayor es el dominio desde el tiempo de vencimiento hacia atras en el que la opción con ventana se asemeja a una opción sin ventana. Note que al hacerlo muy pequeño, incluso por debajo del precio final del activo el valor entonces de la opción con ventana se vuelve despreciable, precisamente por que es muy improbable que siquiera se pueda ejercer.