Examen Final

Modelos Matemáticos para la Gestión Financiera

Sergio Arango

Índice general

Capítulo 1

Árbol Binomial

El modelo de Árbol Binomial geométrico se utiliza para modelar y simular el comportamiento del valor de activos financieros. En general consiste en un proceso estocástico Markoviano $\{M_n\}_n$ con la siguiente forma:

$$\mathbf{P}(M_{n+1} = M_n * u) = p$$

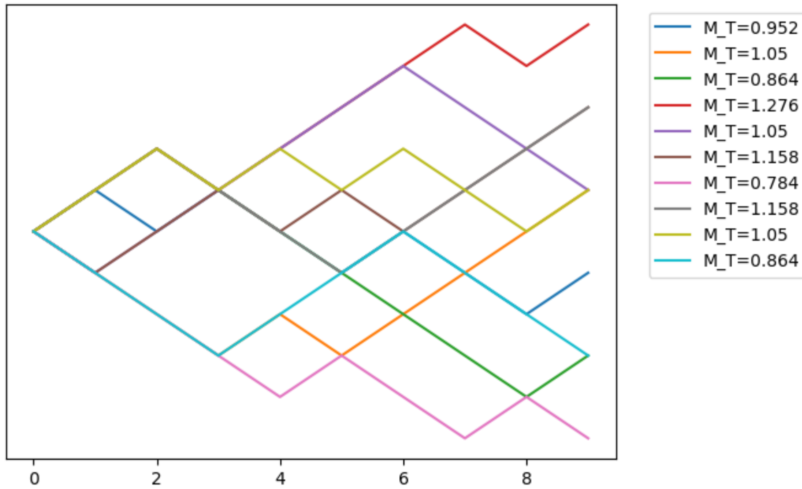
$$\mathbf{P}(M_{n+1} = M_n * d) = q$$

donde $p+q=1$ y u, d (up,down) representan factores de crecimiento y decrecimiento respectivamente. Es decir que usualmente $u \geq 1$ y $0 \leq d \leq 1$, pero en general simplemente representan un factor optimista y pesimista para la evolución del valor unitario del activo. El valor del activo M_n entonces varía de manera no líneal siendo multiplicado aleatoriamente por los factores u y d, sin embargo la representación que se suele adoptar para la realización del modelo no es la gráfica de valor exacto de M_n con respecto a los instantes de tiempo n sino simplemente con la indicación de si se tomo $M_{n+1} = M_n * u$ como un escalón hacia arriba y en el caso contrario $M_{n+1} = M_n * d$ un escalón hacia abajo.

En este proyecto se ha implementado la simulación de este modelo y alguna variaciones, continuación se muestran los resultados.

1.1. Árbol Binomial Geométrico

A continuación se realizan 10 simulaciones de $T = 10$ periodos de M_n tomando como precio inicial $M_0 = 1$. Además se toma $u = 1{,}05$, $d = \frac{1}{u} = 0{,}952$ y $p = 0{,}5$. Note que p define a $q = 1 - p = 0{,}5$.



(a)

10 realizaciones del modelo Árbol Binomial

1.2. Árbol Binomial Geométrico de Riesgo Neutral

Como es usual en los modelos matemáticos financieros, se puede tener en cuenta una tasa libre de riesgo r. El dinero invertido a la tasa libre de riesgo crece en cada periodo por un factor determinista de $1+r$. Para el modelo de árbol binomial con unos factores u, d dados, se puede imponer la restricción de riesgo neutral para obtener una probabilidad correspondiente de riesgo neutral.

El riesgo neutral se refiere a que periodo a periodo el activo *se espera* que se comporte como el activo libre de riesgo. Es decir:

$$\mathbf{E}(M_{n+1}) = M_n * (1+r)$$

. Al evaluar el lado izquierdo se tiene

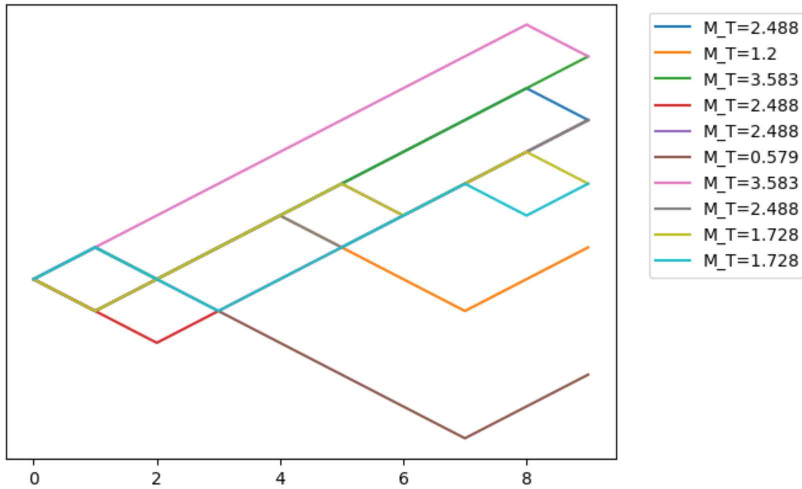
$$p * u * M_n + q * d * M_n = M_n * (1+r)$$

donde p y $q = 1-p$ son las probabilidades resultantes de la condición de riesgo neutral, se sigue entonces

$$p * u + (1-p) * d = 1+r$$

de donde se obtiene que $p = \frac{1+r-d}{u-d}$

A continuación se simulan nuevamente 10 realizaciones. Se utilizan los mismos parámetros junto con $r = 0{,}10$ y la probabilidad resultante es $p = 0{,}7273$



(b)

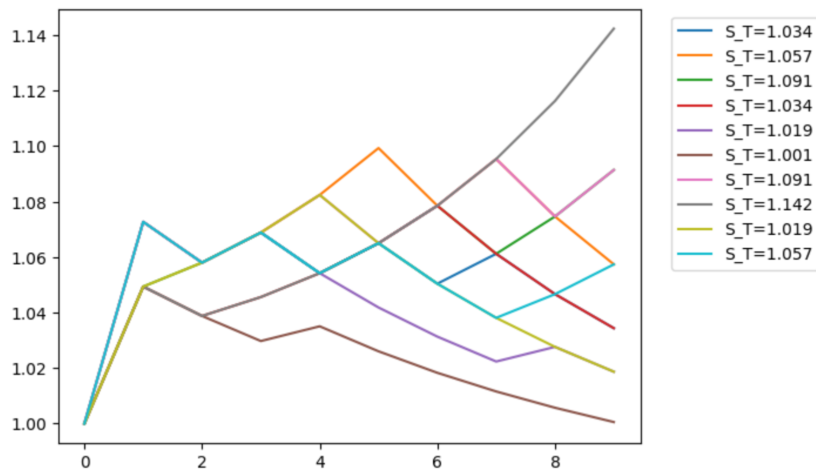
10 realizaciones del modelo Árbol Binomial con Riesgo Neutral

1.3. Proceso de Valorización

Del proceso de arból binomial se pueden derivar otros procesos como por ejemplo el proceso de valorización, definido como

$$S_n = e^{\sigma M_n} \left(\frac{2}{e^{\sigma} + e^{-\sigma}} \right)^n$$

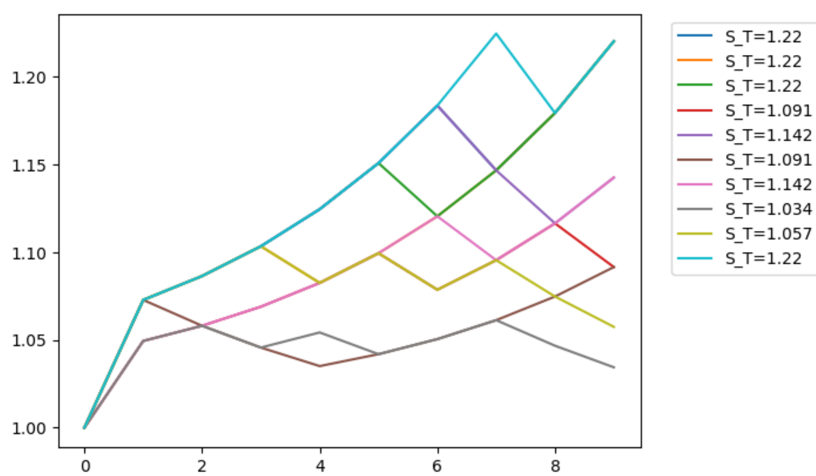
dado un parámetro σ. A continuación se muestra el resultado de simular 10 realizaciones del proceso de valorización con los mismo parámetros del primer árbol binomial y $\sigma = 0{,}06$.



(c)

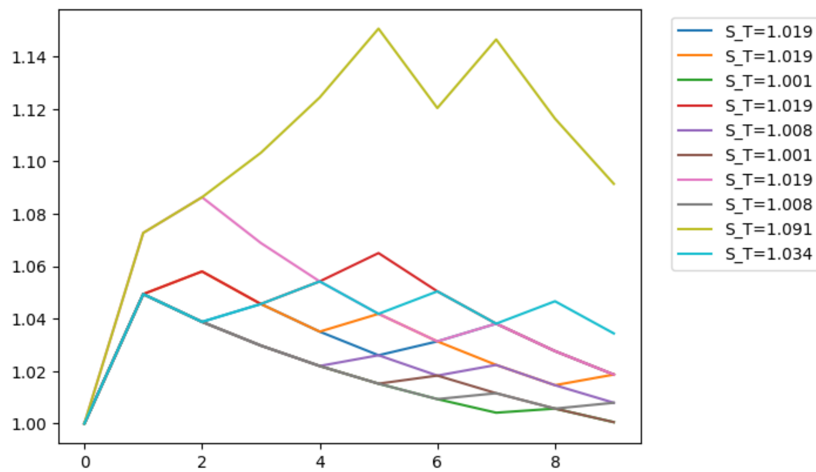
10 realizaciones del modelo de valorización

A continuación se simula el mismo proceso de valorización con distintos valores del parámetro de probabilidad de ascenso p.



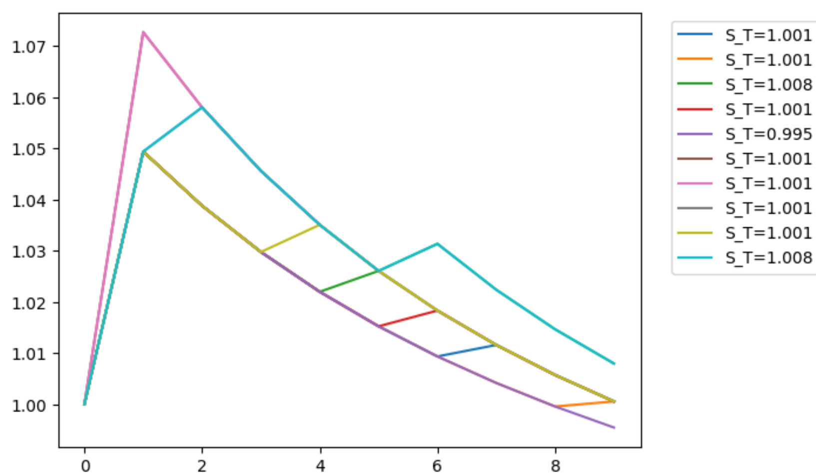
(d)

10 realizaciones del modelo de valorización, $p = 0{,}75$



(e)

10 realizaciones del modelo de valorización, $p = 0{,}38$



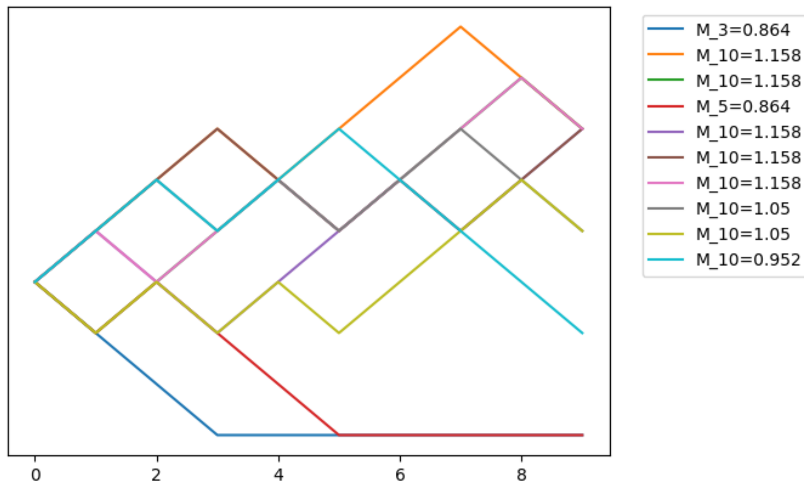
(f)

10 realizaciones del modelo de valorización, $p = 0{,}1$

1.4. Tiempos de Parada

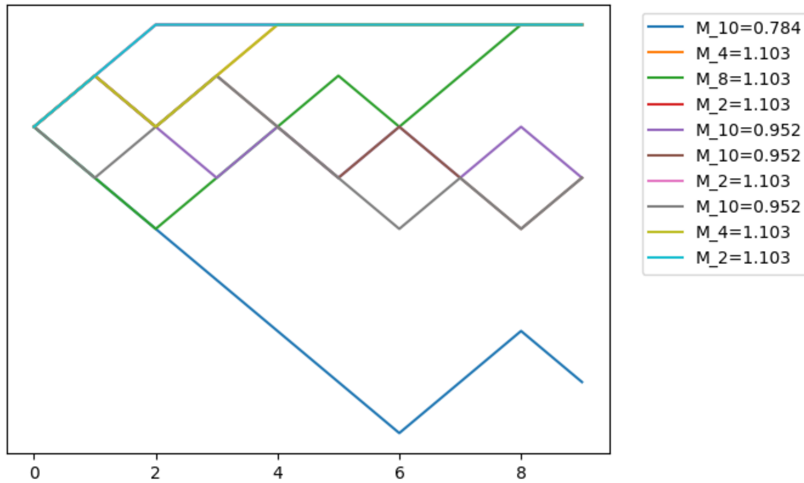
En el ejercicio financiero práctico se puede llegar a un momento en el que se suelta la posición sobre el activo, lo que se podría modelar como un congelamiento sobre el valor del activo. El tiempo de parada podrá ser determinado por cada inversionista individualmente. A continuación se realizan simulaciones del proceso de árbol binomial con tiempos de parada aleatorios y luego con tiempos de parada por llegar a un tope mínimo o máximo conocidos en el trading como stop loss y take profit.

A la derecha se registra el tiempo de parada por cada simulación y el valor en el que quedó congelado.



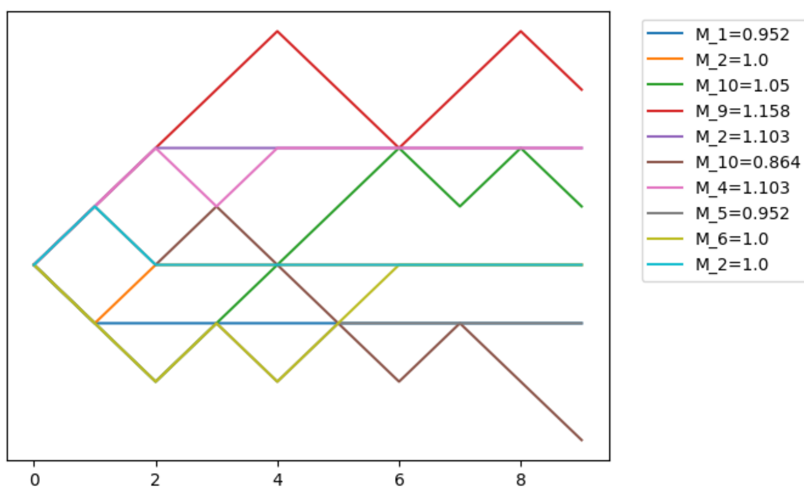
(g)

Árbol Binomial con StopLoss en 0,9



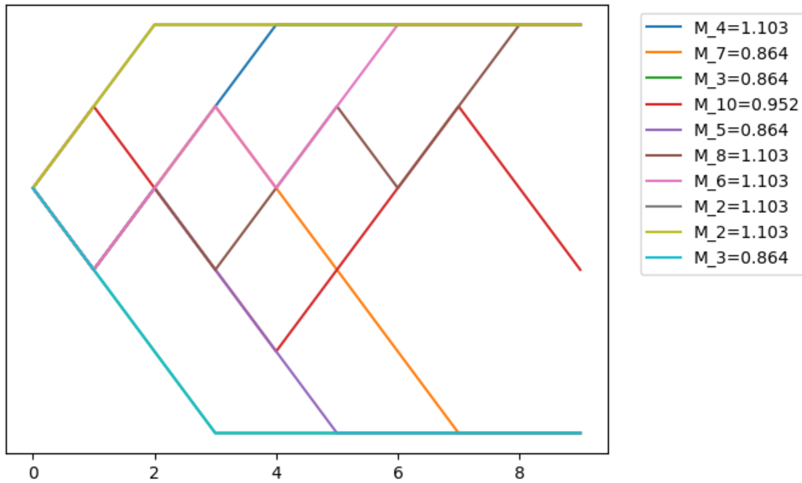
(h)

Árbol Binomial con TakeProfit en 1,1



(i)

Árbol Binomial con tiempos de parada aleatorios



(j)

Árbol Binomial con StopLoss en 0,9 y TakeProfit en 1,1

1.5. Observaciones

Inicialmente se puede observar que el árbol binomial original parece ir a la deriva mientras que el árbol binomial de riesgo neutral parece tener una tendencia mucho más marcada. Esto es dado no solo por la falta de la condición de riesgo sino también por el hecho que el original tiene probabilidades simétricas y factores simétricos para subir y bajar por lo que se le puede esperar un comportamiento mucho más estacionario. Claramente en el caso de riesgo neutral, al tener que el valor esperado en cada periodo es el de crecer a una tasa $r > 0$ se tiene que crece a un factor $1 + r > 1$.

Al observar los resultados del proceso de valorización se observa que el valor del activo al final de los 10 periodos tiende a ser menos variable y siempre creciente en los datos observados, mientras que los valores obtenidos al final de los 10 periodos del árbol binomial tienen mayor variación e incluye varios valores por debajo del valor inicial $M_0 = 1$.

Finalmente para los tiempos de parada se puede observar como estos pueden disminuir la variación de la evolución del valor del activo. En particular las simulaciones que toman stop loss tienden a terminar con un valor final inferior a las simulaciones sin parada y las simulaciones con take profit, por el contrario, tienden a tener mayor valor final que las simulaciones sin parada. Las simulaciones que toman tanto stop loss como take profit, parecen acumularse en ambos extremos y con variación reducida, que es justo lo que se espera ya que estos comandos de parada funcionan como equilibrios absorventes del proceso.

Propiedad Martingala

Dado un proceso estocástico A_n este se conoce como una martingala si y solo si:

$$\mathbf{E}(A_{n+1}) = A_n$$

, es decir que, por lo menos en valor esperado, se tiene estabilidad.

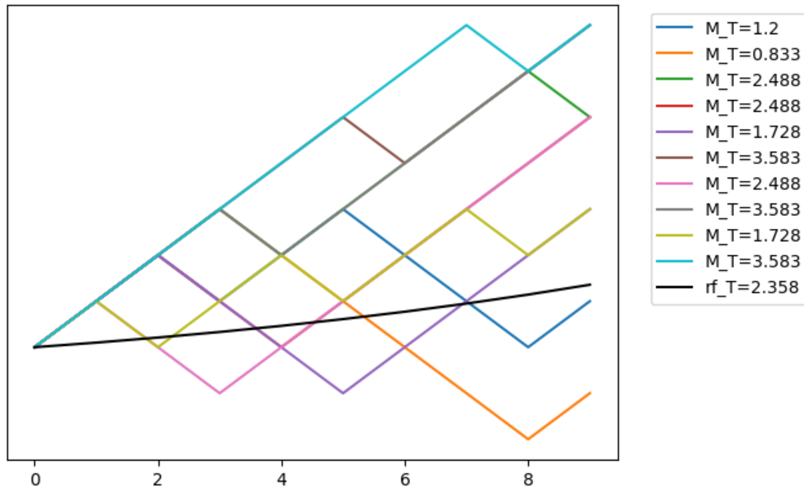
En el mundo financiero se sabe que el valor del dinero en el tiempo siempre decrece a alguna tasa que muchas veces es tomada como la inflación o incluso como la misma tasa libre de riesgo r. Es por esto que el dinero nunca seguirá una estabilidad a través del tiempo por si solo, sin tener en cuenta esta tasa de descuento a través del tiempo. Volviendo a la condición de riesgo neutral impuesta sobre el proceso de árbol binomial se tiene $\mathbf{E}(M_{n+1}) = M_n * (1+r)$, lo cuál además implica $\mathbf{E}(M_n) = M_0 * (1+r)^n$. Si se tomara el proceso descontado a valor presente por la misma tasa $r : E_n = \frac{M_n}{(1+r)^n}$ entonces se tendría

$$\mathbf{E}(E_{n+1}) = \mathbf{E}\left(\frac{M_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{(1+r)^{n+1}}\mathbf{E}(M_{n+1}) = \frac{1}{(1+r)^{n+1}} \cdot M_n \cdot (1+r) = \frac{M_n}{(1+r)^n} = E_n$$

Y se tiene entonces la propiedad de martingala para el árbol binomial de riesgo neutral traído a valor presente. A continuación se puede evidenciar el comportamiento del proceso con riesgo neutral y con riesgo neutral traído a valor presente ambos comparados con el activo libre de riesgo.

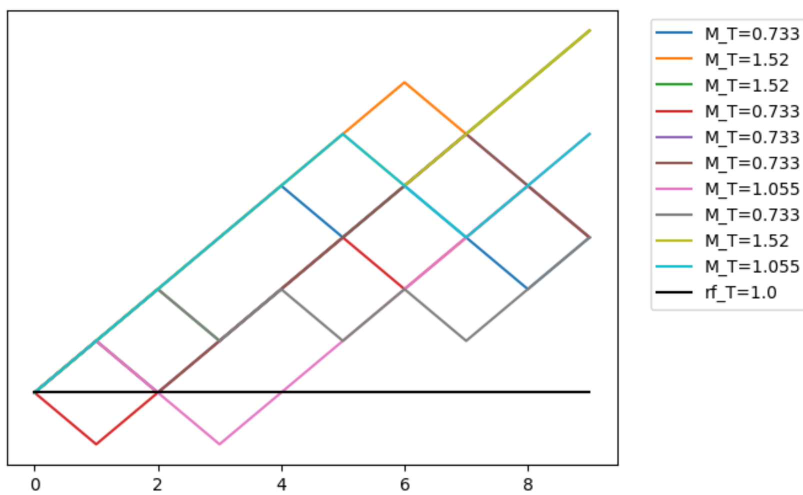
Sin traer a valor presente el árbol binomial con riesgo neutral finaliza en promedio en $2{,}37 * M_0$, mientras que el valor final de M_0 invertido a la tasa libre de riesgo resulta en $2{,}358 * M_0$.



(k)

Riesgo Neutral (No Martingala)

Por otro lado el proceso a árbol binomial con riesgo neutral traído a valor presente, mencionado anteriormente tiene en promedio un valor final de $1{,}03 * M_0$ mientras que M_0 invertido a la tasa libre de riesgo tiene un valor estacionario de M_0 a través del tiempo cuando este valor es traído a valor presente.



(l)

Riesgo Neutral Valor Presente (Martingala)

.

Capítulo 2

Procesos de Valoración y Capitalización con Derivados

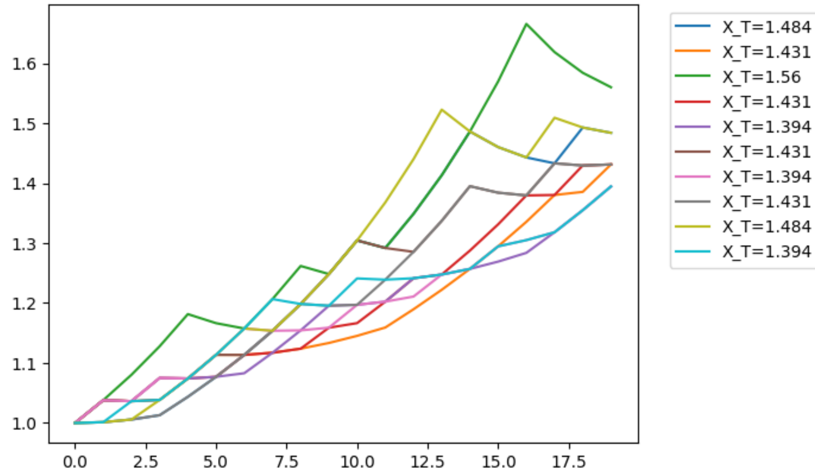
Los derivados financieros son activos derivados atados a un activo subyacente, varios ejemplos se ha mencionado y estudiado en clase como forwards, futuros, opciones, swaps, etc. El propósito de los derivados es darle flexibilidad al inversionista en su forma de invertir en el mismo activo subyacente y por lo tanto brindarle libertad para manejo particular del riesgo.

2.1. Proceso de Capitalización

El proceso de capitalización modela el patrimonio de un inversionista que distribuye su dinero entre la tasa libre de riesgo y un activo S. Se modela como un proceso estocástico X_n:

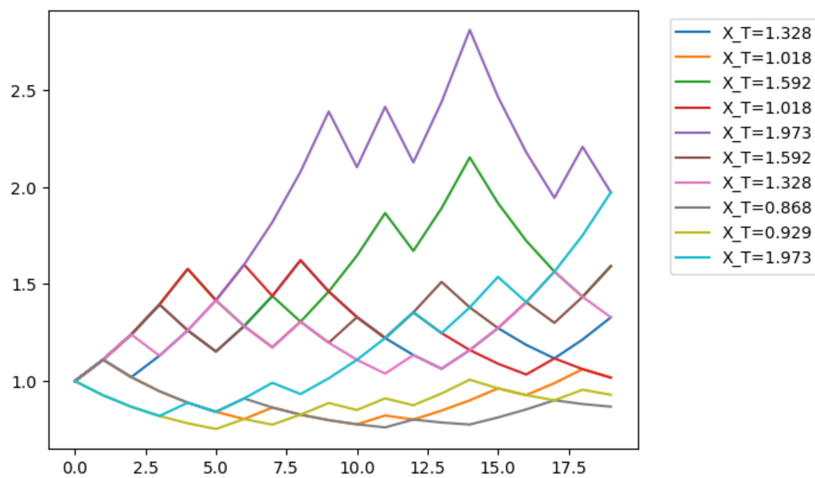
$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n)$$

Este es derivado de otros dos procesos estocásticos S_n y Δ_n donde S_n es el proceso estocástico que modela el precio del activo y Δ_n modela las decisiones en el tiempo del inversionista; exactamente es la distribución de su dinero que destina a invertir en el activo S en el tiempo n. Por lo tanto el dinero $X_n - \Delta_n S_n$ es invertido a la tasa libre de riesgo. Note que estos dos números puede tomar valores negativos, representando préstamos en el caso de Δ_n, y posiciones en corto sobre el activo S en el caso de $X_n - \Delta_n S_n$. El acto de tomar préstamos a la tasa libre de riesgo para invertir en el activo se conoce como apalancar. A continuación se introduce una implementación donde el usuario debe ingresar previamente su estrategia de inversión Δ_n y el valor del activo S es modelado por el árbol binomial geométrico.



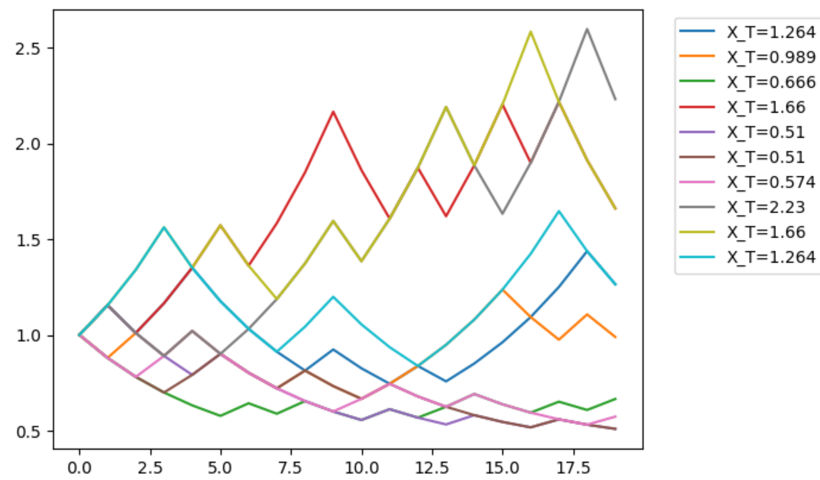
(a)

Proceso de Capitalización $\Delta_n = 0{,}1$



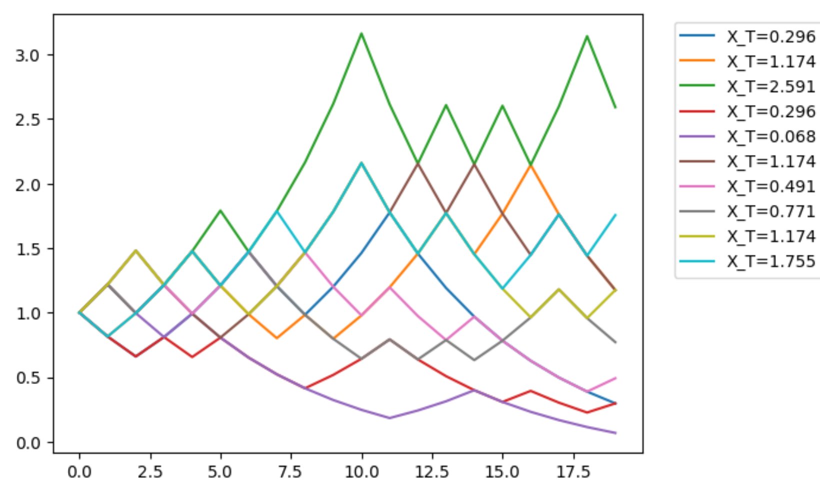
(b)

Proceso de Capitalización $\Delta_n = 0{,}5$



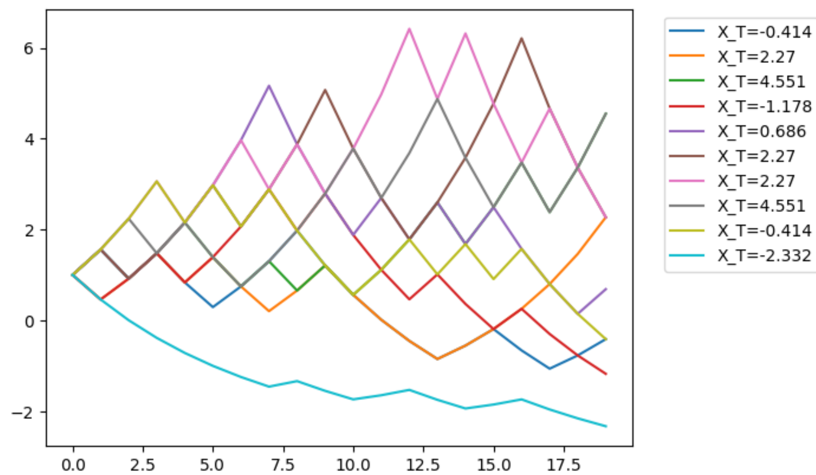
(c)

Proceso de Capitalización $\Delta_n = 0{,}75$



(d)

Proceso de Capitalización $\Delta_n = 1{,}1$



(e)

Proceso de Capitalización $\Delta_n = 3{,}0$

Se muestran realizaciones de 10 simulaciones del proceso de capitalización con estrategias de inversión constantes $\Delta_n = C$ con $C = 10\,\%$, $50\,\%$, $75\,\%$, $110\,\%$, $300\,\%$ que resultan en promedio con un valor final de $X_T = 144\,\%$, $136\,\%$, $113\,\%$, $97\,\%$, $123\,\%$. Los parámetros utilizados son $p = 0{,}5$, $u = 1{,}20$, $d = 1/u = 0{,}833$, $T = 30$, $S_0 = 1$, $r = 0{,}02$.

2.2. Proceso de Valoración

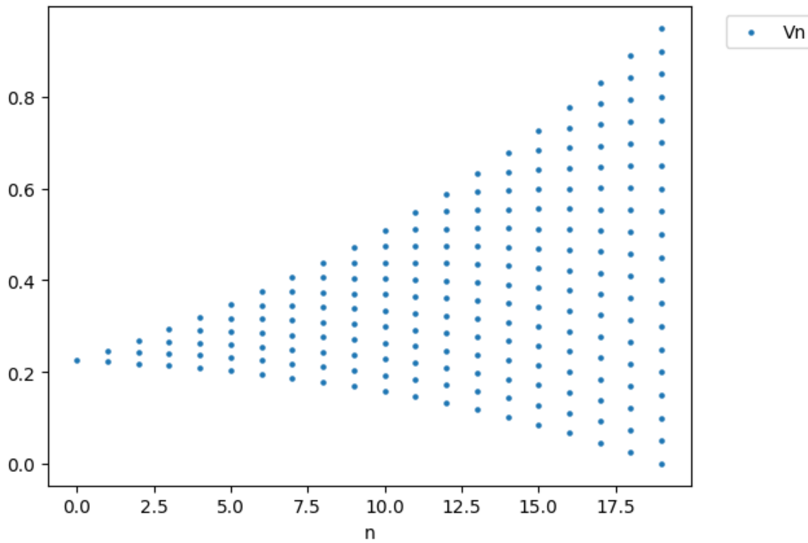
Dado que una derivado siga un comportamiento de riesgo neutral, se puede modelar con el proceso de Valoración, este es una variación del modelo de árbol binomial. Usualmente se utiliza para entender los posibles caminos por los que puede evolucionar el valor del derivado, dado un conjunto de posibles valores finales. Los valores en un tiempo $n-1$ se pueden obtener a partir de los valores en el tiempo n siguiendo la relación recursiva dictada por la condición de riesgo neutral:

$$V_n = \frac{p \cdot V_{n+1}(u) + q \cdot V_{n+1}(d)}{1+r} = \frac{\mathbf{E}(V_{n+1})}{1+r}$$
$$p + q = 1$$

.

La diferencia con el árbol binomial geométrico es que no necesariamente $V_{n+1}(u) = V_n * u$ y $V_{n+1}(d) = V_n * d$. De nuevo se tiene en cuenta un escenario optimista y un escenario pesimista pero no necesariamente estos son un factor u y d del valor anterior respectivamente, como en el árbol binomial geométrico. Por supuesto el árbol binomial geométrico es un caso particular del modelo de valoración.

A continuación se muestra el resultado de aplicar la fórmula recursiva a un listado de 20 posibles valores finales para construir hacia atrás todo el modelo de Valoración. Los valores utilizados son $i/20$ para $i = 0, ..., 19$.



(f)

Proceso de Valoración

2.3. Replicación

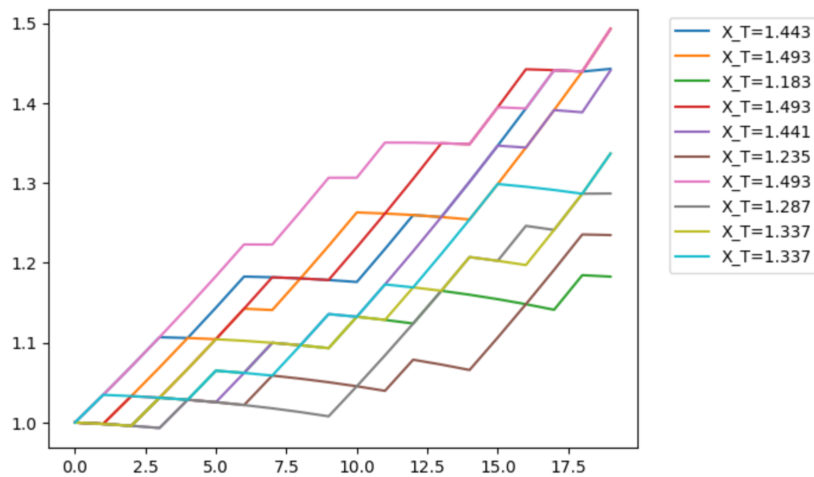
Finalmente se presenta el concepto de replicación. La idea consiste en dado S_n y V_n escoger un Δ_n de forma que el X_n resultante de S_n Δ_n se comporte igual que V_n. El Δ_n se va definiendo paso a paso .en vivo”dependiendo de los valores actuales de V_n y S_n y los valores hipotéticos que podrían tomar ambos en el siguiente periodo dado su valor actual. La forma exacta de definir Δ_n para realizar la técnica de replicación es la siguiente:

$$\Delta_n = \frac{V_{n+1}(u) - V_{n+1}(d)}{S_{n+1}(u) - S_{n+1}(d)}$$

Por supuesto esta es la forma de definirlo en el caso que tanta S_n como V_n siguen un proceso de árbol binomial, es decir que en cada paso la evolución del proceso al siguiente periodo considera dos escenarios; pesimista y optimista.

En el este estudio se implementa considerando que S_n sigue un proceso de árbol binomial geométrico, es decir $S_{n+1}(u) = S_n \cdot u$ y $S_{n+1}(d) = S_n \cdot d$ y V_n viene dado por el modelo de Valoración ejecutado sobre una lista final de posibles valores de V_T.

A continuación se muestra el resultado de ejecutar la técnica de replicación en el proceso de capitalización para los mismos parámetros que se realizaron las simulaciones del proceso de capitalización con estrategias Δ predefinidas y utilizando los mismo datos de posibles valores finales para V_T ingresados al cálculo del modelo de valoración. El algoritmo primero calcula el modelo completo de valoración y luego lo utiliza para definir los Deltas en ejecución de la simulación de S_n.



(g)

Se observa que se tiene una tendencia creciente mucho más marcada que los procesos de capitalización con estrategias predefinidas indiferentes a la evolución del proceso hasta el momento. En promedio se obtiene un resultado de valor final X_T de 138 %.