Resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias

1. Objetivo

Las presentes notas de clases tienen como objetivo guiar el estudio de los contenidos de análisis numérico comprendidos en los cursos de Matemática D1 relativos a la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Saberes previos: se suponen conocidas nociones elementales de álgebra, análisis matemático y análisis numérico. Entre otros contenidos, se recomienda revisión de: serie de Taylor, Teorema de Rolle, Teorema del Valor Medio, Ecuaciones diferenciales, errores, derivación numérica y manejo de software específico. En el capítulo 1 de la referencia [1] se encuentran teoremas de cálculo y definiciones que serán útiles en el estudio de la unidad.

2. BIBLIOGRAFÍA:

Los distintos temas comprendidos en esta guía de estudio se presentan de manera simplificada, siendo necesaria la consulta entre la bibliografía citada.

1. **Burden R. y Faires D.**, Análisis Numérico, Grupo Editorial Thomson.
2. **S. Chapra y R. Canale**, Métodos Numéricos para Ingenieros, cuarta edición, McGraw-Hill.
3. **S. Nakamura**, Análisis Numérico y Visualización Gráfica con MatLab, Prentice-Hall.
4. **Kreyzig E**, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol I y II, Limusa.
5. **Campbell S. y Haberman R**, Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con problemas de valor de frontera, McGraw Hill.
6. **W. Trench**,Ecuaciones Diferenciales con problemas de valor de frontera, Grupo Editorial Thomson.
7. **H. Moore**, MATLAB para ingenieros, Prentice-Hall

Índice

3. Introducción

Las ecuaciones diferenciales son una herramienta de suma utilidad para la ingeniería ya que permiten la modelización de una variada cantidad de problemas físicos mediante expresiones matemáticas.

Al describir un problema de la ingeniería mediante una ecuación diferencial se está haciendo una aproximación de la realidad, sustentada por la validez de ciertas hipótesis previamente establecidas. La solución de la ecuación no siempre tiene solución exacta (o "analítica"), es decir, mediante planteos en diferenciales. Otras veces la solución exacta requiere de un desarrollo demasiado extenso. Los métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales representan una aproximación a la solución analítica y una alternativa ampliamente desarrollada y difundida a la par de los computadores y el software de cálculo específico.

En el esquema de la figura 1 se presentan las etapas posibles en las cuales interviene el ingeniero para la resolución de problemas reales. Se indica en linea punteada los pasos en donde se concentra la intervención del análisis numérico y, por lo tanto, hacia donde se orientan estas notas de clases.

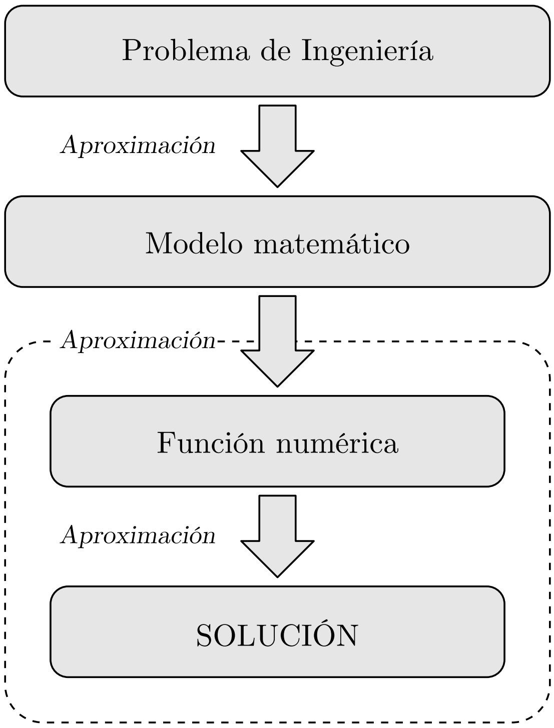

Figura 1: Etapas en un problema de ingeniería.

- **Problema de Ingeniería:** se trata del estudio del problema y su planteo. Muchos de los problemas reales en ingeniería no se presentan planteados y precisamente el planteo es un desafio.
- **Modelado matemático:** a partir de la definición del problema, las leyes de la física que lo rigen y las hipótesis adoptadas, se formula una ecuación diferencial que representa el problema (operador diferencial)
- **Formulación numérica:** se aproxima el planteo diferencial en un "planteo en diferencias", reemplazando el operador diferencial por un operador algebraico.
- **Solución:** se aplican algoritmos y software de cálculo en los que intervienen los errores admisibles (tolerancia) y problemas de almacenamiento (aritmética finita). La solución implica, además de hallar un valor numérico, una correcta interpretación y presentación de resultados.

Una mirada del esquema planteado indicaría que no hay otro camino para llegar a la solución del problema. Sin embargo se deben tener presentes las sucesivas e inevitables aproximaciones (errores) a lo largo del proceso, que pueden llevar a soluciones erróneas o absurdas. Detectar esta situación es tarea frecuente en la práctica profesional y para esto se cuenta con el conocimiento de los métodos numéricos empleados, el computador y el software de cálculo validado y la experiencia del ingeniero relativa al problema.

3.1. El dominio continuo y la discretización.

Los sistemas que constituyen los problemas de ingeniería tienen dimensiones en general acotadas por condiciones de bordes supuestas, y su dominio tiene una distribución continua en el espacio o tiempo. La ecuación diferencial plantea las leyes de la física a una porción infinitamente pequeña del sistema (un diferencial) que posteriormente será integrado a todo el dominio.

El planteo por métodos numéricos (operador en diferencias) requiere la discretización del sistema continuo en una cantidad finita de puntos en los cuales se aplica el operador. La cantidad y disposición de los puntos es en principio arbitraria aunque existen ciertas condiciones a cumplir. Por esto se debe tener presente que el planteo del operador es "en unos pocos" puntos y en consecuencia la solución de la ecuación diferencial en forma numérica la obtendremos en esos puntos que hemos adoptado como dominio (puntos o "nodos"). Al ordenamiento adoptado de puntos, representativo del dominio, se lo denomina "malla" o "mallado". A la distancia entre dos nodos se la denomina "paso" $h_i = x_{x+1} - x_i$. Si se desea aproximar la solución en valores de x que no coinciden con nodos se deberá realizar una interpolación.

3.2. Problemas de valor inicial (PVI) y problemas de condiciones de frontera.

En estas notas se trata, en primer lugar, la ecuación diferencial ordinaria de primer orden $y' = f(x, y)$ para presentar los distintos métodos de resolución. Luego estos métodos serán generalizados a ecuaciones de orden superior, de orden n: $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$. Posteriormente se presentan los sistemas de ecuaciones diferenciales, siendo esta formulación la más utilizada en los problemas reales de ingeniería, ya que los modelos matemáticos que aproximan a los problemas reales generalmente contienen más de un grado de libertad.

Una ecuación diferencial, o un sistema de ecuaciones, representan un problema de valor inicial si las condiciones requeridas para que la solución sea única están determinadas para un único punto. En general este punto es el extremo inicial del dominio.

En el caso que las condiciones suplementarias estén determinadas para puntos distintos se tendrá un problema de valores de frontera o de contorno.

3.3. Campos de direcciones.

En el caso de la ecuación diferencial de primer orden $y' = f(x, y)$, la función $y = y(x)$ será una solución si $y' = f(x, y(x))$. Pero aún sin resolver la ecuación diferencial, es decir, sin conocer la curva $y = y(x)$, es posible conocer la pendiente a dicha curva $y' = f(x, y(x))$ en cada punto (x_i, y_i),esto constituye el campo de direcciones de la ecuación diferencial.

Los campos de direcciones representan las tangentes a la curva $y = y(x)$ evaluadas en una cantidad finita de puntos (x_i, y_i). Gráficamente son representados por segmentos de rectas tangentes a cada curva solución de la ecuación diferencial.

Ejemplo

Se desea hallar las curvas tal que en cada punto (x, y) la pendiente de la tangente sea igual a la abscisa x. Esto conduce a la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x$$

La misma se puede resolver analíticamente integrando a ambos lados de la igualdad

$$\int dy = \int x\ dx \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^2}{2} + C$$

Si se desea estudiar la ecuación sin resolverla, se sabe que en cada punto del plano se conoce su tangente, de forma tal que en el punto $P = (x_0, y_0)$ la pendiente vale x_0, para representar este dato se marca un pequeño segmento de dicha tangente con P como punto medio como se muestra en la figura 2. Este segmento de la recta tangente indica que dirección tiene la curva en el momento de pasar por dicho punto.

En la figura 2 se observa el campo de direcciones para la ecuación diferencial en estudio $y' = x$ junto a cuatro posibles soluciones que se determinan a partir de la condición inicial que se imponga.

3.4. Solución de la ecuación diferencial - Existencia y unicidad.

Previo a la aplicación de procedimientos que resuelven ecuaciones en forma numérica, nos interesará saber si el problema tendrá solución y en este caso si la solución a hallar es única.

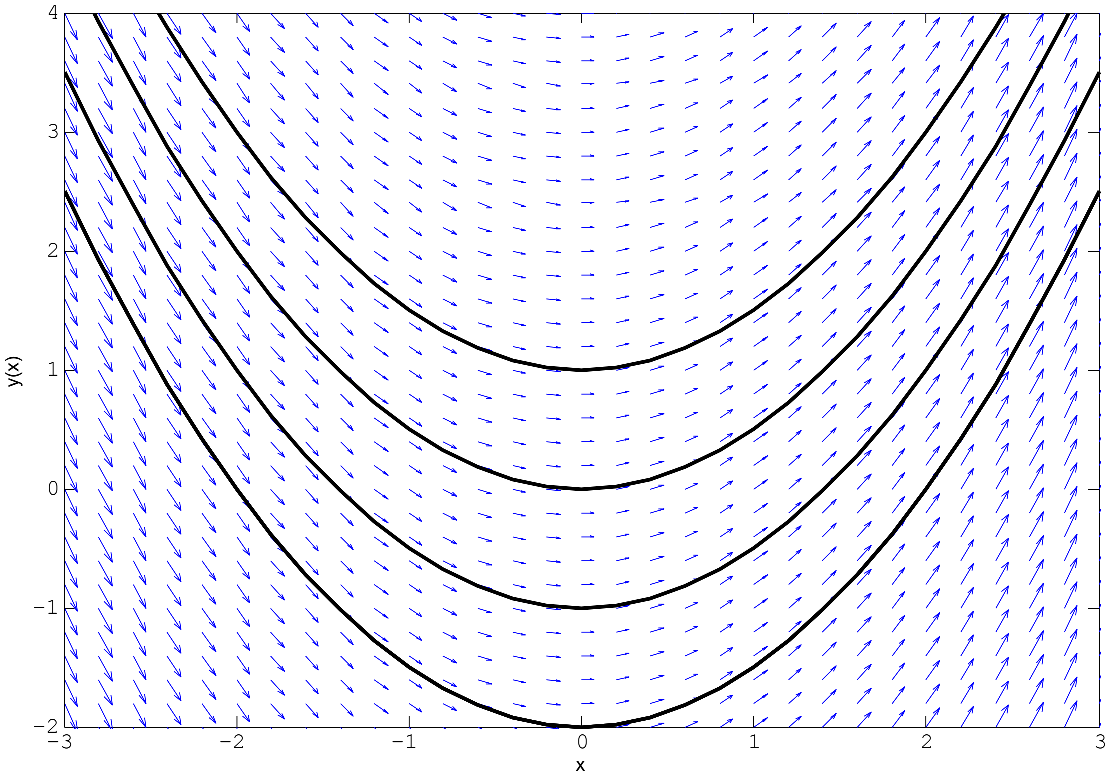

Figura 2: Campo de direcciones.

Condición de Lipschitz:

Una ecuación diferencial $y' = f(x, y(x))$ satisface la condición de Lipschitz en un dominio D del plano xy si existe una constante $L > 0$ tal que: $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L|y_2 - y_1|$ en D.

Teorema de existencia y unicidad:

Si $y' = f(x, y)$ es una ecuación diferencial tal que $f(x, y)$ es continua en algún dominio D del plano xy y satisface la condición de Lipschitz en D y $(x_0, y_0) \in D$, entonces existe una única función $y(x)$ continua y diferenciable que satisface $y' = f(x, y(x))$ y la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

3.5. Consistencia, estabilidad y convergencia de método numérico.

La aplicación de un método numérico será válida, al momento de resolver una dada ecuación diferencial, si cumple con las condiciones de consistencia, estabilidad y convergencia.

Consistencia: un planteo numérico es consistente con la ecuación diferencial que aproxima, si al refinar la malla (achicar el paso haciendo $h \to 0$) la ecuación en diferencias converge a la ecuación diferencial. En otras palabras, se analiza la correspondencia entre el operador en diferencias y el operador diferencial. No se tiene en cuenta el resultado numérico de la solución, sino la aproximación en cada paso donde el error de truncamiento tiende a cero cuando $h \to 0$.

Convergencia: un método es convergente si la diferencia entre la solución numérica y la solución exacta tiende a cero cuando se refina la malla (cuando $h \to 0$). La atención está fijada en el error total de la solución.

Estabilidad: un método es estable si la diferencia entre la solución numérica y la solución exacta tiende a cero a medida que avanza el cálculo con una cantidad de pasos tendiente a infinito (permaneciendo h constante). Es decir, para una determinada malla adoptada, la solución numérica tiende a la solución exacta cuando la cantidad de pasos tiende a infinito. Para que esto ocurra no debe producirse una amplificación de errores durante el procedimiento. En otras palabras, un error introducido en un paso (una perturbación en el proceso) no debe llevar a errores amplificados que resulten en soluciones absurdas del problema.

4. Problemas de valor inicial.

Los problemas de valor inicial (PVI) estarán determinados por una ecuación diferencial de orden n más un conjunto de n condiciones iniciales independientes especificadas para un único punto, que en general coincide con el inicio del dominio. Muchos PVI representan problemas de física en los cuales la variable independiente es el tiempo y las condiciones iniciales se dan para $t = 0$.

Se presentarán métodos de resolución de PVI para ecuaciones diferenciales de primer orden, de orden superior y para sistemas de ecuaciones.

4.1. Métodos de paso simple.

Los métodos de paso simple utilizan información del paso anterior para obtener la solución aproximada en el paso siguiente. En general la información utilizada es aproximada, ya que proviene de aplicaciones del método en pasos anteriores.

4.1.1. Método del polinomio de Taylor.

Sea la función $y = y(x)$ la solución de la ecuación $y' = f(x, y(x))$ y supongamos que $y = y(x)$ tiene $m + 1$ derivadas continuas en el intervalo que contiene a x_0. Si planteamos el desarrollo en serie de Taylor alrededor de x_0:

$$y(x) = y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{y'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+...+\frac{y^m(x_0)}{m!}(x-x_0)^m+\frac{y^{m+1}(\xi)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$$

donde $\xi \in (x_0, x)$

Desarrollando las derivadas:

$$y' = f(x, y(x)) \qquad y'' = f_x + f \cdot f_y \qquad y''' = f_{xx} + 2f \cdot f_{xy} + f^2 \cdot f_{xy} + f_x \cdot f_y + f \cdot f_y^2$$

donde f_x: derivada de la función f respecto a x; f_y: derivada de la función f respecto a y.

Si se adopta un paso h constante (aunque no necesariamente debe serlo):

$$x_n = x_0 + n \cdot h \qquad \text{para} \qquad n = 0, 1, 2, 3...$$

reemplazando en la serie, y en el caso de $m = 2$ por ejemplo

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!}(f_x + f \cdot f_y)^2 + ... + \frac{h^3}{3!}f^{(2)}(\xi, y(\xi))$$

con $\xi \in (x_n, x_{n+1})$ y $h = x_{n+1} - x_n$

La expresión indicada arriba permite obtener la solución en un punto a partir de la información del punto anterior (método de paso simple), con la dificultad de calcular las derivadas parciales.

Este método permite acotar el error de truncamiento. Es por esto que es utilizado para compararlo con otros métodos y así determinar el orden de éstos.

Diremos entonces que un método es de orden p (O(p)) si el error del método es del mismo orden que en el método de Taylor.

Ejemplo

Dada la ecuación diferencial $y' = -y + x + 1$ en el intervalo $[0; 1]$ con el valor inicial $y_0 = 1$, hallar la solución en $x = 1$ utilizando el desarrollo de Taylor de orden 2. El paso adoptado es $h = 0,1$.

Solución

Teniendo en cuenta que

$$y' = -y + x + 1$$

se calcula

$$y'' = f_x + f \cdot f_y = 1 + (-y + x + 1)(-1) = y - x$$

reemplazando en la expresión del método, se obtiene el algoritmo a aplicar en cada paso:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot (-y_n + x_n + 1) + \frac{h^2}{2!}(y_n - x_n)^2 + E_T$$

Utilizando la ecuación en diferencias conseguida se obtienen los sucesivos valores de la función $y(x)$ para el dominio discretizado:

- Para $n = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \wedge y_0 = 1$

$$y_1 = y_0 + h \cdot (-y_0 + x_0 + 1) + \frac{h^2}{2!}(y_0 - x_0)^2 = 1,00500$$

- Para $n = 1 \Rightarrow x_1 = 0,1 \wedge y_1 = 1,00500$

$$y_2 = y_1 + h \cdot (-y_1 + x_1 + 1) + \frac{h^2}{2!}(y_1 - x_1)^2 = 1,01859$$

- ....
- Para $n = 9 \Rightarrow x_9 = 0,9 \wedge y_9 = 1,30101$

$$y_{10} = y_9 + h \cdot (-y_9 + x_9 + 1) + \frac{h^2}{2!}(y_9 - x_9)^2 = 1,36171$$

$$\boxed{y(1) \approx 1,36171}$$

4.1.2. Método de Euler.

Sea la ecuación diferencial $y' = f(x, y(x))$ y una condición inicial $y(x_0) = y_0$. Si suponemos un mallado con paso constante h, cada uno de los nodos tendrá abscisa $x_n = x_0 + n \cdot h$ para $n = 0, 1, 2, 3, ...$

Integrando la ecuación diferencial en el intervalo genérico $x_n \leq x \leq x_{n+1}$, y tomando la condición inicial y_n para $x = x_n$.

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\, dx \tag{1}$$

Al no conocerse el valor de $y(x)$, la integral anterior no puede ser evaluada ($y(x)$ es precisamente la incógnita a determinar). Se aproximará entonces el valor de f.

Una forma de aproximar la integral de la ecuación 1 es suponiendo la función f constante en todo el intervalo en función de valores conocidos de x e y, como se observa en la figura 3 :

Entonces queda

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)}$$

La expresión anterior es equivalente a la aproximación de la derivada primera hacia delante. Es un método de tipo explícito.

Al comparar con el desarrollo de Taylor

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot y'(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!}y''(\xi)$$

Se observa que el error de truncamiento se encuentra en el término h^2, por lo tanto coincide con el desarrollo de Taylor hasta el término con factor h. Por esto el método de Euler es de orden 1. Notación: $O(h)$.

El método de Euler se puede representar gráficamente como se muestra en la figura 4.

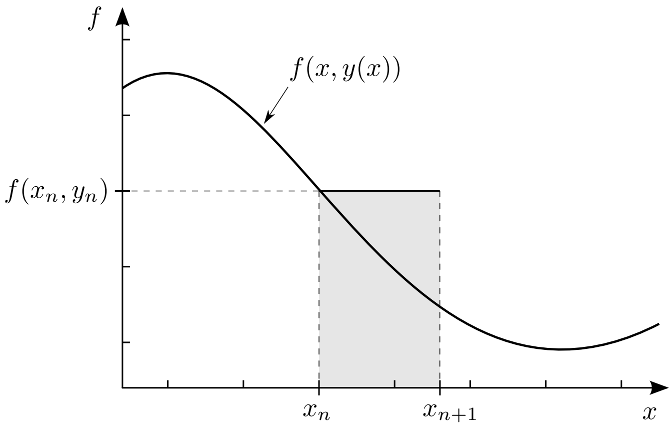

Figura 3: Integración en un paso.

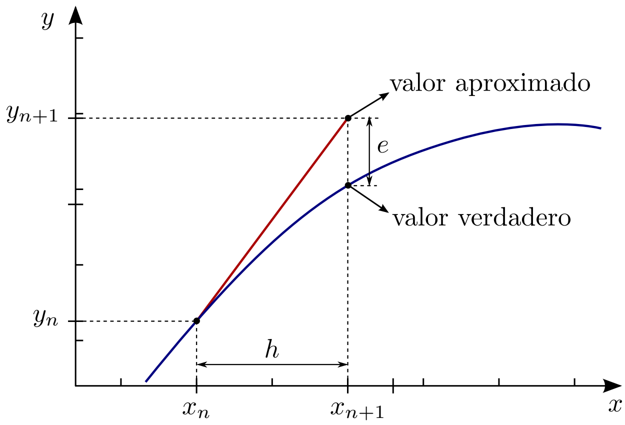

Figura 4: Representación gráfica del método de Euler simple.

Ejemplo

Dada la ecuación diferencial $y' = -y + x + 1$ en el intervalo $[0; 1]$ con el valor inicial $y_0 = 1$, hallar la solución en $x = 1$ utilizando el método de Euler. El paso adoptado es $h = 0,1$.

Solución

Del enunciado se sabe que $f(x, y) = -y + x + 1$, reemplazando en la expresión del método se obtiene la ecuación en diferencias:

$$y_{n+1} = y_n + h\,(-y_n + x_n + 1)$$

Se aplica la ecuación en diferencias para los distintos valores de n hasta obtener el valor de y_n deseado

- Para $n = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = 0 \;\wedge\; y_0 = 1$

$$y_1 = y_0 + h\,(-y_0 + x_0 + 1) = 1{,}0000$$

- Para $n = 1 \;\Rightarrow\; x_1 = 0,1 \;\wedge\; y_1 = 1$

$$y_2 = y_1 + h\,(-y_1 + x_1 + 1) = 1{,}0100$$

- ....

- Para $n = 9 \;\Rightarrow\; x_9 = 0,9 \;\wedge\; y_9 = 1,28742$

$$y_{10} = y_9 + h\,(-y_9 + x_9 + 1) = 1{,}34868$$

$$\boxed{y(1) \approx 1,34868}$$

4.1.3. Método de Euler mejorado.

Hemos observado que al depender el error de truncamiento directamente con el paso h en el método de Euler, sería suficiente con hacer h más pequeño para aproximar cada vez mejor a la solución exacta. Esto trae como consecuencia el incremento de operaciones, con la aparición de errores de redondeo y la necesidad de evaluar la función $f(x, y)$ muchas veces.

El método de Euler mejorado propone aproximar la integral de la ecuación 1, ya no por una constante, sino por una recta como se observa en la figura 5, la misma pasa por los puntos x_n, y_n y tiene la siguiente pendiente:

$$m_n = \frac{f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_n)}{x_{n+1} - x_n}$$

Luego, resolviendo la integral, la ecuación 1 queda de la forma:

$$y = y_n + \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})}{2} \cdot (x_{n+1} - x_n)$$

Como $x_{n+1} = x_n + h$, la expresión del método queda

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

Como la solución en el punto x_{n+1} no se conoce, el método de Euler mejorado puede considerarse como implícito y deberá emplearse un valor aproximado generalmente calculado por el el método de Euler simple.

Denominando y^*_{n+1} a la aproximación utilizada, la expresión general puede escribirse como:

$$\boxed{\begin{aligned} y^*_{n+1} &= y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} \cdot [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})] \end{aligned}}$$

Nótese que en la expresión anterior el incremento con respecto a y_n puede interpretarse como el promedio entre las pendientes $y'_n = f(x_n, y_n)$ y $y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y^*_{n+1})$ multiplicado por el paso h.

Se puede demostrar, al comparar con el desarrollo de Taylor, que el error de truncamiento se encuentra en el término h^3 por lo tanto este método coincide con el desarrollo de Taylor hasta el término con factor h^2. Por esto el método de Euler mejorado es de orden 2. Notación: $O(h^2)$.

El método de Euler mejorado se puede representar gráficamente como se muestra en la figura 6.

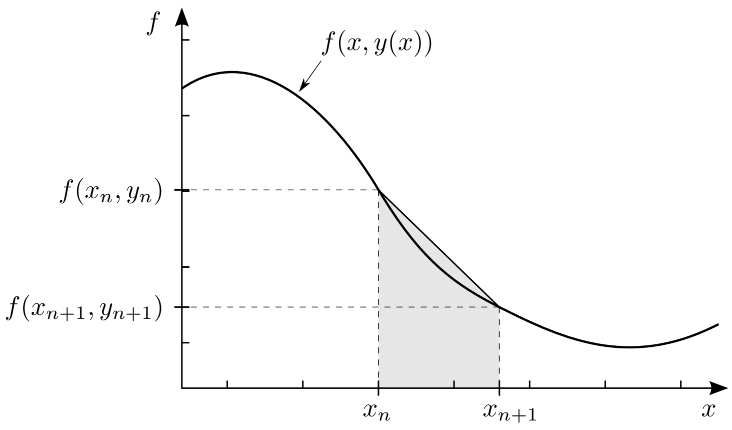

Figura 5: Integración en un paso - Euler mejorado.

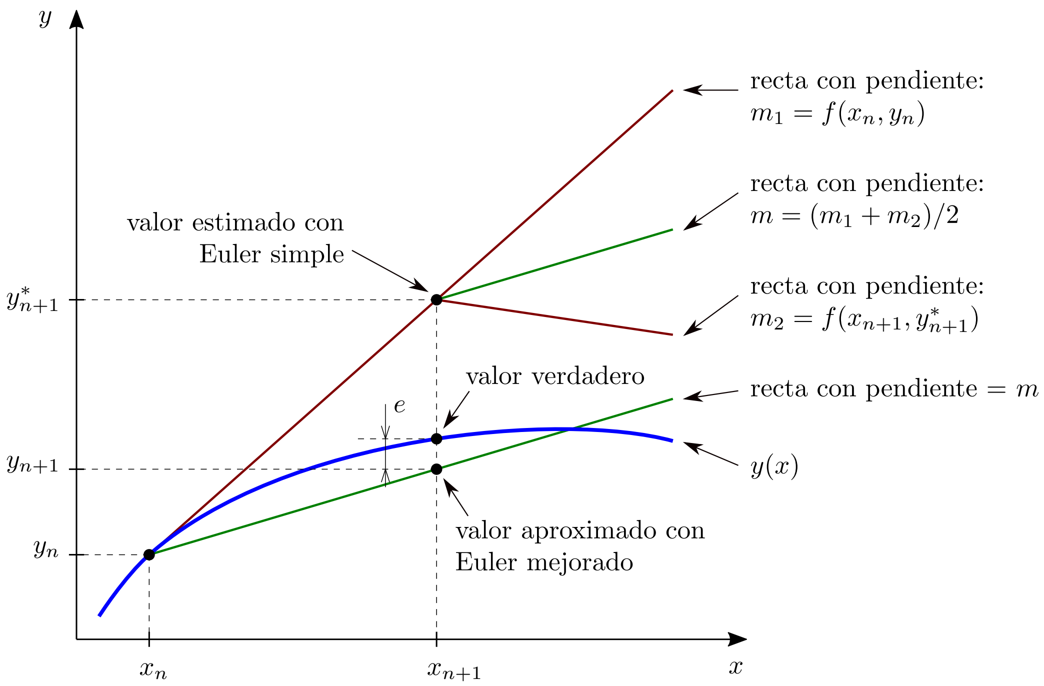

Figura 6: Representación gráfica del método de Euler mejorado.

Ejemplo

Dada la ecuación diferencial $y' = -y + x + 1$ en el intervalo $[0; 1]$ con el valor inicial $y_0 = 1$, hallar la solución en $x = 1$ utilizando el método de Euler mejorado. El paso adoptado es $h = 0,1$.

Solución

Del enunciado se sabe que $f(x, y) = -y + x + 1$, reemplazando en la expresión del método se obtiene la ecuación en diferencias:

$$y^*_{n+1} = y_n + h\,(-y_n + x_n + 1)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\,[\underbrace{(-y_n + x_n + 1)}_{f(x_n, y_n)} + \underbrace{(-y^*_{n+1} + x_{n+1} + 1)}_{f(x_{n+1}, y^*_{n+1})}]$$

Se aplica la ecuación en diferencias para los distintos valores de n hasta obtener el valor de y_n deseado

- Para $n = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = 0\,,\, x_1 = 0{,}1 \,\wedge\, y_0 = 1$

$$y^*_1 = y_0 + h\,(-y_0 + x_0 + 1) = 1$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\,[(-y_0 + x_0 + 1) + (-y^*_1 + x_1 + 1)] = 1,00500$$

- Para $n = 1 \;\Rightarrow\; x_1 = 0,1\,,\, x_2 = 0{,}2 \,\wedge\, y_1 = 1,00500$

$$y^*_2 = y_1 + h\,(-y_1 + x_1 + 1) = 1,01450$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\,[(-y_1 + x_1 + 1) + (-y^*_2 + x_2 + 1)] = 1,019025$$

- ....
- Para $n = 9 \;\Rightarrow\; x_9 = 0,9\,,\, x_{10} = 1 \,\wedge\, y_9 = 1,30723$

$$y^*_{10} = y_9 + h\,(-y_9 + x_9 + 1) = 1{,}366505$$

$$y_{10} = y_9 + \frac{h}{2}\,[(-y_9 + x_9 + 1) + (-y^*_{10} + x_{10} + 1)] = 1,36854$$

$$\boxed{y(1) \approx 1,36854}$$

4.1.4. Método predictor-corrector.

Este método consiste en aproximar un valor auxiliar de la solución en x_{n+1} mediante la expresión

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$$

llamada "fórmula predictora" y corregirla en forma iterada con la expresión

$$y_{n+1}^{k+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{k})\right]$$

conocida como "fórmula correctora".

Es decir, se aplica la expresión del método de Euler una sola vez (fórmula predictora) y luego se itera con la expresión del método de Euler mejorado (fórmula correctora) según un criterio de parada adoptado.

Nota: El método de Euler mejorado consta también de una parte predictora y otra correctora, con la diferencia que en la última no se realiza la iteración.

Ejemplo

Dada la ecuación diferencial $y' = -y + x + 1$ en el intervalo $[0; 1]$ con el valor inicial $y_0 = 1$, hallar la solución en $x = 0,1$ utilizando el método de Predictor-Corrector de Euler. Como criterio de paro se establece un error absoluto menor a 10^{-5}.

Solución

Del enunciado se sabe que $f(x, y) = -y + x + 1$, reemplazando en la expresión del método se obtiene la ecuación en diferencias predictora:

$$y_{n+1}^{k} = y_n + h\,(-y_n + x_n + 1) \qquad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

Se calcula el primer valor:

- Para $k = 0$, $n = 0$ $x_0 \wedge y_0$
$$y_1^0 = y_0 + h\,(-y_0 + x_0 + 1) = 1,000000$$

Luego se utiliza la fórmula correctora:

$$y_1^{k+1} = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{k})\right] \quad k = 1, 2, 3, ...$$

Se itera hasta que el error absoluto $E_n^k = |y_{n+1}^k - y_{n+1}^{k-1}|$ resulte menor al indicado

- Para $k = 1$ $y_1^1 = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^0)\right] = 1,005000 \quad \Rightarrow \quad E_0^1 = |y_1^1 - y_1^0| = 0,00500$
- Para $k = 2$ $y_1^2 = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^1)\right] = 1,004750 \quad \Rightarrow \quad E_0^2 = |y_1^2 - y_1^1| = 0,00025$
- Para $k = 3$ $y_1^3 = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^2)\right] = 1,004762 \quad \Rightarrow \quad E_0^3 = |y_1^3 - y_1^2| = 0,000012$
- Para $k = 4$ $y_1^4 = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^3)\right] = 1,004763 \quad \Rightarrow \quad E_0^4 = |y_1^4 - y_1^3| < 10^{-5}$

Con este valor se prosigue el cálculo para $n = 1, 2, 3, ...$ verificando en cada paso el criterio de parada.

4.1.5. Método de Runge-Kutta.

Los métodos de Runge-Kutta mantienen la misma forma de las expresiones de Euler, es decir, aproximan la solución en el punto siguiente a partir del valor de la solución en el punto actual más un incremento.

$$y_{n+1} = y_n + h\,\phi(x_n, y_n, h)$$

La función $\phi(x_n, y_n, h)$ consiste en una suma ponderada de pendientes. El incremento en cada paso dependerá del orden del método que se está utilizando, que a su vez se relaciona con los puntos del intervalo $[x_0; x_1]$ donde se evalúa la función $f(x, y)$.

4.1.6. Método de RK de 2º Orden.

La expresión general del método es:

$$y_{n+1} = y_n + w_1\,K_1 + w_2\,K_2$$

Donde

$$K_1 = h\ f(x_n, y_n) \qquad K_2 = h\ f(x_n + \alpha\,h, y_n + \beta\,K_1)$$

A partir del desarrollo en serie de Taylor se puede demostrar que las constantes w_1, w_2, α y β se encuentran relacionadas por las siguientes expresiones:

$$w_1 + w_2 = 1 \qquad w_2 = \frac{1}{2\,\alpha} \qquad w_2 = \frac{1}{2\,\beta}$$

Como existen 3 ecuaciones y 4 incógnitas, se debe agregar una condición al sistema generando diferentes métodos. Entre otros se pueden indicar:

a) Si $\alpha = \beta = 1$, se tiene la siguiente expresión:

$$y_{n+1} = y_n + h\,(\frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2)$$

Donde:

$$K_1 = f(x_n, y_n)$$

$$K_2 = f(x_n + h, y_n + h\ K_1)$$

b) Si $\alpha = \beta = 1/2$ se tiene la siguiente expresión:

$$y_{n+1} = y_n + h\,K_2$$

Donde:

$$K_1 = f(x_n, y_n)$$

$$K_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h\ K_1}{2})$$

4.1.7. Método de RK de 4º Orden.

Existen distintas expresiones de este método,una de las más utilizadas es la siguiente:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \cdot (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

Donde:

$$K_1 = f(x_n, y_n)$$

$$K_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1)$$

$$K_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2)$$

$$K_4 = f(x_n + h, y_n + h\,K_3)$$

Ejemplo

Dada la ecuación diferencial $y' = -y + x + 1$ en el intervalo $[0; 1]$ con el valor inicial $y_0 = 1$, hallar la solución en $x = 1$ utilizando el método de Runge Kutta de 4º orden. El paso adoptado es $h = 0,1$.

Solución

Se resuelven los coeficientes K en forma ordenada y se obtiene el valor de $y(x_n)$ para cada punto:

- Para $n = 0$, $x_0 = 0 \ \wedge y_0 = 1$

$$\begin{aligned}
K_1 &= f(x_0, y_0) = -y_0 + x_0 + 1 = -1 + 0 + 1 = 0 \\
K_2 &= f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}K_1 h) = f(0,05, 1) = -1 + 0,05 + 1 = 0,05000 \\
K_3 &= f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}K_2 h) = f(0,05, 1,0025) = -1,0025 + 0,05 + 1 = 0,04750 \\
K_4 &= f(x_0 + h, y_0 + K_3 h) = f(0,1, 1,00475) = -1,00475 + 0,1 + 1 = 0,09525
\end{aligned}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(K_1 + 2\,K_2 + 2\,K_3 + k_4) = 1,00484$$

- Para $n = 1$, $x_1 = 0,1 \ \wedge y_0 = 1,00484$

$$\begin{aligned}
K_1 &= f(x_1, y_1) = -y_1 + x_1 + 1 = -1,00484 + 0,1 + 1 = 0,0951611 \\
K_2 &= f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{1}{2}K_1 h) = f(0,15, 1,00960) = -1,00960 + 0,15 + 1 = 0,14040 \\
K_3 &= f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{1}{2}K_2 h) = f(0,15, 1,01186) = -1,01186 + 0,15 + 1 = 0,13814 \\
K_4 &= f(x_1 + h, y_1 + K_3 h) = f(0,2, 1,01865) = -1,01865 + 0,2 + 1 = 0,018135
\end{aligned}$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(K_1 + 2\,K_2 + 2\,K_3 + k_4) = 1,01873$$

- ....
- Para $n = 9$, $x_9 = 0,9 \ \wedge y_0 = 1,30657$

$$y_{10} = y_9 + \frac{h}{6}(K_1 + 2\,K_2 + 2\,K_3 + k_4) = 1,36788 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(1) = 1,36788}$$

4.2. Métodos de paso múltiple.

Los métodos de paso múltiple utilizan información de más de un valor de la solución para obtener la solución de la ecuación en el paso siguiente. Dado que el PVI sólo provee un dato al inicio, los restantes valores de la solución requeridos deberán ser obtenidos por algún método de paso simple como los vistos anteriormente.

4.2.1. Método de Euler de paso múltiple (PREDICTOR-CORRECTOR)

Sea la ecuación $y' = f(x, y(x))$ y una condición inicial $y(x_0) = y_0$. Si suponemos un paso constante h, cada uno de los nodos tendrá abscisa $x_n = x_0 + n \cdot h$ para $n = 0, 1, 2, 3...$

El valor de y_1 lo hallaremos con un método de paso simple, de manera de poder obtener y_2 con un método de paso múltiple utilizando y_0 e y_1.

A partir del desarrollo en serie de Taylor de la función $y(x)$ alrededor de x_n, se tiene:

$$y(x_{n+h}) = y_{n+1} = y_n + h\,y'_n + \frac{h^2}{2!}y''_n + ...$$

$$y(x_{n-h}) = y_{n-1} = y_n - h\,y'_n + \frac{h^2}{2!}y''_n + ...$$

restando los dos desarrollos se obtiene la fórmula "predictora"

$$\boxed{y_{n+1} = y_{n-1} + 2h\,y'_n \qquad n = 1, 2, 3...}$$

Con un error de truncamiento

$$E_T^p = \frac{h^3}{3}y(\xi)^{(3)}$$

Una vez calculado un primer valor de y_{n+1}, se corrige con la siguiente expresión conocida como fórmula "correctora" iterando las veces necesarias según el criterio de parada adoptado.

$$\boxed{y_{n+1}^{k+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^k)\right]}$$

El error de truncamiento de la fórmula correctora es:

$$E_T^c = -\frac{h^3}{12} y(\xi)^{(3)}$$

4.2.2. Métodos de aproximación por polinomios.

Estos métodos consisten en aproximar la función $f(x, y)$ por un polinomio de orden N a partir de un conjunto de puntos conocidos (x_i, y_i) resueltos con algún otro método de paso simple. De la integración de este polinomio surgirá el siguiente valor de $y(x)$.

Según los intervalos en los cuales de realicen la interpolación y la integración, se tendrán distintos métodos:

Fórmulas de tipo abierto

Se construye un polinomio de interpolación por N+1 puntos en el intervalo $[x_{n-N}, x_n]$ y se integra este polinomio en el intervalo $[x_{n-p}, x_{n+1}]$ resultando fórmulas de tipo explícito.

Fórmulas de Adams-Basforth.

Son expresiones de tipo abierto. Según la cantidad de puntos N que se utilicen para interpolar el polinomio que aproxima a $f(x, y)$, se tienen las siguientes fórmulas (casos para p=0):

- $N = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = y_n + h\, f_n$
- $N = 1 \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\,(3\, f_n - f_{n-1})$
- $N = 2 \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\,(23\, f_n - 16\, f_{n-1} + 5\, f_{n-2})$
- $N = 3 \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\,(55\, f_n - 59\, f_{n-1} + 37\, f_{n-2} - 9\, f_{n-3})$

Ejemplo

Dada la ecuación diferencial $y' = -y + x + 1$ en el intervalo $[0; 1]$ con el valor inicial $y_0 = 1$, hallar la solución en $x = 1$ utilizando el método de Adams-Bashford con $N = 3$ suponiendo conocidos los valores de y_1, y_2, y_3 resueltos por el método de Runge-Kutta de 4º orden que se listan en la tabla 1. El paso adoptado es $h = 0,1$.

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$
0	0	1,00000	0,00000
1	0,10	1,00484	0,09516
2	0,20	1,01873	0,18127
3	0,30	1,04082	0,25918

Tabla 1

Solución

Se aplica la fórmula Adams-Bashford dada para $N = 3$

- $y_4 = y_3 + \frac{h}{24}\,(55\, f_3 - 59\, f_2 + 37\, f_1 - 9\, f_0) = 1,07032$
- $y_5 = y_4 + \frac{h}{24}\,(55\, f_4 - 59\, f_3 + 37\, f_2 - 9\, f_1) = 1,10654$
- ....
- $y_{10} = y_9 + \frac{h}{24}\,(55\, f_9 - 59\, f_8 + 37\, f_7 - 9\, f_6) = 1,36789 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(1) = 1,36789}$

Fórmulas de tipo cerrado.

Se construye un polinomio de interpolación por N+1 puntos en el intervalo $[x_{n-N}, x_n]$ y se integra este polinomio en el intervalo $[x_{n-p}, x_{n+1}]$ resultando fórmulas de tipo implícito en donde se debe conocer el valor de y_{n+1} para calcular y_{n+1}.

Fórmulas de Adams-Moulton.

Son expresiones de tipo cerrado. Se aproxima en una primera etapa el valor de y_{n+1} y con una fórmula predictora de tipo abierto y luego se corrige con una fórmula de tipo cerrado. Según la cantidad de puntos N que se utilicen para interpolar el polinomio que aproxima a $f(x, y)$, se tienen las siguientes fórmulas (casos para p=0):

- $N = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot (f_n + f_{n+1})$ Caso particular de paso simple
- $N = 1 \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}(\frac{5}{4}\, f_{n+1} + 2\, f_n - \frac{1}{4}\, f_{n-1})$
- $N = 2 \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9\, f_{n+1} + 19\, f_n - 5\, f_{n-1} + f_{n-2})$
- $N = 3 \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}(251\, f_{n+1} + 646\, f_n - 264\, f_{n-1} + 106\, f_{n-2} - 19\, f_{n-3})$

Ejemplo

Dada la ecuación diferencial $y' = -y + x + 1$ en el intervalo $[0; 1]$ con el valor inicial $y_0 = 1$, hallar la solución en $x = 1$ utilizando el método de Adams-Moulton con $N = 1$ suponiendo conocidos los valores de y_1, y_2, y_3 resueltos por el método de Runge-Kutta de 4º orden que se listan en la tabla 2. El paso adoptado es $h = 0,1$. Realizar dos iteraciones por paso.

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$
0	0	1,00000	0,00000
1	0,10	1,00484	0,09516
2	0,20	1,01873	0,18127
3	0,30	1,04082	0,25918

Tabla 2

Solución

- Para $n = 3$ $\quad y_4^0 = y_3 + \frac{h}{12}\,(23\, f_2 - 16\, f_1 + 5\, f_0) = 1,070324$ predictora de A-B (explicita)
  - $y_4^1 = y_3 + \frac{h}{3}(\frac{5}{4}\, f_4^0 + 2\, f_3 - \frac{1}{4}\, f_2) = 1,070324$ primera corrección A-M (implícita)
  - $y_4^2 = y_3 + \frac{h}{3}(\frac{5}{4}\, f_4^1 + 2\, f_3 - \frac{1}{4}\, f_2) = 1,070323$ segunda corrección A-M (implícita)
- ....
- Para $n = 9$ $\quad y_{10}^0 = y_9 + \frac{h}{12}\,(23\, f_8 - 16\, f_7 + 5\, f_6) = 1,367879$ predictora de A-B (explicita)
  - $y_{10}^1 = y_9 + \frac{h}{3}(\frac{5}{4}\, f_{10}^0 + 2\, f_9 - \frac{1}{4}\, f_8) = 1,367897$ primera corrección A-M (implícita)
  - $y_{10}^2 = y_9 + \frac{h}{3}(\frac{5}{4}\, f_{10}^1 + 2\, f_9 - \frac{1}{4}\, f_8) = 1,367897$ segunda corrección A-M (implícita)

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(1) = 1,367897}$$

4.3. Sistemas de ecuaciones de primer orden.

La mayoría de los problemas de ingeniería presentan más de una coordenada independiente (sistemas de múltiples grados de libertad) por lo cual los modelos matemáticos que los representan conforman conjuntos de ecuaciones a resolver en forma simultánea. Los métodos estudiados para la resolución numérica de ecuaciones de primer orden se extienden a sistemas de ecuaciones.

Un sistema de N ecuaciones requerirá conocer N condiciones iniciales, y se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, y_3, \ldots.., y_N) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, y_3, \ldots.., y_N) \\ y_3' = f_3(x, y_1, y_2, y_3, \ldots.., y_N) \\ y_4' = f_4(x, y_1, y_2, y_3, \ldots.., y_N) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_N' = f_N(x, y_1, y_2, y_3, \ldots.., y_N) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(x = x_0) = y_{1(0)} \\ y_2(x = x_0) = y_{2(0)} \\ y_3(x = x_0) = y_{3(0)} \\ y_4(x = x_0) = y_{4(0)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_N(x = x_0) = y_{N(0)} \end{cases}$$

Notación: el subíndice en este caso indica la variable. N es la cantidad de ecuaciones del sistema. El subíndice n indica el paso de cálculo $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

4.3.1. Método de Euler para sistema de ecuaciones.

El método de Euler estudiado para resolver una ecuación se puede extender a un sistema utilizando las mismas expresiones para cada ecuación por separado y avanzando en la resolución paso a paso en cada ecuación.

Si se tienen N ecuaciones quedará:

$$\begin{cases} y_{1,n+1} = y_{1,n} + h\, f_1(x, y_{1,n}, y_{2,n}, y_{3,n}, \ldots.., y_{N,n}) & n = 0, 1, 2, 3\ldots & y_1(x = x_0) = y_{1(0)} \\ y_{2,n+1} = y_{2,n} + h\, f_2(x, y_{1,n}, y_{2,n}, y_{3,n}, \ldots.., y_{N,n}) & n = 0, 1, 2, 3\ldots & y_2(x = x_0) = y_{2(0)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{N,n+1} = y_{N,n} + h\, f_N(x, y_{1,n}, y_{2,n}, y_{3,n}, \ldots.., y_{N,n}) & n = 0, 1, 2, 3\ldots & y_N(x = x_0) = y_{N(0)} \end{cases}$$

Ejemplo

Hallar la solución del siguiente sistema de ecuaciones en el intervalo $[0\,; 0,6]$ adoptando un paso $h = 0,2$

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) = -y_1 + 2\,x + y_2 \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) = 0,6\,y_1 + x \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(x_0) = y_{1,0} = 1,25 \\ y_2(x_0) = y_{2,0} = 2,34 \end{cases}$$

Solución

- Para $n = 0$
$$\begin{cases} y_{1,1} = y_{1,0} + h\,(-y_{1,0} + 2\,x_0 + y_{2,0}) = 1,46800 \\ y_{2,1} = y_{2,0} + h\,(0,6\,y_{1,0} + x_0) = 2,49000 \end{cases}$$
- Para $n = 1$
$$\begin{cases} y_{1,2} = y_{1,1} + h\,(-y_{1,1} + 2\,x_1 + y_{2,1}) = 1,75240 \\ y_{2,2} = y_{2,1} + h\,(0,6\,y_{1,1} + x_1) = 2,70616 \end{cases}$$
- Para $n = 2$
$$\begin{cases} y_{1,3} = y_{1,2} + h\,(-y_{1,2} + 2\,x_2 + y_{2,2}) = 2,10315 \\ y_{2,3} = y_{2,2} + h\,(0,6\,y_{1,2} + x_2) = 2,99645 \end{cases}$$

4.3.2. Método de Runge-Kutta de 4º orden para sistema de ecuaciones.

El método de RK estudiado para resolver una ecuación se puede extender a un sistema utilizando las mismas expresiones para cada ecuación por separado y avanzando en la resolución paso a paso en cada uno de los coeficientes K_1. Si se tienen N ecuaciones:

$$\begin{cases} K_{1,1} = f_1(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, ..., y_{N,0}) \\ K_{1,2} = f_2(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, ..., y_{N,0}) \\ .... \\ K_{1,N} = f_N(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, ..., y_{N,0}) \end{cases}$$

El coeficiente K_2

$$\begin{cases} K_{2,1} = f_1(x_0 + \frac{h}{2}, y_{1,0} + \frac{h}{2}K_{1,1}, y_{2,0} + \frac{h}{2}K_{1,2}, ..., y_{N,0} + \frac{h}{2}K_{1,N}) \\ K_{2,2} = f_2(x_0 + \frac{h}{2}, y_{1,0} + \frac{h}{2}K_{1,1}, y_{2,0} + \frac{h}{2}K_{1,2}, ..., y_{N,0} + \frac{h}{2}K_{1,N}) \\ .... \\ K_{2,N} = f_N(x_0 + \frac{h}{2}, y_{1,0} + \frac{h}{2}K_{1,1}, y_{2,0} + \frac{h}{2}K_{1,2}, ..., y_{N,0} + \frac{h}{2}K_{1,N}) \end{cases}$$

El coeficiente K_3

$$\begin{cases} K_{3,1} = f_1(x_0 + \frac{h}{2}, y_{1,0} + \frac{h}{2}K_{2,1}, y_{2,0} + \frac{h}{2}K_{2,2}, ..., y_{N,0} + \frac{h}{2}K_{2,N}) \\ K_{3,2} = f_2(x_0 + \frac{h}{2}, y_{1,0} + \frac{h}{2}K_{2,1}, y_{2,0} + \frac{h}{2}K_{2,2}, ..., y_{N,0} + \frac{h}{2}K_{2,N}) \\ .... \\ K_{3,N} = f_N(x_0 + \frac{h}{2}, y_{1,0} + \frac{h}{2}K_{2,1}, y_{2,0} + \frac{h}{2}K_{2,2}, ..., y_{N,0} + \frac{h}{2}K_{2,N}) \end{cases}$$

El coeficiente K_3

$$\begin{cases} K_{4,1} = f_1(x_0 + h, y_{1,0} + hK_{3,1}, y_{2,0} + hK_{3,2}, ..., y_{N,0} + hK_{3,N}) \\ K_{4,2} = f_2(x_0 + h, y_{1,0} + hK_{3,1}, y_{2,0} + hK_{3,2}, ..., y_{N,0} + hK_{3,N}) \\ .... \\ K_{4,N} = f_N(x_0 + h, y_{1,0} + hK_{3,1}, y_{2,0} + hK_{3,2}, ..., y_{N,0} + hK_{3,N}) \end{cases}$$

Finalmente, se obtiene la solución del sistema en el paso siguiente $x = x_1$

$$\begin{cases} y_{1,1} = y_{1,0} + \frac{h}{6}(K_{1,1} + 2\ K_{2,1} + 2\ K_{3,1} + K_{4,1}) \\ y_{2,1} = y_{2,0} + \frac{h}{6}(K_{1,2} + 2\ K_{2,2} + 2\ K_{3,2} + K_{4,2}) \\ .... \\ y_{N,1} = y_{N,6} + \frac{h}{6}(K_{1,N} + 2\ K_{2,N} + 2\ K_{3,N} + K_{4,N}) \end{cases}$$

4.4. Ecuaciones de orden superior.

La resolución numérica de ecuaciones de orden superior puede realizarse a través de distintos métodos directos (abordan directamente la ecuación) o transformando la ecuación en un sistema de ecuaciones de primer orden que permita la aplicación de los métodos ya estudiados. Plantearemos la forma de llevar la ecuación a un sistema y luego un método particular para abordar ecuaciones de segundo orden.

4.4.1. Ecuaciones de orden superior como sistema de ecuaciones de 1º orden.

Sea la ecuación diferencial de orden m:

$$y^{(m)} = f(x, y', y'', y^{(3)}, ..., y^{(m-1)})$$

y las condiciones iniciales

$$y(x = x_0) = y_0\ ,\ y'(x = x_0) = y'_0\ ,\ y''(x = x_0) = y''_0\ ,\ y^{(3)}(x = x_0) = y_0^{(3)}\ , ...\ , y^{(m)}(x = x_0) = y_0^{(m)}$$

se transforma en un sistema de ecuaciones de primer orden, haciendo:

$$y_1 = y(x) \quad , \quad y_2 = y'(x) \quad , \quad y_3 = y''(x) \quad , \quad y_4 = y^{(3)}(x) \quad , \quad ... \quad , \quad y_m = y^{(m-1)}(x)$$

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, y_3, ..., y_m) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, y_3, ..., y_m) \\ .... \\ y_m' = f_m(x, y_1, y_2, y_3, ..., y_m) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(x = x_0) = y_0 \\ y_2(x = x_0) = y_0' \\ .... \\ y_m(x = x_0) = y_0 \end{cases}$$

Ejemplo

Dada la siguiente ecuación diferencial de segundo orden y sus respectivas condiciones iniciales:

$$y'' + 2\,y' + 5\,y = 3\,x^2 + 10 \qquad \begin{cases} y(x_0) = y_0 = 4 \\ y'(x_0) = y_0' = -2 \end{cases}$$

Plantear el sistema equivalente de primer orden.

Solución

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{dy}{dx} = f_1(x, y_1, y_2) = y_2 \\ y_2' = \dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{d^2y_2}{dx^2} = y''(x) = f_2(x, y_1, y_2) = 3\,x^2 + 10 - 5\,y_1 - 2\,y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(x_0) = y_0 = 4 \\ y_2'(x_0) = y_0' = -2 \end{cases}$$

4.4.2. Método de diferencias finitas centradas para ecuaciones de 2º orden.

Una ecuación diferencial de segundo orden se utiliza para representar, entre otros problemas, los vinculados a vibraciones y circuitos eléctricos. El método se basa en reemplazar las derivadas primera y segunda por sus aproximaciones en diferencias finitas (tema ya estudiado en unidades anteriores).

Sea la ecuación diferencial de segundo orden y sus condiciones iniciales:

$$m\,y''(x) + c\,y'(x) + k\,y(x) = p(x) \qquad \begin{array}{l} y_1(x = x_0) = y_0 \\ y_2(x = x_0) = y_0' \end{array}$$

se reemplazan las derivadas por las conocidas expresiones:

$$y_n' = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} \qquad y_n'' = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2}$$

quedando la ecuación diferencial

$$m\,\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + c\,\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + k\,y_n = p_n$$

despejando el valor de la función en el siguiente paso, queda una fórmula explícita:

$$y_{n+1} = \frac{p_n - \left(\dfrac{m}{h^2} - \dfrac{c}{2h}\right) y_{n-1} - \left(k - \dfrac{2m}{h^2}\right) y_n}{\dfrac{m}{h^2} + \dfrac{c}{2h}}$$

se observa que es necesario conocer los valores en $n-1$. Para esto se pueden evaluar las derivadas primera y segunda en el punto inicial, y a partir de allí despejar el valor de y en $n-1$.

Este método es condicionalmente estable, requiriendo pasos pequeños en la discretización del dominio. La longitud del paso estará relacionada con el período T del movimiento vibratorio que el modelo representa, y se debe cumplir:

$$\frac{h}{T} < \frac{1}{\pi}$$

siendo el periodo

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{m}}}$$

5. Problemas de valor de contorno.

Los problemas de valores en la frontera o contorno (PVF) estarán determinados por una ecuación diferencial de orden n más un conjunto de n condiciones iniciales independientes especificadas para distintos puntos, que en general coinciden con los extremos o bordes del dominio. Muchos PVF representan problemas de física en los cuales la variable independiente es una longitud y las condiciones iniciales se dan para $x = x_0$ y $x = x_n$. Estos problemas no siempre tienen solución única para todos los puntos e incluso pueden no tener solución.

Las condiciones de frontera pueden ser "condiciones forzadas" o "condición de Dirichlet" en la cual se especifica el valor de la función, y "condiciones naturales" o "condición de Neumann", en la que se especifica una derivada de la función.

Notación: para cada punto del dominio en que se buscará la solución se utilizará el subíndice i.

Se estudiará el caso particular de condiciones de contorno lineales en ecuaciones de segundo orden. La ecuación diferencial es de la forma:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x)$$

y las condiciones de borde de Neumann y Dirichlet combinadas se expresan como:

$$\begin{cases} \alpha\, y(a) + \beta\, y'(0) = \mu \\ \gamma\, y(b) + \delta\, y'(b) = \nu \end{cases}$$

con $p(x), q(x), r(x)$ funciones continuas en $[a, b]$ y los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu$ valores reales.

5.1. Método de diferencias finitas.

Consiste en reemplazar los operadores diferenciales por operadores en diferencias y aplicarlos a cada uno de los puntos de la malla que resulte de discretizar el dominio. Cada aplicación del operador provee una ecuación. Se deberán tener igual cantidad de ecuaciones que incógnitas posea la malla.

Finalmente se resuelve el sistema de ecuaciones obteniendo los valores de $y(x)$ en los puntos de la malla.

Sea la ecuación diferencial (se desarrollará para una ecuación de segundo orden lineal):

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x)$$

y las condiciones de borde:

$$\begin{cases} y(x = a) = y_a \\ y(x = b) = y_b \end{cases}$$

se particiona el dominio $[a; b]$ en n espacios de longitud h. Luego se reemplazan las derivadas centradas por las expresiones conocidas:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \qquad\qquad y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

quedando la ecuación diferencial trasformada en un "operador en diferencias"

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i\, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i\; y_i = r_i$$

Si se agrupan los términos para cada punto i, el operador toma la forma:

$$\left(1 - \frac{h}{2}\, p_i\right)\, y_{i-1} + (h^2\, q_i - 2)\, y_i + \left(1 + \frac{h}{2}\, p_i\right)\, y_{i+1} = h^2\, r_i \qquad i = 1, 2, 3, ...n - 1$$

Se plantea el operador en todos los puntos internos del dominio

$$
\begin{array}{ll}
i=1 & \left(1-\frac{h}{2}\,p_1\right)\,y_0+(h^2\,q_1-2)\,y_1+\left(1+\frac{h}{2}\,p_1\right)\,y_2=h^2\,r_1 \\
i=2 & \left(1-\frac{h}{2}\,p_2\right)\,y_1+(h^2\,q_2-2)\,y_2+\left(1+\frac{h}{2}\,p_2\right)\,y_3=h^2\,r_2 \\
i=3 & \left(1-\frac{h}{2}\,p_3\right)\,y_2+(h^2\,q_3-2)\,y_3+\left(1+\frac{h}{2}\,p_3\right)\,y_4=h^2\,r_3 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
i=n-1 & \left(1-\frac{h}{2}\,p_{n-1}\right)\,y_{n-2}+(h^2\,q_{n-1}-2)\,y_{n-1}+\left(1+\frac{h}{2}\,p_{n-1}\right)\,y_n=h^2\,r_{n-1}
\end{array}
$$

quedando un sistema de $n-1$ ecuaciones con $n-1$ incógnitas.

Ejemplo

Dada la ecuación de segundo orden y su condiciones de contorno

$$y''+4\,y=-10\,x^2 \qquad \left\{\begin{array}{l} y(x=0)=0 \\ y(x=6)=30 \end{array}\right.$$

hallar la solución en el punto central del dominio $[0;6]$.

Solución

Se adopta un paso $h=1$, de manera que se obtienen 7 puntos del dominio, siendo conocidos los valores de $y(x)$ en los puntos extremos (condiciones de Dirichlet). Se tendrán entonces 5 puntos interiores incógnitas.
Se reemplaza la derivada segunda por la ecuación en diferencias:

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+4\,y_i=-10\,x_i^2$$

Tomando $h=1$ y reescribiendo la ecuación en diferencias:

$$y_{i-1}+2\,y_i+y_{i+1}=-10\,x_i^2$$

Se aplica el operador en diferencias en los puntos internos del dominio

- $i=1$ $\quad y_0+2\,y_1+y_2=-10\,x_1^2$
- $i=2$ $\quad y_1+2\,y_2+y_3=-10\,x_2^2$
- $i=3$ $\quad y_2+2\,y_3+y_4=-10\,x_3^2$
- $i=4$ $\quad y_3+2\,y_4+y_5=-10\,x_4^2$
- $i=5$ $\quad y_4+2\,y_5+y_6=-10\,x_5^2$

Se tienen 5 ecuaciones y 5 incógnitas. Escribiendo el sistema en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -40 \\ -90 \\ -160 \\ -280 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 30 \\ -80 \\ 40 \\ -160 \end{bmatrix}$$

La solución en $x=3$ es $y(3)=-80$.

5.2. Problemas con autovalores.

La ecuación diferencial con sus condiciones de borde es de la forma:

$$\frac{d}{dx}(p(x)y'(x)) + (q(x) + \lambda\, r(x))\, y(x) = 0 \qquad \begin{cases} \alpha\, y(a) + \beta\, y'(a) = 0 \\ \gamma\, y(b) + \delta\, y'(b) = 0 \end{cases}$$

con $p(x) > 0, q(x) > 0$ y $p'(x), p(x), q(x), r(x)$ continuas en $[a, b]$ y los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ valores reales.

Los valores de λ para los cuales la ecuación tiene soluciones no triviales son autovalores o valores propios y las funciones asociadas serán vectores propios o autovectores. Los autovalores serán números reales y el conjunto de los autovectores es ortogonal.

Ejemplo

Dada la ecuación de segundo orden que representa un problema con valores de frontera y sus condiciones de borde, plantear la resolución por diferencias centrales: (Considerar $h = 1$).

$$y'' + p\, y = 0 \qquad \begin{cases} y(x = 0) = y_0 = 0 \\ y(x = 4) = y_4 = 0 \end{cases}$$

Solución

Se obtienen 3 puntos interiores del dominio, siendo conocidos los valores de $y(x)$ en los puntos extremos (condiciones de Dirichlet).

Se obtiene la ecuación en diferencias utilizando la aproximación numérica de la segunda derivada

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - p\, y_i = 0$$

Tomando $h = 1$ se obtiene el operador en diferencias $y_{i-1} + (p - 2)\, y_i + y_{i+1} = 0$, que se aplica en cada punto interior del dominio:

- $i = 1 \qquad y_0 + (p - 2)\, y_1 + y_2 = 0$
- $i = 2 \qquad y_1 + (p - 2)\, y_2 + y_3 = 0$
- $i = 3 \qquad y_2 + (p - 2)\, y_3 + y_4 = 0$

se obtiene un sistema homogéneo de 3 ecuaciones. La solución será la trivial (vector solución nulo) o habrá una cantidad infinita de vectores que verifiquen las condiciones de frontera para la ecuación. Expresando el sistema en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (2-p) & -1 & 0 \\ -1 & (2-p) & -1 \\ 0 & -1 & (2-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La expansión del determinante da un "polinomio característico" cuyas raíces son los valores propios del sistema. A cada valor propio se le asocia un vector solución.

El polinomio característico queda:

$$(2 - p)^3 - 2\,(2 - p) = 0$$

cuyas raíces son $p_1 = 0{,}58578$, $p_2 = 2{,}00000$ y $p_3 = 3{,}41421$

Representan los autovalores del problema. Reemplazando en el sistema cada uno de los autovalores se obtiene un conjunto de 3 autovectores asociados que son ortogonales entre sí.

Si $p = p_1 = 0{,}58578$

$$\begin{bmatrix} 1{,}41422 & -1 & 0 \\ -1 & 1{,}41422 & -1 \\ 0 & -1 & 1{,}41422 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

haciendo $y_1 = 1$ se obtine el autovector asociado

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}0000 \\ 1{,}4142 \\ 1{,}0000 \end{bmatrix}$$

Si $p = p_2 = 2{,}00000$

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}0000 \\ 0{,}0000 \\ -1{,}0000 \end{bmatrix}$$

Si $p = p_3 = 3{,}41421$

$$\phi_3 = \begin{bmatrix} y_{13} \\ y_{23} \\ y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}0000 \\ -1{,}4142 \\ 1{,}0000 \end{bmatrix}$$