

TAP 05 – Frecuencia Variable

- Frecuencia cero = corriente continua
- Pulsación = frecuencia

Ejercicio 02

Tratando el circuito tal cual como está en la figura (abierto entre los bornes de U_S), planteo:

$$I = \frac{U_F}{R + j\omega L} \quad U_S = I * (j\omega L)$$

Armamos la expresión solicitada

$$\frac{U_S}{U_F} = \frac{I * (j\omega L)}{I (R + j\omega L)} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{(\omega L)^2 + j R \omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

Hallar el módulo de dicha expresión

Para simplificar usamos: $\omega_c = R/L \quad \therefore \quad R = L \omega_c$ Es valido: $L = X/\omega$

$$\left| \frac{U_S}{U_F} \right| = \frac{|U_S|}{|U_F|} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{\omega L}{\sqrt{(L \omega_c)^2 + (\omega L)^2}} = \frac{\omega L}{\sqrt{L^2 (\omega_c^2 + \omega^2)}} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}}$$

Hallar ahora la fase o argumento, podemos usar la misma simplificación que antes:

$$\arg\left(\frac{U_S}{U_F}\right) = \text{arc tg}\left(\frac{\text{Parte compleja}}{\text{Parte real}}\right) = \text{arc tg}\left(\frac{R \omega L}{(\omega L)^2}\right) = \text{arc tg}\left(\frac{L \omega_c}{\omega L}\right) = \text{arc tg}\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)$$

Hallar la pulsación de corte antes definida, que es un limite entre "dejar pasar o no" frecuencia

$$\omega_c = \frac{R}{L} = \frac{10 \Omega}{10 * 10^{-3} H} = 1000 \text{ rad/s}$$

Calcular módulo y fase para $f_1 = 50 \text{ Hz}$ $\therefore \quad \omega_1 = 314 \text{ rad/s}$

$$\left| \frac{U_S}{U_F} \right| = \frac{314}{\sqrt{314^2 + 1000^2}} = 0.3 \quad \arg\left(\frac{U_S}{U_F}\right) = \text{arc tg}\left(\frac{1000}{314}\right) = 72.6^\circ$$

Calcular módulo y fase para $f_2 = 1500 \text{ Hz}$ $\therefore \quad \omega_2 = 9425 \text{ rad/s}$

$$\left| \frac{U_S}{U_F} \right| = \frac{9425}{\sqrt{9425^2 + 1000^2}} = 0.994 \quad \arg\left(\frac{U_S}{U_F}\right) = \text{arc tg}\left(\frac{1000}{9425}\right) = 6.06^\circ$$



Ejercicio 04

Se tiene un circuito RLC en serie. La fuente ve $Z_{eq} = R + j\omega L - j \frac{1}{\omega C}$

Dar una expresión de su módulo: $|Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

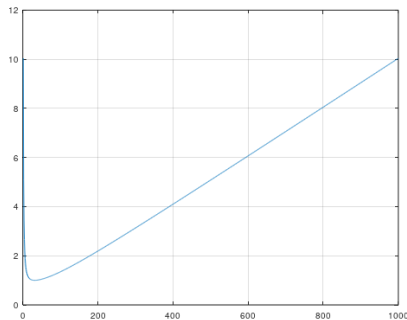
Por Ley de Ohm: $I = \frac{U_F}{Z_{eq}} = \frac{U_F}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad \therefore \quad |I| = \frac{|U_F|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$

Hallar expresiones de los módulos de las tensiones en la bobina y el capacitor

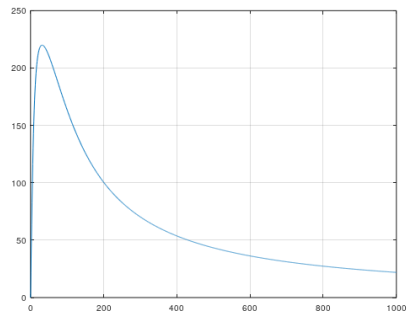
$$U_L = I j \omega L \quad \therefore \quad |U_L| = \frac{|U_F|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \omega L$$

$$U_C = I j \frac{1}{\omega C} \quad \therefore \quad |U_C| = \frac{|U_F|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} * \frac{1}{\omega C}$$

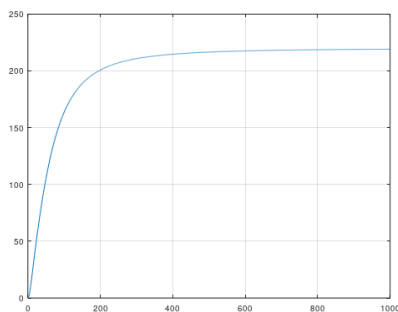
Graficamos las expresiones en función de la frecuencia en Octave



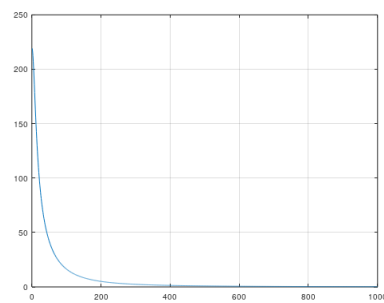
Gráfica del módulo de Z que ve Uf



Gráfica del módulo de la corriente



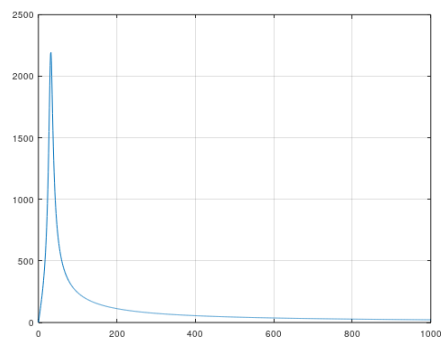
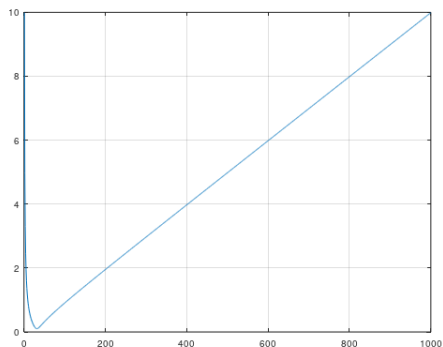
Gráfica del módulo de UL (bobina)

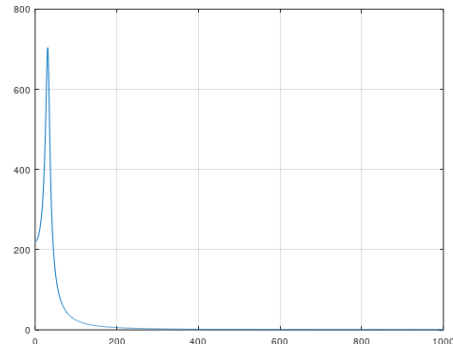
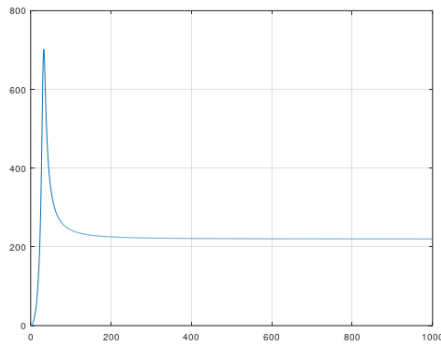


Gráfica del módulo de UC (condensador)

- Si la frecuencia tiende a 0, UL tiende a 0 porque XL tiende a 0.
- Si la frecuencia tiende a Inf, UC tiende a 0 porque XC tiende a 0.
- El máximo de corriente sucede en la frecuencia de resonancia (ω_0)

Repetimos gráficas para $R = 0.1 \Omega$





- Podemos observar que cuando R se achica, los picos máximos son aún mayores.
- Ahora también se producen sobretensiones en L y C (para graficar usé 220V)

Comportamiento de la impedancia según la frecuencia

- Para $\omega < \omega_0$ decimos que la impedancia tiene comportamiento inductivo
- Para $\omega = \omega_0$ decimos que tiene comportamiento resistivo
- Para $\omega > \omega_0$ decimos que tiene comportamiento capacitivo

Hallar los valores de frecuencia que delimitan el ancho de banda $I = I_{max}/\sqrt{2}$

$$I_{max} = I(\omega_0) = \frac{|U_F|}{R}$$

$$I(\omega_{12}) = \frac{|U_F|}{\sqrt{2} R} \quad \therefore \quad \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{2} R$$

$$R^2 + \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right)^2 = 2 R^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right)^2 = R^2 \Leftrightarrow \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C} = \pm R$$

$$\omega^2 LC - \omega RC - 1 = 0 \quad \vee \quad \omega^2 LC + \omega RC - 1 = 0$$

Para la primera parte, $R = 1 \Omega$

$$\omega_1 = \frac{RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC} = \frac{0.1 + \sqrt{0.01 + 0.004}}{0.002} = 50 + 59.16 = 109.16 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{-RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC} = \frac{-0.1 + \sqrt{0.01 + 0.004}}{0.002} = -50 + 59.16 = 9.16 \text{ rad/s}$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 100 \text{ rad/s}$$



Para la segunda parte, $R = 0.1 \Omega$

$$\omega_1 = \frac{RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC} = \frac{0.01 + \sqrt{0.0001 + 0.004}}{0.002} = 5 + 32.02 = 37.02 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{-RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC} = \frac{-0.01 + \sqrt{0.0001 + 0.004}}{0.002} = -5 + 32.02 = 27.02 \text{ rad/s}$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 10 \text{ rad/s}$$



Se pide ahora buscar posibles sobretensiones en la bobina

$$\frac{|U_L|}{|U_F|} > 1 \Leftrightarrow \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} > 1 \Leftrightarrow \omega L > \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$(\omega L)^2 > R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \Leftrightarrow (\omega L)^2 > R^2 + (\omega L)^2 - \frac{2\omega L}{\omega C} + \frac{1}{(\omega C)^2}$$

$$\frac{2L}{C} > R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2} \Leftrightarrow (\omega C)^2 > \frac{1}{\frac{2L}{C} - R^2} \Leftrightarrow \omega^2 > \frac{1}{2LC - R^2 C^2}$$

Para el caso $R = 1 \Omega$ $L = 0.01 H$ $C = 0.1 F$

$$\omega^2 > \frac{1}{0.002 - 0.01} \Leftrightarrow \omega^2 > -125 \quad (\text{Absurdo}) \quad \therefore \text{no hay sobretensión en } L$$

Para el caso $R = 0.1 \Omega$ $L = 0.01 H$ $C = 0.1 F$

$$\omega^2 > \frac{1}{0.002 - 0.0001} \Leftrightarrow \omega^2 > 526.3 \Leftrightarrow \omega > 22.94 \text{ rad/s}$$

Analizar ahora para el condensador:

$$\frac{|U_C|}{|U_F|} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\omega C} > \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\frac{1}{(\omega C)^2} > R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{(\omega C)^2} > R^2 + (\omega L)^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{(\omega C)^2}$$

$$(\omega L)^2 < \frac{2L}{C} - R^2 \Leftrightarrow \omega^2 < \frac{2}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \Leftrightarrow \omega < \sqrt{\frac{2}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

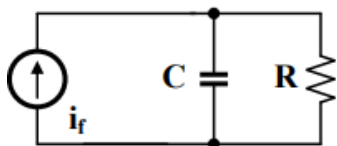
Para el caso $R = 1 \Omega$ $L = 0.01 H$ $C = 0.1 F$

$$\omega < \sqrt{2000 - 10000} \Leftrightarrow \omega < \sqrt{-8000} \quad (\text{Absurdo}) \quad \therefore \text{no hay sobretensión en } C$$

Para el caso $R = 0.1 \Omega$ $L = 0.01 H$ $C = 0.1 F$

$$\omega < \sqrt{2000 - 100} \Leftrightarrow \omega < \sqrt{1900} \Leftrightarrow \omega < 43.59 \text{ rad/s}$$

Ejercicio 05, acá viene lo hardcore por poliarmónicas :’(



Un circuito RC se excita con una fuente de corriente poliarmónica de frecuencia fundamental 50 Hz; $i_f(t) = 5 \sin(\omega t) + 0.3 \sin(3\omega t + 30^\circ) + 0.1 \sin(5\omega t + 150^\circ)$ A; con $R = 10 \Omega$ y $C = 300 \mu F$.

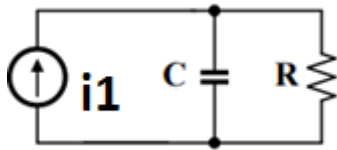
$$\omega = 2\pi f = 314 \text{ rad/s}$$

¿Cómo se resuelve esto? ¿Hay que usar 3 corrientes? Sí

Mini-referencia: [Poliarmónicas - 2020.ppt \(unlp.edu.ar\)](http://unlp.edu.ar)

Pág. 18

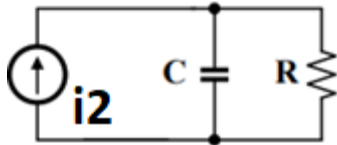
$$i_f(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 5 \operatorname{sen}(\omega t) + 0.3 \operatorname{sen}(3\omega t + 30^\circ) + 0.1 \operatorname{sen}(5\omega t + 150^\circ) \text{ A}$$



$$Y_C = \frac{1}{-jX_C} = j\omega_1 C = j0.0942 \text{ S} \quad Y_R = G = \frac{1}{R} = 0.1 \text{ S}$$

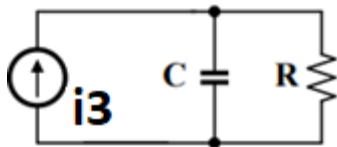
$$Y_{1eq} = G + j\omega C = 0.1 + j0.0942 \text{ S}$$

$$U_{1max} = \frac{I_{1max}}{Y_{1eq}} = \frac{5 e^{j0^\circ} \text{ A}}{0.1374 e^{j43.29^\circ} \text{ S}} = 36.4 e^{-j43.3^\circ} \text{ V}$$



$$Y_{2eq} = G + j3\omega C = 0.1 + j0.2826 \text{ S}$$

$$U_{2max} = \frac{I_{2max}}{Y_{2eq}} = \frac{0.3 e^{j30^\circ} \text{ A}}{0.3 e^{j71^\circ} \text{ S}} = 1 e^{-j41^\circ} \text{ V}$$



$$Y_{3eq} = G + j5\omega C = 0.1 + j0.4710 \text{ S}$$

$$U_{3max} = \frac{I_{3max}}{Y_{3eq}} = \frac{0.1 e^{j150^\circ} \text{ A}}{0.4815 e^{j78^\circ} \text{ S}} = 0.21 e^{j72^\circ} \text{ V}$$

$$u_f(t) = |U_{1max}| \operatorname{sen}(\omega t + \arg(U_{1max})) + |U_{2max}| \operatorname{sen}(3\omega t + \arg(U_{2max})) + |U_{3max}| \operatorname{sen}(5\omega t + \arg(U_{3max}))$$

$$u_f(t) = 36.4 \operatorname{sen}(\omega t - 43.3^\circ) + \operatorname{sen}(3\omega t - 41^\circ) + 0.21 \operatorname{sen}(5\omega t + 72^\circ) \text{ V}$$

Hallar la corriente en el capacitor

$$I_{C1max} = U_{1max} * \omega C e^{j90^\circ} = 3.4 e^{j46.7^\circ} \text{ A} \quad \therefore \quad i_{c1}(t) = 3.4 \operatorname{sen}(\omega t + 46.7^\circ) \text{ A}$$

$$I_{C2max} = U_{2max} * 3\omega C e^{j90^\circ} = 0.3 e^{j49^\circ} \text{ A} \quad \therefore \quad i_{c2}(t) = 0.3 \operatorname{sen}(3\omega t + 49^\circ) \text{ A}$$

$$I_{C3max} = U_{3max} * 5\omega C e^{j90^\circ} = 0.1 e^{j162^\circ} \text{ A} \quad \therefore \quad i_{c3}(t) = 0.1 \operatorname{sen}(5\omega t + 162^\circ) \text{ A}$$

$$i_c(t) = 3.4 \operatorname{sen}(\omega t + 46.7^\circ) + 0.3 \operatorname{sen}(3\omega t + 49^\circ) + 0.1 \operatorname{sen}(5\omega t + 162^\circ) \text{ A}$$

¿Cómo se hayan los valores eficaces (netamente) de corriente en R y C?

En la filmina 16, dice que el cuadrado del valor eficaz es sumar los cuadrados individuales

$$I_{Cef} = \sqrt{\frac{3.4^2}{2} + \frac{0.3^2}{2} + \frac{0.1^2}{2}} = 2.4 \text{ A}$$

$$I_{Fef} = \sqrt{\frac{5^2}{2} + \frac{0.3^2}{2} + \frac{0.1^2}{2}} = 3.5 \text{ A}$$

Falta hallar la corriente en el resistor. Lo bueno es que dicho elemento no cambia su Z con ω

$$I_{R1\max} = U_{1\max} * G e^{j0^\circ} = 3.64 e^{-j43.3^\circ} A \quad \therefore \quad i_{c1}(t) = 3.64 \operatorname{sen}(\omega t - 43.3^\circ) A$$

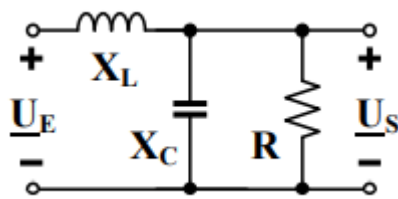
$$I_{R2\max} = U_{2\max} * G e^{j0^\circ} = 0.1 e^{-j41^\circ} A \quad \therefore \quad i_{c2}(t) = 0.1 \operatorname{sen}(3\omega t - 41^\circ) A$$

$$I_{R3\max} = U_{3\max} * G e^{j0^\circ} = 0.021 e^{j72^\circ} A \quad \therefore \quad i_{c3}(t) = 0.021 \operatorname{sen}(5\omega t + 72^\circ) A$$

$$i_r(t) = 3.64 \operatorname{sen}(\omega t - 43.3^\circ) + 0.1 \operatorname{sen}(3\omega t - 41^\circ) + 0.021 \operatorname{sen}(5\omega t + 72^\circ) A$$

$$I_{Ref} = \sqrt{\frac{3.64^2}{2} + \frac{0.1^2}{2} + \frac{0.021^2}{2}} = 2.6 A$$

Ejercicio 06



$$R = 20 \Omega; C = 20 \text{ mF}; L = 40 \text{ mH}.$$

Hallar la relación entre tensión de entrada y salida

$$Z_L = j\omega L \quad Y_C = j\omega C \quad Y_R = G = 0.05 S$$

$$Y_{RC} = Y_R + Y_C = G + j\omega C = \sqrt{G^2 + (\omega C)^2} e^{j \arctan(\frac{\omega C}{G})}$$

$$Z_{eq} = Z_L + Z_{RC} = j\omega L + \frac{1}{\sqrt{G^2 + (\omega C)^2}} e^{-j \arctan(\frac{\omega C}{G})}$$

$$\frac{U_E}{U_S} = \frac{I_1 (\omega C)^{-1} e^{-j90^\circ} + I_T \omega L e^{j90^\circ}}{I_2 R e^{j0^\circ}}$$