Ejercicio 02

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales aplicando el método de Euler.

a) $y' = -2y + 5\,e^{-x}$ en el intervalo [0;1] con $h = 0.2$ $y_0 = 2$

$y(0) = y_0 = 2$

$y(0.2) \cong y_1 = y_0 + h\,(-2y_0 + 5\,e^{-x_0}) = 2 + 0.2\,(-4 + 5) = 2.2$

$y(0.4) \cong y_2 = y_1 + h\,(-2y_1 + 5\,e^{-x_1}) = 2.2 + 0.2\,(-4.4 + 5\,e^{-0.2}) \cong 2.13873$

$y(0.6) \cong y_3 = y_2 + h\,(-2y_2 + 5\,e^{-x_2}) \cong 1.95356$

$y(0.8) \cong y_4 = y_3 + h\,(-2y_3 + 5\,e^{-x_3}) \cong 1.72095$

$y(1) \cong y_5 = y_4 + h\,(-2y_4 + 5\,e^{-x_4}) \cong 1.48190$

b) $y' = -3x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x + 1$ en el intervalo [0; 2] con $h = 0.5$ $y_0 = 3$

$y(0) = y_0 = 3$

$y(0.5) \cong y_1 = y_0 + h\,(-0 + 0 + 0 + 0 + 1) = 3 + 0.5 * 1 = 3.5$

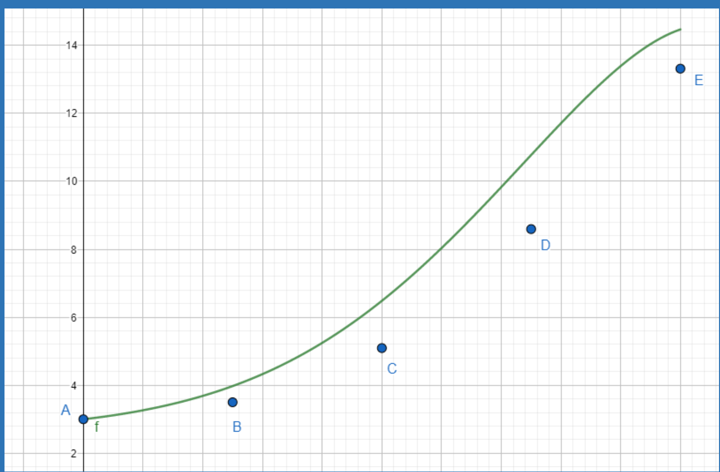
$y(1) \cong y_2 = y_1 + h\,(-0.1875 + 0.625 + 0.25 + 1.5 + 1) = 3.5 + 0.5 * 3.1875 = 5.09375$

$y(1.5) \cong y_3 = y_2 + h\,(-3 + 5 + 1 + 3 + 1) = 5.09375 + 0.5 * 7 = 8.59375$

$y(2) \cong y_4 = y_3 + h\,(-15.1875 + 16.875 + 2.25 + 4.5 + 1) = 13.3125$

Resolviendo analíticamente: $y = -\frac{3}{5}\,x^5 + \frac{5}{4}\,x^4 + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{3}{2}\,x^2 + x + C$

La constante se obtiene: $y(0) = 0 + C = 3 \iff C = 3$



c) $y' = sen(x)$ en el intervalo [0; 1] con $h = 0.2$ $y_0 = 1$ $y(0) = y_0 = 1$

$y(0.2) \cong y_1 = y_0 + h * sen(x_0) = 1 + 0.2\,sen(0) = 1 + 0 = 1$

$y(0.4) \cong y_2 = y_1 + h * sen(x_1) = 1 + 0.2\,sen(0.2) \cong 1.039734$

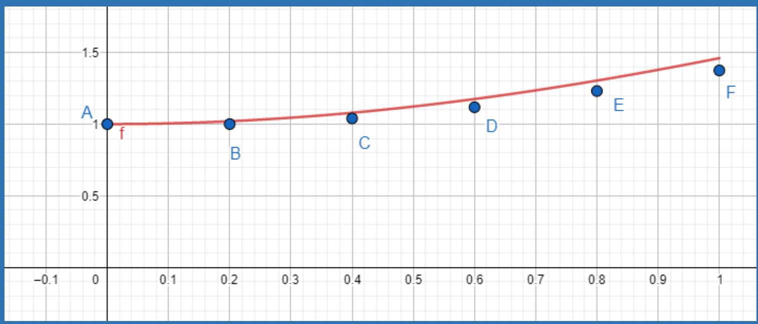
$y(0.6) \cong y_3 = y_2 + h * sen(x_2) = 1.039734 + 0.2\,sen(0.4) \cong 1.117618$

$y(0.8) \cong y_4 = y_3 + h * sen(x_3) = 1.117618 + 0.2\,sen(0.6) \cong 1.230546$

$y(1) \cong y_5 = y_4 + h * sen(x_4) = 1.230546 + 0.2\,sen(0.8) \cong 1.374017$

Resolviendo analíticamente: $y = -\cos(x) + C$

La constante se obtiene: $y(0) = -\cos(0) + C = C - 1 = 1 \iff C = 2$



d) $y' = x + y + xy$ en el intervalo [0; 1] con $h = 0.1$ $y_0 = 1$

$y(0) = y_0 = 1$

$y(0.1) \cong y_1 = y_0 + h\,(0 + 1 + 0) = 1 + 0.1 = 1.1$

$y(0.2) \cong y_2 = y_1 + h\,(0.1 + 1.1 + 0.11) = 1.1 + 0.131 = 1.231$

$y(0.3) \cong y_3 = y_2 + h\,(0.2 + 1.231 + 0.2462) = 1.231 + 0.16772 = 1.39872$

$y(0.4) \cong y_4 = y_3 + h\,(0.3 + 1.39872 + 0.419616) = 1.39872 + 0.2118336 = 1.6105536$

$y(0.5) \cong y_5 = y_4 + h\,(0.4 + 1.61055 + 0.64422) = 1.61055 + 0.265477 = 1.876027$

$y(0.6) \cong y_6 = y_5 + h\,(0.5 + 1.87603 + 0.93801) = 1.87603 + 0.331404 = 2.207434$

$y(0.7) \cong y_7 = y_6 + h\,(0.6 + 2.20743 + 1.32446) = 2.20743 + 0.413189 = 2.620619$

$y(0.8) \cong y_8 = y_7 + h\,(0.7 + 2.62062 + 1.83443) = 2.62062 + 0.515505 = 3.136125$

$y(0.9) \cong y_9 = y_8 + h\,(0.8 + 3.13613 + 2.50890) = 3.13613 + 0.644503 = 3.780633$

$y(1) \cong y_{10} = y_9 + h\,(0.9 + 3.78063 + 3.40257) = 3.78063 + 0.80832 = 4.58895$

e) $y' = 1 + 2xy$ en el intervalo [0; 2] con $h = 0.2$ $y_0 = 3$

$y(0) = y_0 = 3$

$y(0.2) \cong y_1 = y_0 + h\,(1 + 0) = 3 + 0.2 = 3.2$

$y(0.4) \cong y_2 = y_1 + h\,(1 + 1.28) = 3.2 + 0.456 = 3.656$

$y(0.6) \cong y_3 = y_2 + h\,(1 + 2.9248) = 3.656 + 0.78496 = 4.44096$

$y(0.8) \cong y_4 = y_3 + h\,(1 + 5.3292) = 4.44096 + 1.26584 = 5.7068$

$y(1) \cong y_5 = y_4 + h\,(1 + 9.13088) = 5.7068 + 2.026176 = 7.73298$

$y(1.2) \cong y_6 = y_5 + h\,(1 + 15.466) = 7.73298 + 3.29319 = 11.02617$

$y(1.4) \cong y_7 = y_6 + h\,(1 + 26.463) = 11.0262 + 5.49256 = 16.51876$

$y(1.6) \cong y_8 = y_7 + h\,(1 + 46.253) = 16.5188 + 9.45051 = 25.96931$

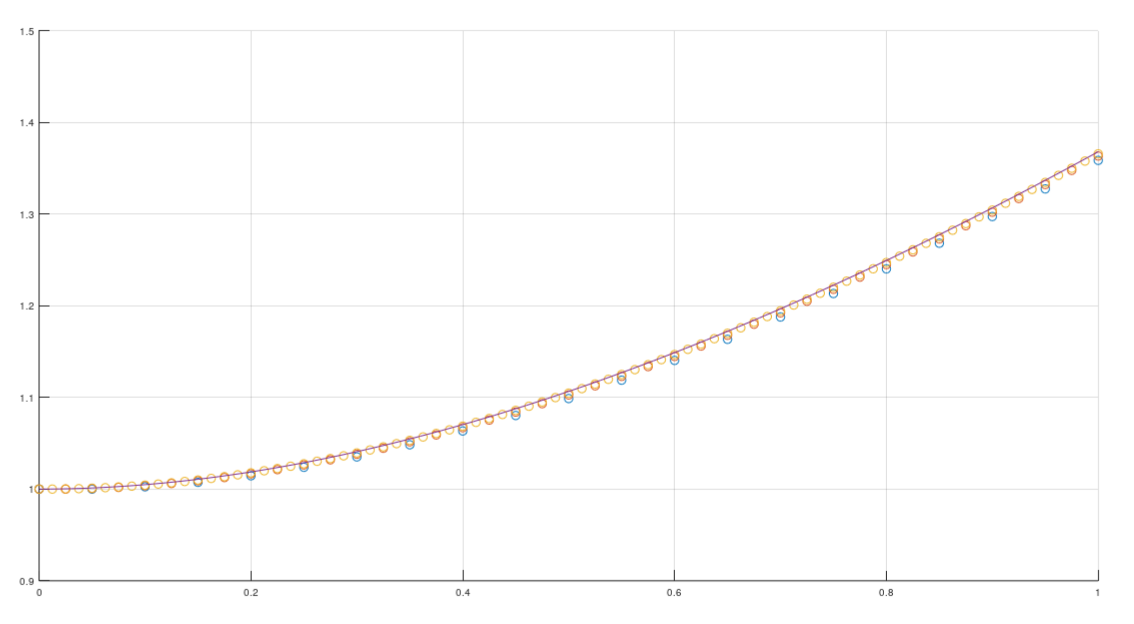
$y(1.8) \cong y_9 = y_8 + h\,(1 + 83.102) = 25.9693 + 16.82036 = 42.78966$

$y(2) \cong y_{10} = y_9 + h\,(1 + 154.043) = 42.7897 + 31.00855 = 73.79825$

Ejercicio 01

El programa de Octave se encuentra aquí. Veamos el error que presenta el método de Euler simple para la ecuación $y' = -y + x + 1$ en el intervalo [0; 1] $\quad y(0) = 1$

Usar: $\quad h = 0.05,\ h = 0.025,\ h = 0.0125 \qquad Sol\colon\ y = x + e^{-x}$



La línea es la solución real. Los círculos azules son los valores obtenidos con $h = 0.05$, los de color naranja son los obtenidos con $h = 0.025$, y los de color amarillo con $h = 0.0125$.

$$y(1) = 1 + e^{-1} = \frac{e+1}{e} = 1.3678794411714423215955237701615 \cong 1.3679$$

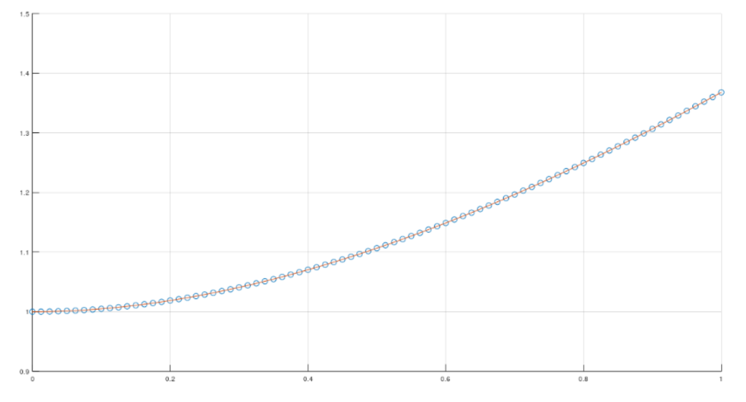
$y_{0.05}(1) = 1.3585 \qquad y_{0.025}(1) = 1.3632 \qquad y_{0.0125}(1) = 1.3656$

$E_{0.05}(1) = 0.0094 \qquad E_{0.025}(1) = 0.0047 \qquad E_{0.0125}(1) = 0.0023$

Se puede observar que el error es prácticamente proporcional al paso "h" elegido.

Ejercicio 03 – Euler mejorado

Realice un programa en un software de cálculo numérico que permita calcular la solución de un PVI implementando el método de Euler mejorado. Utilícelo con los problemas del ejercicio 2 para verificar su funcionamiento. Comparar las soluciones obtenidas con los métodos de Euler simple y Euler mejorado. **Respuesta:** programa en el mismo espacio de trabajo.



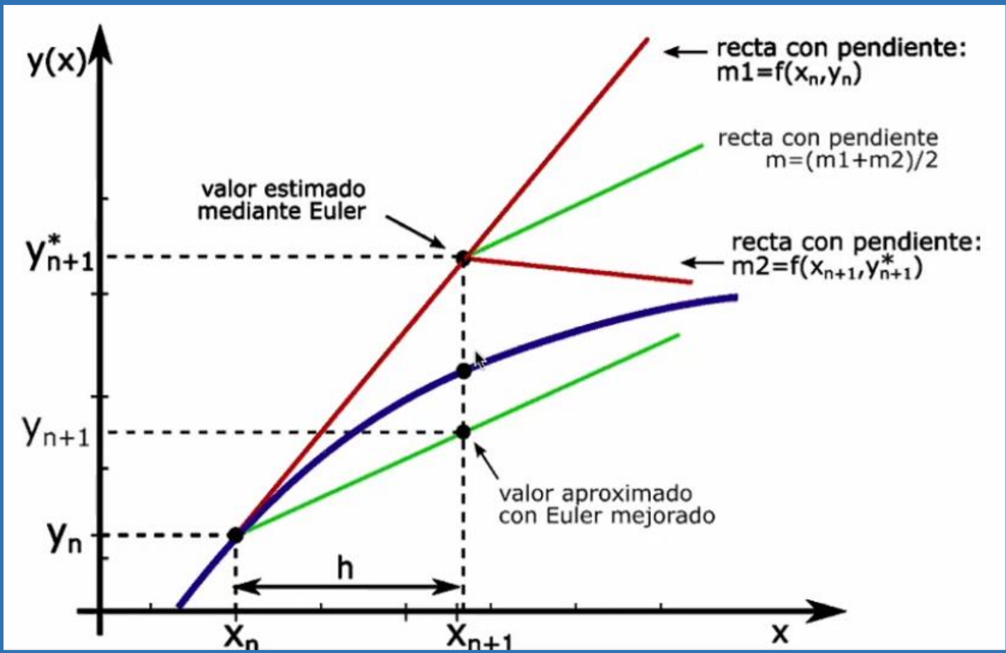
Acá lo probé con el mismo ejemplo que el ejercicio 1 y dio una muy buena aproximación que resultó mejor que usando el método de Euler simple.

Prácticamente pasó que

$$y_{0.0125}(1) = 1.367889111$$

$$E_{0.0125}(1) = 0.00000967$$

Realmente mucha precisión!



Ejercicio 05

Hallar en la ecuación diferencial $y' = -y + x + 1$ y su condición inicial $y(0) = 1$, el valor aprox de la función $y(x)$ para $x = 0.2$ por el método de Euler mejorado. Adoptar un paso $h = 0.1$

$y(0) = y_0 = 1$

```
% Iteracion para obtener cada valor de y
for k=1:N
  % feval se usa para evaluar la funcion f(x,y) en un punto especifico
  deriv01 = feval(f,x(k),y(k));
  % este es el resultado de euler simple
  yp=y(k)+h.*deriv01;
  % pero nos interesa ahora euler mejorado
  deriv02 = feval(f,x(k+1),yp);
  y(k+1)=y(k)+(h/2).*(deriv01+deriv02);
  % notar que para euler mejorado se consideran 2 "pendientes"
endfor
```

$y(0.1) \cong y_0 + \frac{h}{2}(f_1 + f_2)$ $\quad f_1 = 0$ $\quad y_p = 1$ $\quad f_2 = 0.1$ $\quad y(0.1) \cong y_1 = 1.005$

$y(0.2) \cong y_2$ $\quad f_1 = 0.095$ $\quad y_p = 1.0145$ $\quad f_2 = 0.1855$ $\quad y(0.2) \cong 1.019025$

```
>> a=0; b=0.2; h=0.1; y0=1; f=@(x,y) -y+x+1;
>> eulerMejorado(a,b,h,y0,f);
y =

   1.000000000000000   1.005000000000000   1.019025000000000
```