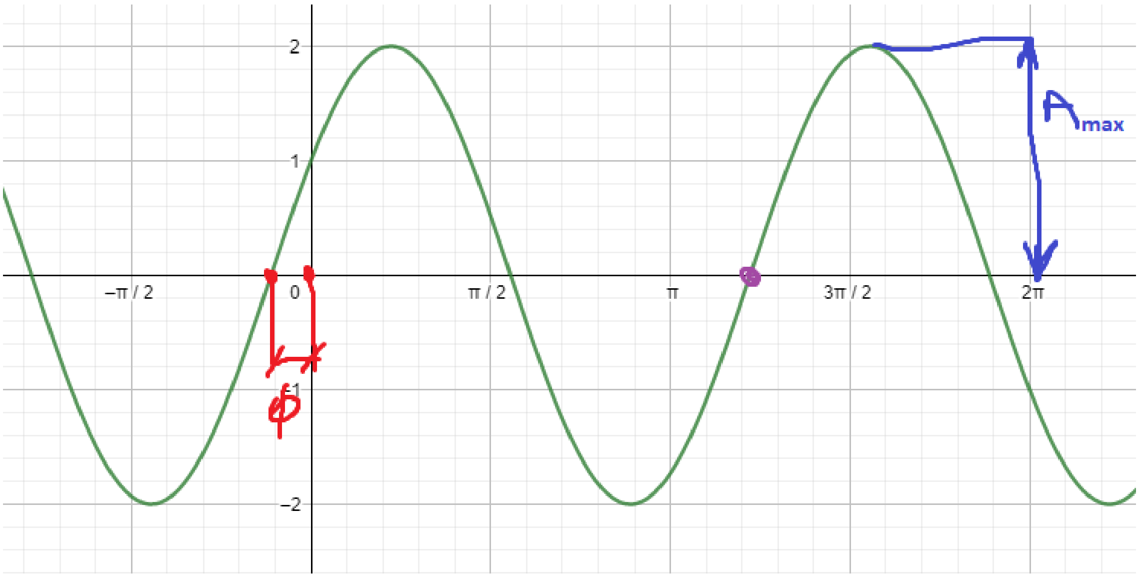
Corriente alterna

Resolvamos los ejercicios del TAP 03

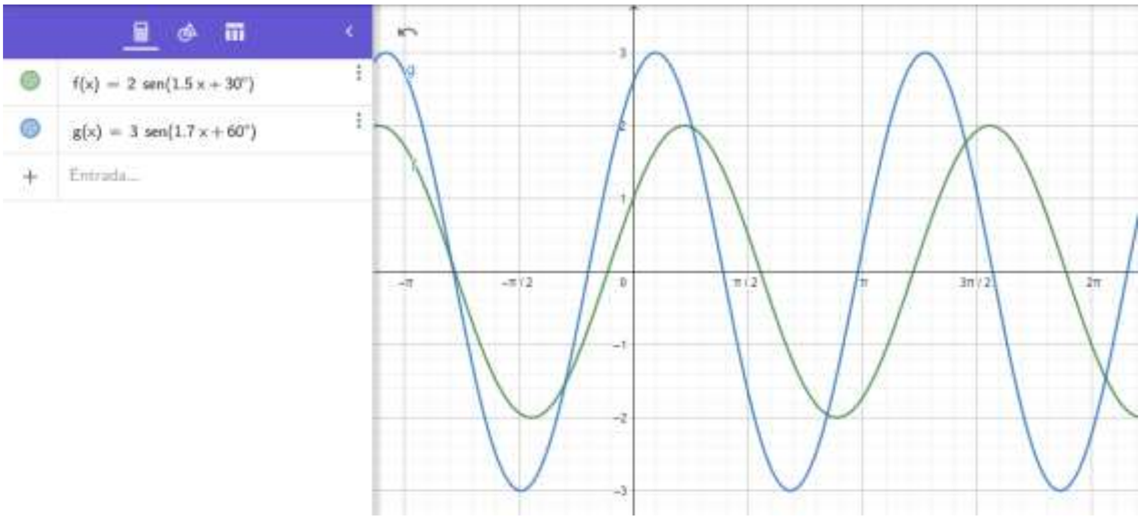
$$a(t) = A_{max} * sen(\omega t + \phi)$$

- **Módulo:** como el del seno es 1, entonces es el valor de A_{max}
- **Frecuencia:** es la cantidad de veces que se repite una onda en un segundo.
- **Pulsación:** es la frecuencia angular (todo: chequear fuente)
- **Período:** es lo que tarda la onda en volver a repetirse.
- **Fase:** es el desplazamiento inicial dado por ϕ (¿o eso es ángulo de desfasaje?)
- **Valor medio:** es la suma de la integral en un período, siempre 0 en senoidal
- **Valor medio cuadrático:** para sinusoides, es $A_{max}/\sqrt{2}$



A_{max} define la unidad de la función, por ejemplo Ampere para intensidades.

La unidad de $\omega = 2\pi f$ (frecuencia angular) es rad/s, que al multiplicarla por t [s], queda solo radián. La unidad de ϕ debe corresponderse con la resultante de ωt para poder sumarse.

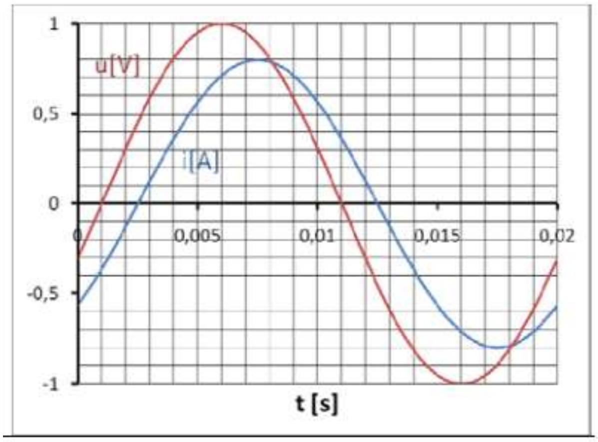


Si la fase es mayor, significa que la onda está atrasada respecto a la otra en cuestión.

DISCLAIMER: Los ejercicios no están revisados (puede haber errores), y faltan justificaciones

SUGERENCIA: No olvidar explicar todo explícitamente y con el mayor detalle posible.

- Ah sí… como si uno no cursara otras materias ._.
- En fin, la hipotenusa.



De esta gráfica podemos deducir:

- La tensión máxima (Umax) es 1 V
- La corriente máxima (Imax) es 0.8 A
- La fase $\phi_U > \phi_I$ (circuito capacitivo)
- La frecuencia de U e I es la misma.
- La mitad del período se completa en $0.011 - 0.001 = 0.01$ segundos, así que el período de ambas es $T = 0.02\ s$
- La frecuencia es entonces $f = 50\ Hz$
- La frecuencia angular $\omega = 314\ rad/s$

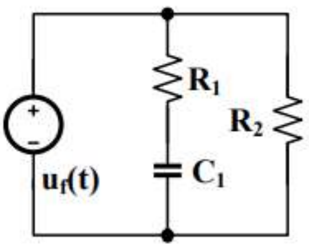
$$i(t) = 0.8\ sen(314t + \phi_I)\ [A] \qquad u(t) = 1\ sen(314t + \phi_U)\ [V]$$

$$0\ A = 0.8\ sen(314 * 0.001 + \phi_I)\ [A] \ \rightarrow\ 0{,}314 + \phi_I = 0 \ \rightarrow\ \phi_I = -0{,}314\ rad = -18°$$

$$0\ V = 1\ sen(314 * 0.0025 + \phi_U)\ [V] \ \rightarrow\ 0{,}785 + \phi_U = 0 \ \rightarrow\ \phi_U = -0{,}785\ rad = -45°$$

$$i(t) = 0.8\ sen(314t - 18°)\ [A] \qquad u(t) = 1\ sen(314t - 45°)\ [V]$$

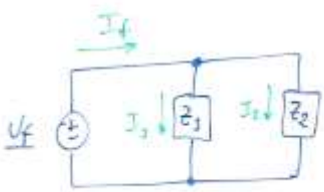
Los ejercicios 3, 4 y 5 son mucho texto. Directamente abajo resuelvo a partir del 6.



En el circuito de la figura: $u_f(t) = 50.sen(\omega t + 30°)$ V; $R_1 = 3\Omega$; $R_2 = 10\Omega$; $C_1 = 800\mu F$ y $\omega = 314 rad/s$.

a) Representar el circuito utilizando fasores e impedancias mostrando claramente los pasos seguidos. Determinar las expresiones de todas las corrientes en forma fasorial explicando los pasos seguidos y las leyes aplicadas.

En primer lugar convierto los elementos pasivos a impedancias:



$$\underline{Z_1} = R_1 - jXc_1 = R_1 - j\frac{1}{\omega * C_1} = (3 - j3.98)\ \Omega = 4.98\ \Omega * e^{-53j}$$

$$\underline{Z_2} = R_2 = 10\ \Omega = 10\ \Omega * e^{0j}$$

La tensión: $\underline{U_f} = 50\ V * e^{30j}$

Por Ley de Ohm: $\underline{I_1} = \underline{U_f} * \underline{Y_1} = 10.04\ A * e^{83j} = (1.22 + j9.97)\ A$

$$\underline{I_2} = \underline{U_f} * \underline{Y_2} = 5\ A * e^{30j} = (4.33 + j2.50)\ A$$

Por 1LK: $\underline{I_t} = \underline{I_1} + \underline{I_2} = (5.55 + j12.47)\ A = 13.65\ A * e^{66j}$

DISCLAIMER: Los ejercicios no están revisados (puede haber errores), y faltan justificaciones

Hallemos la impedancia equivalente del circuito mediante Ley de Ohm:

$$\underline{Z_e} = \frac{\underline{U_f}}{\underline{I_t}} = \frac{50\ V * e^{30j}}{13.65\ A * e^{66j}} = 3.66\ \Omega * e^{-36j}$$

Verifiquemos el resultado anterior sólo conociendo las impedancias 1 y 2:

$$\underline{Z_e} = \frac{\underline{Z_1} * \underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}} = \frac{49.8\ \Omega^2 * e^{-53j}}{(13 - j3.98)\ \Omega} = \frac{49.8\ \Omega^2 * e^{-53j}}{13.6\ \Omega * e^{-17j}} = 3.66\Omega * e^{-36j}$$

Muy bonite! Primer premiE

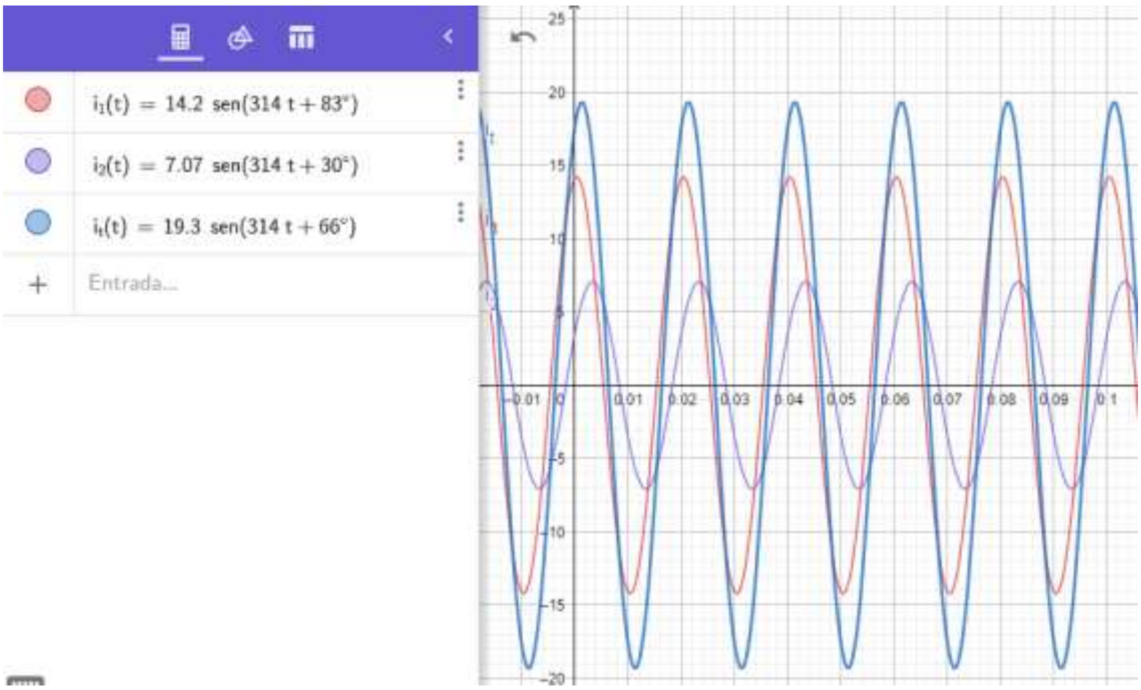
Conclusión: la impedancia equivalente **sólo depende de las características del circuito**, es decir, vale lo mismo sin importar el valor de tensión de la fuente (siempre hablando en CA).

Las expresiones de corriente instantánea resultan:

$$i_1(t) = 10.04 * \sqrt{2} * sen(\omega t + 83°)\ [A] = 14.2\ sen(314t + 83°)\ [A]$$

$$i_2(t) = 5 * \sqrt{2} * sen(\omega t + 30°)\ [A] = 7.07\ sen(314t + 30°)\ [A]$$

$$i_t(t) = 13.65 * \sqrt{2} * sen(\omega t + 66°)\ [A] = 19.3\ sen(314t + 66°)\ [A]$$



Vemos que la superposición de las corrientes en las ramas da lugar a la total ~~(pulsación).~~

Notemos también que la rama 1 tiene un capacitor, por eso i1 está algo adelantada.

DISCLAIMER: Los ejercicios no están revisados (puede haber errores), y faltan justificaciones

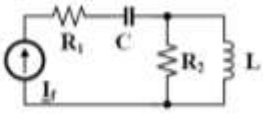
Ejercicio 7

En el circuito de la figura: $\underline{I_f} = 2A\angle 20°$ A y f = 50Hz. Los elementos que componen el circuito poseen los siguientes valores, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, C = 1,6mF, L = 6,4mH.

a) Calcular la impedancia equivalente que ve la fuente.

RESPUESTA: $\underline{Z_{eq}} = 1{,}8\angle{-13°}\ \Omega$

b) Determinar todas las tensiones y corrientes del circuito en forma fasorial.



$$\omega = 2\pi f = 100\pi \frac{rad}{s} = 314 \frac{rad}{s}$$

Armamos Z1 y Z2, que luego estarán en serie, por lo que resulta conveniente en binómica

$$\underline{Z_1} = R_1 - jXc = R_1 - \frac{j}{\omega C} = 1 - \frac{j}{314 * 1{,}6 * 10^{-3}}\ \Omega = 1 - j2\ \Omega$$

$$\underline{Z_2} = \frac{1}{Y_{R2} + Y_L} = \frac{1}{\frac{1}{Z_{R2}} + \frac{1}{Z_L}} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\omega L}} = \frac{1}{\frac{1}{4\ e^{j0}} + \frac{1}{2\ e^{j90}}} = \frac{1}{0{,}25\ e^{j0} + 0{,}5\ e^{-j90}} = \frac{1}{0{,}25 - j0{,}5}$$
$$= \frac{1}{0{,}559\ e^{-j63{,}435}} = 1{,}79\ e^{j63{,}465}\ \Omega = 0{,}8 + j1{,}6\ \Omega$$

La forma anterior en que se calculó Z2 es de la vieja escuela, más sencillamente es posible:

$$\underline{Z_2} = \frac{Z_{R2} * Z_L}{Z_{R2} + Z_L} = \frac{(R_2 * \omega L)\ e^{j(0+90)}}{R_2 + j\omega L} = \frac{8{,}0384\ e^{j90}\ \Omega^2}{4{,}4764\ e^{j26{,}675}\ \Omega} = 1{,}796\ e^{j63{,}325}\ \Omega = 0{,}8 + j1{,}6\ \Omega$$

Efectivamente, se llega al mismo resultado (¿es válido para la cátedra?)

$$\underline{Z_{eq}} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2} = (1 + 0{,}8) + j(-2 + 1{,}6)\Omega = 1{,}8 - j0{,}4\Omega = 1{,}844\ e^{-j12{,}53}\ \Omega$$

$$U_t = I_f * Z_{eq} = 2\ e^{j20} * 1{,}844\ e^{-j12{,}53} = 3{,}688 * e^{j7{,}47}\ V$$

$$U_{R1} = I_f * Z_{R1} = 2\ e^{j20} * 1\ e^{j0} = 2\ e^{j20}\ V$$

$$U_C = I_f * Z_c = 2\ e^{j20} * 2\ e^{-j90} = 4\ e^{-j70}\ V$$

$$U_{R2} = U_L = U_{Z2} = I_f * Z_2 = 2\ e^{j20} * 1{,}796\ e^{j63{,}325} = 3{,}592\ e^{j83{,}325}\ V$$

$$I_{R2} = \frac{U_{R2}}{Z_{R2}} = \frac{3{,}592\ e^{j83{,}325}\ V}{4\ e^{j0}\ \Omega} = 0{,}898\ e^{j83{,}325}\ A$$

$$I_L = \frac{U_L}{Z_L} = \frac{3{,}592\ e^{j83{,}325}\ V}{2\ e^{j90}\ \Omega} = 1{,}796\ e^{-j6{,}675}\ A$$

Verificamos: $I_{R2} + I_L = 0{,}1 + j0{,}9 + 1{,}8 - j0{,}2 = 1{,}9 + j0{,}7\ A = 2\ e^{j20}\ A = I_f$

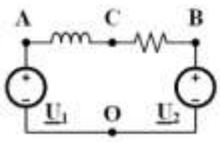
$$U_{R1} + U_C + U_{Z2} = 1{,}88 + j0{,}68 + 1{,}37 - j3{,}76 + 0{,}42 + j3{,}57 = 3{,}7\ e^{j7{,}6} \cong U_t$$

Ejercicio 8

Para el circuito de la figura se cumple que $X_L = R$.

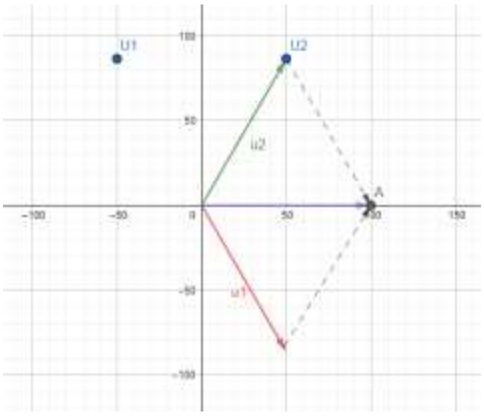
a) Usando ***exclusivamente*** la representación gráfica de los fasores del circuito, determinar la tensión $\underline{U}_{CO}$, para los siguientes valores de las fuentes de tensión.

1. $\underline{U}_1 = 100e^{j120°}$ V; $\underline{U}_2 = 100e^{j60°}$ V.
2. $\underline{U}_1 = -100e^{j120°}$ V; $\underline{U}_2 = -100e^{j60°}$ V.



DISCLAIMER: Los ejercicios no están revisados (puede haber errores), y faltan justificaciones

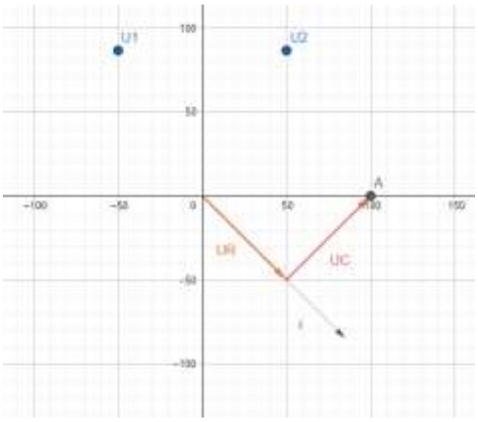
Pensémoslo así: circula una corriente en sentido antihorario. Por 2LK, U2(+) y U1(-), por lo que de forma gráfica el vector U2 se representa tal cual, pero U1 queda invertido en sentido.



La flecha violeta representa la tensión combinada de las fuentes para el sentido de corriente elegido. Respecto a impedancia, la pista es que la resistencia y reactancia son iguales, y además están en serie.

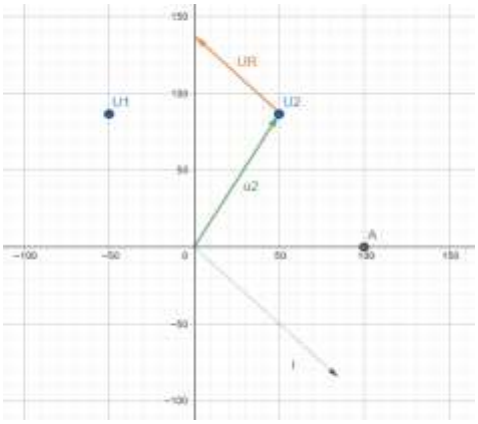
Sabemos que la corriente está en fase con la tensión en una resistencia, pero atrasada 90° en inductor, entonces las tensiones de R y XL son perpendiculares.

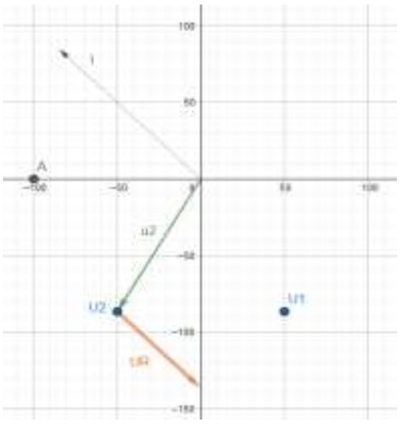
Sin hacer cuentas, nos damos cuenta por ser un triángulo equilatero, que el desfasaje de Z será 45°, obviamente en atraso respecto a la tensión.



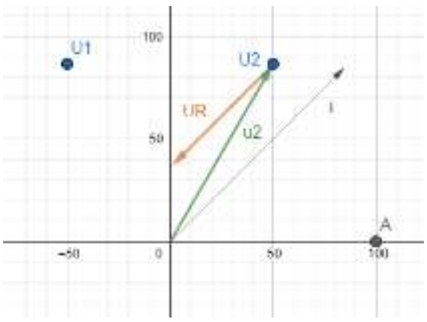
En el segundo gráfico vemos cómo resultarían las tensiones en la resistencia y bobina, acorde al ángulo calculado para la corriente. Es importante que la suma de las caídas de tensión coincida con total de fuentes.

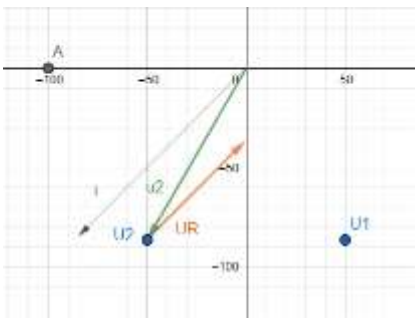
Finalmente, volviendo a la 2LK, la tensión UCO puede obtenerse como la suma de U2(+) y UR(-). Vemos que ambas valen 50 en el eje real, así que la tensión UCO valdrá 0 en el eje real. A continuación mostramos el resultado aproximado obtenido de forma gráfica, a la izquierda lo recién planteado, y a la derecha el 2do, que básicamente es un giro de 180° del anterior.





Si ahora en lugar de una bobina fuera un capacitor de igual reactancia, el único cambio es que la corriente está adelantada 45° respecto a la tensión (en lugar de estar atrasada).





DISCLAIMER: Los ejercicios no están revisados (puede haber errores), y faltan justificaciones

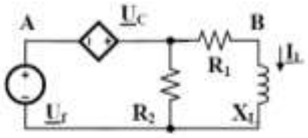
Ejercicio 9

En el circuito de la figura: $\underline{U}_C = 4.e^{j30}\Omega.\underline{I}_L$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $X_L = 4\Omega$.

a) Se desconoce la tensión de la fuente de tensión pero se conoce la tensión entre los puntos A y B: $U_{AB} = 20.e^{j90}V$. Calcular $\underline{U}_f$.

RESPUESTA: $U_f = 20.e^{-j30}V$

b) Determinar todas las tensiones y corrientes del circuito en forma fasorial.



Primero que nada, convertimos los elementos pasivos en impedancias

$Z_{R1} = R_1 = 2\Omega = 2\,e^{j0}\ \Omega$ $\qquad$ $Z_L = j4\Omega = 4\,e^{j90}\ \Omega$ $\qquad$ $Z_1 = 4{,}47\,e^{j63{,}435}\ \Omega$

$Z_{R2} = R_2 = 4\,e^{j0}\ \Omega$ $\qquad$ $\alpha = 3{,}4641 + j2\ \Omega$

Tomando el camino superior:

$$U_{AB} = U_{R1} - U_C = I_L * (Z_{R1} - \alpha) \ \rightarrow\ I_L = \frac{U_{AB}}{Z_{R1} - \alpha} = \frac{20\,e^{j90}\ V}{2{,}4786\,e^{-j126{,}2}\ \Omega} = 8{,}069\,e^{-j143{,}8}\ A$$

Tomando el camino inferior:

$$U_{AB} = U_f - U_L \ \rightarrow\ U_f = U_{AB} + U_L \qquad U_L = I_L * Z_L = 32{,}276\,e^{-j53{,}8}\ V$$

$$U_f = U_{AB} + U_L = j20 + (19{,}0624 - j26{,}0455) = 19{,}0624 - j6{,}0455\ V = 20\,e^{-j17{,}6}\ V$$

$$U_c = \alpha * I_L = (4 * 8{,}069)\,e^{j(30-143.8)}\ V = 32{,}276\,e^{-j113{,}8}\ V$$

$$U_{R1} = Z_{R1} * I_L = (2 * 8{,}069)\,e^{j(0-143{,}8)}\ V = 16{,}138\,e^{-j143{,}8}\ V$$

$$U_{R2} = U_{R1} + U_L = (-13{,}0227 - j9{,}5312) + (19{,}0624 - j26{,}0455) = 36{,}0857\,e^{-j80{,}365}\ V$$

$$I_2 = \frac{U_{R2}}{Z_{R2}} = \frac{36{,}0857\,e^{-j80{,}365}\ V}{4\,e^{j0}\ \Omega} = 9{,}0214\,e^{-j80{,}365}\ A$$

$$I_t = I_L + I_2 = -6{,}5114 - j4{,}7656 + 1{,}51 - j8{,}8941 = 14{,}5465\,e^{-j110{,}11}\ A$$

🤔 El error es bastante considerable con los resultados de la guía, pero confío en lo q hice 😶

```
v = (20; -(17.6°))
→ (20; 342.4°)
v2 = (32.276; -(113.8°))
→ (32.276; 246.2°)
v3 = (36.0857; -(80.365°))
→ (36.0857; 279.635°)
u = v + v2 - v3
→ (0.0020879995747; 249.9668857053811°)
```

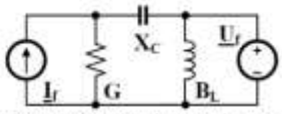
Aplicando una especie de 2LK en GeoGebra me tira que el error es casi despreciable, mientras que con los resultados de la guía el error era 1000 veces mayor (módulo de 2,2).

Ejercicio 10

En el siguiente circuito: **G = 0,25S**; **X**$_C$ **= 2Ω**; **B**$_L$ **= 0,333S**; **I**$_f$ **= 2A** y **U**$_f$ **= 10V/-45º**.

a) Mediante el método de análisis de nodo calcular **U**$_C$ e **I**$_L$.

RESPUESTA: **U**$_C$ = 3,2/20º V, **I**$_L$ = 3,3/-135º A.



b) Dibujar el diagrama fasorial resultante y determinar gráficamente a partir del mismo (sin hacer cálculos) las corrientes y tensiones faltantes.

A G se la denomina conductancia y a B susceptancia.

$Z_R = R = G^{-1} = 4\,\Omega \qquad Z_C = -jX_c = -j2\Omega \qquad Z_L = jX_L = jB^{-1} = j3\Omega$

¿Cómo se si lo anterior está bien (para elementos puros)?

$$Y_R = G_R + jB_R = 0{,}25\,e^{j0}\,S = \frac{1}{Z_R} \quad \therefore \quad Z_R = 0{,}25^{-1}\,e^{-j0}\,\Omega = 4\,e^{j0}\,\Omega = 4\,\Omega$$

$$Y_L = G_L - jB_L = 0{,}333\,e^{-j90}\,S \quad \therefore \quad Z_L = 0{,}333^{-1}\,e^{j90}\,\Omega = j3\,\Omega$$

Si fueran conocidas las componentes G y B de la admitancia, y a partir de ellas se quieren determinar los valores de R y X de la impedancia, puede demostrarse que:

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}$$

$$X = \frac{-B}{G^2 + B^2}$$

En los análisis de circuitos en paralelo se suele utilizar la admitancia en lugar de la impedancia para simplificar los cálculos.

Tomemos el nodo de referencia (Uo = 0) en la parte inferior del circuito. Llamemos **1** al nodo que se encuentra arriba de la conductancia, y **2** al que está arriba de la susceptancia.

Si resolvemos por análisis de nodo primero determino corrientes de entrada y salida.

Nodo 1: $I_f = I_R + I_C$

$I_f = U_1 * Y_R + (U_1 - U_2) * Y_C$

$I_f = U_1 * (Y_R + Y_C) - U_2 * Y_C$

Nodo 2: $I_C + I_U = I_L$

$(U_1 - U_2) * Y_C + I_U = U_2 * Y_L$

$I_U = -U_1 * Y_C + U_2 * (Y_L + Y_C)$

Pero… ¿a qué tensión es igual Uf? Si vemos el gráfico, por estar en paralelo: U2 = Uf

$I_f = U_1 * (Y_R + Y_C) - U_f * Y_C \qquad I_U = -U_1 * Y_C + U_f * (Y_L + Y_C)$

Ahora sí es posible determinar la tensión desde la primera ecuación!

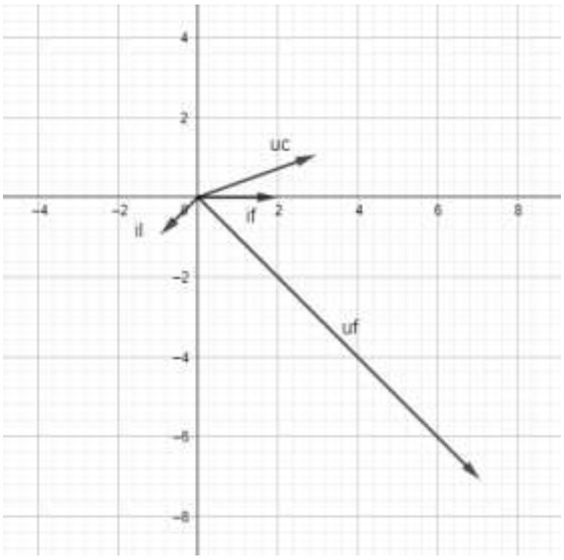
$$U_1 = \frac{I_f + U_f * Y_C}{Y_R + Y_C} = \frac{2 + (10 * 0{,}5)\,e^{-j(45° + 90°)}}{0{,}25 + j0{,}5} = \frac{2 + 5\,e^{j45°}}{0{,}559\,e^{j63{,}435°}} = \frac{6{,}568\,e^{j32{,}566°}}{0{,}559\,e^{j63{,}435°}} = 11{,}7\,e^{-j30{,}9°}\,V$$

$$U_C = U_1 - U_2 = U_1 - U_f = 3{,}15\,e^{j19{,}7°}\,V$$

Ley de Ohm: $I_L = U_2 * Y_L = U_f * Y_L = (10 * 0{,}333)\,e^{j(-45° - 90°)} = 3{,}33\,e^{-j135°}\,A$

Por diagrama fasorial debemos determinar las intensidades I_R e I_C. Las U ya se calcularon.

DISCLAIMER: Los ejercicios no están revisados (puede haber errores), y faltan justificaciones



Con esto tiene que ser suficiente.

Por ejemplo, en el capacitor sabemos que la corriente va adelantada 90° respecto de Uc.

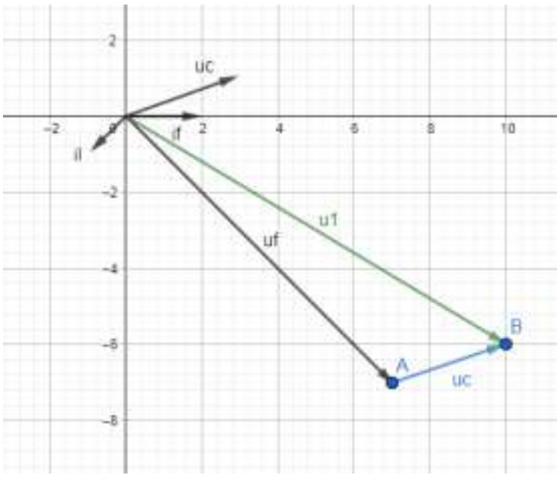
En el resistor, la corriente IR está en fase con la tensión UR (que es U1, no graficada).

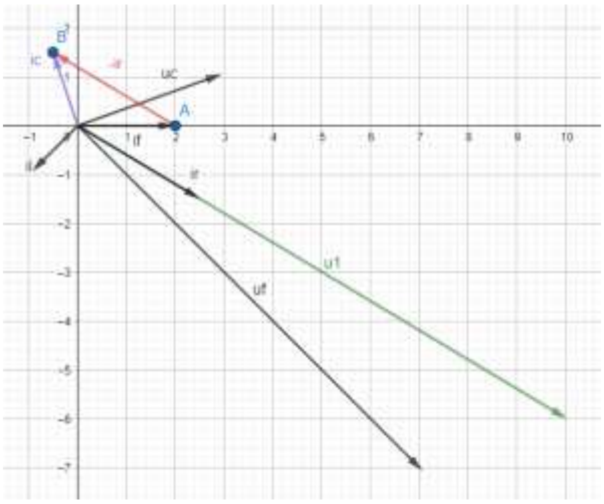
La tensión U1 (ya calculada) se obtiene como la suma de vectores $U_f + U_C$

El módulo de IR se obtiene dividiendo por 4 el módulo de U1 (porque ZR = 4 Ohm)

$$I_R = 2{,}9\ e^{-j31°}\ A$$

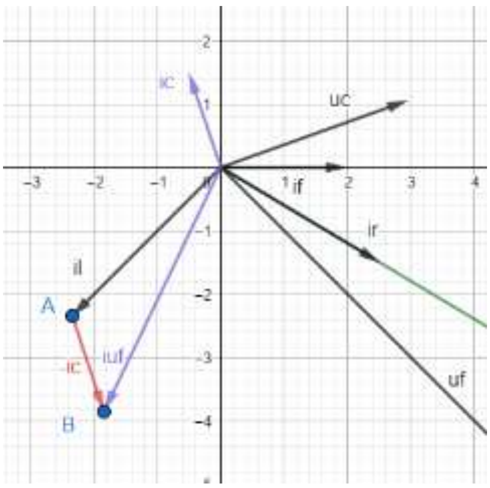
Para Ic basta con restar los vectores $I_f - I_R$





$$U_1 = U_{If} = 11{,}7\ e^{-j31°}\ V$$

$$I_C = 1{,}6\ e^{j109°}\ A$$



También se puede calcular la corriente que pasa por la fuente de tensión como $I_U = I_L - I_C$

$$I_U = I_{Uf} = 4{,}3\ e^{j65°}$$

Fe de erratas: en los primeros 3 gráficos el vector IL se graficó como de 1,33 en lugar de 3,33. El último valor es el correcto, y está representado correctamente en el último dibujo.