Trabajo Práctico N° 4. Matemática D1.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Problemas de Valor Inicial.

Ejercicio 1

Dado el siguiente Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' = -y + x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) Realice un programa en un software de cálculo numérico que permita calcular la solución en el intervalo [0,1] implementando el método de Euler simple para pasos $h = 0{,}05$; $h = 0{,}025$ y $h = 0{,}0125$.

Notas: Para obtener un programa que pueda emplear en todos los ejercicios

- Utilice variables para los limites de integración y el paso de calculo de forma de poder cambiarlos fácilmente.
- Emplee el comando **inline** para definir la función que se desea integrar y la función **feval** para evaluar la función definida.
- Puede utilizar el siguiente código de referencia

```
a=0;                % Limite inferior
b=1;                % Limite superior
h=0.1;              % Paso
N=(b-a)/h;          % Cantidad de puntos
x=a:h:b;            % Soporte de resolución
y=zeros(1,N);       % Se reserva un variable
y(1)=1;             % Valor inicial
f=inline('-y+x+1','x','y');     % Define la función del PVI

% Formula iterativa y(n+1)=y(n)+h*f(x(n),y(n))
for k=1:N
    y(k+1)=y(k)+h*feval(f,x(k),y(k));
end
plot(x,y)       % Se grafica la resolución obtenida
```

b) Calcular el error absoluto en cada caso comparando con la solución exacta: $y(x) = x + e^{-x}$. Graficar superponiendo las distintas soluciones.

c) Interpretar la relación entre el paso utilizado y el error absoluto producido.

Ejercicio 2

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales aplicando el método de Euler.

a) $y' = -2\,y + 5\,e^{-x}$ en el intervalo $[0;1]$ con $h = 0{,}2$; $y_0 = 2$.

b) $y' = -3\,x^4 + 5\,x^3 + x^2 + 3\,x + 1$ en el intervalo $[0;2]$ con $h = 0{,}5$; $y_0 = 3$.

c) $y' = sen(x)$ en el intervalo $[0;1]$ con $h = 0{,}2$; $y_0 = 1$.

d) $y' = x + y + x\,y$ en el intervalo $[0;1]$ con $h = 0{,}1$; $y_0 = 1$.

e) $y' = 1 + 2\,x\,y$ en el intervalo $[0;2]$ con $h = 0{,}2$; $y_0 = 3$.

En los casos b) y c) calcular la solución analítica y hallar el error absoluto para cada valor obtenido numéricamente.

En los casos d) y e) resolver para distintos pasos $h = 0{,}15$; $h = 0{,}01$. Graficar las soluciones.

Ejercicio 3

Realice un programa en un software de cálculo numérico que permita calcular la solución de un PVI implementando el método de Euler mejorado. Utilícelo con los problemas del ejercicio anterior para verificar su funcionamiento. Comparar las soluciones obtenidas con los métodos de Euler simple y Euler mejorado.

Ejercicio 4

Interpretar en un gráfico $x - y$, el método de Euler simple y mejorado en un intervalo $[x_n; x_{n+1}]$.

Ejercicio 5

Hallar en la ecuación diferencial $y' = -y + x + 1$ y su condición inicial $y(0) = 1$, el valor aproximado de la función $y(x)$ para $x = 0{,}2$ por el método de Euler mejorado. Adoptar un paso $h = 0,1$.

Ejercicio 6

Resolver la ecuación diferencial $y' = 1 + 2\,x\,y$ en $x = 0{,}2$ por el método Rungge-Kutta de segundo orden. Adoptar un paso $h = 0,1$ y la condición inicial $y(0) = 3$.

Ejercicio 7

Implementar en un software de cálculo numérico un programa para resolver PVI's con el método de Runge-Kutta de segundo y cuarto orden. Resolver algún PVI del ejercicio 2 y comparar los resultados obtenidos.

Ejercicio 8

Dada la ecuación $y' = f(x, y) = -x^3 + 10\,x^2 - 24\,x + 3$ en el intervalo $[0; 4]$ con el valor inicial $y(x_0) = y_0 = 1$, adoptar un paso h y resolver con los distintos métodos de paso simple estudiados. Armar una tabla donde se puedan comparar los resultados y errores. Graficar las soluciones.

Ejercicio 9

Dada la ecuación $y' = f(x, y) = sen(x)$ en el intervalo $[0; 8]$ con el valor inicial $y(x_0) = y_0 = 1$, adoptar un paso h y resolver con los distintos métodos de paso simple estudiados. Armar una tabla donde se puedan comparar los resultados y errores. Graficar las soluciones.

Solución exacta: $y(x) = 2 - cos(x)$

Problemas Adicionales

Ejercicio 10

Un material radiactivo tiene una vida media $\tau = \frac{1}{a}\,ln\,2$ igual a 1500 años. Si el material se desintegra siguiendo la ley $q' = -a\,q$, siendo q la cantidad de material, determinar aproximadamente la cantidad de material que habrá en 900 años. En el tiempo inicial, $q_o = 10\ grs.$ ¿En qué tiempo se tendrá un tercio de la masa?

Ejercicio 11

En depósito bancario se incrementa según la tasa anual de interés con la ley $C' = tasa \cdot C$. Si el capital inicial C_0 es de \$ 20.000; ¿Cuál será el capital acumulado en 15 años? ¿En cuánto tiempo aproximadamente se duplicará el capital?.

Ejercicio 12

Un objeto con temperatura inicial $T_0 = 38\ ^oC$ se introduce en un medio con temperatura $T_m = 23\ ^oC$. El cambio de temperatura del objeto estará dado por: $T' = -k\,(T - T_m)$, con $k = 2$. Determinar la temperatura del objeto en $t = 20\ hs.$

Ejercicio 13

Un bollo de harina y levadura crece en volumen a una velocidad proporcional a su mismo volumen. Si el volumen es 8 veces mayor en 2 horas, ¿cuál será el volumen en 5 horas? ¿En qué tiempo el volumen será 20 veces mayor?

Ejercicio 14

Un termómetro que marca 34 °C se introduce en una cámara a 5 °C de temperatura. Después de 3 minutos el termómetro registra 17 °C. ¿qué temperatura indicará el termómetro a los 4 minutos de ser introducido en la cámara? ¿en qué tiempo alcanzará 7 °C?

Ejercicio 15

La caída de un objeto de masa m en un medio fluido es representada por la ecuación: $m\,v' = m\,g - c\,v$. Donde v es la velocidad de caída y c es la resistencia del medio. Si la masa del objeto es de 2.45 kg y c=2 Nseg/m, hallar la velocidad del objeto en el tiempo t=120 seg. si la velocidad inicial es 4m/s. Calcular la velocidad a las 2 horas. Repetir el último cálculo para velocidad inicial nula.

Ejercicio 16

una masa de 12 kg es lanzada en dirección vertical hacia arriba a una velocidad de 4 m/s. Las únicas fuerzas que inciden son el peso y la resistencia de la atmósfera que es proporcional a la velocidad al cuadrado, con k=2. Hallar el tiempo en que la masa llega a la altura máxima.