TAP 05 – Frecuencia Variable

- Frecuencia cero = corriente continua
- Pulsación = frecuencia

Ejercicio 02

Tratando el circuito tal cual como está en la figura (abierto entre los bornes de U_S), planteo:

$$I = \frac{U_F}{R + j\omega L} \qquad\qquad U_S = I * (j\omega L)$$

Armamos la expresión solicitada

$$\frac{U_S}{U_F} = \frac{I * (j\omega L)}{I\ (R + j\omega L)} = \frac{j\ \omega L}{R + j\omega L} = \frac{(\omega L)^2 + j\ R\ \omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

Hallar el módulo de dicha expresión

Para simplificar usamos: $\omega_c = R/L \quad \therefore \quad R = L\ \omega_c \qquad$ Es valido: $L = X/\omega$

$$\left|\frac{U_S}{U_F}\right| = \frac{|U_S|}{|U_F|} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{\omega L}{\sqrt{(L\ \omega_c)^2 + (\omega L)^2}} = \frac{\omega L}{\sqrt{L^2\ (\omega_c^2 + \omega^2)}} = \boxed{\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}}}$$

Hallar ahora la fase o argumento, podemos usar la misma simplificación que antes:

$$\arg\left(\frac{U_S}{U_F}\right) = arc\ tg\left(\frac{Parte\ compleja}{Parte\ real}\right) = arc\ tg\left(\frac{R\ \omega L}{(\omega L)^2}\right) = arc\ tg\left(\frac{L\ \omega_c}{\omega L}\right) = \boxed{arc\ tg\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)}$$

Hallar la pulsación de corte antes definida, que es un limite entre "dejar pasar o no" frecuencia

$$\omega_c = \frac{R}{L} = \frac{10\ \Omega}{10 * 10^{-3}\ H} = 1000\ rad/s$$

Calcular módulo y fase para $f_1 = 50\ Hz \quad \therefore \quad \omega_1 = 314\ rad/s$

$$\left|\frac{U_S}{U_F}\right| = \frac{314}{\sqrt{314^2 + 1000^2}} = 0.3 \qquad \arg\left(\frac{U_S}{U_F}\right) = arc\ tg\left(\frac{1000}{314}\right) = 72.6°$$

Calcular módulo y fase para $f_2 = 1500\ Hz \quad \therefore \quad \omega_2 = 9425\ rad/s$

$$\left|\frac{U_S}{U_F}\right| = \frac{9425}{\sqrt{9425^2 + 1000^2}} = 0.994 \qquad \arg\left(\frac{U_S}{U_F}\right) = arc\ tg\left(\frac{1000}{9425}\right) = 6.06°$$

Ejercicio 04

Se tiene un circuito RLC en serie. La fuente ve $Z_{eq} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}$

Dar una expresión de su módulo: $|Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

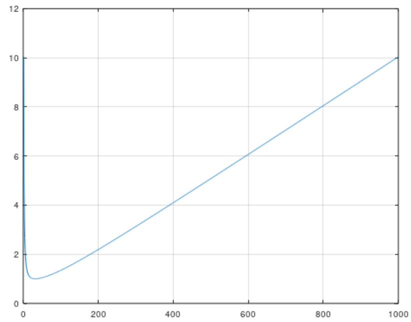
Por Ley de Ohm: $I = \frac{U_F}{Z_{eq}} = \frac{U_F}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad \therefore \quad |I| = \frac{|U_F|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$

Hallar expresiones de los módulos de las tensiones en la bobina y el capacitor

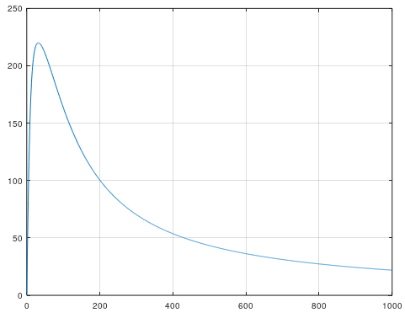
$$U_L = I\, j\omega L \qquad \therefore \qquad |U_L| = \frac{|U_F|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\, \omega L$$

$$U_C = I\, j\frac{1}{\omega C} \qquad \therefore \qquad |U_C| = \frac{|U_F|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} * \frac{1}{\omega C}$$

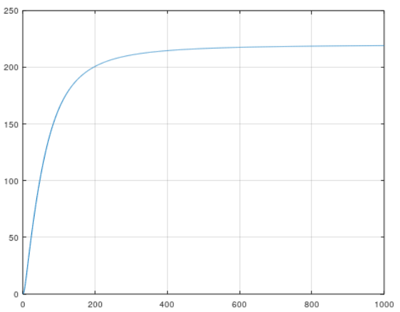
Graficamos las expresiones en función de la frecuencia en Octave



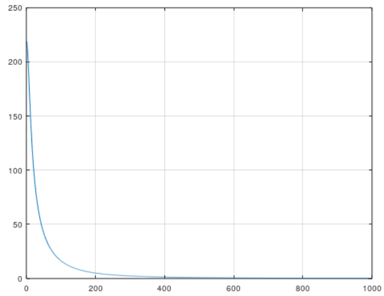
Gráfica del módulo de Z que ve Uf



Gráfica del módulo de la corriente



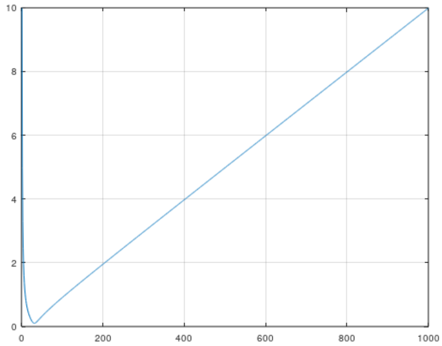
Gráfica del módulo de UL (bobina)

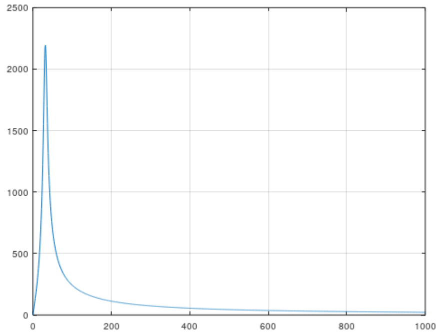


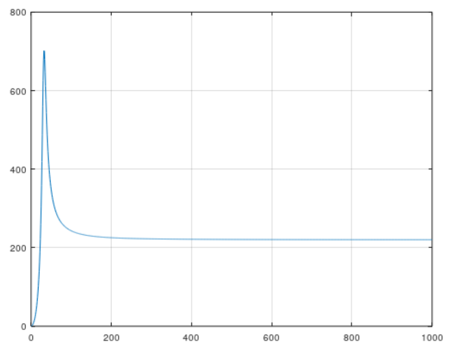
Gráfica del módulo de UC (condensador)

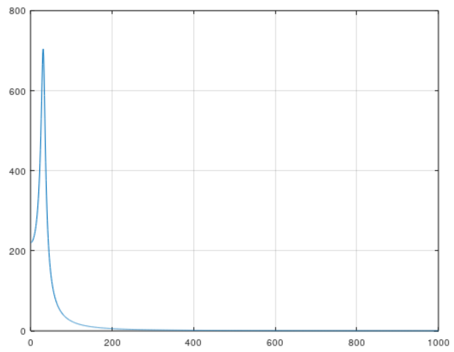
- Si la frecuencia tiende a 0, UL tiende a 0 porque XL tiende a 0.
- Si la frecuencia tiende a Inf, UC tiende a 0 porque XC tiende a 0.
- El máximo de corriente sucede en la frecuencia de resonancia (ω_0)

Repetimos gráficas para $R = 0.1\ \Omega$









- Podemos observar que cuando R se achica, los picos máximos son aún mayores.
- Ahora también se producen sobretensiones en L y C (para graficar usé 220V)

Comportamiento de la impedancia según la frecuencia

- Para $\omega < \omega_0$ decimos que la impedancia tiene comportamiento inductivo
- Para $\omega = \omega_0$ decimos que tiene comportamiento resistivo
- Para $\omega > \omega_0$ decimos que tiene comportamiento capacitivo

Hallar los valores de frecuencia que delimitan el ancho de banda $I = I_{max}/\sqrt{2}$

$$I_{max} = I(\omega_0) = \frac{|U_F|}{R}$$

$$I(\omega_{12}) = \frac{|U_F|}{\sqrt{2}\,R} \quad \therefore \quad \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega^2\,LC - 1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{2}\,R$$

$$R^2 + \left(\frac{\omega^2\,LC - 1}{\omega C}\right)^2 = 2\,R^2 \iff \left(\frac{\omega^2\,LC - 1}{\omega C}\right)^2 = R^2 \iff \frac{\omega^2\,LC - 1}{\omega C} = \pm R$$

$$\omega^2\,LC - \omega\,RC - 1 = 0 \qquad \vee \qquad \omega^2\,LC + \omega\,RC - 1 = 0$$

Para la primera parte, $R = 1\,\Omega$

$$\omega_1 = \frac{RC + \sqrt{(RC)^2 + 4\,LC}}{2\,LC} = \frac{0.1 + \sqrt{0.01 + 0.004}}{0.002} = 50 + 59.16 = 109.16\,rad/s$$

$$\omega_2 = \frac{-RC + \sqrt{(RC)^2 + 4\,LC}}{2\,LC} = \frac{-0.1 + \sqrt{0.01 + 0.004}}{0.002} = -50 + 59.16 = 9.16\,rad/s$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 100\,rad/s$$

Para la segunda parte, $R = 0.1\,\Omega$

$$\omega_1 = \frac{RC + \sqrt{(RC)^2 + 4\,LC}}{2\,LC} = \frac{0.01 + \sqrt{0.0001 + 0.004}}{0.002} = 5 + 32.02 = 37.02\,rad/s$$

$$\omega_2 = \frac{-RC + \sqrt{(RC)^2 + 4\,LC}}{2\,LC} = \frac{-0.01 + \sqrt{0.0001 + 0.004}}{0.002} = -5 + 32.02 = 27.02\,rad/s$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 10\,rad/s$$

Se pide ahora buscar posibles sobretensiones en la bobina

$$\frac{|U_L|}{|U_F|} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \omega L > \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$(\omega L)^2 > R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (\omega L)^2 > R^2 + (\omega L)^2 - \frac{2\omega L}{\omega C} + \frac{1}{(\omega C)^2}$$

$$\frac{2L}{C} > R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2} \quad \Leftrightarrow \quad (\omega C)^2 > \frac{1}{\frac{2L}{C} - R^2} \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 > \frac{1}{2LC - R^2\, C^2}$$

Para el caso $R = 1\,\Omega$ $L = 0.01\, H$ $C = 0.1\, F$

$$\omega^2 > \frac{1}{0.002 - 0.01} \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 > -125 \qquad (Absurdo) \quad \therefore \quad no\ hay\ sobretensión\ en\ L$$

Para el caso $R = 0.1\,\Omega$ $L = 0.01\, H$ $C = 0.1\, F$

$$\omega^2 > \frac{1}{0.002 - 0.0001} \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 > 526.3 \quad \Leftrightarrow \quad \omega > 22.94\, rad/s$$

Analizar ahora para el condensador:

$$\frac{|U_C|}{|U_F|} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\omega C\, \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\omega C} > \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\frac{1}{(\omega C)^2} > R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{(\omega C)^2} > R^2 + (\omega L)^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{(\omega C)^2}$$

$$(\omega L)^2 < \frac{2L}{C} - R^2 \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 < \frac{2}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \quad \Leftrightarrow \quad \omega < \sqrt{\frac{2}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

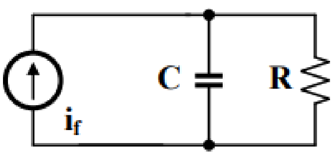
Para el caso $R = 1\,\Omega$ $L = 0.01\, H$ $C = 0.1\, F$

$$\omega < \sqrt{2000 - 10000} \quad \Leftrightarrow \quad \omega < \sqrt{-8000} \qquad (Absurdo) \ \therefore \quad no\ hay\ sobretensión\ en\ C$$

Para el caso $R = 0.1\,\Omega$ $L = 0.01\, H$ $C = 0.1\, F$

$$\omega < \sqrt{2000 - 100} \quad \Leftrightarrow \quad \omega < \sqrt{1900} \quad \Leftrightarrow \quad \omega < 43.59\, rad/s$$

Ejercicio 05, acá viene lo hardcore por poliarmónicas :'(



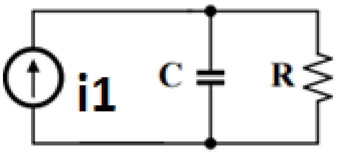
Un circuito **RC** se excita con una fuente de corriente poliarmónica de frecuencia fundamental 50 Hz; $\mathbf{i_f(t)}$ = 5 sen(ωt) + 0,3 sen(3ωt + 30º) + 0,1 sen(5ωt + 150º) A; con **R** = 10 Ω y **C** = 300 μF.

$$\omega = 2\pi f = 314\, rad/s$$

¿Cómo se resuelve esto? ¿Hay que usar 3 corrientes? Sí

Mini-referencia: [Poliarmónicas - 2020.ppt (unlp.edu.ar)] Pág. 18

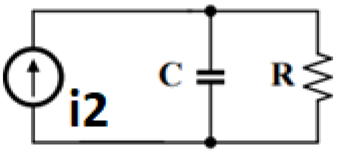
$$i_f(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 5\ sen(\omega t) + 0.3\ sen(3\omega t + 30°) + 0.1\ sen(5\omega t + 150°)\ A$$



$$Y_C = \frac{1}{-jX_C} = j\omega_1\ C = j0.0942\ S \qquad Y_R = G = \frac{1}{R} = 0.1\ S$$

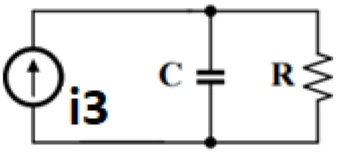
$$Y_{1\ eq} = G + j\ \omega C = 0.1 + j0.0942\ S$$

$$U_{1\ max} = \frac{I_{1\ max}}{Y_{1\ eq}} = \frac{5\ e^{j0°}\ A}{0.1374\ e^{j43.29°}\ S} = 36.4\ e^{-43.3°}\ V$$



$$Y_{2\ eq} = G + j\ 3\omega C = 0.1 + j0.2826\ S$$

$$U_{2\ max} = \frac{I_{2\ max}}{Y_{2\ eq}} = \frac{0.3\ e^{j30°}\ A}{0.3\ e^{j71°}\ S} = 1\ e^{-j41°}\ V$$



$$Y_{3\ eq} = G + j\ 5\omega C = 0.1 + j0.4710\ S$$

$$U_{3\ max} = \frac{I_{3\ max}}{Y_{3\ eq}} = \frac{0.1\ e^{j150°}\ A}{0.4815\ e^{j78°}\ S} = 0.21\ e^{j72°}\ V$$

$$u_f(t) = |U_{1\ max}|\ sen(\omega t + \arg(U_{1\ max})) + |U_{2\ max}|\ sen(3\omega t + \arg(U_{2\ max})) + |U_{3\ max}|\ sen(5\omega t + \arg(U_{3\ max}))$$

$$u_f(t) = 36.4\ sen(\omega t - 43.3°) + sen(3\omega t - 41°) + 0.21\ sen(5\omega t + 72°)\ V$$

Hallar la corriente en el capacitor

$$I_{C1\ max} = U_{1\ max} * \omega C\ e^{j90°} = 3.4\ e^{j46.7°}\ A \ \therefore\ i_{c1}(t) = 3.4\ sen(\omega t + 46.7°)\ A$$

$$I_{C2\ max} = U_{2\ max} * 3\omega C\ e^{j90°} = 0.3\ e^{j49°}\ A \ \therefore\ i_{c2}(t) = 0.3\ sen(3\omega t + 49°)\ A$$

$$I_{C3\ max} = U_{3\ max} * 5\omega C\ e^{j90°} = 0.1\ e^{j162°}\ A \ \therefore\ i_{c3}(t) = 0.1\ sen(5\omega t + 162°)\ A$$

$$i_c(t) = 3.4\ sen(\omega t + 46.7°) + 0.3\ sen(3\omega t + 49°) + 0.1\ sen(5\omega t + 162°)\ A$$

¿Cómo se hayan los valores eficaces (netamente) de corriente en R y C?

En la filmina 16, dice que el cuadrado del valor eficaz es sumar los cuadrados individuales

$$I_{C\ ef} = \sqrt{\frac{3.4^2}{2} + \frac{0.3^2}{2} + \frac{0.1^2}{2}} = 2.4\ A$$

$$I_{F\ ef} = \sqrt{\frac{5^2}{2} + \frac{0.3^2}{2} + \frac{0.1^2}{2}} = 3.5\ A$$

Falta hallar la corriente en el resistor. Lo bueno es que dicho elemento no cambia su Z con ω

$$I_{R1\,max} = U_{1\,max} * G\, e^{j0°} = 3.64\, e^{-j43.3°}\, A \;\;\therefore\;\; i_{c1}(t) = 3.64\, sen(\omega t - 43.3°)\, A$$

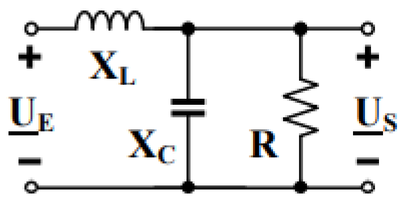
$$I_{R2\,max} = U_{2\,max} * G\, e^{j0°} = 0.1\, e^{-j41°}\, A \;\;\therefore\;\; i_{c2}(t) = 0.1\, sen(3\omega t - 41°)\, A$$

$$I_{R3\,max} = U_{3\,max} * G\, e^{j0°} = 0.021\, e^{j72°}\, A \;\;\therefore\;\; i_{c3}(t) = 0.021\, sen(5\omega t + 72°)\, A$$

$$i_r(t) = 3.64\, sen(\omega t - 43.3°) + 0.1\, sen(3\omega t - 41°) + 0.021\, sen(5\omega t + 72°)\, A$$

$$I_{R\,ef} = \sqrt{\frac{3.64^2}{2} + \frac{0.1^2}{2} + \frac{0.021^2}{2}} = 2.6\, A$$

Ejercicio 06



R = 20 Ω; C = 20 mF; L = 40 mH.

Hallar la relación entre tensión de entrada y salida

$$Z_L = j\omega L \qquad Y_C = j\omega C \qquad Y_R = G = 0.05\, S$$

$$Y_{RC} = Y_R + Y_C = G + j\omega C = \sqrt{G^2 + (\omega C)^2}\, e^{j\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\omega C}{G}\right)}$$

Para encontrar la relación entre tensión de entrada y salida lo veremos como divisor de tensión. Referencia: Divisor de Tension Explicación y Esquema. Divisor de Voltaje (areatecnologia.com)

$$U_S = U_E * \frac{Z_{RC}}{Z_L + Z_{RC}} \;\Leftrightarrow\; \frac{U_S}{U_E} = \frac{(Y_{RC})^{-1}}{Z_L + (Y_{RC})^{-1}} \;\Leftrightarrow\; \frac{|U_S|}{|U_E|} = \frac{\left(\sqrt{G^2 + (\omega C)^2}\right)^{-1}}{\omega L + \left(\sqrt{G^2 + (\omega C)^2}\right)^{-1}}$$

$$\frac{|U_S|}{|U_E|} = \frac{1}{\sqrt{G^2 + (\omega C)^2}} * \frac{\sqrt{G^2 + (\omega C)^2}}{\omega L\, \sqrt{G^2 + (\omega C)^2} + 1} = \frac{1}{\omega L\, \sqrt{G^2 + (\omega C)^2} + 1}$$

Para hallar la frecuencia de corte igualamos la relación a 1 sobre raíz de 2:

$$\frac{|U_S|}{|U_E|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\Leftrightarrow\; \omega L\, \sqrt{G^2 + (\omega C)^2} + 1 = \sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; \left(\omega L\, \sqrt{G^2 + (\omega C)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2$$

$$\omega^2\, L^2\, (G^2 + \omega^2 C^2) = 2 - 2\sqrt{2} + 1 \;\Leftrightarrow\; \omega^4\, (LC)^2 + \omega^2\, (LG)^2 + \left(2\sqrt{2} - 3\right) = 0$$

Realizamos un cambio de variable para usar Bhaskara: $u = \omega^2$

$$u_{1,2} = \frac{-(LG)^2 \pm \sqrt{(LG)^4 - 4\,(LC)^2\,\left(2\sqrt{2} - 3\right)}}{2\,(LC)^2} = \frac{-4 * 10^{-6} \pm \sqrt{1.6 * 10^{-11} - 2.56 * 10^{-6} * (-0.1716)}}{1.28 * 10^{-6}}$$

$$u_{1,2} = -3.1250 \pm \frac{\sqrt{4.3931 * 10^{-7}}}{1.28 * 10^{-6}} = -3.1250 \pm 517.8161$$

Descartamos el valor negativo, resultando finalmente:

$$\omega_c = \sqrt{-3.1250 + 517.8161} = 22.69\, rad/s \qquad \therefore \qquad f_c = 3.61\, Hz$$

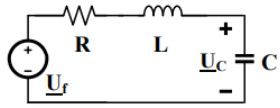
EJERCICIO Nº 07:

En el circuito de la figura: **U_f = 1000 V**; **R = 5 Ω**; **L = 10 mH** y **C = 24 uF**.

a) Verificar si hay sobretensiones en algún elemento del circuito y mostrar en qué rango de frecuencias. Explicar y fundamentar.

RESPUESTA: Hay sobretensiones en L para f > 233 Hz y en C para f < 452 Hz.

b) Determinar la gama de frecuencias en la qu la tensión en el **C** supera los 2 **kV**.



Calculemos las expresiones de relación de tensión para cada elemento pasivo, excepto R

$$\frac{|U_L|}{|U_F|} = \frac{I\,|j\omega L|}{I\,\left|R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right|} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} > 1 \;\Leftrightarrow\; \omega L > \sqrt{R^2 + (\omega L)^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{(\omega C)^2}}$$

$$(\omega L)^2 > R^2 + (\omega L)^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{(\omega C)^2} \;\Leftrightarrow\; \frac{2L}{C} - R^2 > \frac{1}{\omega^2\,C^2} \;\Leftrightarrow\; \omega^2 > \frac{1}{2LC - (RC)^2}$$

$\omega^2 > 2.1478 * 10^6 \;\Leftrightarrow\; \omega > 1465.53\ rad/s$ ∴ $f > 233\ Hz$ (para L)

$$\frac{|U_C|}{|U_F|} = \frac{I\,\left|\frac{j}{\omega C}\right|}{I\,\left|R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right|} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} > 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{\omega C} > \sqrt{R^2 + (\omega L)^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{(\omega C)^2}}$$

$$\frac{1}{(\omega C)^2} > R^2 + (\omega L)^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{(\omega C)^2} \;\Leftrightarrow\; \frac{2L}{C} - R^2 > (\omega L)^2 \;\Leftrightarrow\; \omega < \sqrt{\frac{2}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}$$

$\omega < \sqrt{8.3333 * 10^6 - 0.25 * 10^6} \;\Leftrightarrow\; \omega < 2843.11\ rad/s$ ∴ $f < 452\ Hz$ (para C)

Ahora se pide buscar el rango donde $|U_C| > 2\ kV$ Dato: $U_F = 1000\ V$

$$\frac{|U_C|}{|U_F|} > 2 \;\Leftrightarrow\; \frac{0.25}{(\omega C)^2} > R^2 + (\omega L)^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{(\omega C)^2} \;\Leftrightarrow\; \frac{2L}{C} - R^2 > \frac{(\omega^2\,LC)^2 + 0.75}{\omega^2\,C^2}$$

$$\omega^2\,(2LC - (RC)^2) > \omega^4\,(LC)^2 + 0.75 \;\Leftrightarrow\; u^2\,(LC)^2 - u\,(2LC - (RC)^2) + 0.75 < 0$$

$$5.76 * 10^{-14}\,u^2 - 4.66 * 10^{-7}\,u + 0.75 < 0 \;\Leftrightarrow\; (u - 5873339)(u - 2216939) < 0$$

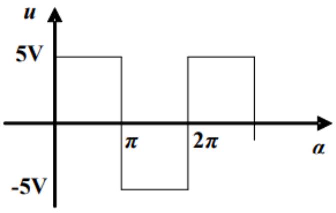
Conjunto solución: $2216939 < u < 5873339$

Volviendo a la variable: $1489 < \omega < 2423.5$ ∴ $237\ Hz < f < 385.7\ Hz$

Ejercicio 08

Resuelto en Moodle!

Ejercicio 09



Esta función periódica claramente tiene un valor medio de 0

Tiene un período $T = 2\pi$ la vemos como función impar

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} 5\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} -5\,dt\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left(5\pi - 5\,(2\pi - \pi)\right) = \frac{1}{2\pi}\,(5\pi - 5\pi) = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 5\cos(nt)\,dt - \int_{\pi}^{2\pi} 5\cos(nt)\,dt\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{5\,\left(sen(n\pi) - sen(0)\right)}{n} - \frac{5\,\left(sen(2n\pi) - sen(n\pi)\right)}{n}\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,sen(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 5\,sen(nt)\,dt - \int_{\pi}^{2\pi} 5\,sen(nt)\,dt\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-5\,(\cos(n\pi) - \cos(0))}{n} + \frac{5\,(\cos(2n\pi) - \cos(n\pi))}{n}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-5\cos(n\pi) + 5 + 5 - 5\cos(n\pi)}{n}\right) = \frac{10}{\pi}\left(\frac{1 - \cos(n\pi)}{n}\right)$$

$$b_1 = \frac{10}{\pi}\,(1+1) = \frac{20}{\pi} \qquad b_2 = \frac{10}{\pi}\left(\frac{1-1}{2}\right) = 0 \qquad b_3 = \frac{10}{\pi}\left(\frac{1+1}{3}\right) = \frac{20}{3\pi}$$

$$b_4 = \frac{10}{\pi}\left(\frac{1-1}{4}\right) = 0 \qquad b_5 = \frac{10}{\pi}\left(\frac{1+1}{5}\right) = \frac{20}{5\pi} = \frac{4}{\pi}$$

$$u(t) = a_0 + a_1\cos(t) + a_2\cos(2t) \ldots + b_1\,sen(t) + b_2\,sen(t) \ldots$$

$$u(t) = \frac{20}{\pi}\,sen(t) + \frac{20}{3\pi}\,sen(3t) + \frac{4}{\pi}\,sen(5t) \ldots$$

Así queda la gráfica con sólo 5 terminos: