Teoría necesaria para resolver los ejercicios

PUNTOS HOMÓLOGOS (PH)

Representan una característica **geométrica**[1] de un circuito acoplado magnéticamente. Indican de qué forma están enrolladas las bobinas sobre el núcleo y cuáles pares tienen la misma **polaridad instantánea de tensión.** Además, evitan dibujar el núcleo de hierro.

ELIMINACIÓN DE VARIABLES MAGNÉTICAS

Se evita trabajar con flujo magnético, en su lugar usamos tensión y corriente.

Tensión en una bobina: $u(t) = L\frac{di}{dt}$

FEM inducida (Faraday): $u(t) = N\frac{d\phi}{dt}$

∴ **Autoinductancia:** $\boldsymbol{L = N\frac{\phi}{i}}$

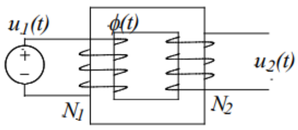
e indica que $\boldsymbol{u_2}$ depende de $\boldsymbol{i_1}$ a través de una constante ***M****, llamada* ***inductancia mutua***

Recordando la expresión:

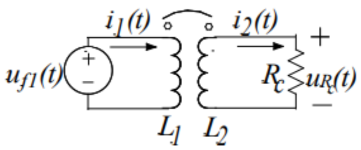
$$u_2(t) = N_2\frac{d\phi(t)}{dt}$$

que se puede reescribir

$$u_2(t) = M\frac{di_1(t)}{dt}$$

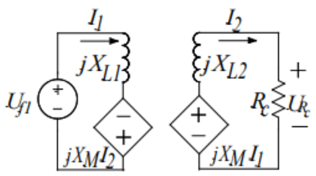


$$M = N_2\frac{\phi}{i_1}$$



$$\underline{U}_{f1} = j\omega L_1\underline{I}_1 - j\omega M\underline{I}_2 = jX_{L1}\underline{I}_1 - jX_M\underline{I}_2$$

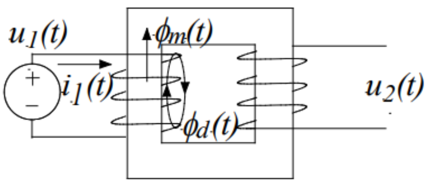
$$0 = j\omega L_2\underline{I}_2 + R_C\cdot\underline{I}_2 - j\omega M\underline{I}_1 = jX_{L2}\underline{I}_2 + R_C\cdot\underline{I}_2 - jX_M\underline{I}_1$$



$$\underline{U}_{f1} + jX_M\underline{I}_2 = jX_{L1}\underline{I}_1$$

$$jX_M\underline{I}_1 = jX_{L2}\underline{I}_2 + R_C\cdot\underline{I}_2$$

COEFICIENTE DE ACOPLAMIENTO (K)



$$\phi_1 = \phi_m + \phi_d$$

$$\phi_{m1} = k_1\phi_1 \quad y \quad \phi_{m2} = k_2\phi_2$$

$$\phi_{d1} = \sigma_1\phi_1 \qquad \phi_{d2} = \sigma_2\phi_2$$

con $\boldsymbol{k + \sigma = 1}$

ϕ_m es el flujo magnético, y ϕ_d es el de dispersión

σ es el factor de dispersión, y junto a **k**, ambos son dependientes de la **geometría del sistema** [0, 1]

Obviamente, cuando menos dispersión, **k** tiende a 1

$$M^2 = \frac{N_2\phi_{m1}}{i_1}\cdot\frac{N_1\phi_{m2}}{i_2}$$

$$M = k\sqrt{L_1\cdot L_2}$$

[1] Significa que no depende de la corriente ni tensión aplicada

RELACIÓN DE TRANSFORMACIÓN (a)

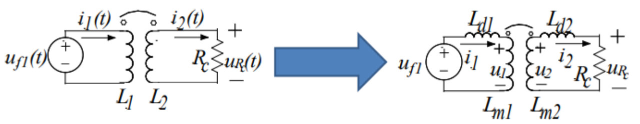
la relación de $u_1(t) = N_1 \dfrac{d\phi(t)}{dt}$ *y* $u_2(t) = N_2 \dfrac{d\phi(t)}{dt}$ *a través del flujo, origina* $a = \dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{u_1}{u_2}$

SEPARACIÓN DE LA INDUCTANCIA (Lm y Ld)

$$L_1 = \frac{N_1\phi_1}{i_1} = \frac{N_1\phi_{d1}}{i_1} + \frac{N_1\phi_{m1}}{i_1} = L_{d1} + L_{m1} \qquad y \qquad L_2 = \frac{N_2\phi_2}{i_2} = \frac{N_2\phi_{d2}}{i_2} + \frac{N_2\phi_{m2}}{i_2} = L_{d2} + L_{m2}$$

MODELO CONDUCTIVO DEL TRANSFORMADOR

Se pueden separar las inductancias de dispersión y de magnetización



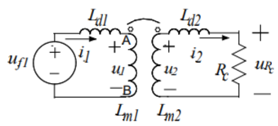
A partir de dicha separación se pueden reescribir las ecuaciones del sistema

$$\underline{U}_{f1} = j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{U}_{f1} = j\omega L_{d1}\underline{I}_1 + j\omega L_{m1}\underline{I}_1 - j\omega M I_2$$

$$0 = j\omega L_2 \underline{I}_2 + R_C \cdot \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1 \qquad \qquad 0 = j\omega L_{d2}\underline{I}_2 + j\omega L_{m2}\underline{I}_2 + \underline{I}_2 \cdot R_C - j\omega M \underline{I}_1$$

Debe tenerse en cuenta que, en esta condición, el acoplamiento entre ***L_{m1}*** *y* ***L_{m2}*** *es* ***perfecto*** *o* ***ideal****, es decir* ***k=1***

Se busca obtener la ***admitancia equivalente*** *vista desde AB hacia la derecha*



$$u_{AB}(t) = u_1(t) = L_{m1}\frac{di_1(t)}{dt} - M\frac{di_2(t)}{dt}$$

$$M\frac{di_1}{dt} = L_{m2}\frac{di_2}{dt} + L_{d2}\frac{di_2}{dt} + i_2 \cdot R_C$$

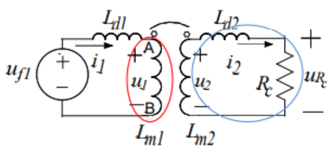
$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_1 = j\omega L_{m1}\underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{U}_1 = jX_{m1}\underline{I}_1 - jX_M \underline{I}_2$$

$$j\omega M \underline{I}_1 = j\omega L_{m2}\underline{I}_2 + j\omega L_{d2}\underline{I}_2 + R_C \underline{I}_2 \qquad \qquad jX_M \underline{I}_1 = jX_{m2}\underline{I}_2 + jX_{d2}\underline{I}_2 + R_C \underline{I}_2$$

Recordando la expresión de ***M*** *en función de* ***L_{m1}*** *y* ***L_{m2}*** *(para acoplamiento perfecto)*

$$M = \sqrt{L_{m1} \cdot L_{m2}} \quad \Rightarrow \quad M^2 = L_{m1} \cdot L_{m2} \quad \xrightarrow{\text{multiplicando por } \omega^2 \text{ a ambos lados del igual}} \quad X_M{}^2 = X_{L_{m1}} \cdot X_{L_{m2}}$$

Operando matemáticamente para obtener la ***admitancia*** *vista desde* ***AB*** *y ordenando*



$$\underline{Y}_{AB} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} = \frac{1}{jX_{m1}} + \frac{1}{a^2\left(jX_{d2} + R_C\right)}$$

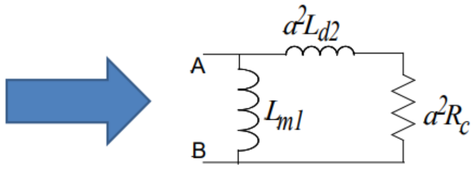
$$con \qquad a^2 = \frac{X_1}{X_2} = \frac{k \cdot X_1}{k \cdot X_2} = \frac{X_{m1}}{X_{m2}}$$

$$\underline{Y}_{AB} = \frac{1}{jX_m} + \frac{1}{R_C a^2 + jX_{d2}a^2}$$

Inductancia de valor ***L_{m1}***

Resistencia de valor ***R_C*** *en serie con inductancia de valor* ***L_{d2}***

Ambos elementos están en paralelo

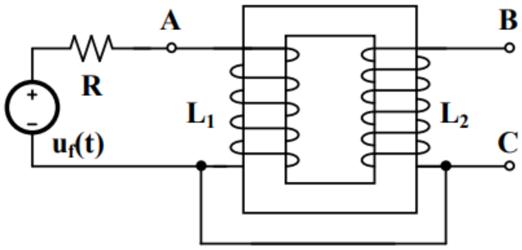


Circuito equivalente conductivo visto desde ***AB***

Espacio para observaciones:

Ejercicio 01, según Wikipedia: se denomina **acoplamiento magnético** al fenómeno físico por el cual el paso de una corriente eléctrica variable en el tiempo por una bobina produce una diferencia de potencial entre los extremos de las demás bobinas del circuito.

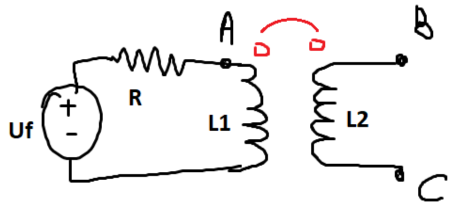
Puntos homólogos, su característica geométrica y polaridad de tensión ya explicado



Ejercicio 02. Los puntos homólogos se pueden establecer según por donde comienza, en cada lado, el arrollamiento. Por ejemplo en este caso, ambos comienzan arriba: PH alineados horiz.

El cable que conecta los bobinados está de adorno ya que el circuito derecho está abierto

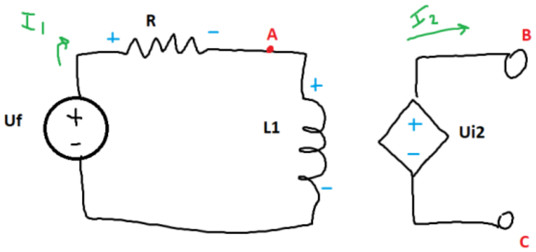
cuyos datos son **U_f = 10V**, **R = 1Ω** y **f = 50Hz**. Además, **L_1 = L_2 = 3,2mH** y **k = 0,8**.



$$M = k\sqrt{L_1\,L_2} = 0.8 * 3.2\,mH = 2.56\,mH$$

$$\omega = 2\pi f = 314\,rad/s \qquad X_M = \omega\,M = 0.8\,\Omega$$

$$X_{L1} = \omega\,L_1 = 1\,\Omega \qquad X_{L2} = \omega\,L_2 = 1\,\Omega$$



Ubicar fuentes controladas para representar la autoinductancia mutua, la polaridad se define según los PH (notar que hay 2 colores)

$$U_f = I_1\,(R + jX_{L1})$$

$$U_{i2} = I_1\,jX_M$$

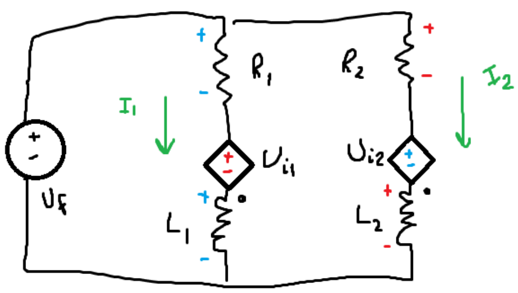
Despejando: $I_1 = \frac{U_f}{R+jX_{L1}} = \frac{10\,V}{1+j1\,\Omega} = \frac{10\,e^{j0°}\,V}{\sqrt{2}\,e^{j45°}\,\Omega} = 5\sqrt{2}\,e^{-j45°}A$

Primera tensión: $U_A = U_f - I_1 * R = 10 - 5\sqrt{2}\,e^{-j45°} = 10 - (5 - j5) = 5 + j5\,V$

Segunda tensión: $U_B = U_{i2} = I_1\,jX_M = 5 * 0.8\sqrt{2}\,e^{j45°} = 4\sqrt{2}\,e^{j45°} = 4 + j4\,V$

Tensión buscada: $U_{AB} = U_A - U_B = (5-4) + j(5-4) = 1 + j1\,V = \sqrt{2}\,e^{j45°}\,V$

EJERCICIO 3



$$M = k\sqrt{L_1 * L_2} = 0.7\sqrt{1*2} = 0.7\sqrt{2}\,H$$

$$\omega = 2\pi f = 314\,rad/s \qquad U_f = j120\,V$$

$$X_M = \omega M = 220\sqrt{2}\,\Omega$$

$$X_{L1} = \omega\,L_1 = 314\,\Omega$$

$$X_{L2} = \omega\,L_2 = 628\,\Omega$$

$$R_1 = R_2 = 50\,\Omega$$

Aplicando 2LK:

$U_f = I_1\,(R_1 + jX_{L1}) + I_2\,jX_M \qquad \wedge \qquad U_f = I_2\,(R_2 + jX_{L2}) - I_1\,jX_M$

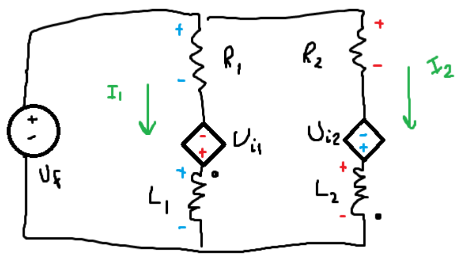
$$\begin{pmatrix} 50 + j314 & j220\,\sqrt{2} \\ j220\,\sqrt{2} & 50 + j628 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j120 \\ j120 \end{pmatrix}$$

Resolviendo por Octave: $I_1 = 0.354129\, e^{j16.6°}\, A$

$I_2 = 0.055322\, e^{-j61°}\, A$

La tensión pedida es: $U_{R2} = I_2 * R_2 = 2.8\, e^{-j61°}\, V$

parte 2 – invertir uno de los bobinados



$U_f + I_2\,jX_M = I_1\,(R_1 + jX_{L1})$

$U_f + I_1\,jX_M = I_2\,(R_2 + jX_{L2})$

$$\begin{pmatrix} 50 + j314 & -j220\,\sqrt{2} \\ -j220\,\sqrt{2} & 50 + j628 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j120 \\ j120 \end{pmatrix}$$

Resolviendo por Octave: $I_1 = 1.0389\, e^{j22.65°}\, A \qquad I_2 = 0.6927\, e^{j21.12°}\, A$

La tensión pedida es: $U_{R2} = I_1 * R_2 = 52\, e^{j22.65°}\, V$

El resultado de la guía me da solamente si confundo I1 con I2 a la hora de reemplazar

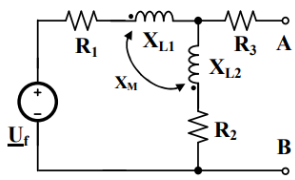
El resultado real es: $U_{R2} = I_2 * R_2 = 34.64\, e^{j21.12°}\, V$

d) Al quedar los puntos homólogos “opuestos”, la reactancia mutua aporta tensión (¿?)

e) ¿Qué acaso no había que resolverlo así? ._. xd

EJERCICIO Nº 04:

El circuito de la figura muestra una conexión particular de dos bobinas acopladas magnéticamente, llamada *autotransformador*. Los valores de los elementos son: $\underline{U}_f = 10\,/\underline{0°}$ V, $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 4\,\Omega$, $R_3 = 3\,\Omega$, $X_1 = 10\,\Omega$, $X_2 = 5\,\Omega$ y $X_M = 6\,\Omega$.

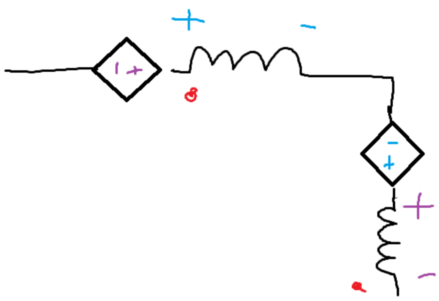


a) Plantear, sin reemplazar valores numéricos, las ecuaciones que describen el funcionamiento del circuito. Explicar cómo se obtienen los signos de los términos que representan las tensiones inducidas en dichas expresiones.

b) A partir del resultado anterior, determinar la expresión de la tensión entre **A** y **B** y calcular su valor. No olvidar explicar todos los pasos seguidos.

$U_f - I_1\,R_1 - I_1\,jX_{L1} - I_2\,jX_{L2} - I_2\,R_2 + I_1\,jX_M + I_2\,jX_M = 0$

Para el circuito abierto: $I_1 = I_2 = I$



$$U_f = I\,(R_1 + jX_{L1} + jX_{L2} + R_2 - 2\,jX_M)$$

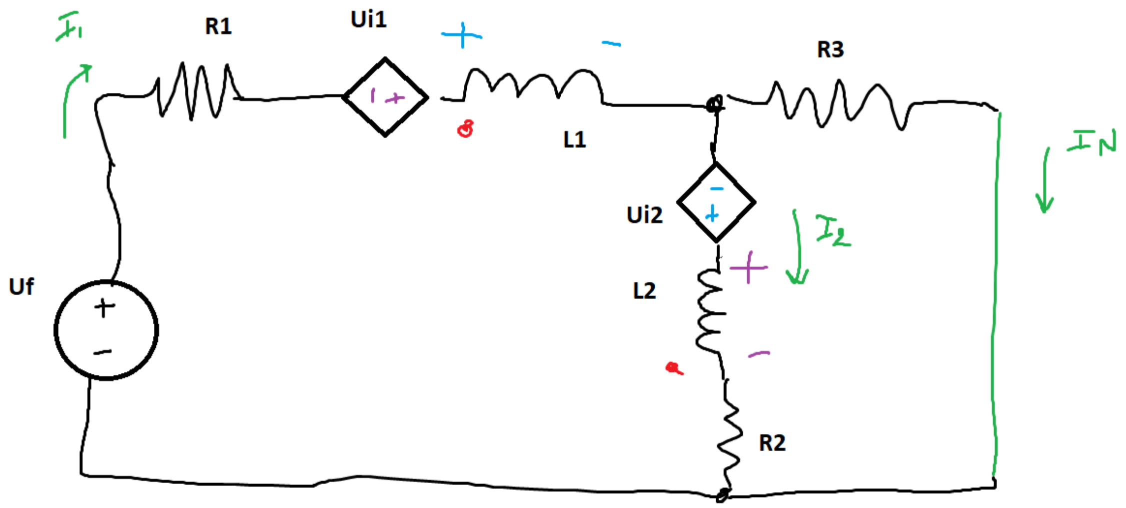
$$\boldsymbol{I} = \frac{U_f}{R_1 + jX_{L1} + jX_{L2} + R_2 - 2\,jX_M} = \frac{10\,e^{j0°}\,V}{8 + j3\,\Omega} = \frac{10\,e^{j0°}\,V}{8.54\,e^{j20.56°}\,\Omega} = 1.17\,e^{-j20.56°}\,A$$

La tensión pedida: $U_{AB} = U_A = I\,R_2 + I\,jX_{L2} - I\,jX_M + 0$

$$U_{AB} = I\,(R_2 + jX_{L2} - jX_M) = 1.17\,e^{-j20.56°} * 4.12\,e^{-j14°}\,V$$

$$U_{AB} = 4.82\,e^{-j34.56°}\,V$$

Inciso c: determinar el equivalente de Norton entre los puntos A y B



$$I_2\,R_2 + I_2\,jX_{L2} - I_1\,jX_M = I_N\,R_3 \qquad \wedge \qquad I_1 = I_2 + I_N$$

$$U_f - I_1\,R_1 + I_2\,jX_M - I_1\,X_{L1} - I_N\,R_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -jX_M & R_2 + jX_{L2} & -R_3 \\ 1 & -1 & -1 \\ R_1 + X_{L1} & -jX_M & R_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -j6 & 4 + j5 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 + j10 & -j6 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Resolviendo por Octave: $I_N = 0.5592\,e^{-j83.4°}\,A$ (se acercó bastante)

Impedancia de Norton: $Z_N = \frac{U_{AB}}{I_N} = \frac{4.82\,e^{-j34.56°}\,V}{0.5592\,e^{-j83{,}4°}\,A} = 8.6195\,e^{j48.84°}\,\Omega$

Admitancia de Norton: $Y_N = \frac{1}{Z_N} = \frac{I_N}{U_{AB}} = 0.1160\,e^{-j48.84°}\,S$

EJERCICIO 5

Pérdidas por efecto Joule: por lo que me acuerdo son las pérdidas de calor producidas en el conductor, las cuales dependen de la sección del mismo y la corriente que circula.

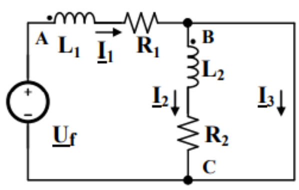
Devanado primario: el que está del lado "fuente". El secundario es del lado "consumo".

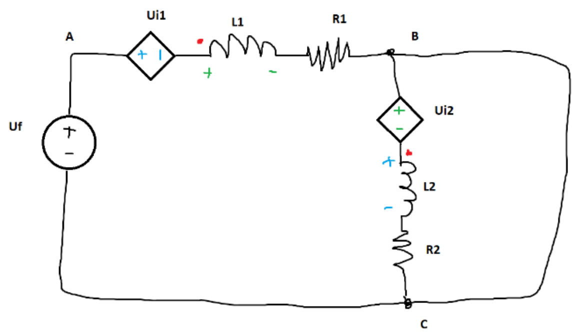
Se tiene: $\phi_m = k\,\phi$ $\quad L = N\frac{\phi}{I} = L_m + L_d \quad$ $\phi = \phi_m + \phi_d$

donde: $L_m = N\frac{\phi_m}{I}$ $\quad L_d = N\frac{\phi_d}{I} \quad$ $M = k\sqrt{L_1 * L_2}$

$$k = \frac{\phi_m}{\phi} = \frac{L_m\,I}{N} * \frac{N}{L * I} = \frac{L_m}{L} \quad \therefore \quad L_m = k\,L \quad \wedge \quad L_d = L - kL = (1-k)\,L$$

EJERCICIO 6 – ADICIONAL





Los datos son $\underline{U}_f$ = 220 V; f = 50 Hz; L_1 = 0,1 H; R_1 = 10 Ω; L_2 = 0,05 H; R_2 = 5 Ω y k = 0,5.

$\omega = 2\pi\,f \qquad M = k\sqrt{L_1\,L_2} \qquad X_L = \omega\,L \qquad X_M = \omega\,M$

$U_A = U_f \qquad U_B = 0$ (tomando el camino del cortocircuito) $\qquad U_C = U_{ref} = 0$

$U_f - I_2\,jX_M - I_1\,(R_1 + jX_{L1}) = 0 \qquad I_2\,(R_2 + jX_{L2}) + I_1\,jX_M = 0 \qquad I_1 = I_2 + I_3$

Inciso b) Determinar la impedancia que ve la fuente independiente.

$$\begin{pmatrix} R_1 + jX_{L1} & jX_M \\ jX_M & R_2 + jX_{L2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = 3.6464 - j7.2169\,A = 8.0858\,e^{-j63.19^\circ}\,A$$

$$I_2 = -3.8161 + j3.8884\,A = 5.4481\,e^{j134.46^\circ}\,A$$

$$Z_{eq} = \frac{U_{AC}}{I_1} = \frac{U_A}{I_1} = \frac{U_F}{I_1} = \frac{220\,e^{j0^\circ}\,V}{8.0858\,e^{-j63.19^\circ}\,A} = 27.2\,e^{j63.19^\circ}\,\Omega$$

Inciso c) Repetir anterior si $k = 0$ $\therefore$ $M = 0$ $\therefore$ $X_M = 0$

$$\begin{pmatrix} R_1 + jX_{L1} & 0 \\ 0 & R_2 + jX_{L2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = \frac{U_F}{R_1 + j\omega L_1} \qquad I_2 = \frac{0}{R_2 + j\omega L_2} = 0\ A$$

$$Z_{eq} = \frac{U_{AC}}{I_1} = \frac{U_f}{I_1} = \frac{U_f * (R_1 + j\omega L_1)}{U_f} = R_1 + j\omega L_1 = 32.96\ e^{j72.3°}\ \Omega$$

Inciso d) Repetir pero ahora $k = 1$ $\therefore$ $M = \sqrt{L_1\ L_2} = 0.0707\ H$

$$\begin{pmatrix} R_1 + jX_{L1} & jX_M \\ jX_M & R_2 + jX_{L2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = 11.272 - j1.707\ A = 11.4005\ e^{-j8.61°}\ A$$

$$I_2 = -15.172 - j2.415\ A = 15.3630\ e^{-j170.96°}\ A$$

$$Z_{eq} = \frac{U_f}{I_1} = \frac{220\ e^{j0°}\ V}{11.4005\ e^{-j8.61°}\ A} = 19.3\ e^{j8.61°}\ \Omega$$

Inciso e) Revisar si en los incisos anteriores la corriente I_2 supera los 20 A (RMS)

- Para k=0.5, el módulo de I_2 es $5.4\ A$ — no hay problema
- Para k=0, el módulo de I_2 es 0 — obvio no hay problema
- Para k=1, el módulo de I_2 es $15.4\ A$ — no hay problema, pero se acerca!

Conclusión: para este caso, al mejorar el acoplamiento hay una mayor intensidad en L_2