ELECTROTECNIA Y ELECTRÓNICA

(Mecánica - Electromecánica - Computación)

TRABAJO DE APLICACIÓN Nº 06

Preparado por: Ing. Pablo Morcelle del Valle, Ing. Augusto Cassino, Ing. Guillermo Renzi.

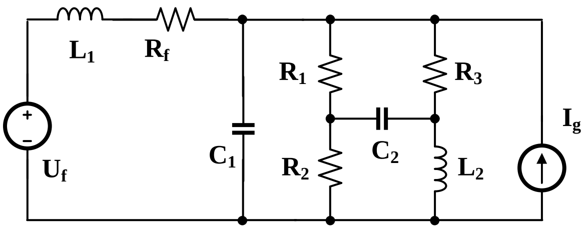
Actualizado por: Ing. Fabián Blassetti, Ing. Gustavo Adgi Romano, Ing. Mónica González

RESPUESTA TEMPORAL DE CIRCUITOS

Respuestas transitoria, permanente y completa. Respuestas natural y forzada. Análisis de circuitos con combinaciones **R L**, **R C** y **R L C**. Constante de tiempo y frecuencia propia de oscilación. Estudio de distintos casos con fuentes de tensión y de corriente, de continua y de alterna.

REPASAR: Circuitos en corriente continua y en alterna. Métodos de resolución de circuitos. Solución de ecuaciones diferenciales (homogénea, particular, completa).

EJERCICIO Nº 01:



En el circuito de la figura $\mathbf{U_f}$ = 30V, $\mathbf{I_g}$ = 2A, $\mathbf{R_1}$ = 60Ω, $\mathbf{R_2}$ = 60Ω, $\mathbf{R_3}$ = 120Ω, $\mathbf{R_f}$ = 30Ω, $\mathbf{L_1}$ = 50mH, $\mathbf{L_2}$ = 2H, $\mathbf{C_1}$ = 100mF y $\mathbf{C_2}$ = 100mF.

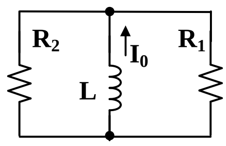
a) Suponiendo que todos los componentes se encuentran descargados en el momento en que se energiza el circuito. ¿Cuál es el comportamiento inicial de cada componente? Calcular las tensiones y corrientes de cada inductor y capacitor respectivamente.

RESPUESTA: $U_{L1} = U_f$; $U_{L2} = 0$; $I_{C1} = I_g$; $I_{C2} = 0$.

b) Si se supone que el circuito se encuentra en estado permanente desde hace tiempo. Calcular las corrientes y tensiones de cada inductor y capacitor respectivamente. Obtener la energía almacenada en cada uno de ellos.

RESPUESTA: I_{L1} = 1A; I_{L2} = 0,5A ; U_{C1} = 60V ; U_{C2} = 30V. W_{L1} = 25mJ; W_{L2} = 250mJ ; W_{C1} = 180J ; W_{C2} = 45J.

EJERCICIO Nº 02:



En el circuito de la figura la corriente inicial del inductor (en $\boldsymbol{t = 0}$) es $\mathbf{I_0}$ = 20A. Además: $\mathbf{R_1}$ = 6Ω, $\mathbf{R_2}$ = 3Ω, **L** = 2H.

a) Calcular la energía que el inductor tiene almacenada inicialmente.

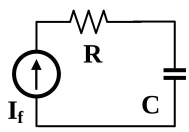
RESPUESTA: 400J.

b) Determinar el estado permanente del circuito y luego analizar y graficar en forma cualitativa cómo evolucionará la corriente del inductor en función de las propiedades del mismo.

c) Suponiendo que la corriente en el inductor para $\boldsymbol{t > 0}$ es $20 \cdot e^{-t} A$. Calcular la tensión en el inductor y las corrientes en las resistencias $\mathbf{R_1}$ y $\mathbf{R_2}$.

RESPUESTA: $u(t) = 40 \cdot e^{-t} V$ (positivo arriba)

EJERCICIO Nº 03:



En el circuito de la figura: $\mathbf{I_f}$ = 1,5A, **R** = 5Ω, **C** = 200mF.

a) Suponiendo que el capacitor se encuentra inicialmente descargado, determinar y graficar la tensión entre $\boldsymbol{t = 0}$ y $\boldsymbol{t = 2s}$.

RESPUESTA: $u_c(t) = 7{,}5 \cdot t\, V$

b) Determinar el valor de la tensión en $\boldsymbol{t = 2s}$.

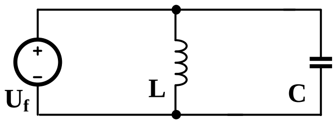
RESPUESTA: $u_c(2) = 15\, V$

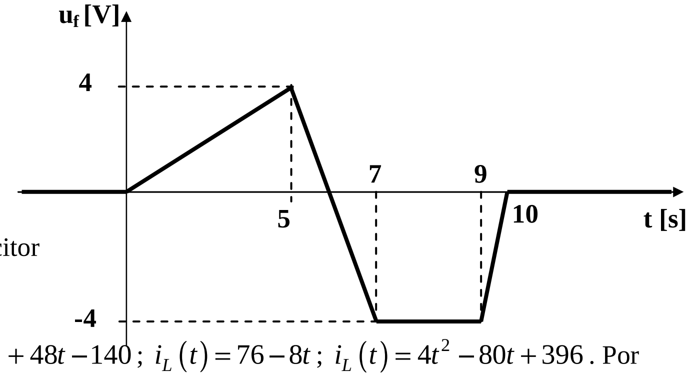
c) Determinar para qué valor de tiempo la tensión en la fuente es de 97,5V.

RESPUESTA: t = 13s

EJERCICIO Nº 04:

En el circuito de la figura **L** = 500mH, **C** = 200mF y la tensión de la fuente tiene la siguiente forma de onda:





a) Determinar y graficar la corriente en el inductor, el capacitor y la fuente.

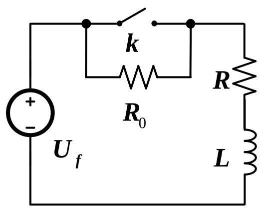
RESPUESTA: por tramo en L: $i_L(t) = 0{,}8 \cdot t^2$; $i_L(t) = -4t^2 + 48t - 140$; $i_L(t) = 76 - 8t$; $i_L(t) = 4t^2 - 80t + 396$. Por tramo en C: $i_C(t) = 0{,}16A$; $i_C(t) = -0{,}8A$; $i_C(t) = 0$; $i_C(t) = 0{,}8A$

b) Observar en qué momentos se desarrollan los cambios bruscos de corriente en el capacitor. Sacar conclusiones al respecto.

RESPUESTA: Cada vez que cambia la pendiente de la tensión.

EJERCICIO Nº 05:

En el circuito de la figura. La llave ha permanecido abierta durante mucho tiempo. En t = 0 se cierra el interruptor. U_f = 120 V, R = 30 Ω, R_0 = 30 Ω, L = 90 mH.



a) Realizar un análisis cualitativo (sin plantear ecuaciones) indicando cómo debería evolucionar la corriente en el inductor luego del cierre de la llave, es decir en el intervalo 0<t<+∞. Graficar en forma aproximada, explicando cómo se obtiene dicho gráfico.
b) Obtener la expresión matemática de la corriente sin resolver la ecuación diferencial y reemplazar valores.

RESPUESTA: $i_L(t) = 2 + 2\left(1 - e^{-t/3ms}\right)$ A.

c) Determinar las tensiones en los elementos luego del cierre de la llave. Explicar y graficar las funciones obtenidas.

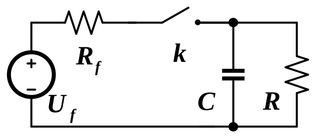
RESPUESTA: $u_R(t) = 60 + 60\left(1 - e^{-t/3ms}\right)$; $u_L(t) = 60 \cdot e^{-t/3ms}$; $u_{R0}(t) = 0$

d) Descomponer los resultados de b) y c) en sus componentes forzada y libre.
e) Calcular el valor de la corriente para t = 2,08 ms y para qué valor de tiempo la tensión en la inductancia es de 11,33V.

RESPUESTA: $i_L(2{,}08ms) = 3A$; $t = 5ms$

EJERCICIO Nº 06:

En el circuito de la figura: $U_f = 10\,V$, $R_f = 100\,\Omega$, $C = 100\,\mu F$ y $R = 100\,\Omega$. Las condiciones iniciales son nulas y la llave se encuentra abierta hace mucho tiempo.



a) ¿Qué significa en este caso que las condiciones *son nulas*?
b) ¿Qué implicancia tiene que la llave haya estado abierta durante mucho tiempo?
c) En el momento de cierre de la llave ¿cuánto valen i_{Rf} e i_R? Explicar justificando la respuesta.

RESPUESTA: $i_{Rf}(0) = 100mA$; $i_R(0) = 0$.

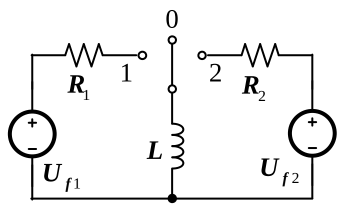
d) Explicar cómo se determinan las respuestas forzada y libre de la tensión en **C**. Graficar.
e) ¿Cuál es la expresión de $i_C(t)$ y cómo se determina dicha expresión? Explicar y graficar.

RESPUESTA: $i_C(t) = 100mA \cdot e^{-t/5ms}$

f) Indicar, justificando, a partir de qué momento se puede considerar el circuito en régimen permanente. Calcular t para dicha condición.

RESPUESTA: $t = 25ms$

EJERCICIO Nº 07:



En el circuito de la figura: $U_{f1} = 40\,V$, $U_{f2} = 10\,V$, $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$ y $L = 0{,}1\,H$.

La bobina se encuentra "descargada" y la llave está inicialmente en una posición intermedia entre 1 a la 2.

a) ¿Qué significa que la bobina se encuentre "descargada"?

Ahora la llave se conecta en la posición 1 ($t = 0$).

b) Analizar cualitativamente el funcionamiento del circuito en esta condición y explicar, con el auxilio de un gráfico aproximado, cómo resulta la corriente a partir de $t = 0$.

c) Obtener la expresión de la corriente y de las tensiones en todos los elementos del circuito activo y graficar fundamentando la respuesta.

RESPUESTA: $i_L(t) = 4A \cdot \left(1 - e^{-t/10ms}\right)$

En $t = 30\,ms$ la llave pasa *instantáneamente* de 1 a 2 (¿Qué significa *instantáneamente*? Pensar por qué *debe* ser así).

d) Repetir b) y c) para esta nueva situación.

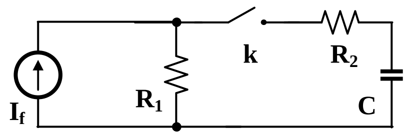
RESPUESTA: $i_L(t) = 3{,}8 - 3{,}3 \cdot \left(1 - e^{-t/5ms}\right) A$

e) Para todos los casos anteriores reconocer las componentes libre y forzada y escribir sus expresiones matemáticas. Acompañar la respuesta con gráficas.

f) Suponiendo que el circuito se energiza con la llave en 1. Calcular para qué tiempo debe conmutarse la llave a 2 para que no exista transitorio en el inductor. Explicar qué implicancia tiene el hecho de que "no exista régimen libre".

RESPUESTA: $t = 1{,}335ms$

EJERCICIO Nº 08:



En el circuito de la figura: I_f = 1 A, R_1 = 10 Ω, R_2 = 20 Ω y C = 250 mF. El capacitor tiene una tensión inicial de -8 V. En $t = 0$ se cierra la llave.

a) En el preciso instante de cierre de la llave ¿cuánto valen las tensiones en todos los elementos del circuito? Explicar justificando la respuesta.

RESPUESTA: $u_c(0)$ = -8 V, $u_{R1}(0)$ = 4 V, $u_{R2}(0)$ = 12 V.

b) ¿Cuál es la expresión de $u_c(t)$ para t > 0 y cómo se determina dicha expresión? Explicar y graficar.

RESPUESTA: $u_c(t) = -8 + 18 \,.\, (1-e^{-t/7,5\,s})$ V.

c) Completar la resolución escribiendo y graficando las expresiones de las tensiones en todos los elementos.

RESPUESTA: $u_{R2}(t) = 12 \,.\, e^{-t/7,5\,s}$ V, $u_{R1}(t) = 10 - 6 \,.\, e^{-t/7,5\,s}$ V

EJERCICIO Nº 09:

Una tensión alterna senoidal de amplitud **10 V** y frecuencia **50 Hz** se aplica a un circuito serie *RL* (**R** = 10 Ω y **L** = 31,85 mH), cuando pasa por su máximo positivo.

a) Explicar el procedimiento que permite conocer la corriente en el circuito a partir del momento de aplicación de la tensión. Determinar la expresión de dicha corriente.

SUGERENCIA: Observar que en presencia de fuentes de alimentación senoidal los regímenes forzados son señales senoidales. No olvidar trabajar con las componentes natural y permanente.

RESPUESTA: $i_L(t) = 0{,}5 \cdot e^{-t/3{,}2ms} + 0{,}71 \cdot sen\left(\omega t - 45^o\right) A$

b) Graficar la tensión aplicada y la corriente resultante e indicar, justificando, a partir de qué momento se puede considerar el circuito en régimen permanente.

RESPUESTA: $t \cong 16ms$

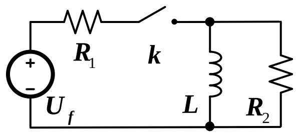
c) Repetir a) y b) si **R** = 2 Ω. Comparar resultados y comentar.

RESPUESTA: $i_L(t) = 0{,}96 \cdot e^{-t/16ms} + 0{,}98 \cdot sen\left(\omega t - 79^o\right) A$; $t \cong 80ms$

EJERCICIOS ADICIONALES

Sugerencia: Resolver todos los ejercicios siguiendo las pautas establecidas para los ejercicios anteriores: No dar por hechos u obvios suposiciones o afirmaciones, nada debe darse por implícito. Plantear, explicar, justificar, respetar la nomenclatura y simbología. En este caso, el hábito hace al monje.

EJERCICIO Nº 10:



Para el circuito de la figura $U_f = 12\,V$, $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 5\,\Omega$ y $L = 0{,}4\,H$.

a) Determinar $i_{R_2}(t)$ antes y después de cerrar la llave explicando paso a paso. Graficar.

RESPUESTA: Antes: $i_{R2}(t) = 0A$. Después: $i_{R2}(t) = 0{,}8 \cdot e^{-t/120ms} A$

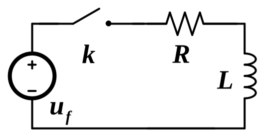
b) Para qué valor de tiempo la corriente en la fuente vale 1A.

RESPUESTA: $t \cong 83ms$

c) Si luego de alcanzado el estado permanente se vuelve a abrir la llave. ¿Cómo resulta la corriente en el inductor? Explicar y graficar.

RESPUESTA: $i_{R2}(t) = 1{,}2 \cdot e^{-t/80ms} A$

EJERCICIO Nº 11:



El circuito de la figura representa el encendido de cierto artefacto de iluminación alimentado con tensión alterna senoidal. Los datos son: $U_{f\,max} = 311V$, $f = 50\,Hz$, $u_f(t) = U_{máx} \cdot sen(\omega t)$.

En $t = 0$ se cierra el interruptor k .

a) Determinar y graficar, en función de ωt las expresiones de las componentes de la corriente forzada, natural y total. Analizar.

RESPUESTA: Total:

$$i(t) = \frac{U_{f\,max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot \left[sen\left(arctg\left(\frac{\omega L}{R} \right) \right) \cdot e^{-t \cdot R/L} + sen\left(\omega t - arctg\left(\frac{\omega L}{R} \right) \right) \right] A$$

b) Graficar la corriente para dos juegos de valores de R y de L : $R = 58{,}54\,\Omega$, $L = 1{,}17\,H$ y para $R = 200\,\Omega$, $L = 1\,H$.

Determinar y comparar los valores máximos de la $i_T(\omega t)$ en cada caso.

RESPUESTA: $i(t) = 0{,}84 \cdot \left(1 - e^{-t/20ms}\right) \cdot sen(\omega t - 81^o)\,A$; $i(t) = 0{,}84 \cdot \left(1 - e^{-t/5ms}\right) \cdot sen(\omega t - 58^o)\,A$

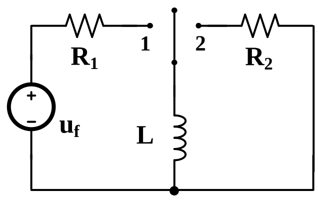
Se cambia nuevamente $R = 113\,\Omega$ y $L = 1{,}13\,H$.

c) Determinar el ángulo en que la corriente cruza por cero por primera vez.

SUGERENCIA: Recordar que en presencia de fuentes de alimentación senoidal los regímenes forzados son señales senoidales.

RESPUESTA: $t = 4ms$

EJERCICIO Nº 12:



En el circuito de figura: $u_f(t) = 100 \,.\, sen(314t)$ V, $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 5\,\Omega$ y L = 96 mH.

El inductor está inicialmente descargado y la llave se encuentra en una posición intermedia entre 1 y 2.

a) En las condiciones mencionadas la llave pasa al punto 1 cuando la tensión de la fuente pasa por cero creciendo. Realizar un análisis cualitativo del circuito observando el comportamiento del inductor, acompañando de un gráfico aproximado con las formas de onda si fuera necesario.

b) Obtener la expresión de la corriente y graficar $u_f(t)$ e $i_1(t)$. Explicar el procedimiento en forma detallada.

RESPUESTA: $i(t) = 3 \cdot e^{-t/0{,}0096} + 3{,}15 \cdot sen(314 \cdot t - 71{,}6°)A$ en sentido horario.

c) Cuando la tensión $u_f(t)$ pasa por su primer cruce por cero decreciendo la llave pasa a la posición 2. A partir de dicho instante se desea saber cuánto tiempo debe transcurrir para que la corriente en el inductor valga 1 A. Para ello, explicar cómo se procede para llegar al resultado, obteniendo la ecuación necesaria para conseguir el resultado pedido. Graficar la forma de onda de $i_L(t)$.

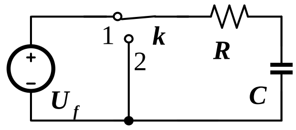
RESPUESTA: $t_{1A} = 2{,}68ms$; $i_L(t) = 4{,}05 \cdot e^{-t/0{,}00192} A$

EJERCICIOS RESUELTOS

Aclaración: Debe observarse que en la resolución de estos ejercicios se efectúan planteos, explicaciones, justificaciones, y nada se da por sobreentendido.

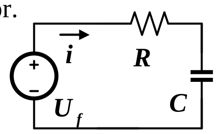
EJERCICIO Nº 13

En el circuito de la figura: $U_f = 10\,V$, $R = 10\,\Omega$, $C = 1000\,\mu F$. La llave k está en 2 desde $t = -\infty$, pasa a 1 en $t = 0$ y vuelve a 2 después de transcurridos 5τ.
Determinar y graficar la corriente y las tensiones en los elementos pasivos en función del tiempo de 0 hasta 10τ explicando paso a paso la resolución.



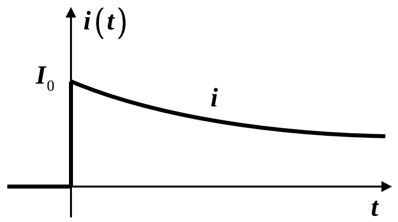
Si la llave está en 2 desde $t = -\infty$ entonces no existe corriente en el circuito ni carga en el capacitor (condiciones iniciales nulas). Luego la llave pasa a 1 y comienza a cargarse el capacitor.

El circuito que representa esta situación es el siguiente:



A medida que el capacitor se carga, su tensión tiende exponencialmente a la tensión de la fuente.
La corriente tiene un máximo (I_0) en $t = 0$, dado por el cociente U_f / R (ley de Ohm); esto es así, debido a que la condición inicial del capacitor es nula (la tensión a la cual está cargado es igual a cero, por lo tanto $u_C(0) = 0$).

A partir de $t = 0$, la corriente tiende a cero exponencialmente:



A continuación, la breve explicación ya expuesta, se detalla acompañada por la matemática asociada.

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff al circuito: $U_f = u_R + u_C = i \cdot R + \frac{1}{C}\int i \cdot dt$

Para poder resolver esta ecuación, la misma debe derivarse respecto del tiempo, con lo cual queda (recordar que la tensión de la fuente es continua): $0 = \frac{di}{dt} \cdot R + \frac{i}{C}$

La solución a esta ecuación tiene la siguiente forma: $i = k \cdot e^{-t/\tau}$

Como el capacitor está descargado inicialmente, $U_{C0} = 0$, entonces en el primer instante, toda la tensión de la fuente cae en el resistor. Entonces por ley de Ohm:

$i(t = 0) = \frac{U_f}{R} = I_0$, además se sabe que la constante de tiempo resulta: $\tau = RC$

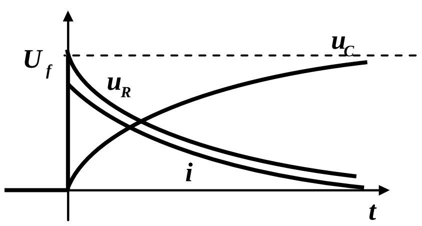
(“se sabe” que la constante de tiempo tiene ése valor, una vez resuelta la ecuación diferencial)

Finalmente se obtiene la función solución: $i = \frac{U_f}{R} \cdot e^{-t/RC}$. Esta forma de onda es válida hasta $t = 5\tau$ ya que en ese momento el circuito cambia de estado nuevamente (ver enunciado).

Además $u_R = i \cdot R = U_f \cdot e^{-t/\tau} = U_f \cdot e^{-t/RC}$, y como $U_f = u_R + u_C$, se puede determinar la tensión del capacitor por diferencia: $u_C = U_f - u_R = U_f - U_f \cdot e^{-t/\tau} = U_f \cdot \left(1 - e^{-t/RC}\right)$

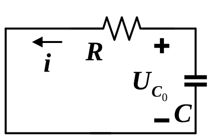
El mismo resultado se habría obtenido utilizando la relación constitutiva entre la tensión y la corriente en el capacitor.

Gráficamente:



Si en $t = 5\tau$ la llave vuelve a 2, se puede suponer sin cometer demasiado error en el cálculo que la componente transitoria se extinguió (recordar el criterio práctico que define la extinción del régimen transitorio), entonces el capacitor está completamente cargado a la tensión de la fuente, y el mismo comenzará a descargarse a través de la llave por el cortocircuito del punto 2.

El circuito que representa esta situación es el siguiente:



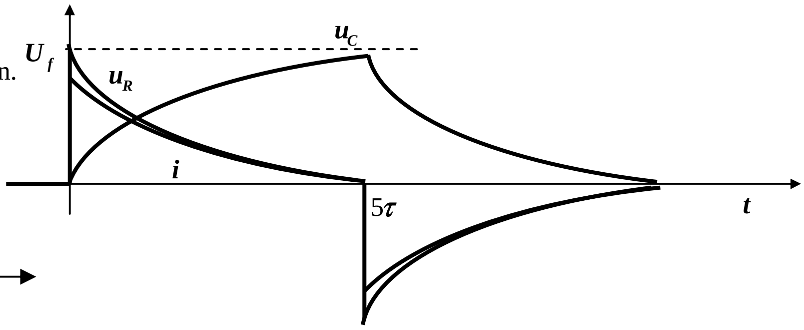
Aplicando 2LK: $0 = u_R + u_C$

$$0 = i \cdot R + \frac{1}{C}\int i \cdot dt$$

La misma función planteada anteriormente es solución.

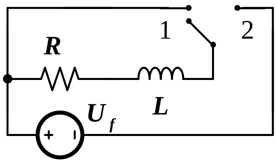
Resolviendo: $i = \frac{U_{C0}}{R} \cdot e^{-t/\tau} = \frac{U_f}{R} \cdot e^{-t/RC}$

Básicamente las expresiones son las mismas que en el caso anterior, pero con la salvedad que se observa en la siguiente gráfica:



EJERCICIO Nº 14

El circuito de la figura corresponde a un relé que se activa cuando la corriente por la bobina vale I_R. Inicialmente, la bobina está en condiciones nulas. Los datos son $I_R = 400\ mA$, $U_f = 24\ V$, $R = 48\ \Omega$, $L = 150\ mH$.



a) Determinar cuánto tiempo tarda en operar el relé cuando la llave se conecta a 2 ($t = 0$).

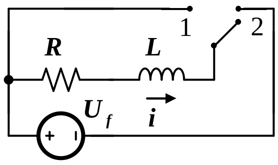
SUGERENCIA: Tener en cuenta que el relé "opera" cuando la corriente por la bobina vale I_R.

b) Después de mucho tiempo de operación, la llave vuelve a la posición 1.

c) Dibujar la forma de la corriente por la bobina para $t > 0$, indicando valores en el gráfico.

---

a) Si se suponen condiciones iniciales nulas (no hay corriente en la bobina), cuando la llave pasa a **2** el circuito resulta:



Aplicando la segunda ley de Kirchhoff: $U_f = u_R + u_L = i \cdot R + L \cdot \frac{di}{dt}$

La corriente total se puede separar en la componente permanente y la natural: $i_T(t) = i_n(t) + i_p(t)$

La componente permanente se puede determinar observando que el inductor se comporta como un cortocircuito en continua (que corresponde al régimen permanente), por lo tanto: $i_p = \frac{U_f}{R}$.

La componente natural es una forma de onda exponencial del tipo: $i_n = k \cdot e^{-t/\tau}$ donde $\tau = L/R$.

En $t = 0$: $i_T(t=0) = k + \frac{U_f}{R} = 0$

La corriente es nula debido a que la misma no puede variar a saltos en presencia de un inductor, además con las condiciones iniciales nulas resulta: $k = -\frac{U_f}{R} \quad \Rightarrow \quad i_n(t) = -\frac{U_f}{R} \cdot e^{-t/\frac{L}{R}}$

Por lo tanto: $i_T(t) = \frac{U_f}{R} \cdot \left(1 - e^{-t/\frac{L}{R}}\right)$

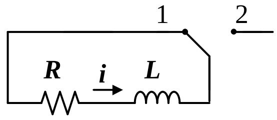
Si el relé opera cuando la corriente por la bobina supera el valor $\mathbf{I_R}$ entonces: $I_R = \frac{U_f}{R} \cdot \left(1 - e^{-t_{act}/\frac{L}{R}}\right)$

$$\Rightarrow \quad \frac{R}{U_f} \cdot I_R = \left(1 - e^{-t_{act}/\frac{L}{R}}\right) \quad \Rightarrow \quad -t_{act} \cdot \frac{R}{L} = ln\left(1 - \frac{R}{U_f} \cdot I_R\right) \quad \Rightarrow \quad t_{act} = -\frac{L}{R} \cdot ln\left(1 - \frac{R}{U_f} \cdot I_R\right)$$

El relé opera luego de transcurridos t_{act} segundos.

b) Luego de mucho tiempo, la corriente por el inductor vale: $i(t \to -\infty) = U_f / R = I_0$

Dado que, en estado permanente, la tensión del inductor en continua vale cero.



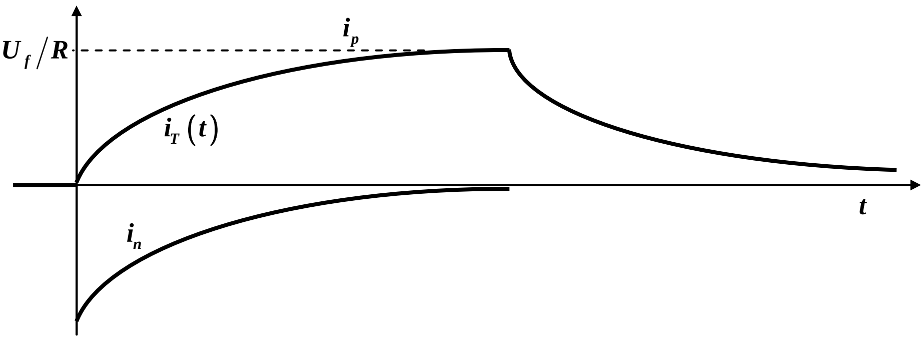
Si la llave pasa a 1, entonces el circuito resulta (la fuente queda desafectada):

La corriente comienza a disminuir a medida que transcurre el tiempo debido a que la energía inicial almacenada en el inductor se disipa en forma de calor en el resistor.

Entonces ahora: $i_p = 0$,

por lo tanto: $i_T(t) = I_0 \cdot e^{-t/\frac{L}{R}}$

c) Resumiendo gráficamente las dos etapas:



COMENTARIOS FINALES Y CONCLUSIONES

En el desarrollo de este **TAP** han resultado importantes los siguientes aspectos:

a) La existencia de tres respuestas en el comportamiento general de circuitos que incluyen componentes reactivos: forzada, natural y completa.

b) Cómo se asocian las soluciones de la ecuación diferencial que describe el comportamiento de un circuito a los tres tipos de respuestas del punto anterior.

c) La condición fundamental debido a la cual no puede haber cambios instantáneos de la tensión en un capacitor y de corriente en un inductor ("leyes de oro de L y C ").

d) La relevancia de los valores iniciales de tensión y corriente en capacitores e inductores, respectivamente.

e) Las constantes de tiempo, RC y L/R , como parámetro en el comportamiento exponencial de la respuesta libre.

f) Diferenciar las respuestas de estos circuitos ***RL*** y ***RC*** cuando están alimentados con fuentes de continua y de alterna senoidal.

g) En particular, el planteo y resolución de circuitos en régimen transitorio en donde la fuente es de tensión alterna senoidal y la carga es inductiva.