



ELECTROTECNIA Y ELECTRÓNICA

(Mecánica - Electromecánica - Computación)

TRABAJO DE APLICACIÓN N° 07

Preparado por: Ing. Pablo Morcelle del Valle, Ing. Augusto Cassino, Ing. Guillermo Renzi.

Actualizado por: Ing. Mónica González, Ing. Fabián Blassetti, Ing. Gustavo Adgi Romano

CIRCUITOS TRIFÁSICOS.

Fuente perfecta. Cargas en estrella y en triángulo. Equivalente monofásico. Sistemas desequilibrados y asimétricos. Corrimiento del neutro. Componentes simétricas.

REPASAR: Métodos de resolución, Circuitos de alterna, Fasores.

EJERCICIO N° 01:

Sea una fuente trifásica en estrella simétrica y equilibrada cuya tensión de fase eficaz es $U_F = 220 \text{ V}$.

- a) Dibujar el diagrama fasorial de tensiones de fase y de línea suponiendo secuencia directa. Explicar cómo se realiza la construcción del fasorial y qué es cada componente.

Sugerencia: En este caso no se especifica ningún dato de fase. Elegir una fase arbitraria para alguno de los fasores.

- b) Escribir las expresiones fasoriales y del tiempo de las tensiones de línea y de fase y relacionarlas con el fasorial de a).

Sugerencia: No utilizar números para el módulo y la fase. Dejar el resultado expresado en función de ellos.

RESPUESTA: $\underline{U}_{RO} = 311 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{SO} = 311 \angle -120^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{TO} = 311 \angle 120^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{RS} = 539 \angle 30^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{ST} = 539 \angle -90^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{TR} = 539 \angle 150^\circ \text{ V}$, $u_{RO}(t) = 311 \sin(\omega t) \text{ V}$, $u_{SO}(t) = 311 \sin(\omega t - 120^\circ) \text{ V}$, $u_{TO}(t) = 311 \sin(\omega t + 120^\circ) \text{ V}$, $u_{RS}(t) = 539 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ V}$, $u_{ST}(t) = 539 \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ V}$, $u_{TR}(t) = 539 \sin(\omega t + 150^\circ) \text{ V}$.

- c) Repetir los incisos anteriores suponiendo secuencia inversa.

RESPUESTA: $\underline{U}_{RO} = 311 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{SO} = 311 \angle 120^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{TO} = 311 \angle -120^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{RS} = 539 \angle -30^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{ST} = 539 \angle 90^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{TR} = 539 \angle -150^\circ \text{ V}$, $u_{RO}(t) = 311 \sin(\omega t) \text{ V}$, $u_{SO}(t) = 311 \sin(\omega t + 120^\circ) \text{ V}$, $u_{TO}(t) = 311 \sin(\omega t - 120^\circ) \text{ V}$, $u_{RS}(t) = 539 \sin(\omega t - 30^\circ) \text{ V}$, $u_{ST}(t) = 539 \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ V}$, $u_{TR}(t) = 539 \sin(\omega t - 150^\circ) \text{ V}$.

EJERCICIO N° 02:

Si las tensiones de fase de una fuente trifásica son: $\underline{U}_{FR} = 200 \angle 30^\circ \text{ V}$; $\underline{U}_{FS} = 245 \angle 250^\circ \text{ V}$; $\underline{U}_{FT} = 170 \angle 90^\circ \text{ V}$.

- a) Dibujar el diagrama fasorial y explicar qué particularidad tiene esa fuente. ¿Es posible obtener las tensiones de línea? Justificar y en caso afirmativo obtener los fasores de las tensiones de línea.

RESPUESTA: $\underline{U}_{RS} = 418 \angle 52^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{ST} = 409 \angle -102^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{TR} = 187 \angle 158^\circ \text{ V}$.

- b) Repetir el inciso anterior suponiendo $\underline{U}_{FR} = 200 \angle 30^\circ \text{ V}$; $\underline{U}_{FS} = 245 \angle 90^\circ \text{ V}$; $\underline{U}_{FT} = 170 \angle 250^\circ \text{ V}$ que consiste en una fuente con secuencia inversa.

RESPUESTA: $\underline{U}_{RS} = 187 \angle -22^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{ST} = 409 \angle 78^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{TR} = 418 \angle -128^\circ \text{ V}$.

EJERCICIO N° 03:

Para el circuito del EJERCICIO N° 01, la fuente se conecta a una carga equilibrada en triángulo de impedancia $\underline{Z} = 10 - j10 \Omega$.

- a) Dibujar el circuito y explicar cómo se determinan las corrientes en las impedancias y en la línea. Obtener el valor de dichas corrientes y realizar el diagrama fasorial de tensiones y corrientes.

Sugerencia: Respetar la forma tradicional de aplicación de leyes circuitales en alterna, uso de fasores, etc.

RESPUESTA: $\underline{I}_{RS} = 38,5 \angle 75^\circ \text{ A}$, $\underline{I}_{ST} = 38,5 \angle -45^\circ \text{ A}$, $\underline{I}_{TR} = 38,5 \angle -165^\circ \text{ A}$, $\underline{I}_R = 66,5 \angle 45^\circ \text{ A}$, $\underline{I}_S = 66,5 \angle -75^\circ \text{ A}$, $\underline{I}_T = 66,5 \angle 165^\circ \text{ A}$.

- b) Calcular la relación entre las corrientes de fase y de línea, explicar el resultado obtenido y especificar qué condiciones deben cumplirse para que la relación no pierda validez.

- c) Repetir los incisos anteriores suponiendo que la carga se conecta a la fuente del EJERCICIO N° 02. Sacar conclusiones con respecto a los valores de las corrientes y a las relaciones entre corrientes de fase y de línea.

RESPUESTA: $\underline{I}_{RS} = 30 \angle 97^\circ \text{ A}$, $\underline{I}_{ST} = 29 \angle -57^\circ \text{ A}$, $\underline{I}_{TR} = 13 \angle 203^\circ \text{ A}$, $\underline{I}_R = 36 \angle 77^\circ \text{ A}$, $\underline{I}_S = 57 \angle -70^\circ \text{ A}$, $\underline{I}_T = 34 \angle 146^\circ \text{ A}$.

EJERCICIO N° 04:

Para el circuito del EJERCICIO N° 01. La fuente se conecta a una carga equilibrada en estrella de impedancia $\underline{Z} = 20 \angle 30^\circ \Omega$ utilizando 4 conductores (las 3 fases y el neutro).



- a) Dibujar el circuito y explicar cómo se determinan las corrientes de línea en los 4 conductores. Obtener el valor de dichas corrientes y realizar el diagrama fasorial de tensiones y corrientes.

Sugerencia: Evitar aplicar la LKT en forma mecánica sin analizar el circuito. Esto pone en evidencia las ventajas del análisis como sistema trifásico.

RESPUESTA: $I_R = 16 \angle -30^\circ$ A, $I_S = 16 \angle -150^\circ$ A, $I_T = 16 \angle 90^\circ$ A, $I_N = 0$.

- b) Explicar el resultado obtenido para la corriente de neutro. Analizando este resultado indicar cuál es la utilidad del conductor neutro en este circuito. Obtener un equivalente monofásico e indicar cuando es posible obtener uno.

Sugerencia: Observar qué sucede si se quita el conductor neutro.

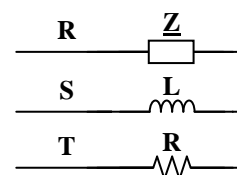
- c) Repetir los incisos anteriores suponiendo que la carga se conecta a la fuente del EJERCICIO N° 02 a) con conductor neutro. Sacar conclusiones con respecto a los valores de las corrientes en todas las líneas. Para responder el inciso b) analizar los valores de tensión que cada impedancia tiene aplicada (recordar que por lo general, las cargas funcionan adecuadamente si se asegura la tensión para las cuales fueron diseñadas).

Nota: Las cargas que se conectan a fuentes trifásicas pueden ser de características trifásicas intrínsecas y por lo tanto naturalmente equilibradas (como por ejemplo motores trifásicos) o bien cargas monofásicas que se conectan y agrupan de distinta manera.

RESPUESTA: $I_R = 10 \angle 0^\circ$ A, $I_S = 12,2 \angle -140^\circ$ A, $I_T = 8,5 \angle 60^\circ$ A, $I_N = 5 \angle -179^\circ$ A.

EJERCICIO N° 05:

Una fuente perfecta con tensiones eficaces **220V/380V** y **50 Hz** alimenta un grupo de cargas en estrella como se muestra en el circuito de la figura. $L = 15,9$ mH, $R = 20 \Omega$, $Z_M = 44 \angle 45^\circ \Omega$.



- a) Realizar el diagrama fasorial de tensiones de la fuente explicando los pasos seguidos.
b) En función del circuito y de la fuente, ¿qué se puede esperar con respecto a la tensión entre centros de estrella? Determinar esta tensión.

RESPUESTA: $U_{O'O} = 221 \angle -142^\circ$ V.

- c) Calcular las tensiones en las cargas y las corrientes en las líneas.

RESPUESTA: $U_{RO'} = 417 \angle 19^\circ$ V, $U_{SO'} = 84 \angle -40^\circ$ V, $U_{TO'} = 333 \angle 79^\circ$ V, $I_R = 9 \angle -26^\circ$ A, $I_S = 17 \angle -130^\circ$ A, $I_T = 17 \angle 79^\circ$ A.

EJERCICIO N° 06:

Repetir el EJERCICIO N° 05 si se conecta el conductor de neutro.

- a) Explicar qué simplificaciones se pueden realizar como consecuencia de la nueva configuración del circuito.

Sugerencia: Volver a dibujar el circuito y observar cómo se modifican las variables del sistema.

- b) Explicar qué sucede con las tensiones en las cargas y determinarlas. Observar y explicar la dependencia que existe entre las tensiones en las cargas y los valores de las impedancias. ¿Se puede obtener un equivalente monofásico? Justificar.

RESPUESTA: $U_{RO'} = U_{RO} = 220 \angle 0^\circ$ V, $U_{SO'} = U_{SO} = 220 \angle -120^\circ$ V, $U_{TO'} = U_{TO} = 220 \angle 120^\circ$ V.

- c) Calcular la corriente de neutro.

RESPUESTA: $I_N = 48 \angle 145^\circ$ A.

EJERCICIO N° 07:

Se tiene un sistema de tensiones asimétrico y desequilibrado.

Sugerencia: Utilizar el auxilio de las filminas de clase o de los textos sugeridos en la bibliografía.

- Escribir las expresiones de las tensiones propuestas y dibujar el diagrama fasorial correspondiente.
- Enunciar el teorema de Fortescue. Acompañar la explicación mediante el auxilio de diagramas fasoriales.
- ¿A qué se llama *componentes llave* de un sistema de componentes simétricas?
- A partir de lo planteado en a) y de lo desarrollado en b) y c) efectuar el razonamiento que permite escribir las expresiones de las componentes llave de un sistema trifásico de tensiones desequilibradas.
- Obtener todas las componentes de cada uno de los sistemas simétricos.
- Escribir el sistema de tensiones simétricas en función de las tensiones del sistema original en forma matricial.
- Plantear el camino inverso al realizado de a) a f), es decir, suponiendo un sistema de componentes simétricas conocido y expresado mediante sus componentes llave, obtener el sistema desequilibrado y simétrico.
- Escribir el sistema obtenido en g) en forma matricial. ¿Cómo se vincula este último con el hallado en f)?

Sugerencia: Recordar la idea de inversa de una matriz.

EJERCICIO N° 08:

Una falla en una fuente trifásica ha modificado los módulos y fases de sus tensiones. Luego de realizar una medición se determinaron las tensiones de fase $U_{RO} = 400 \angle 0^\circ$ V, $U_{SO} = 133 \angle 110^\circ$ V, $U_{TO} = 250 \angle 270^\circ$ V. Esta fuente alimenta una carga en estrella de impedancia $Z_M = 100 \angle 80^\circ \Omega$. El sistema posee conductor neutro y su impedancia es de $Z_N = 2 + j \Omega$.

- a) Determinar las tensiones llaves de la fuente trifásica.



RESPUESTA: $\underline{U}_0 = 125 \angle -19^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_1 = 34 \angle 13^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_2 = 251 \angle 8^\circ \text{ V}$.

b) Calcular mediante el uso de componentes simétricas la tensión entre centros de estrella.

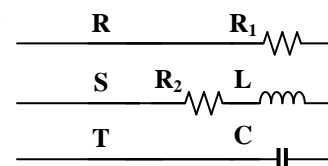
RESPUESTA: $\underline{U}_{O'O} = 8,3 \angle -69^\circ \text{ V}$

c) Calcular mediante el uso de componentes simétricas las corrientes de línea.

RESPUESTA: $\underline{I}_R = 4 \angle -79^\circ \text{ A}$, $\underline{I}_S = 1,4 \angle 30^\circ \text{ A}$, $\underline{I}_T = 2,4 \angle -70^\circ \text{ A}$, $\underline{I}_N = 3,7 \angle -96^\circ \text{ A}$.

EJERCICIO N° 09:

Dadas las tensiones llave de la fuente: $\underline{U}_0 = 25 \cdot e^{j45^\circ} \text{ V}$; $\underline{U}_1 = 100 \cdot e^{j0^\circ} \text{ V}$ y $\underline{U}_2 = 30 \cdot e^{j30^\circ} \text{ V}$ y las impedancias de la carga $\underline{R}_1 = 20 \Omega$; $\underline{R}_2 = 10 \Omega$; $\underline{X}_L = 20 \Omega$ y $\underline{X}_C = 50 \Omega$.



a) Determinar la tensión resultante de la fuente de tensión trifásica.

Sugerencia: Utilizar la ayuda de los diagramas fasoriales y los resultados del EJERCICIO N° 07.

RESPUESTA: $\underline{U}_{FR} = 144 \angle -1^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{FS} = 106 \angle -123^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{FT} = 50 \angle 129^\circ \text{ V}$.

b) Calcular las tensiones aplicadas a los bornes de las impedancias de fase.

RESPUESTA: $\underline{U}_{RO'} = 124 \angle -17^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{SO'} = 149 \angle -124^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{TO'} = 58 \angle 175^\circ \text{ V}$.

c) Calcular las corrientes de línea y realizar el diagrama fasorial.

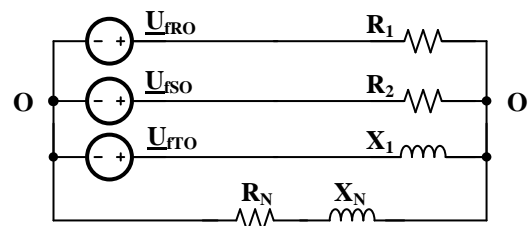
RESPUESTA: $\underline{I}_R = 6 \angle -2^\circ \text{ A}$, $\underline{I}_S = 5,5 \angle 165^\circ \text{ A}$, $\underline{I}_T = 1,3 \angle 236^\circ \text{ A}$.

EJERCICIOS ADICIONALES

Sugerencia: Resolver todos los ejercicios siguiendo las pautas establecidas para los ejercicios anteriores: No dar por hechos u obvios suposiciones o afirmaciones, nada debe darse por implícito. Plantear, explicar, justificar, respetar la nomenclatura y simbología. En este caso, el hábito hace al monje.

EJERCICIO N° 10:

En el circuito de la figura la fuente trifásica es perfecta de secuencia inversa y alimenta 3 cargas monofásicas conectadas una en cada fase. Se utiliza un conductor neutro cuya impedancia no es nula. $\underline{U}_{FR0} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$; $\underline{R}_1 = 30 \Omega$; $\underline{R}_2 = 30 \Omega$; $\underline{X}_1 = 15 \Omega$; $\underline{R}_N = 2 \Omega$ y $\underline{X}_N = 1 \Omega$.



a) Determinar todas las tensiones de la fuente trifásica en forma analítica y realizar el diagrama fasorial.

RESPUESTA: $\underline{U}_{RO} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{SO} = 220 \angle 120^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{TO} = 220 \angle -120^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{RS} = 380 \angle -30^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{ST} = 380 \angle 90^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{TR} = 380 \angle -150^\circ \text{ V}$.

b) Observar en qué estado se encuentra el sistema fuente-carga y determinar las tensiones con la que opera cada carga. En estos casos ¿Qué variable es conveniente calcular inicialmente?

RESPUESTA: $\underline{U}_{O'O} = 30,4 \angle 154^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{RO'} = 247,7 \angle -3^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{SO'} = 195,5 \angle 115^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{TO'} = 220 \angle -112^\circ \text{ V}$.

c) Si el conductor neutro no estuviera. ¿Las cargas operarían en mejores o peores condiciones? Analizar en detalle esta situación y justificar la respuesta teniendo en cuenta que las cargas son elementos monofásicos que operan con cierto rango de tensión. Realizar cálculos que respalden la respuesta.

RESPUESTA: $\underline{U}_{O'O} = 174,1 \angle 168,6^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{RO'} = 392,5 \angle -5^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{SO'} = 167,4 \angle 69^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{TO'} = 233,2 \angle -105^\circ \text{ V}$, $\underline{I}_R = 13,1 \angle -5^\circ \text{ A}$, $\underline{I}_S = 5,6 \angle 69^\circ \text{ A}$, $\underline{I}_T = 55,6 \angle -195^\circ \text{ A}$.

EJERCICIO N° 11:

Una fuente trifásica perfecta, conectada en estrella, con tensiones de línea de **380 V** de valor eficaz, alimenta un circuito conectado en estrella cuyas impedancias son $\underline{Z}_R = 22 \Omega$; $\underline{Z}_S = j22 \Omega$ y $\underline{Z}_T = -j22 \Omega$. El sistema no posee neutro.

a) Dibujar el diagrama fasorial de la fuente trifásica. Determinar la expresión de la tensión entre los centros de estrella $\underline{U}_{o'o}$ y calcularla.

RESPUESTA: $\underline{U}_{O'O} = -161 \text{ V} = 161 \angle 180^\circ \text{ V}$.

b) Utilizando el dato anterior determinar las tensiones en los bornes de las \underline{Z} y calcular las corrientes en las mismas. Realizar un diagrama fasorial de tensiones y corrientes.

RESPUESTA: $\underline{U}_{RO'} = 381 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{SO'} = 197 \angle -75^\circ \text{ V}$, $\underline{U}_{TO'} = 197 \angle 75^\circ \text{ V}$, $\underline{I}_R = 17,3 \angle 0^\circ \text{ A}$, $\underline{I}_S = 9 \angle -165^\circ \text{ A}$, $\underline{I}_T = 9 \angle 165^\circ \text{ A}$.

c) Explicar si es posible obtener las tensiones de fase de la fuente si se tienen las tensiones de línea. Justificar la respuesta.

EJERCICIOS RESUELTOS

Aclaración: Debe observarse que en la resolución de estos ejercicios se efectúan planteos, explicaciones, justificaciones, y nada se da por sobreentendido.



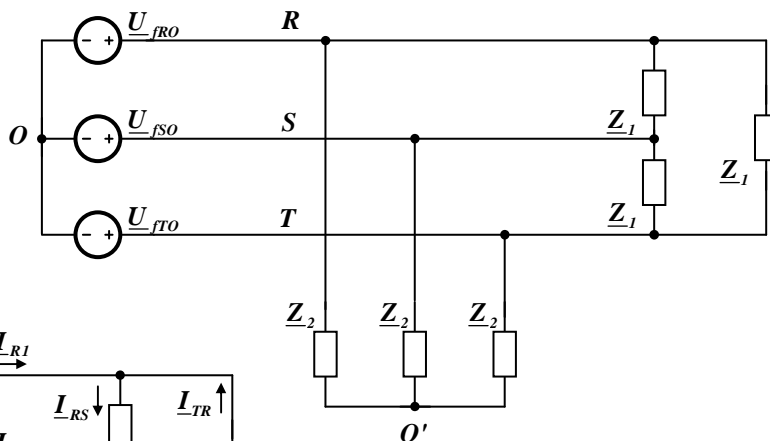
EJERCICIO N° 12:

Una fuente trifásica imperfecta en estrella y sin conductor neutro alimenta 2 cargas trifásicas de impedancia $\underline{Z}_1 = 4 + j8 \, \Omega$ y $\underline{Z}_2 = 6 + j4 \, \Omega$. La primera se encuentra conectada en triángulo y la segunda en estrella. Las tensiones de la fuente son: $\underline{U}_{fRO} = 400 \cdot e^{j0^\circ} \text{ V}$, $\underline{U}_{fSO} = 200 \cdot e^{-j90^\circ} \text{ V}$, $\underline{U}_{fTO} = 100 \cdot e^{j135^\circ} \text{ V}$

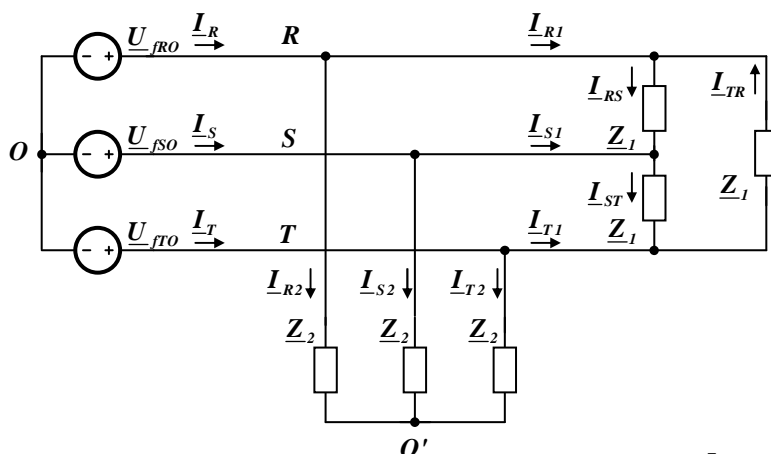
- Determinar las tensiones con las que opera la carga y todas las corrientes del circuito. Utilizar diagramas fasoriales.
- Analizar qué mecanismos de resolución alternativos existen al elegido observando ventajas y desventajas.

RESOLUCIÓN:

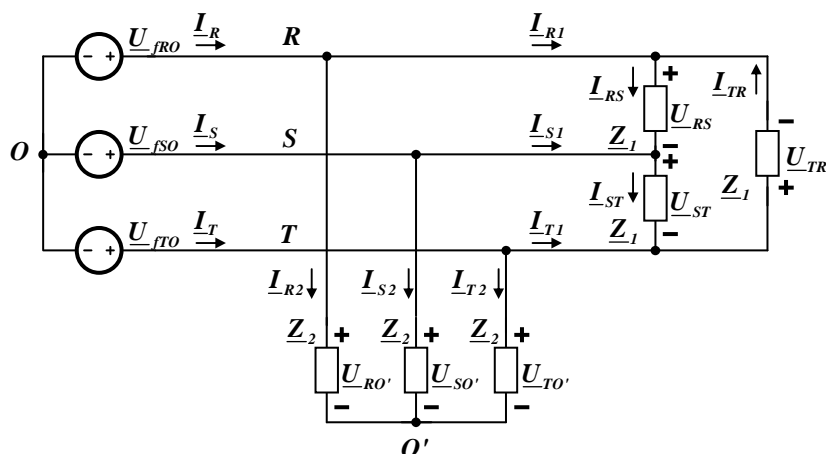
- Antes de comenzar se dibuja el circuito que representa dicha situación:



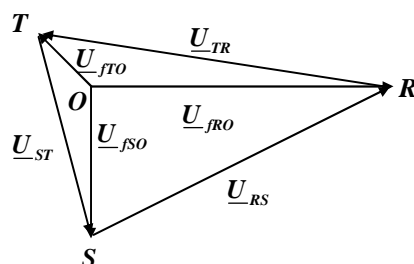
Para resolver el circuito se suponen las siguientes variables eléctricas en el mismo:



En base a las corrientes supuestas resultan las siguientes tensiones:



Antes de comenzar a resolver es importante conocer las tensiones de la fuente trifásica. El diagrama fasorial de tensiones de fase y de línea es el siguiente:



En forma analítica:



$$\underline{U}_{RS} = \underline{U}_{fRO} - \underline{U}_{fSO} = 400 \cdot e^{j0^\circ} \text{ V} - 200 \cdot e^{-j90^\circ} \text{ V} = 400 \text{ V} + j200 \text{ V} = 447 \cdot e^{-j26^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{ST} = \underline{U}_{fSO} - \underline{U}_{fTO} = -j200 \text{ V} - 100 \cdot e^{j135^\circ} \text{ V} = -j200 \text{ V} - (-70 \text{ V} + j70 \text{ V}) = 70 \text{ V} - j270 \text{ V} = 279 \cdot e^{-j75^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{TR} = \underline{U}_{fTO} - \underline{U}_{fRO} = -70 \text{ V} + j70 \text{ V} - 400 \text{ V} = -470 \text{ V} + j70 \text{ V} = 475 \cdot e^{j172^\circ} \text{ V}$$

Se puede observar que existen muchas formas de resolver el circuito. La que se elige y detalla a continuación permite resolver el circuito de una forma sencilla y rápida minimizando la probabilidad de cometer errores de cálculo. Además, el método elegido mantiene la topología de los circuitos trifásicos permitiendo verificar los resultados rápidamente.

Observando el último circuito dibujado, se puede ver que entre la fuente y la carga \underline{Z}_2 hay una conexión estrella – estrella. Inicialmente se obtiene la variable común a las tres líneas que en este caso consiste en la tensión entre centros de estrella $\underline{U}_{O'O}$.

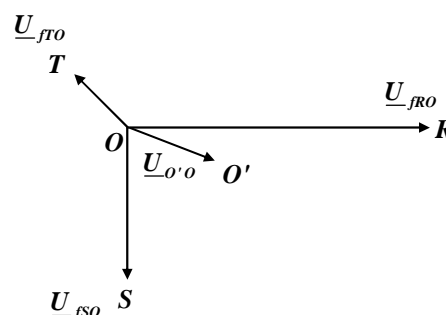
De acuerdo a la expresión general de tensión entre centros de estrella para

$$\text{sistemas estrella – estrella sin neutro: } \underline{U}_{O'O} = \frac{\frac{\underline{U}_{fRO}}{\underline{Z}_R} + \frac{\underline{U}_{fSO}}{\underline{Z}_S} + \frac{\underline{U}_{fTO}}{\underline{Z}_T}}{\frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_S} + \frac{1}{\underline{Z}_T}}$$

$$\underline{U}_{O'O} = \frac{\frac{1}{\underline{Z}_2}}{\frac{1}{\underline{Z}_2}} \cdot (\underline{U}_{fRO} + \underline{U}_{fSO} + \underline{U}_{fTO}) =$$

En este caso:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \cdot (400 \cdot e^{j0^\circ} \text{ V} + 200 \cdot e^{-j90^\circ} \text{ V} + 100 \cdot e^{j135^\circ} \text{ V}) = \\ &= 0,33 \cdot (400 \text{ V} - j200 \text{ V} - 70 \text{ V} + j70 \text{ V}) = \\ &= 110 \text{ V} - j43 \text{ V} = 118 \cdot e^{-j21^\circ} \text{ V} \end{aligned}$$



Aplicando la segunda Ley de Kirchhoff y luego la Ley de Ohm:

$$\underline{U}_{RO'} = \underline{U}_{fRO} - \underline{U}_{O'O} = 400 \text{ V} - (110 \text{ V} - j43 \text{ V}) = 293 \cdot e^{j8^\circ} \text{ V} = \underline{I}_{R2} \cdot \underline{Z}_2$$

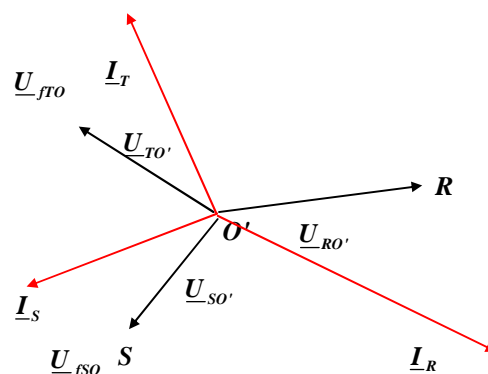
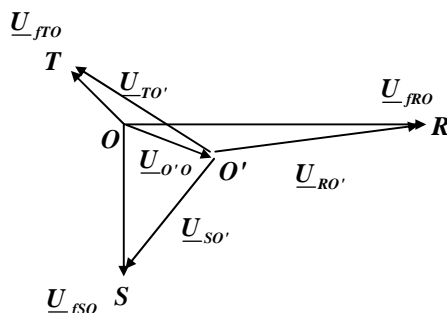
$$\underline{U}_{SO'} = \underline{U}_{fSO} - \underline{U}_{O'O} = -j200 \text{ V} - (110 \text{ V} - j43 \text{ V}) = 192 \cdot e^{-j125^\circ} \text{ V} = \underline{I}_{S2} \cdot \underline{Z}_2$$

$$\underline{U}_{TO'} = \underline{U}_{fTO} - \underline{U}_{O'O} = -70 \text{ V} + j70 \text{ V} - (110 \text{ V} - j43 \text{ V}) = 212 \cdot e^{j148^\circ} \text{ V} = \underline{I}_{T2} \cdot \underline{Z}_2$$

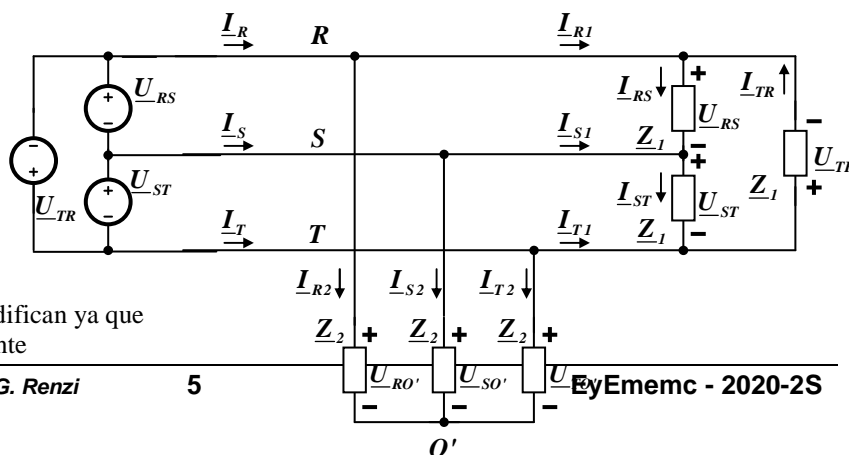
$$\underline{I}_{R2} = \underline{I}_R = \underline{U}_{RO'} / \underline{Z}_2 = \underline{U}_{RO'} / 7,2 \cdot e^{j34^\circ} \Omega = 41 \cdot e^{-j26^\circ} \text{ A}$$

$$\text{Entonces: } \underline{I}_{S2} = \underline{I}_S = \underline{U}_{SO'} / \underline{Z}_2 = 27 \cdot e^{-j159^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{T2} = \underline{I}_T = \underline{U}_{TO'} / \underline{Z}_2 = 29 \cdot e^{j114^\circ} \text{ A}$$



Habiendo calculado todas las variables del circuito se procede a realizar una transformación de fuente a triángulo (y con ayuda de diagramas fasoriales) se resuelve el siguiente circuito para calcular las tensiones y corrientes en la carga \underline{Z}_1 :



Las variables eléctricas del circuito no se modifican ya que la transformación brinda un circuito equivalente



Aplicando la primera Ley de Kirchhoff y luego la Ley de Ohm:

$$\underline{I}_{R1} = \underline{I}_{RS} - \underline{I}_{TR} = \underline{U}_{RS} / \underline{Z}_1 - \underline{U}_{TR} / \underline{Z}_1 = \underline{Y}_1 \cdot (\underline{U}_{RS} - \underline{U}_{TR}) = 0,1 \cdot e^{-j63^\circ} \text{ S} \cdot (400 \text{ V} + j200 \text{ V} - (-470 \text{ V} + j70 \text{ V})) =$$

$$= 0,1 \cdot e^{-j63^\circ} \text{ S} \cdot 880 \cdot e^{j9^\circ} \text{ V} = 88 \cdot e^{-j54^\circ} \text{ A}$$

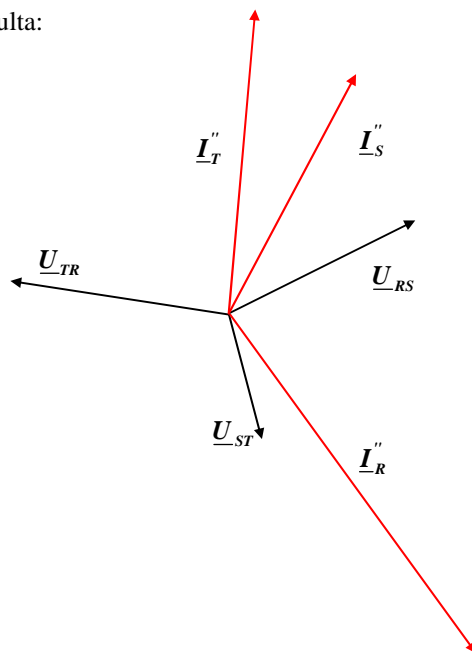
$$\underline{I}_{S1} = \underline{I}_{ST} - \underline{I}_{RS} = \underline{U}_{ST} / \underline{Z}_1 - \underline{U}_{RS} / \underline{Z}_1 = \underline{Y}_1 \cdot (\underline{U}_{ST} - \underline{U}_{RS}) = 0,1 \cdot e^{-j63^\circ} \text{ S} \cdot (70 \text{ V} - j270 \text{ V} - (400 \text{ V} + j200 \text{ V})) =$$

$$= 0,1 \cdot e^{-j63^\circ} \text{ S} \cdot 574 \cdot e^{j125^\circ} \text{ V} = 57 \cdot e^{j62^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_{T1} = \underline{I}_{TR} - \underline{I}_{ST} = \underline{U}_{TR} / \underline{Z}_1 - \underline{U}_{ST} / \underline{Z}_1 = \underline{Y}_1 \cdot (\underline{U}_{TR} - \underline{U}_{ST}) = 0,1 \cdot e^{-j63^\circ} \text{ S} \cdot (-470 \text{ V} + j70 \text{ V} - (70 \text{ V} - j270 \text{ V})) =$$

$$= 0,1 \cdot e^{-j63^\circ} \text{ S} \cdot 638 \cdot e^{j148^\circ} \text{ V} = 64 \cdot e^{j85^\circ} \text{ A}$$

El diagrama fasorial resulta:



Si se unifican los resultados se obtienen todas las tensiones y corrientes del circuito:

$$\underline{I}_R = \underline{I}_{R1} + \underline{I}_{R2} = 41 \cdot e^{-j26^\circ} \text{ A} + 88 \cdot e^{-j54^\circ} \text{ A} =$$

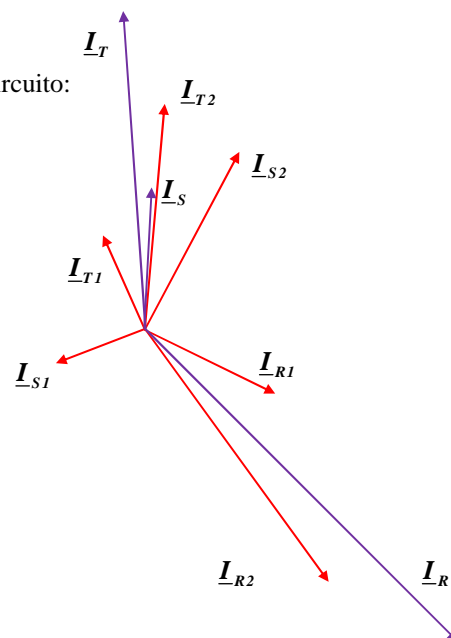
$$= 37 \text{ A} - j18 \text{ A} + 52 \text{ A} - j71 \text{ A} = 125 \cdot e^{-j45^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_S = \underline{I}_{S1} + \underline{I}_{S2} = 27 \cdot e^{-j159^\circ} \text{ A} + 57 \cdot e^{j62^\circ} \text{ A} =$$

$$= -25 \text{ A} - j10 \text{ A} + 27 \text{ A} + j50 \text{ A} = 40 \cdot e^{j87^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_T = \underline{I}_{T1} + \underline{I}_{T2} = 29 \cdot e^{j114^\circ} \text{ A} + 64 \cdot e^{j85^\circ} \text{ A} =$$

$$= -12 \text{ A} + j26 \text{ A} + 6 \text{ A} + j64 \text{ A} = 90 \cdot e^{j94^\circ} \text{ A}$$



b) Alternativas de resolución:

Una alternativa de resolución es transformar la carga estrella a triángulo y asociar en paralelo y luego resolver el triángulo – triángulo pero la transformación requiere gran cantidad de cálculos y además si se pide la corriente en la carga estrella, la transformación genera un circuito equivalente que no es la carga original, con lo cual la transformación pierde sentido porque habría que volver al circuito original y seguir resolviendo.

Otra alternativa, similar a la anterior, es transformar la carga triángulo en estrella. En este caso las dos cargas en estrella no se pueden asociar (**Tarea para el alumno: explicar por qué no se puede y en qué casos se podría**), con lo cual habría que resolver dos sistemas estrella – estrella y la carga transformada no es la carga original.



EJERCICIO N° 13:

Dado un sistema trifásico de tensiones de fase: $\underline{U}_{fRO} = 220 \text{ V}$; $\underline{U}_{fSO} = 110 \cdot e^{j120^\circ} \text{ V}$ y $\underline{U}_{fTO} = 110 \cdot e^{j120^\circ} \text{ V}$.

- Obtener las componentes simétricas.
- Realizar un circuito equivalente de la fuente trifásica utilizando las componentes simétricas.
- Realizar un diagrama fasorial de las 3 ternas de componentes simétricas. Verificar que la composición de las tres cumple con el diagrama original.

RESOLUCIÓN:

- Se pueden descomponer las tensiones de fase \underline{U}_{fRO} , \underline{U}_{fSO} y \underline{U}_{fTO} en las componentes simétricas o llave \underline{U}_1 ; \underline{U}_2 y

$$\underline{U}_{fRO} = \underline{U}_{1R} + \underline{U}_{2R} + \underline{U}_{0R}$$

$$\underline{U}_0 \text{ de la siguiente forma: } \underline{U}_{fSO} = \underline{U}_{1S} + \underline{U}_{2S} + \underline{U}_{0S}$$

$$\underline{U}_{fTO} = \underline{U}_{1T} + \underline{U}_{2T} + \underline{U}_{0T}$$

Usando el operador $\underline{a} = e^{j120^\circ}$, entonces $\underline{a}^2 = e^{j240^\circ} = e^{-j120^\circ}$ y llamando $\underline{U}_1 = \underline{U}_{1R}$, $\underline{U}_2 = \underline{U}_{2R}$ y $\underline{U}_0 = \underline{U}_{0R}$, resulta:

$$\underline{U}_{fRO} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_0$$

$$\underline{U}_{fSO} = \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_1 + \underline{a} \cdot \underline{U}_2 + \underline{U}_0$$

$$\underline{U}_{fTO} = \underline{a} \cdot \underline{U}_1 + \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_2 + \underline{U}_0$$

$$\underline{U}_0 = 1/3 \cdot (\underline{U}_R + \underline{U}_S + \underline{U}_T)$$

$$\underline{U}_1 = 1/3 \cdot (\underline{U}_R + \underline{a} \cdot \underline{U}_S + \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_T)$$

Despejando las componentes llave se tiene: $\underline{U}_2 = 1/3 \cdot (\underline{U}_R + \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_S + \underline{a} \cdot \underline{U}_T)$

$$\underline{U}_0 = \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_R + \underline{U}_S + \underline{U}_T) = \frac{1}{3} \cdot (220e^{j0^\circ} + 110e^{-j120^\circ} + 110e^{j120^\circ}) = \frac{110}{3} e^{j0^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_1 = \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_R + \underline{a} \cdot \underline{U}_S + \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_T) = \frac{1}{3} \cdot (220e^{j0^\circ} + \underline{a} \cdot 110e^{-j120^\circ} + \underline{a}^2 \cdot 110e^{j120^\circ}) = \frac{440}{3} e^{j0^\circ} \text{ V}$$

Con los valores del ejercicio:

$$\underline{U}_2 = \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_R + \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_S + \underline{a} \cdot \underline{U}_T) = \frac{1}{3} \cdot (220e^{j0^\circ} + \underline{a}^2 \cdot 110e^{-j120^\circ} + \underline{a} \cdot 110e^{j120^\circ}) = \frac{110}{3} e^{j0^\circ} \text{ V}$$

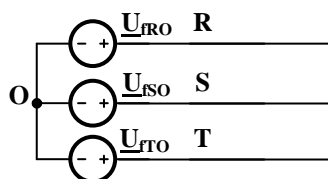
Observar que la fase nula de las tres componentes llave es una particularidad de los datos del ejercicio, las fases pueden tener cualquier ángulo y el mismo no tiene que coincidir entre las componentes llave.

$$\underline{U}_{fRO} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_0$$

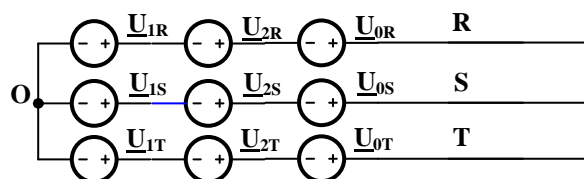
$$\underline{U}_{fSO} = \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_1 + \underline{a} \cdot \underline{U}_2 + \underline{U}_0$$

Para verificar se sugiere utilizar las siguientes expresiones: $\underline{U}_{fTO} = \underline{a} \cdot \underline{U}_1 + \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_2 + \underline{U}_0$

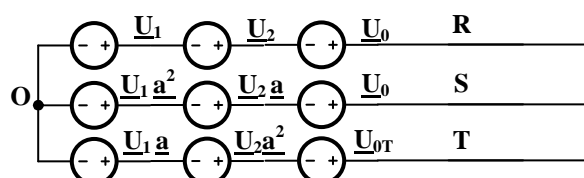
- La fuente del circuito es la siguiente:



Notar que el segundo subíndice de la fuente es "O" por el centro de estrella de la fuente y no "0" (cero), el subíndice de la componente llave homopolar. Cada tensión de fase de la fuente se puede descomponer en 3 componentes (superposición):



Si se escriben las componentes en función de las componentes llave o simétricas resulta:





Este modelo de fuente se puede expresar como la superposición de 3 fuentes trifásicas, la de secuencia directa \underline{U}_1 , la de secuencia inversa \underline{U}_2 , y la homopolar \underline{U}_0 :

Secuencia directa	Secuencia inversa	Secuencia homopolar

c) Los diagramas fasoriales de cada secuencia resultan:

Secuencia directa	Secuencia inversa	Secuencia homopolar

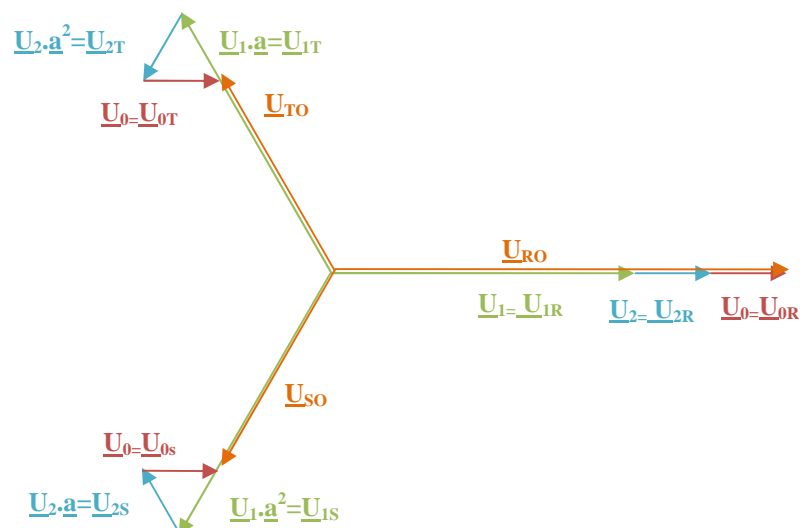
Si se recuerdan las ecuaciones de las componentes originales en función de las componentes llave:

$$\underline{U}_{fRO} = \underline{U}_{1R} + \underline{U}_{2R} + \underline{U}_{0R}$$

$$\underline{U}_{fSO} = \underline{U}_{1S} + \underline{U}_{2S} + \underline{U}_{0S}$$

$$\underline{U}_{fTO} = \underline{U}_{1T} + \underline{U}_{2T} + \underline{U}_{0T}$$

Se realiza el diagrama fasorial de las tensiones donde se puede observar que al sumar las 3 componentes se obtiene la tensión de la fuente:





COMENTARIOS FINALES Y CONCLUSIONES

En el desarrollo de este **TAP** han resultado importantes los siguientes aspectos:

1. La importancia de los diagramas fasoriales de la fuente de tensión con los correspondientes valores de fase y línea.
2. Las relaciones existentes entre las mismas.
3. La interpretación de los enunciados de los problemas para poder dibujar los circuitos, según la información suministrada, referida al tipo de conexión del generador y la carga.
4. La utilización del método del circuito equivalente monofásico, cuando sea procedente.
5. El funcionamiento general de un circuito trifásico para los casos en que la impedancia del neutro toma todos los valores posibles.
6. Análisis de los casos de conexión estrella equilibrada y desequilibrada.
7. Alternativas de resolución para sistemas trifásicos.
8. El cálculo de las componentes simétricas de un sistema trifásico desequilibrado y/o asimétrico.
9. El cálculo de las señales trifásicas a partir de las componentes simétricas en circuitos con tensiones y/o corrientes asimétricas y desequilibradas.