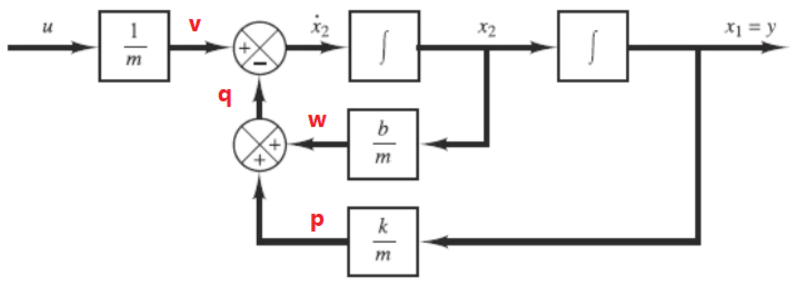


$$y = \int x_2 \qquad \dot{y} = x_2 \qquad \ddot{y} = \dot{x}_2 = v - q$$

$$\ddot{y} = \frac{l}{m}\,u - (w + p) = \frac{l}{m}\,u - \left(\frac{b}{m}\,x_2 + \frac{k}{m}\,y\right) = \frac{l}{m}\,u - \left(\frac{b}{m}\,\dot{y} + \frac{k}{m}\,y\right)$$

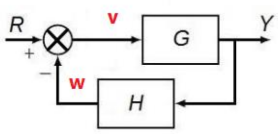
$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\,\dot{y} + \frac{k}{m}\,y = \frac{l}{m}\,u \qquad \Rightarrow \qquad s^2\,Y + \frac{b}{m}\,s\,Y + \frac{k}{m}\,Y = \frac{l}{m}\,U$$

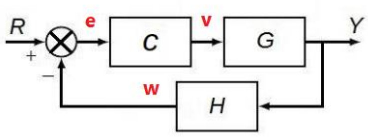
$$\frac{Y}{m}\,(m\,s^2 + b\,s + k) = \frac{l}{m}\,U \qquad \Rightarrow \qquad \frac{Y}{U} = \frac{l}{m\,s^2 + b\,s + k}$$

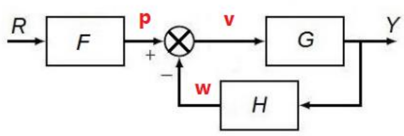
a) $$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6y(t) + 11\frac{dy(t)}{dt} = u(t)$$

$$\dddot{y} + 6\,\ddot{y} + 6y + 11\,\dot{y} = u \qquad \Rightarrow \qquad Y\,(s^3 + 6\,s^2 + 11\,s + 6) = U$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{1}{s^3 + 6\,s^2 + 11\,s + 6}$$



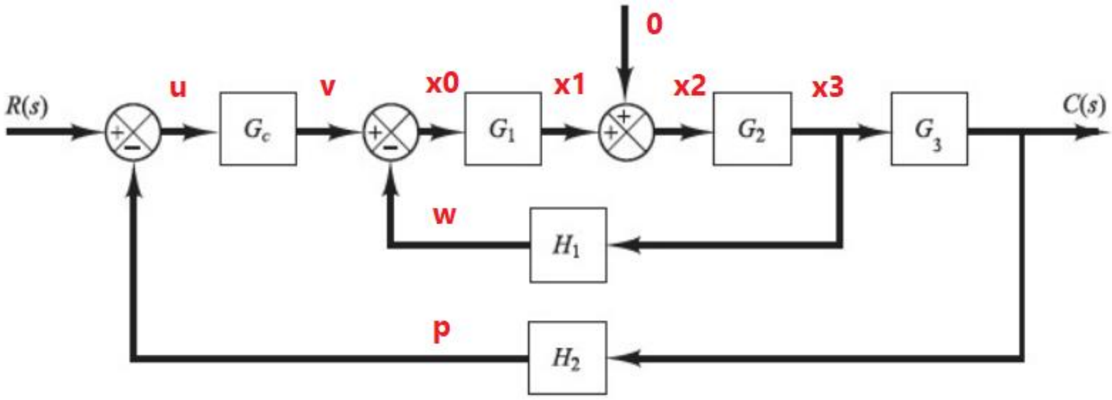




$$y = G\,v = G\,(r - w) = G\,(r - H\,y) = G\,r - GH\,y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{Y}{R} = \frac{G}{1 + GH}$$

$$y = G\,v = GC\,e = GC\,(r - w) = GC\,(r - H\,y) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{Y}{R} = \frac{GC}{1 + GCH}$$

$$y = G\,v = G\,(p - w) = G(F\,r - H\,y) = GF\,r - GH\,y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{Y}{R} = \frac{GF}{1 + GH}$$



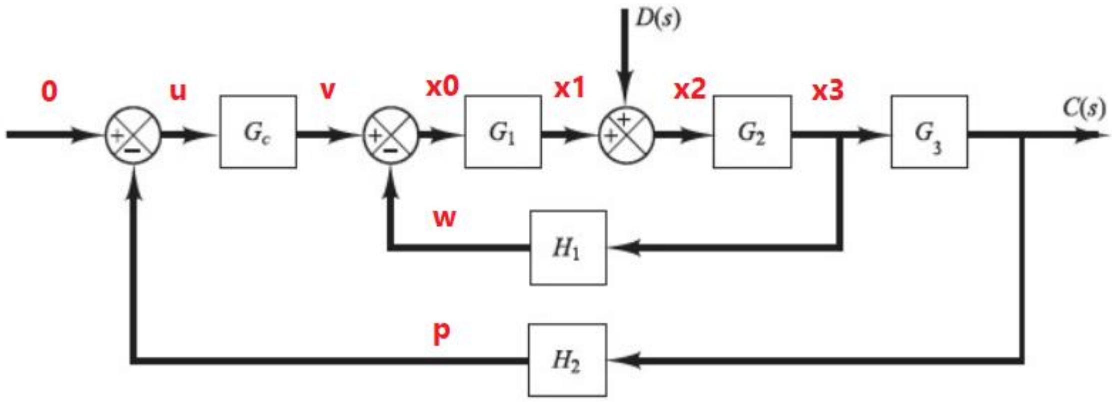
$$c = G_3\, x_3 = G_3\, G_2\, x_2 = G_3\, G_2\, (x_1 + 0) = G_3\, G_2\, G_1\, x_0 = G_3\, G_2\, G_1\, (v - w)$$

$$c = G_3\, G_2\, G_1\, (G_c\, u - H_1\, x_3) = G_3\, G_2\, G_1\, G_c\, (r - p) - G_2\, G_1\, H_1\, c$$

$$c = G_3\, G_2\, G_1\, G_c\ r - G_3\, G_2\, G_1\, G_c\, H_2\, c - G_2\, G_1\, H_1\, c$$

$$c\,(1 + G_2\, G_1\, H_1 + G_3\, G_2\, G_1\, G_c\, H_2) = G_3\, G_2\, G_1\, G_c\ r$$

$$\frac{C}{R} = \frac{G_3\, G_2\, G_1\, G_c}{1 + G_2\, G_1\, H_1 + G_3\, G_2\, G_1\, G_c\, H_2}$$



$$c = G_3\, x_3 = G_3\, G_2\, x_2 = G_3\, G_2\, (d + x_1) = G_3\, G_2\, (d + G_1\, x_0)$$

$$c = G_3\, G_2\, d + G_3\, G_2\, G_1\, (v - w) = G_3\, G_2\, d + G_3\, G_2\, G_1\, (G_c\, u - H_1\, x_3)$$

$$c = G_3\, G_2\, d - G_3\, G_2\, G_1\, G_c\, H_2\, c - G_2\, G_1\, H_1\, c$$

$$c\,(1 + G_2\, G_1\, H_1 + G_3\, G_2\, G_1\, G_c\, H_2) = G_3\, G_2\, d$$

$$\frac{C}{D} = \frac{G_3\, G_2}{1 + G_2\, G_1\, H_1 + G_3\, G_2\, G_1\, G_c\, H_2}$$

Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t)\, e^{-st}\, dt$$

Recordemos que la derivada de $e^{\alpha t}$ es $\alpha\, e^{\alpha t}$, tenemos lo siguiente considerando $s > 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt = \frac{1}{-s}\, [e^{-st}]_{t=0}^{t=\infty} = -\frac{1}{s}\, [e^{-\infty} - e^{0}] = -\frac{1}{s}\, [0-1] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \int_0^{\infty} e^{\alpha t - st}\, dt = \frac{1}{\alpha - s}\, \left[e^{-(s-\alpha)t}\right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s-\alpha} \qquad s - \alpha > 0$$

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\} = \int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha)t}\, dt = -\frac{1}{s+\alpha}\, \left[e^{-(s+\alpha)t}\right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s+\alpha} \qquad s + \alpha > 0$$

Propiedades

- Linealidad: $\mathcal{L}\{a\, x(t) + b\, y(t)\} = a\, \mathcal{L}\{x(t)\} + b\, \mathcal{L}\{y(t)\}$

Sistemas de Primer Orden — Input: u(t)

Poseen un único polo y, por tanto, es real. Si el mismo está en $s = -\alpha < 0$

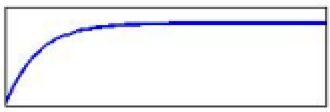
$$T(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha} \qquad X(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s} \qquad \Rightarrow \qquad Y(s) = T(s)\, X(s) = \frac{\alpha}{s\,(s+\alpha)}$$

Para hallar la salida en función del tiempo necesitamos aplicar fracciones simples

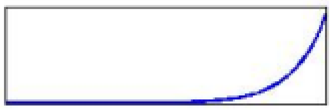
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\alpha}{s\,(s+\alpha)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A\,(s+\alpha) + B\,s}{s\,(s+\alpha)}\right\} = A\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + B\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\alpha}\right\}$$

$$A\,(0+\alpha) = \alpha \quad \Rightarrow \quad A = 1 \qquad\qquad B\,(-\alpha) = \alpha \quad \Rightarrow \quad B = -1$$

$$y(t) = A * 1 + B * e^{-\alpha t} = 1 - e^{-\alpha t} \qquad t \geq 0$$



Por otra parte, si el polo está en $s = \alpha > 0$ (semieje real positivo)



$$Y(s) = \frac{\alpha}{s\,(s-\alpha)} \quad \Rightarrow \quad y(t) = -1 + e^{\alpha t} \qquad t \geq 0$$

$$A\,(0-\alpha) = \alpha \quad \Rightarrow \quad A = -1 \qquad\qquad B\,\alpha = \alpha \quad \Rightarrow \quad B = 1$$

Sistemas de Segundo Orden **Input: u(t)**

Tienen 2 polos. Se caracterizan por producir respuestas oscilantes si son complejos.

$$T(s) = \frac{A\,\omega^2}{s^2 \pm 2\,\xi\,\omega\,s + \omega^2} = \frac{A\,\omega^2}{(s-p_1)\,(s-p_2)} \qquad \Rightarrow \qquad Y(s) = \frac{A\,\omega^2}{s\,(s-p_1)\,(s-p_2)}$$

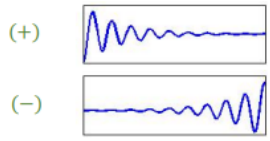
$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{\mp 2\,\xi\,\omega \pm \sqrt{4\,\xi^2\,\omega^2 - 4\,\omega^2}}{2} = \mp\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2-1}$$

El discriminante podría ser negativo, positivo o nulo, teniendo ξ y ω positivos.

- $\xi^2 - 1 < 0 \;\Rightarrow\; \xi^2 < 1 \;\Rightarrow\; \xi < 1$ Sub: complejos conjugados
- $\xi^2 - 1 > 0 \;\Rightarrow\; \xi^2 > 1 \;\Rightarrow\; \xi > 1$ Sobre: reales distintos
- $\xi^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \xi^2 = 1 \;\Rightarrow\; \xi = 1$ Crítico: reales iguales

La transformada inversa de Y(s) es complicada, aplico teorema de valor final:

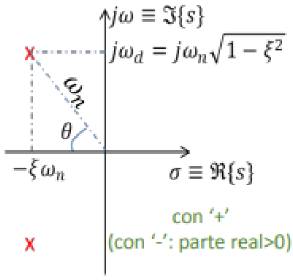
$$y(\infty) = s\,Y(0) = T(0) = \frac{A\,\omega^2}{0^2 \pm 0 + \omega^2} = A$$



$$y(t) = A.\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_n^2}{s(s^2 \pm 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}\right\} = A\left(1 - \frac{e^{\mp\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d\,t + \theta)\right), t \geq 0$$

Usaremos caso (+), nos interesa sobre pico (MP), tiempo de pico (t_p) y de *setting*.

$$y\left(\frac{\pi}{\omega_d}\right) = A\left(1 - \frac{e^{\frac{-\xi\,\omega_n\pi}{\omega_d}}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\pi+\theta)\right) = A\left(1 + \frac{e^{\frac{-\xi\,\omega_n\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\theta)\right)$$



$$\therefore \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \qquad\qquad MP = \frac{y(t_p)}{A} - 1 = \exp\left(\frac{-\pi\,\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

Al momento de hacer cuentas, para armar $y(t)$ se obtiene ξ del MP y luego ω_n de t_p

$$\left[1 + \frac{\pi^2}{\ln^2(MP)}\right]\xi^2 = 1 \;\Rightarrow\; \xi = \frac{-\ln(MP)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(MP)}} \qquad\qquad \omega_n = \frac{\pi}{t_p\,\sqrt{1-\xi^2}}$$

El tiempo de establecimiento, setting time o t_s es cuando la oscilación se reduce al 2%

$$\frac{e^{-\xi\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\xi^2}} = 0.02 \;\Rightarrow\; e^{-\xi\omega_n t_s} = 0.02\,\sqrt{1-\xi^2} \;\Rightarrow\; t_s = \frac{-\ln\left(0.02\,\sqrt{1-\xi^2}\right)}{\xi\,\omega_n} \cong \frac{4}{\xi\,\omega_n}$$

Ejemplito de Segundo Orden P6-1C

c) Hallar los valores del coeficiente de amortiguamiento ξ y de la frecuencia natural ω_n para que la respuesta al escalón posea un sobrepico del 5% y un tiempo de establecimiento al 5% de 2 seg.

$$MP = \exp\left(\frac{-\pi\,\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \;\Rightarrow\; \xi = \frac{-\ln(0.05)}{\sqrt{\pi^2+\ln^2(0.05)}} \cong \frac{3}{\sqrt{\pi^2+9}} \cong 0.69$$

$$t_s = \frac{-\ln\left(0.05\,\sqrt{1-\xi^2}\right)}{\xi\,\omega_n} \cong \frac{3.32}{\xi\,\omega_n} \;\Rightarrow\; \omega_n \cong \frac{3.32}{\xi\,t_s} = \frac{3.32}{0.69*2} \cong 2.41$$

Ejercicio 3 P6-3

Se desea que la planta G(s), trabajando en Lazo Cerrado (realimentación unitaria negativa), presente un sobrepico del 5% y un tiempo de establecimiento al 2% de 3 segundos en la respuesta a un escalón.

$$G(s) = \frac{K}{(s+2)(s+2/3)}$$

Es un lazo cerrado compuesto de un único bloque G, entonces

$$T(s) = \frac{G}{1+G} = \frac{K}{(s+2)\left(s+\frac{2}{3}\right)} * \frac{(s+2)\left(s+\frac{2}{3}\right)}{(s+2)\left(s+\frac{2}{3}\right)+K} = \frac{K}{s^2+\frac{8}{3}s+\frac{4}{3}+K}$$

El amortiguamiento solo depende del sobrepico (igual al 1C), entonces $\xi \cong 0.69$

Para una oscilación del 2% se aproxima: $t_s\,\xi\,\omega_n \cong 4 \;\Rightarrow\; \omega_n \cong 1.93$

$$T(s) = \frac{A\,(\omega_n)^2}{s^2+2\,\xi\,\omega_n\,s+(\omega_n)^2} \;\Rightarrow\; K = A\,\omega^2 = \omega^2 - \frac{4}{3} \cong 2.39 \;\Rightarrow\; A = 0.64$$

Respuesta final: la ganancia K necesaria es 2.39, y el valor final de salida es 0.64