Aula 2

Geometria Euclidiana
Axiomas sobre Medição de Segmentos

31 de março de 2025

Igor Oliveira
igoroliveira@imd.ufrn.br

Instituto Metrópole Digital
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal-RN

Índice

Axioma III_1

A todo par de pontos do plano corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se e somente se os pontos são coincidentes.

O número a que se refere este axioma é chamado de distância entre os pontos ou é referido como o comprimento do segmento determinado pelos dois pontos. A unidade de medida utilizada está implícita no enunciado do axioma e será fixada de agora em diante ao longo do texto.

Axioma III_2

Axioma III_2

Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.

Ao aplicarmos este axioma, o número que corresponde a um ponto da reta é denominado <u>coordenada</u> daquele ponto.
Se a e b são as coordenadas dos pontos A e B, respectivamente, denotamos o comprimento do segmento AB por $\overline{AB}$ e calculamos

$$\overline{AB} = |b - a| .$$

Axioma III_3

Se o ponto C encontra-se entre A e B, então,

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}.$$

Relação de ordem dos pontos da reta

Mediante os axiomas de medição e os de ordem, relacionaremos a ordenação dos pontos de uma reta com a ordenação dos números reais.

Proposição 2.1

Se, em uma semi-reta S_{AB}, considerarmos um segmento AC com $\overline{AC} < \overline{AB}$, então o ponto C estará entre A e B.

Teorema 2.2

Sejam A, B e C pontos distintos de uma mesma reta cujas coordenadas são, respectivamente, a, b e c. O ponto C está entre A e B se, e somente se, o número c está entre a e b ($a < c < b$ ou $b < c < a$).

Relação de ordem dos pontos da reta

Mediante os Axiomas de relação e ordem, temos os seguintes corolários, onde X, Y e P são pontos com coordenadas x, y e p, respectivamente:

Corolário

O conjunto constituído por todo ponto P tal que $x \leq p \leq y$ é igual ao segmento XY.

Corolário

Sejam X e Y pontos distintos tais que $x < y$.
O conjunto constituído por todo ponto P tal que $x \leq p$ é a semi-reta de origem X contendo o ponto Y e denotada por S_{XY}.
O conjunto constituído por todo ponto P tal que $p \leq y$ é a semi-reta de origem Y contendo o ponto X e denotada por S_{YX}.

Ponto médio

Definição 2.3

Chamamos de ponto médio do segmento AB a um ponto C, deste segmento, tal que $\overline{AC} = \overline{CB}$.

Teorema 2.4

Um segmento tem exatamente um ponto médio.

Distância

Observação

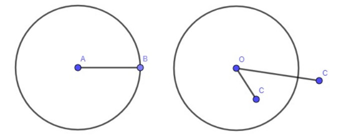
A noção de distância é uma das noções mais básicas da geometria. Ela satisfaz às seguintes propriedades para quaisquer pontos A, B e C do plano:

1) $\overline{AB} \geq 0$. Além disso, $\overline{AB} = 0$ se, e somente se, $A = B$.
2) $\overline{AB} = \overline{BA}$.
3) Desigualdade triangular: $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$. A igualdade ocorre se, e somente se, B pertencer ao segmento AC.

Círculo

Definição 2.5

Seja A um ponto do plano e r um número real positivo. O círculo de centro A e raio r é o conjunto constituído por todos os pontos B do plano tais que $\overline{AB} = r$.



- É consequência do axioma III_2 que podemos traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
- Seja C um ponto do plano. Se $\overline{AC} < r$, dizemos que C está dentro do círculo. Caso $\overline{AC} > r$, então dizemos que C está fora do círculo. Chamamos de disco de raio r e centro A o conjunto dos pontos que estão dentro do círculo.

Conjunto limitado

Diz-se que um conjunto do plano é limitado se for possível traçar um círculo que o contenha. Do contrário, diz-se que ele é ilimitado. Por exemplo, qualquer segmento é limitado.

Exercícios do capítulo 1

Diz-se que três ou mais pontos são colineares quando eles todos pertencem a uma mesma reta. Do contrário, diz-se que eles são não colineares.

1. São dados pontos A, B, C e D colineares com coordenadas a, b, c e d, tais que, $a < b < c < d$. Determine quais desses conjuntos são iguais e depois demonstre duas das igualdades apresentadas por você.

a. $AB \cup BC$;
b. $AB \cap BC$;
c. $AC \cap BD$;
d. $AB \cap CD$;
e. $S_{AB} \cap S_{BC}$;
f. $S_{AB} \cap S_{AD}$;
g. $S_{CB} \cap S_{BC}$;
h. $S_{AB} \cup S_{BC}$.

2. Prove que existem infinitos pontos em um segmento.

3. Um subconjunto do plano é <u>convexo</u> se o segmento ligando quaisquer dois de seus pontos está totalmente nele contido. Os exemplos mais simples de conjuntos convexos são o próprio plano e qualquer semi-plano. Mostre que:

a. A interseção de dois convexos é ainda um convexo;

b. A interseção de convexos é ainda um convexo;
Dica: Para isso, suponha que o resultado é válido para um $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrário, ou seja, que a interseção de n convexos é convexo e prove que a interseção de $n+1$ convexos ainda é convexo. Tal técnica de demonstração é conhecida como Indução finita.

c. Mostre, exibindo um contra-exemplo, que a união de convexos pode não ser um convexo.

Exercícios do capítulo 1

4. Mostre que três pontos não colineares determinam três retas. Quantas retas são determinadas por quatro pontos, sendo quaisquer três deles não colineares?
5. Discuta a seguinte questão, utilizando apenas os conhecimentos geométricos estabelecidos, até agora, em sala de aula: Existem retas que não se interceptam?
6. Porque o conjunto de todos os pontos do plano não pode ser uma reta? Pode o conjunto vazio ser uma reta do plano?

7. São dados três pontos A, B e C com B entre A e C. Sejam M e N os pontos médios de AB e BC respectivamente. Mostre que $\overline{MN} = \frac{(\overline{AB}+\overline{BC})}{2}$.

8. São dados três pontos A, B e C com C entre A e B. Sejam M e N os pontos médios de AB e BC respectivamente. Mostre que $\overline{MN} = \frac{(\overline{AB}-\overline{BC})}{2}$.

9. Considere três pontos colineares A, B e C, sendo que B fica entre A e C e $\overline{AB} = \overline{BC}$. Se M é o ponto médio de AB e N é o ponto médio de BC, mostre que $\overline{MN} = \overline{AB}$.

10. São dados pontos A, B, C e D colineares com coordenadas x, y, z e w, tais que $x < y < z < w$. Prove que $\overline{AC} = \overline{BD}$ se, e somente se, $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Exercícios do capítulo 2

11. Se P é o ponto de interseção de círculos de raio r e centros em A e B, mostre que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

12. Usando régua e compasso, descreva um método para construção de um triângulo com dois lados de mesmo comprimento. (Chamamos tal triângulo de triângulo isósceles).

13. Usando régua e compasso, descreva um método para construção de um triângulo com os três lados de mesmo comprimento. (Chamamos tal triângulo de triângulo equilátero).

14. Descreva um método para construção de um triângulo de lados 3, 4 e 6.

15. Considere um círculo de raio r. Mostre que a distância entre quaisquer dois pontos situados dentro do círculo é menor do que $2r$.

16. Uma emissora de rádio transmite com potência suficiente para alcançar qualquer receptor situado a menos de $100km$ de sua antena. Justifique a veracidade da seguinte afirmação: sabendo-se que é possível viajar da cidade A para a cidade B ouvindo no rádio continuamente a transmissão daquela emissora, conclui-se que a distância entre A e B é de, no máximo, $200km$.

Exercícios do capítulo 2

17. Prove que a união de uma quantidade finita de conjuntos limitados é ainda um conjunto limitado.

18. Mostre que, dado um ponto P e um conjunto limitado M, existe um disco com centro em P que contém M.

19. Prove que as retas são conjuntos ilimitados.

Bibliografia

[1] BARBOSA, João L M.
Geometria Euclidiana Plana.
11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.