MATE 5201: Tarea 4

Due on 8 de octubre

Prof. Alejandro Velez , C41, 8 de octubre

Sergio Rodriguez

Problem 1

(6 puntos) – Demuestre que un espacio metrico (X, d) es conexo si y solo si los unicos subconjuntos E abiertos y cerrados de X son $E = \emptyset$ y $E = X$.

Prueba:

($\Longrightarrow$)

Suponga que (X, d) es conexo. Note que $x \in \emptyset \Longrightarrow \exists r \in \mathbb{R}$ tal que $B(x; r) \in X \Longrightarrow \emptyset$ es abierto y $\emptyset^{\complement} = X$ es cerrado. Tambien $x \in \emptyset \Longrightarrow U_r(x) \setminus \{x\} \cap X \neq \emptyset \Longrightarrow \emptyset$ es cerrado y $\emptyset^{\complement} = X$ es abierto. Entonces, solo falta probar que estos subconjuntos son los unicos que son abiertos y cerrados. Haremos esto por contrareciproco.

Suponga que $E \subsetneq X$ con $E \neq \emptyset$ es abierto y cerrado. Es claro que $E^{\complement} \neq \emptyset$, $E \cup E^{\complement} = X$, y $E \cap E^{\complement} = \emptyset$. Como E es cerrado, tenemos que $E = \overline{E} \Longrightarrow \overline{E} \cap E^{\complement} = \emptyset$. Similarmente, como E es abierto, $E^{\complement}$ es cerrado, lo que implica que $E^{\complement} = \overline{E^{\complement}} \Longrightarrow E \cap \overline{E^{\complement}} = \emptyset$.

$\therefore$ E y $E^{\complement}$ estan separados $\Longrightarrow X$ no es conexo.

($\Longleftarrow$)

Por contrareciproco, suponga que X no es conexo, entonces $\exists A, B \subseteq X$ con $A, B \neq \emptyset$, $A, B \neq X$, y $A \cup B = X$ tal que $\overline{A} \cap B = \emptyset$ y $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Note que $A \cup B = X$ y A y B son disjuntos, lo que implica que los conjuntos son complementos en X. Entonces llame $E := A$ y $E^{\complement} := B$.

Tome x punto limite de E y note que $x \notin E^{\complement}$ ($\because x \in E^{\complement} \Longrightarrow x \in \overline{E} \cap E^{\complement}$ ※) $\Longrightarrow x \in E \Longrightarrow E$ es cerrado. Similarmente, tome x punto limite de $E^{\complement}$ y note que $x \notin E \Longrightarrow x \in E^{\complement} \Longrightarrow E^{\complement}$ es cerrado $\Longrightarrow E$ es abierto.

$\therefore \exists E \subseteq X$ con $E \neq \emptyset$ y $E \neq X$ abierto y cerrado.

MEP

Problem 2

(4 puntos) – Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo, pruebe que E es conexo.

Prueba:

MEP

Problem 3

(6 puntos) – Suponga que $0 < x_1 < 1$, y defina la sucesion recursiva: $x_{n+1} := 1 - \sqrt{1 - x_n}$. Demuestre que $\{x_n\}$ es decreciente, con $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$. Luego pruebe que $\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}$.

Prueba:

MEP

Problem 4

(4 puntos) – Sean $\{x_n\}, \{y_n\}$ *sucesiones en un espacio metrico* (X, d)*, tales que* $x_n \to x$ *y* $y_n \to y$ *en* X*. Demuestre que* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$*.*

Prueba:

MEP

Problem 5

(5 puntos) – En (X, d)*, si* $E \subseteq X$ *es completo, pruebe que* E *es cerrado.*

Prueba:

MEP

Problem 6

(4 puntos) – Demuestre que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ *de la siguiente forma: dado* $x \in \mathbb{R}$*, demuestre que existe una sucesion* $\{x_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ *tal que* $x_n \to x$*.*

Prueba:

MEP

Problem 7

(4 puntos) – Sea $\{x_n\}$ *sucesion en* (X, d)*, y sea* $E_n := \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$*. Demuestre que* $\{x_n\}$ *es sucesion de Cauchy si y solamente si* $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(E_n) = 0$*.*

Prueba:

MEP

Problem 8

(8 puntos) – Sea $\{x_n\}$ *una sucesion de numeros reales, y definamos:*

$$y_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j, \qquad z_n := \frac{x_n}{n}. \tag{1}$$

(a) - (4 puntos) – Si $x_n \to x$ *en* $\mathbb{R}$*, demuestre que* $y_n \to x$*.*

Prueba:

MEP

(b) - (4 puntos) – Si $(x_{n+1} - x_n) \to x$ *en* $\mathbb{R}$*, pruebe que* $z_n \to x$*.*

Prueba:

MEP

Problem 9

(5 puntos) – Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ dos sucesiones de Cauchy en (X, d), y definamos $\beta_n := d(x_n, y_n)$. Pruebe que $\{\beta_n\}$ converge en $\mathbb{R}$.

Prueba:

MEP

Problem 10

(4 puntos) – Considere la sucesion $\{a_n\}$ definida como sigue:

$$a_1 = 0; \qquad a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2}; \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n}; \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

Calcule $\limsup_{n\to\infty} a_n$ y $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Prueba:

MEP

Problem 11

(4 puntos) – Si $\{x_n\}$ es una sucesion acotada en $\mathbb{R}$, demuestre que:

$$\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty}(x_n) \qquad y \qquad \liminf_{n\to\infty}(-x_n) = -\limsup_{n\to\infty}(x_n) \tag{3}$$

Prueba:

MEP