MATE 5201: Tarea 4

Due on 8 de octubre

Prof. Alejandro Velez , C41, 8 de octubre

Sergio Rodriguez

Problem 1

(6 puntos) – Demuestre que un espacio metrico (X, d) es conexo si y solo si los unicos subconjuntos E abiertos y cerrados de X son $E = \emptyset$ y $E = X$.

Prueba:

$(\Longrightarrow)$

Suponga que (X, d) es conexo. Note que $x \in \emptyset \Longrightarrow \exists r \in \mathbb{R}$ tal que $B(x; r) \in X \Longrightarrow \emptyset$ es abierto y $\emptyset^{\mathsf{C}} = X$ es cerrado. Tambien $x \in \emptyset \Longrightarrow U_r(x) \setminus \{x\} \cap X \neq \emptyset \Longrightarrow \emptyset$ es cerrado y $\emptyset^{\mathsf{C}} = X$ es abierto. Entonces, solo falta probar que estos subconjuntos son los unicos que son abiertos y cerrados. Haremos esto por contrareciproco.

Suponga que $E \subsetneq X$ con $E \neq \emptyset$ es abierto y cerrado. Es claro que $E^{\mathsf{C}} \neq \emptyset$, $E \cup E^{\mathsf{C}} = X$, y $E \cap E^{\mathsf{C}} = \emptyset$. Como E es cerrado, tenemos que $E = \overline{E} \Longrightarrow \overline{E} \cap E^{\mathsf{C}} = \emptyset$. Similarmente, como E es abierto, E^{C} es cerrado, lo que implica que $E^{\mathsf{C}} = \overline{E^{\mathsf{C}}} \Longrightarrow E \cap \overline{E^{\mathsf{C}}} = \emptyset$.

$\therefore$ E y E^{C} estan separados $\Longrightarrow X$ no es conexo.

$(\Longleftarrow)$

Por contrareciproco, suponga que X no es conexo, entonces $\exists A, B \subseteq X$ con $A, B \neq \emptyset$, $A, B \neq X$, y $A \cup B = X$ tal que $\overline{A} \cap B = \emptyset$ y $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Note que $A \cup B = X$ y A y B son disjuntos, lo que implica que los conjuntos son complementos en X. Entonces llame $E := A$ y $E^{\mathsf{C}} := B$.

Tome x punto limite de E y note que $x \notin E^{\mathsf{C}}$ ($\because x \in E^{\mathsf{C}} \Longrightarrow x \in \overline{E} \cap E^{\mathsf{C}}$ ※) $\Longrightarrow x \in E \Longrightarrow E$ es cerrado. Similarmente, tome x punto limite de E^{C} y note que $x \notin E \Longrightarrow x \in E^{\mathsf{C}} \Longrightarrow E^{\mathsf{C}}$ es cerrado $\Longrightarrow E$ es abierto.

$\therefore$ $\exists E \subseteq X$ con $E \neq \emptyset$ y $E \neq X$ abierto y cerrado.

MEP

Problem 2

(4 puntos) – Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo, pruebe que E es conexo.

Prueba:

Por contrareciproco, suponga que E no es conexo, entonces $\exists A, B \subseteq E$ con $A, B \neq \emptyset$, $A, B \neq E$, y $A \cup B = E$ tal que $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Fije $a \in A \subseteq E$, y $b \in B \subseteq E$. Ahora, sean:

$$\begin{aligned} L_A &:= \{\lambda \in [0,1] \mid \lambda a + (1-\lambda) b \in A\}, y \\ L_B &:= \{\lambda \in [0,1] \mid \lambda a + (1-\lambda) b \in B\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Note que ambos L_A y L_B son subconjuntos de $\mathbb{R}$, $1 \in L_A \Longrightarrow L_A \neq \emptyset$, $0 \in L_B \Longrightarrow L_B \neq \emptyset$, y ambos L_A y L_B estan claramente acotados por 0 y 1. Entonces, por la propiedad de la cota superior minima y la propiedad de la cota inferior maxima de los numeros reales, tenemos que $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = \sup(L_A)$ y $\beta = \inf(L_B)$.

Es claro que $\alpha \geq 0$ y $\beta \leq 1$. Pero ahora note que $\alpha < \beta$, porque si $\alpha \geq \beta$, entonces $\exists \lambda$ tal que $\lambda a + (1-\lambda) b \in A \cap B$, lo que contradice que E no es conexo. Entonces, podemos usar la densidad en los reales para conseguir $\lambda \in [0,1]$ tal que $\alpha < \lambda < \beta$. Pero esto implica que $\lambda a + (1-\lambda)b \notin A$, por definicion de α, y $\lambda a + (1-\lambda)b \notin B$, por definicion de β. Entonces, encontramos un $\lambda \in [0,1]$ tal que $\lambda a + (1-\lambda)b \notin E$.

$\therefore$ E no es convexo.

MEP

Problem 3

(6 puntos) – Suponga que $0 < x_1 < 1$, y defina la sucesion recursiva: $x_{n+1} := 1 - \sqrt{1 - x_n}$. Demuestre que $\{x_n\}$ es decreciente, con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Luego pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}$.

Prueba:

MEP

Problem 4

(4 puntos) – Sean $\{x_n\}, \{y_n\}$ sucesiones en un espacio metrico (X,d), tales que $x_n \to x$ y $y_n \to y$ en X. Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x,y)$.

Prueba:

Fije $\varepsilon > 0$. Entonces $\exists N_x, N_y \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_x \implies d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $n > N_y \implies d(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, $\forall n > N := \max\{N_x, N_y\}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, x) + d(x, y_n) \\
&\leq d(x_n, x) + d(x,y) + d(y, y_n) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + d(x,y) + \frac{\varepsilon}{2} = d(x,y) + \varepsilon \qquad (2) \\
\implies d(x_n, y_n) - d(x,y) &< \varepsilon \\
\implies |d(x_n, y_n) - d(x,y)| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x,y)$

MEP

Problem 5

(5 puntos) – En (X,d), si $E \subseteq X$ es completo, pruebe que E es cerrado.

Prueba:

Por contrareciproco, suponga que E no es cerrado. Entonces $\exists x \in E' \setminus E$. Ademas, E es infinito, porque todo subconjunto finito de un espacio metrico es cerrado. Tambien, $E^0 \neq \emptyset$, porque si lo fuera, E estaria compuesto exclusivamente de puntos aislados, lo que implicaria que $E' = \emptyset$. Pero entonces $E' = \emptyset \subseteq E$. ※

Tome $x_1 \in E^0$ y note que $E^0 \subseteq E \wedge x \notin E \implies x_1 \neq x \implies d(x_1, x) > 0$. Entonces, $\exists x_2 \in E^0$ tal que $d(x_2, x) = \frac{1}{2}d(x_1, x) > 0$. Haciendo esto recursivamente, podemos definir $x_n := \alpha \in E^0$ con $d(\alpha, x) = \frac{1}{2}d(x_{n-1}, x)$. Note que $\{x_n\} \subseteq E^0 \subseteq E$.

Note que $d(x_1, x) = \frac{d(x_1,x)}{1} = \frac{d(x_1,x)}{2^0} = \frac{d(x_1,x)}{2^{1-1}}$ y si $d(x_k, x) = \frac{d(x_1,x)}{2^{k-1}}$, entonces $d(x_{k+1}) = \frac{1}{2}d(x_k, x) = \frac{1}{2}\frac{d(x_1,x)}{2^{k-1}} = \frac{d(x_1,x)}{2^{(k+1)-1}}$. Por lo tanto, por induccion, $d(x_n, x) = \frac{d(x_1,x)}{2^{n-1}}$.

Fije $\varepsilon > 0$. Considere $N := \lceil \log_2(d(x_1, x) \cdot \varepsilon) \rceil + 1 \in \mathbb{N}$. En el caso donde $\log_2(d(x_1, x) \cdot \varepsilon) \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$d(x_N, x) = \frac{d(x_1, x)}{2^{N-1}} = \frac{d(x_1, x)}{2^{\log_2(d(x_1,x)\cdot\varepsilon)+1-1}} = \frac{d(x_1, x)}{d(x_1, x) \cdot \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} < \varepsilon \tag{3}$$

Y como $n > N \implies \frac{d(x_1,x)}{2^{n-1}} < \frac{d(x_1,x)}{2^{N-1}}$, la desigualdad (3) se mantiene para $n > N$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} x_n = x \notin E$.

Fije $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = x, \exists N', N'' \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N' \ \wedge \ m > N'' \implies d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \ \wedge \ d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

Entonces:

$$m, n > N := \max\{N', N''\} \implies d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{5}$$

Por lo tanto, $\{x_n\} \subseteq E$ es de Cauchy.

Entonces construimos una sucesion de Cauchy $\{x_n\}$ en E que no converge en E.

$\therefore$ E no es completo.

MEP

Problem 6

(4 puntos) – Demuestre que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ de la siguiente forma: dado $x \in \mathbb{R}$, demuestre que existe una sucesion $\{x_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ tal que $x_n \to x$.

Prueba:

MEP

Problem 7

(4 puntos) – Sea $\{x_n\}$ sucesion en (X, d), y sea $E_n := \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$. Demuestre que $\{x_n\}$ es sucesion de Cauchy si y solamente si $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(E_n) = 0$.

Prueba:

$(\implies)$

Fije $\varepsilon > 0$. Como $\{x_n\}$ es de Cauchy, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > N \implies d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Esto implica que $\frac{\varepsilon}{2}$ es una cota superior para $D_n := \{d(x,y) \mid x, y \in E_n\} \subseteq \mathbb{R}$. Claramente, $D_n \neq \emptyset$, entonces $\exists \sup(D_n) \in \mathbb{R}$. Note que, por definicion, $\sup(D_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} \implies \sup(D_n) < \varepsilon$. Pero:

$$\begin{aligned} &\sup(D_n) = \operatorname{diam}(E_n) \\ \implies &\operatorname{diam}(E_n) < \varepsilon \\ \implies &|\operatorname{diam}(E_n) - 0| < \varepsilon \end{aligned} \tag{6}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(E_n) = 0$.

$(\Longleftarrow)$

Fije $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(E_n) = 0$, tenemos que $\exists N' \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{aligned} N > N' \implies &|\operatorname{diam}(E_N) - 0| < \varepsilon \\ \implies &\operatorname{diam}(E_N) < \varepsilon \end{aligned} \tag{7}$$

Pero $\operatorname{diam}(E_N) = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in E_N\} \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon \ \forall m, n > N$.

$\therefore \{x_n\}$ es de Cauchy.

MEP

Problem 8

(8 puntos) – Sea $\{x_n\}$ una sucesion de numeros reales, y definamos:

$$y_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j, \qquad z_n := \frac{x_n}{n}. \tag{8}$$

(a) - (4 puntos) – Si $x_n \to x$ en $\mathbb{R}$, demuestre que $y_n \to x$.

Prueba:

MEP

(b) - (4 puntos) – Si $(x_{n+1} - x_n) \to x$ en $\mathbb{R}$, pruebe que $z_n \to x$.

Prueba:

MEP

Problem 9

(5 puntos) – Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ dos sucesiones de Cauchy en (X, d), y definamos $\beta_n := d(x_n, y_n)$. Pruebe que $\{\beta_n\}$ converge en $\mathbb{R}$.

Prueba:

Fije $\varepsilon > 0$. Entonces $\exists N_x, N_y \in \mathbb{N}$ tales que $m, n > N_x \implies d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $m, n > N_y \implies d(y_m, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ahora, note que $\forall m, n > N := \max\{N_x, N_y\}$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
d(x_m, y_m) &\leq d(x_m, x_n) + d(x_n, y_m) \\
&\leq d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_m) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + d(x_n, y_n) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon + d(x_n, y_n) \\
\Longrightarrow d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) &< \varepsilon \Longrightarrow |\beta_m - \beta_n| < \varepsilon
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Entonces $\{\beta_n\}$ es de Cauchy, pero $\{\beta_n\} \subseteq \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ es completo.

$\therefore$ $\{\beta_n\}$ converge.

MEP

Problem 10

(4 puntos) – Considere la sucesion $\{a_n\}$ definida como sigue:

$$a_1 = 0; \qquad a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2}; \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n}; \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{10}$$

Calcule $\limsup_{n\to\infty} a_n$ *y* $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Prueba:

MEP

Problem 11

(4 puntos) – Si $\{x_n\}$ es una sucesion acotada en $\mathbb{R}$, demuestre que:

$$\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty}(x_n) \qquad y \qquad \liminf_{n\to\infty}(-x_n) = -\limsup_{n\to\infty}(x_n) \tag{11}$$

Prueba:

MEP