MATE 5201: Tarea 5

Due on 2 de diciembre

Prof. Alejandro Velez , C41, 2 de diciembre

Sergio Rodriguez

Problem 1

(8 puntos) – Dado $\{a_n] \in \mathbb{R}$ sucesion con $a_n > 0$ para $n \geq N_0$ (algun $N_0 \in \mathbb{N}$), pruebe que si $\sum a_k$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{|a_k|}}{k}$ converge.

Prueba:

MEP

Problem 2

(8 puntos) – Sea $\{a_n\} \in \mathbb{N}$ sucesion de numeros naturales con $a_n \leq n-1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \in \mathbb{Q}$ si y solo si existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = n-1$ para todo $n \geq N_0$.

Prueba:

MEP

Problem 3

(16 puntos) – Dado $a \in (0,1]$ y $s > 1$, definimos la funcion a-zeta de Riemann por:

$$\zeta(s;a) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a+k)^s} \tag{1}$$

La funcion zeta de Riemann clasica es cuando $a = 1$, y se denota por $\zeta(s)$.

(a) - (4 puntos) – Pruebe que $\zeta(\cdot;\cdot)$ esta bien definida.

Prueba:

Note que como a es positivo, $\frac{1}{(a+k)^s} \leq \frac{1}{k^s}$, pero $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ converge por que es una p-serie con $p = s > 1$. Entonces $\zeta(s;a)$ converge.

Ahora note que dados $s_1 > 1, s_2 > 1, a_1, a_2 \in (0,1]$,

$$\begin{aligned} (s_1, a_1) &= (s_2, a_2) \\ \implies s_1 &= s_2 \wedge a_1 = a_2 \end{aligned} \tag{2}$$

Ahora usaremos induccion. Note que $a_1^{s_1} = a_2^{s_2}$. Ahora:

$$\begin{aligned} & S_j(s_1, a_1) = S_j(s_2, a_2) \\ \implies & \sum_{k=0}^{j} (a_1 + k)^{s_1} = \sum_{k=0}^{j} (a_2 + k)^{s_2} \\ \implies & \sum_{k=0}^{j} (a_1 + k)^{s_1} + (a_1 + j + 1)^{s_1} = \sum_{k=0}^{j} (a_2 + k)^{s_2} + (a_2 + j + 1)^{s_2} \\ \implies & \sum_{k=0}^{j+1} (a_1 + k)^{s_1} = \sum_{k=0}^{j+1} (a_2 + k)^{s_2} \\ \implies & S_{j+1}(s_1, a_1) = S_{j+1}(s_2, a_2) \end{aligned} \tag{3}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} &S_n(s_1, a_1) = S_n(s_2, a_2) \\ \implies &\lim_{n\to\infty} S_n(s_1, a_1) = \lim_{n\to\infty} S_n(s_2, a_2) \end{aligned} \tag{4}$$

$\therefore \zeta(s_1; a_1) = \zeta(s_2; a_2)$ y ζ esta bien definida.

MEP

(b) - (6 puntos) – Demuestre que $\sum_{j=1}^{m} \zeta\left(s; \frac{j}{m}\right) = m^s \zeta(s)$.

Prueba:

MEP

(c) - (6 puntos) – Pruebe que $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k^{-s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$.

Prueba:

MEP

Problem 4

(8 puntos) - Dadas las sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$, *si* $\sum a_k$ *converge y* $\{b_n\}$ *es sucesion monotonica acotada, demuestre que* $\sum a_k b_k$ *converge.*

Prueba:

MEP