MATE 5201: Tarea 4

Due on 8 de octubre

Prof. Alejandro Velez , C41, 8 de octubre

Sergio Rodriguez

Problem 1

(6 puntos) – Demuestre que un espacio metrico (X, d) es conexo si y solo si los unicos subconjuntos E abiertos y cerrados de X son $E = \emptyset$ y $E = X$.

Prueba:

$(\Longrightarrow)$

Suponga que (X, d) es conexo. Note que $x \in \emptyset \implies \exists r \in \mathbb{R}$ tal que $B(x; r) \in X \implies \emptyset$ es abierto y $\emptyset^{\complement} = X$ es cerrado. Tambien $x \in \emptyset \implies U_r(x) \setminus \{x\} \cap X \neq \emptyset \implies \emptyset$ es cerrado y $\emptyset^{\complement} = X$ es abierto. Entonces, solo falta probar que estos subconjuntos son los unicos que son abiertos y cerrados. Haremos esto por contrareciproco.

Suponga que $E \subsetneq X$ con $E \neq \emptyset$ es abierto y cerrado. Es claro que $E^{\complement} \neq \emptyset$, $E \cup E^{\complement} = X$, y $E \cap E^{\complement} = \emptyset$. Como E es cerrado, tenemos que $E = \overline{E} \implies \overline{E} \cap E^{\complement} = \emptyset$. Similarmente, como E es abierto, $E^{\complement}$ es cerrado, lo que implica que $E^{\complement} = \overline{E^{\complement}} \implies E \cap \overline{E^{\complement}} = \emptyset$.

$\therefore$ E y $E^{\complement}$ estan separados $\implies X$ no es conexo.

$(\Longleftarrow)$

Por contrareciproco, suponga que X no es conexo, entonces $\exists A, B \subseteq X$ con $A, B \neq \emptyset$, $A, B \neq X$, y $A \cup B = X$ tal que $\overline{A} \cap B = \emptyset$ y $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Note que $A \cup B = X$ y A y B son disjuntos, lo que implica que los conjuntos son complementos en X. Entonces llame $E := A$ y $E^{\complement} := B$.

Tome x punto limite de E y note que $x \notin E^{\complement}$ ($\because x \in E^{\complement} \implies x \in \overline{E} \cap E^{\complement}$ ※) $\implies x \in E \implies E$ es cerrado. Similarmente, tome x punto limite de $E^{\complement}$ y note que $x \notin E \implies x \in E^{\complement} \implies E^{\complement}$ es cerrado $\implies E$ es abierto.

$\therefore \exists E \subseteq X$ con $E \neq \emptyset$ y $E \neq X$ abierto y cerrado.

MEP

Problem 2

(4 puntos) – Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo, pruebe que E es conexo.

Prueba:

Por contrareciproco, suponga que E no es conexo, entonces $\exists A, B \subseteq E$ con $A, B \neq \emptyset$, $A, B \neq E$, y $A \cup B = E$ tal que $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Fije $a \in A \subseteq E$, y $b \in B \subseteq E$. Ahora, sean:

$$\begin{aligned} L_A &:= \{\lambda \in [0, 1] \mid \lambda a + (1 - \lambda) b \in A\}, y \\ L_B &:= \{\lambda \in [0, 1] \mid \lambda a + (1 - \lambda) b \in B\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Note que ambos L_A y L_B son subconjuntos de $\mathbb{R}$, $1 \in L_A \implies L_A \neq \emptyset$, $0 \in L_B \implies L_B \neq \emptyset$, y ambos L_A y L_B estan claramente acotados por 0 y 1. Entonces, por la propiedad de la cota superior minima y la propiedad de la cota inferior maxima de los numeros reales, tenemos que $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = \sup(L_A)$ y $\beta = \inf(L_B)$.

Es claro que $\alpha \geq 0$ y $\beta \leq 1$. Pero ahora note que $\alpha < \beta$, porque si $\alpha \geq \beta$, entonces $\exists \lambda$ tal que $\lambda a + (1 - \lambda) b \in A \cap B$, lo que contradice que E no es conexo. Entonces, podemos usar la densidad en los reales para conseguir $\lambda \in [0,1]$ tal que $\alpha < \lambda < \beta$. Pero esto implica que $\lambda a + (1-\lambda)b \notin A$, por definicion de α, y $\lambda a + (1-\lambda)b \notin B$, por definicion de β. Entonces, encontramos un $\lambda \in [0,1]$ tal que $\lambda a + (1-\lambda)b \notin E$.

$\therefore$ E no es convexo.

MEP

Problem 3

(6 puntos) – Suponga que $0 < x_1 < 1$, y defina la sucesion recursiva: $x_{n+1} := 1 - \sqrt{1 - x_n}$. Demuestre que $\{x_n\}$ es decreciente, con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Luego pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}$.

Prueba:

MEP

Problem 4

(4 puntos) – Sean $\{x_n\}, \{y_n\}$ sucesiones en un espacio metrico (X,d), tales que $x_n \to x$ y $y_n \to y$ en X. Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x,y)$.

Prueba:

Fije $\varepsilon > 0$. Entonces $\exists N_x, N_y \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_x \implies d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $n > N_y \implies d(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, $\forall n > N := \max\{N_x, N_y\}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, x) + d(x, y_n) \\ &\leq d(x_n, x) + d(x,y) + d(y, y_n) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + d(x,y) + \frac{\varepsilon}{2} = d(x,y) + \varepsilon \qquad (2) \\ \implies d(x_n, y_n) &- d(x,y) < \varepsilon \\ \implies |d(x_n, y_n) &- d(x,y)| < \varepsilon \end{aligned}$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x,y)$

MEP

Problem 5

(5 puntos) – En (X,d), si $E \subseteq X$ es completo, pruebe que E es cerrado.

Prueba:

Por contrareciproco, suponga que E no es cerrado. Entonces $\exists x \in E' \setminus E$. Ademas, E es infinito, porque todo subconjunto finito de un espacio metrico es cerrado. Tambien, $E^0 \neq \emptyset$, porque si lo fuera, E estaria compuesto exclusivamente de puntos aislados, lo que implicaria que $E' = \emptyset$. Pero entonces $E' = \emptyset \subseteq E$. ※

Tome $x_1 \in E^0$ y note que $E^0 \subseteq E \wedge x \notin E \implies x_1 \neq x \implies d(x_1, x) > 0$. Entonces, $\exists x_2 \in E^0$ tal que $d(x_2, x) = \frac{1}{2} d(x_1, x) > 0$. Haciendo esto recursivamente, podemos definir $x_n := \alpha \in E^0$ con $d(\alpha, x) = \frac{1}{2} d(x_{n-1}, x)$. Note que $\{x_n\} \subseteq E^0 \subseteq E$.

Note que $d(x_1, x) = \frac{d(x_1,x)}{1} = \frac{d(x_1,x)}{2^0} = \frac{d(x_1,x)}{2^{1-1}}$ y si $d(x_k, x) = \frac{d(x_1,x)}{2^{k-1}}$, entonces $d(x_{k+1}) = \frac{1}{2} d(x_k, x) = \frac{1}{2} \frac{d(x_1,x)}{2^{k-1}} = \frac{d(x_1,x)}{2^{(k+1)-1}}$. Por lo tanto, por induccion, $d(x_n, x) = \frac{d(x_1,x)}{2^{n-1}}$.

Fije $\varepsilon > 0$. Considere $N := \lceil \log_2(d(x_1, x) \cdot \varepsilon) \rceil + 1 \in \mathbb{N}$. En el caso donde $\log_2(d(x_1, x) \cdot \varepsilon) \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$d(x_N, x) = \frac{d(x_1, x)}{2^{N-1}} = \frac{d(x_1, x)}{2^{\log_2(d(x_1,x)\cdot\varepsilon)+1-1}} = \frac{d(x_1, x)}{d(x_1, x) \cdot \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} < \varepsilon \tag{3}$$

Y como $n > N \implies \frac{d(x_1,x)}{2^{n-1}} < \frac{d(x_1,x)}{2^{N-1}}$, la desigualdad (3) se mantiene para $n > N$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} x_n = x \notin E$.

Fije $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = x, \exists N', N'' \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N' \ \wedge \ m > N'' \implies d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \ \wedge \ d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

Entonces:

$$m, n > N := \max\{N', N''\} \implies d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{5}$$

Por lo tanto, $\{x_n\} \subseteq E$ es de Cauchy.

Entonces construimos una sucesion de Cauchy $\{x_n\}$ en E que no converge en E.

$\therefore E$ no es completo.

MEP

Problem 6

(4 puntos) – Demuestre que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ de la siguiente forma: dado $x \in \mathbb{R}$, demuestre que existe una sucesion $\{x_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ tal que $x_n \to x$.

Prueba:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere el intervalo $\left(\frac{nx-1}{n}, \frac{nx+1}{n}\right)$. Como el intervalo $(nx - 1, nx + 1)$ contiene al menos un entero, podemos escoger $m_n \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{nx-1}{n} < \frac{m_n}{n} < \frac{nx+1}{n}$. Entonces definamos $x_n := \frac{m_n}{n} \in \mathbb{Q}$.

Ahora, fije $\varepsilon > 0$. Entonces, por la propiedad arquimideana, podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$, y entonces es claro que $n > N \implies \frac{1}{n} < \varepsilon$. Pero sabemos que:

$$\begin{aligned} \frac{nx-1}{n} &< x_n < \frac{nx+1}{n} \\ \implies x - \frac{1}{n} &< x_n < x + \frac{1}{n} \\ \implies x - \varepsilon &< x_n < x + \varepsilon \\ \implies |x_n - x| &< \varepsilon \end{aligned} \tag{6}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = x \implies \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

MEP

Problem 7

(4 puntos) – Sea $\{x_n\}$ sucesion en (X, d), y sea $E_n := \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}$. Demuestre que $\{x_n\}$ es sucesion de Cauchy si y solamente si $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(E_n) = 0$.

Prueba:

$(\implies)$

Fije $\varepsilon > 0$. Como $\{x_n\}$ es de Cauchy, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > N \implies d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Esto implica que $\frac{\varepsilon}{2}$ es una cota superior para $D_n := \{d(x, y) \mid x, y \in E_n\} \subseteq \mathbb{R}$. Claramente, $D_n \neq \emptyset$, entonces $\exists \sup(D_n) \in \mathbb{R}$. Note que, por definicion, $\sup(D_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} \implies \sup(D_n) < \varepsilon$. Pero:

$$\begin{aligned} \sup(D_n) &= \operatorname{diam}(E_n) \\ \implies \operatorname{diam}(E_n) &< \varepsilon \\ \implies |\operatorname{diam}(E_n) - 0| &< \varepsilon \end{aligned} \tag{7}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(E_n) = 0.$

$(\impliedby)$

Fije $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(E_n) = 0$, tenemos que $\exists N' \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{aligned} N > N' &\implies |\operatorname{diam}(E_N) - 0| < \varepsilon \\ &\implies \operatorname{diam}(E_N) < \varepsilon \end{aligned} \tag{8}$$

Pero $\operatorname{diam}(E_N) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in E_N\} \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon \ \forall m, n > N$.

$\therefore \{x_n\}$ es de Cauchy.

MEP

Problem 8

(8 puntos) – Sea $\{x_n\}$ una sucesion de numeros reales, y definamos:

$$y_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j, \qquad z_n := \frac{x_n}{n}. \tag{9}$$

(a) - (4 puntos) – Si $x_n \to x$ en $\mathbb{R}$, demuestre que $y_n \to x$.

Prueba:

Note que:

$$y_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - x) \tag{10}$$

Ahora sean $A_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x$ y $B_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - x)$, y note que $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n$.

Es claro que $\lim_{n\to\infty} A_n = x$. Ahora trabajaremos con B_n. Fije $\varepsilon > 0$, entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$. Entonces:

$$B_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}(x_j - x) + \frac{1}{n}\sum_{j=N+1}^{n}(x_j - x) \tag{11}$$

Sean $C_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}(x_j - x)$ y $D_n := \frac{1}{n}\sum_{j=N+1}^{n}(x_j - x)$, y note que $\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} C_n + \lim_{n\to\infty} D_n$.

Note que, usando la propiedad arquimideana, $\exists M \in \mathbb{N}$ tal que $C_n < \frac{N \cdot M}{n} \to 0$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$. Para D_n, tenemos que:

$$D_n < \frac{1}{n}\sum_{j=N+1}^{n} \varepsilon = \frac{n-N}{n} \cdot \varepsilon < \varepsilon \tag{12}$$

Entonces $\lim_{n\to\infty} D_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} B_n = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = x + 0$.

$\therefore \lim_{n\to\infty} y_n = x$

MEP

(b) - (4 puntos) – Si $(x_{n+1} - x_n) \to x$ en $\mathbb{R}$, pruebe que $z_n \to x$.

Prueba:

MEP

Problem 9

(5 puntos) – Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ dos sucesiones de Cauchy en (X, d), y definamos $\beta_n := d(x_n, y_n)$. Pruebe que $\{\beta_n\}$ converge en $\mathbb{R}$.

Prueba:

Fije $\varepsilon > 0$. Entonces $\exists N_x, N_y \in \mathbb{N}$ tales que $m, n > N_x \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $m, n > N_y \Longrightarrow d(y_m, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ahora, note que $\forall m, n > N := \max\{N_x, N_y\}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} d(x_m, y_m) &\leq d(x_m, x_n) + d(x_n, y_m) \\ &\leq d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_m) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + d(x_n, y_n) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon + d(x_n, y_n) \\ \implies d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) &< \varepsilon \implies |\beta_m - \beta_n| < \varepsilon \end{aligned} \tag{13}$$

Entonces $\{\beta_n\}$ es de Cauchy, pero $\{\beta_n\} \subseteq \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ es completo.

$\therefore$ $\{\beta_n\}$ converge.

MEP

Problem 10

(4 puntos) – Considere la sucesion $\{a_n\}$ definida como sigue:

$$a_1 = 0; \qquad a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2}; \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n}; \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{14}$$

Calcule $\limsup_{n\to\infty} a_n$ *y* $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Prueba:

MEP

Problem 11

(4 puntos) – Si $\{x_n\}$ es una sucesion acotada en $\mathbb{R}$, demuestre que:

$$\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty}(x_n) \qquad y \qquad \liminf_{n\to\infty}(-x_n) = -\limsup_{n\to\infty}(x_n) \tag{15}$$

Prueba:

Primero probaremos un resultado auxiliar. Suponga que $E \subseteq \mathbb{R}$ es acotado y no-vacio, y $-E := \{-x \mid x \in E\}$. Entonces sabemos que $-E$ tambien es acotado y no-vacio. Entonces $\sup(-E) \in \mathbb{R}$. Ahora, note que:

$$\begin{aligned} \alpha := \sup(-E) &\implies \alpha \geq -x \qquad \forall x \in E \\ &\implies -\alpha \leq x \qquad \forall x \in E \\ &\implies -\alpha \text{ es una cota inferior para } E. \end{aligned} \tag{16}$$

Ademas, como $\alpha := \sup(-E)$, sabemos que $x \in \mathbb{R}$ con $x \leq \alpha \implies \exists y \in -E$ tal que $x \leq y \leq \alpha$. Entonces, sea $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda \geq -\alpha$, entonces:

$$\begin{aligned} -\lambda \leq \alpha &\implies \exists x \in E \text{ tal que} - \lambda \leq -x \leq \alpha \\ &\implies \lambda \geq x \geq -\alpha \\ &\implies -\alpha = \inf(E) \\ &\implies -\sup(-E) = \inf(E) \end{aligned} \tag{17}$$

$\therefore \sup(-E) = -\inf(E)$

Similarmente, si $\alpha \coloneqq \inf(-E)$, entonces:

$$\begin{aligned} \alpha \leq -x \ \forall x \in E &\Longrightarrow -\alpha \geq x \ \forall x \in E \\ &\Longrightarrow -\alpha \text{ es una cota superior para } E. \end{aligned} \tag{18}$$

Y si $\lambda \in \mathbb{R}$ tiene $\lambda \leq -\alpha$, entonces:

$$\begin{aligned} -\lambda \geq \alpha &\Longrightarrow \exists x \in E \text{ tal que} - \lambda \geq -x \geq \alpha \\ &\Longrightarrow \lambda \leq x \leq -\alpha \\ &\Longrightarrow -\alpha = \sup(E) \\ &\Longrightarrow -\inf(-E) = \sup(E) \end{aligned} \tag{19}$$

$\therefore \inf(-E) = -\sup(E)$

Ahora, como tenemos que $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ es acotada y no-vacia, usando estos resultados, tenemos que:

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty}(-x_n) &= \inf_{n\in\mathbb{N}}\left\{\sup\{-x_k \mid k \geq n\}_n\right\} \\ &= \inf_{n\in\mathbb{N}}\left\{-\inf\{x_k \mid k \geq n\}_n\right\} \\ &= -\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\inf\{x_k \mid k \geq n\}_n\right\} \\ &= -\liminf_{n\to\infty}(x_n) \end{aligned} \tag{20}$$

Y, similarmente:

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty}(-x_n) &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\inf\{-x_k \mid k > n\}_n\right\} \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{-\sup\{x_k \mid k \geq n\}_n\right\} \\ &= -\inf_{n\in\mathbb{N}}\left\{\sup\{x_k \mid k \geq n\}_n\right\} \\ &= -\limsup_{n\to\infty}(x_n) \end{aligned} \tag{21}$$

MEP