MATE 5201: Tarea 5

Due on 2 de diciembre

Prof. Alejandro Velez , C41, 2 de diciembre

Sergio Rodriguez

Problem 1

(8 puntos) – Dado $\{a_n] \in \mathbb{R}$ sucesion con $a_n > 0$ para $n \geq N_0$ (algun $N_0 \in \mathbb{N}$), pruebe que si $\sum a_k$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{|a_k|}}{k}$ converge.

Prueba:

La desigualdad Cauchy-Schwarz nos dice que $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2$.

Si $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{|a_k|}}{k}$ es la sucesion de sumas parciales de la serie, entonces, aplicando la desigualdad Cauchy-Schwarz tenemos que:

$$|S_n|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{1}{k^2}\right| \tag{1}$$

Pero el limite del primer factor del lado derecho converge por hipotesis y el limite del segundo factor converge porque es una p-serie con $p = 2$. Entonces, por comparacion directa:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{|a_k|}}{k}\right|^2 \quad \text{converge} \tag{2}$$

Y si sacas la raiz tienes nuestra conclusion.

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{|a_k|}}{k}$ converge.

MEP

Problem 2

(8 puntos) – Sea $\{a_n\} \in \mathbb{N}$ sucesion de numeros naturales con $a_n \leq n - 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \in \mathbb{Q}$ si y solo si existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = n - 1$ para todo $n \geq N_0$.

Prueba:

MEP

Problem 3

(16 puntos) – Dado $a \in (0, 1]$ y $s > 1$, definimos la funcion a-zeta de Riemann por:

$$\zeta(s; a) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a + k)^s} \tag{3}$$

La funcion zeta de Riemann clasica es cuando $a = 1$, y se denota por $\zeta(s)$.

(a) - (4 puntos) – Pruebe que $\zeta(\cdot; \cdot)$ esta bien definida.

Prueba:

Note que como a es positivo, $\frac{1}{(a+k)^s} \leq \frac{1}{k^s}$, pero $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ converge por que es una p-serie con $p = s > 1$. Entonces $\zeta(s; a)$ converge.

Ahora note que dados $s_1 > 1, s_2 > 1, a_1, a_2 \in (0, 1]$,

$$\begin{aligned} &(s_1, a_1) = (s_2, a_2) \\ \implies &s_1 = s_2 \wedge a_1 = a_2 \end{aligned} \tag{4}$$

Ahora usaremos induccion. Note que $a_1^{-s_1} = a_2^{-s_2}$. Ahora:

$$\begin{aligned} &S_j(s_1, a_1) = S_j(s_2, a_2) \\ \implies &\sum_{k=0}^{j} (a_1 + k)^{-s_1} = \sum_{k=0}^{j} (a_2 + k)^{-s_2} \\ \implies &\sum_{k=0}^{j} (a_1 + k)^{-s_1} + (a_1 + j + 1)^{-s_1} = \sum_{k=0}^{j} (a_2 + k)^{-s_2} + (a_2 + j + 1)^{-s_2} \\ \implies &\sum_{k=0}^{j+1} (a_1 + k)^{-s_1} = \sum_{k=0}^{j+1} (a_2 + k)^{-s_2} \\ \implies &S_{j+1}(s_1, a_1) = S_{j+1}(s_2, a_2) \end{aligned} \tag{5}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} &S_n(s_1, a_1) = S_n(s_2, a_2) \\ \implies &\lim_{n \to \infty} S_n(s_1, a_1) = \lim_{n \to \infty} S_n(s_2, a_2) \end{aligned} \tag{6}$$

$\therefore \zeta(s_1; a_1) = \zeta(s_2; a_2)$ y ζ esta bien definida.

MEP

(b) - (6 puntos) – Demuestre que $\sum_{j=1}^{m} \zeta\left(s; \frac{j}{m}\right) = m^s \zeta(s)$.

Prueba:

MEP

(c) - (6 puntos) – Pruebe que $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k^{-s} = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s)$.

Prueba:

Sea $A_n := \sum_{k=0}^{n} (1 + k)^{-s}$ la sucesion de sumas parciales de $\zeta(s)$. Ahora considere las ecuaciones:

$$A_n = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s} \tag{7}$$

$$(2^{1-s})A_n = \frac{2}{2^s}A_n = 2\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \ldots + \frac{1}{(2n)^s}\right) \tag{8}$$

Ahora le restaremos la ecuacion (6) a la ecuacion (5), mantendremos los terminos en posiciones impares de la ecuacion (6) y restaremos en los terminos en posiciones pares, luego quedan algunos terminos. Pero primero, note que $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2m$ o $n = 2m + 1$. El signo del ultimo termino del primer parentesis depende de cual de estas es cierta, pero el metodo sigue igual.

$$\begin{aligned}(1 - 2^{1-s})A_n &= \left(1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s}\ldots\right) - 2\left(\frac{1}{(2(m+1))^s} + \frac{1}{(2(m+2))^s} + \ldots + \frac{1}{(2n)^s}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}k^{-s} - 2\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{(2k)^s}\\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}k^{-s} - 2\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^s} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(2k)^s}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

Ahora, podemos tomar limites de ambos extremos de la ecuacion.
(Note que $m \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$).

$$\begin{aligned}(1 - 2^{1-s})\sum_{k=0}^{n} (1+k)^s &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}k^{-s} - 2\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^s} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(2k)^s}\right)\\ \Longrightarrow (1 - 2^{1-s})\sum_{k=0}^{\infty} (1+k)^s &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}k^{-s} - 2\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^s} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(2k)^s}\right)\end{aligned} \tag{10}$$

$$\therefore (1 - 2^{1-s})\sum_{k=0}^{\infty} (1+k)^s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}k^{-s} \tag{11}$$

MEP

Problem 4

(8 puntos) - Dadas las sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$, si $\sum a_k$ converge y $\{b_n\}$ es sucesion monotonica acotada, demuestre que $\sum a_k b_k$ converge.

Prueba:

Primero demostraremos la formula de sumatorias parciales. Si $\{a_n\}, \{b_n\}$ son sucesiones, y $A_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} a_k$ es la sucesion de sumas parciales de a_n, tenemos que:

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p \tag{12}$$

Prueba:

$$\begin{aligned}\sum_{n=p}^{q} a_n b_n &= \sum_{n=p}^{q} (A_n - A_{n-1}) b_n \\ &= \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1} \\ &= \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1} + A_q b_q \\ &= \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_n - \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_{n+1} + A_q b_q - A_{p-1} b_p \\ &= \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b - p\end{aligned} \tag{13}$$

$\square$

Ahora demostraremos que $\sum a_k b_k$ converge cuando b_k es no-creciente.

Como $\sum a_k$ converge, A_k es acotada. Entonces sea $M > 0$ tal que $|A_k| < M$. Ademas, al ser monotonica y acotada, b_n converge. Sea $\lim_{n \to \infty} b_n = L$. Entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Longrightarrow |b_n - L| < \frac{\varepsilon}{2M} - L$.

Entonces tenemos que, para $n > m \geq N$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k\right| &= \left|\sum_{k=m+1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n - A_m b_{m+1}\right| \\ &\leq M \left|\sum_{k=m+1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) + b_n - b_{m+1}\right| \\ &= M \left|b_n + b_{n+1}\right| = M \left|(b_n - L) + (b_{n+1} - L) + 2L\right| \\ &< M \left|\frac{\varepsilon}{2M} - L + \frac{\varepsilon}{2M} - L + 2L\right| = M \left|\frac{\varepsilon}{M}\right| < \varepsilon\end{aligned} \tag{14}$$

Entonces, por el criterio de Cauchy, $\sum a_k b_k$ converge.

MEP