MATE 5201: Tarea 4

Due on 8 de octubre

Prof. Alejandro Velez , C41, 8 de octubre

Sergio Rodriguez

Problem 1

(6 puntos) – Demuestre que un espacio metrico (X, d) es conexo si y solo si los unicos subconjuntos E abiertos y cerrados de X son $E = \emptyset$ y $E = X$.

Prueba:

MEP

Problem 2

(4 puntos) – Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo, pruebe que E es conexo.

Prueba:

MEP

Problem 3

(6 puntos) – Suponga que $0 < x_1 < 1$, y defina la sucesion recursiva: $x_{n+1} := 1 - \sqrt{1 - x_n}$. Demuestre que $\{x_n\}$ es decreciente, con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Luego pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}$.

Prueba:

MEP

Problem 4

(4 puntos) – Sean $\{x_n\}, \{y_n\}$ sucesiones en un espacio metrico (X, d), tales que $x_n \to x$ y $y_n \to y$ en X. Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

Prueba:

MEP

Problem 5

(5 puntos) – En (X, d), si $E \subseteq X$ es completo, pruebe que E es cerrado.

Prueba:

MEP

Problem 6

(4 puntos) – Demuestre que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ de la siguiente forma: dado $x \in \mathbb{R}$, demuestre que existe una sucesion $\{x_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ tal que $x_n \to x$.

Prueba:

MEP

Problem 7

(4 puntos) – Sea $\{x_n\}$ sucesion en (X, d), y sea $E_n := \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$. Demuestre que $\{x_n\}$ es sucesion de Cauchy si y solamente si $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(E_n) = 0$.

Prueba:

MEP

Problem 8

(8 puntos) – Sea $\{x_n\}$ una sucesion de numeros reales, y definamos:

$$y_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j, \qquad z_n := \frac{x_n}{n}. \tag{1}$$

(a) - (4 puntos) – Si $x_n \to x$ en $\mathbb{R}$, demuestre que $y_n \to x$.

Prueba:

MEP

(b) - (4 puntos) – Si $(x_{n+1} - x_n) \to x$ en $\mathbb{R}$, pruebe que $z_n \to x$.

Prueba:

MEP

Problem 9

(5 puntos) – Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ dos sucesiones de Cauchy en (X, d), y definamos $\beta_n := d(x_n, y_n)$. Pruebe que $\{\beta_n\}$ converge en $\mathbb{R}$.

Prueba:

MEP

Problem 10

(4 puntos) – Considere la sucesion $\{a_n\}$ definida como sigue:

$$a_1 = 0; \qquad a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2}; \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n}; \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

Calcule $\limsup_{n\to\infty} a_n$ y $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Prueba:

MEP

Problem 11

(4 puntos) – Si $\{x_n\}$ es una sucesion acotada en $\mathbb{R}$, demuestre que:

$$\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty}(x_n) \qquad y \qquad \liminf_{n\to\infty}(-x_n) = -\limsup_{n\to\infty}(x_n) \tag{3}$$

Prueba:

MEP