

MATE 5201: Tarea 5

Due on 2 de diciembre

Prof. Alejandro Velez , C41, 2 de diciembre

Sergio Rodriguez

Problem 1

(8 puntos) – Dado $\{a_n\} \in \mathbb{R}$ sucesion con $a_n > 0$ para $n \geq N_0$ (algun $N_0 \in \mathbb{N}$), pruebe que si $\sum a_k$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{|a_k|}}{k}$ converge.

Prueba:

La desigualdad Cauchy-Schwarz nos dice que $\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right|^2 \leq \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \sum_{k=1}^n |b_k|^2$.

Si $S_n := \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{|a_k|}}{k}$ es la sucesion de sumas parciales de la serie, entonces, aplicando la desigualdad Cauchy-Schwarz tenemos que:

$$|S_n|^2 \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{k^2} \right| \quad (1)$$

Pero el limite del primer factor del lado derecho converge por hipotesis y el limite del segundo factor converge porque es una p -serie con $p = 2$. Entonces, por comparacion directa:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{|a_k|}}{k} \right|^2 \text{ converge} \quad (2)$$

Y si sacas la raiz tienes nuestra conclusion.

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{|a_k|}}{k} \text{ converge.}$$

MEP

Problem 2

(8 puntos) – Sea $\{a_n\} \in \mathbb{N}$ sucesion de numeros naturales con $a_n \leq n - 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \in \mathbb{Q}$ si y solo si existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = n - 1$ para todo $n \geq N_0$.

Problem 3

(16 puntos) – Dado $a \in (0, 1]$ y $s > 1$, definimos la funcion a -zeta de Riemann por:

$$\zeta(s; a) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a+k)^s} \quad (3)$$

La funcion zeta de Riemann clasica es cuando $a = 1$, y se denota por $\zeta(s)$.

(a) - (4 puntos) – Pruebe que $\zeta(\cdot; \cdot)$ esta bien definida.

Prueba:

Note que como a es positivo, $\frac{1}{(a+k)^s} \leq \frac{1}{k^s}$, pero $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ converge por que es una p -serie con $p = s > 1$. Entonces $\zeta(s; a)$ converge.

Ahora note que dados $s_1 > 1, s_2 > 1, a_1, a_2 \in (0, 1]$,

$$\begin{aligned}(s_1, a_1) &= (s_2, a_2) \\ \Rightarrow s_1 &= s_2 \wedge a_1 = a_2\end{aligned}\tag{4}$$

Ahora usaremos induccion. Note que $a_1^{-s_1} = a_2^{-s_2}$. Ahora:

$$\begin{aligned}S_j(s_1, a_1) &= S_j(s_2, a_2) \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^j (a_1 + k)^{-s_1} &= \sum_{k=0}^j (a_2 + k)^{-s_2} \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^j (a_1 + k)^{-s_1} + (a_1 + j + 1)^{-s_1} &= \sum_{k=0}^j (a_2 + k)^{-s_2} + (a_2 + j + 1)^{-s_2} \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^{j+1} (a_1 + k)^{-s_1} &= \sum_{k=0}^{j+1} (a_2 + k)^{-s_2} \\ \Rightarrow S_{j+1}(s_1, a_1) &= S_{j+1}(s_2, a_2)\end{aligned}\tag{5}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}S_n(s_1, a_1) &= S_n(s_2, a_2) \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(s_1, a_1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(s_2, a_2)\end{aligned}\tag{6}$$

$\therefore \zeta(s_1; a_1) = \zeta(s_2; a_2)$ y ζ esta bien definida.

MEP

(b) - (6 puntos) – Demuestre que $\sum_{j=1}^m \zeta(s; \frac{j}{m}) = m^s \zeta(s)$.

(c) - (6 puntos) – Pruebe que $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k^{-s} = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s)$.

Prueba:

Sea $A_n := \sum_{k=0}^n (1+k)^{-s}$ la sucesion de sumas parciales de $\zeta(s)$. Ahora considere las ecuaciones:

$$A_n = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s}\tag{7}$$

$$(2^{1-s})A_n = \frac{2}{2^s}A_n = 2 \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \dots + \frac{1}{(2n)^s} \right)\tag{8}$$

Ahora le restaremos la ecuacion (6) a la ecuacion (5), mantendremos los terminos en posiciones impares de la ecuacion (6) y restaremos en los terminos en posiciones pares, luego quedan algunos terminos. Pero primero, note que $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2m$ o $n = 2m + 1$. El signo del ultimo termino del primer parentesis depende de cual de estas es cierta, pero el metodo sigue igual.

$$\begin{aligned}
(1 - 2^{1-s})A_n &= \left(1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} \dots\right) - 2 \left(\frac{1}{(2(m+1))^s} + \frac{1}{(2(m+2))^s} + \dots + \frac{1}{(2n)^s} \right) \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^{-s} - 2 \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{(2k)^s} \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^{-s} - 2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^s} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{(2k)^s} \right)
\end{aligned} \tag{9}$$

Ahora, podemos tomar limites de ambos extremos de la ecuacion.

(Note que $m \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$).

$$\begin{aligned}
(1 - 2^{1-s}) \sum_{k=0}^n (1+k)^s &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^{-s} - 2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^s} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{(2k)^s} \right) \\
\Rightarrow (1 - 2^{1-s}) \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)^s &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k^{-s} - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^s} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{(2k)^s} \right)
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\therefore (1 - 2^{1-s}) \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)^s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k^{-s} \tag{11}$$

MEP

Problem 4

(8 puntos) - Dadas las sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$, si $\sum a_k$ converge y $\{b_n\}$ es sucesion monotonica acotada, demuestre que $\sum a_k b_k$ converge.

Prueba:

Primero demostraremos la formula de sumatorias parciales. Si $\{a_n\}, \{b_n\}$ son sucesiones, y $A_n := \sum_{k=0}^n a_k$ es la sucesion de sumas parciales de a_n , tenemos que:

$$\sum_{n=p}^q a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p \tag{12}$$

Prueba:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=p}^q a_n b_n &= \sum_{n=p}^q (A_n - A_{n-1}) b_n \\
&= \sum_{n=p}^q A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1} \\
&= \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1} + A_q b_q \\
&= \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_n - \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_{n+1} + A_q b_q - A_{p-1} b_p \\
&= \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p
\end{aligned} \tag{13}$$

□

Ahora demostraremos que $\sum a_k b_k$ converge cuando b_k es no-creciente.

Como $\sum a_k$ converge, A_k es acotada. Entonces sea $M > 0$ tal que $|A_k| < M$. Además, al ser monotonica y acotada, b_n converge. Sea $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$. Entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \implies |b_n - L| < \frac{\varepsilon}{2M} - L$.

Entonces tenemos que, para $n > m \geq N$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=m+1}^n a_k b_k \right| &= \left| \sum_{k=m+1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n - A_m b_{m+1} \right| \\
&\leq M \left| \sum_{k=m+1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) + b_n - b_{m+1} \right| \\
&= M |b_n + b_{n+1}| = M |(b_n - L) + (b_{n+1} - L) + 2L| \\
&< M \left| \frac{\varepsilon}{2M} - L + \frac{\varepsilon}{2M} - L + 2L \right| = M \left| \frac{\varepsilon}{M} \right| < \varepsilon
\end{aligned} \tag{14}$$

Entonces, por el criterio de Cauchy, $\sum a_k b_k$ converge.

MEP