MATE 5201: Tarea 5

Due on 2 de diciembre

Prof. Alejandro Velez , C41, 2 de diciembre

Sergio Rodriguez

Problem 1

(8 puntos) – Dado $\{a_n] \in \mathbb{R}$ sucesion con $a_n > 0$ para $n \geq N_0$ (algun $N_0 \in \mathbb{N}$), pruebe que si $\sum a_k$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{|a_k|}}{k}$ converge.

Prueba:

MEP

Problem 2

(8 puntos) – Sea $\{a_n\} \in \mathbb{N}$ sucesion de numeros naturales con $a_n \leq n - 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \in \mathbb{Q}$ si y solo si existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = n - 1$ para todo $n \geq N_0$.

Prueba:

MEP

Problem 3

(16 puntos) – Dado $a \in (0, 1]$ y $s > 1$, definimos la funcion a-zeta de Riemann por:

$$\zeta(s; a) := \sum_{k=0}^{\infty} (a + k)^s \tag{1}$$

La funcion zeta de Riemann clasica es cuando $a = 1$, y se denota por $\zeta(s)$.

(a) - (4 puntos) – Pruebe que $\zeta(\cdot; \cdot)$ esta bien definida.

Prueba:

MEP

(b) - (6 puntos) – Demuestre que $\sum_{j=1}^{m} \zeta\left(s; \frac{j}{m}\right) = m^s \zeta(s)$.

Prueba:

MEP

(c) - (6 puntos) – Pruebe que $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k^{-s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$.

Prueba:

MEP

Problem 4

(8 puntos) - Dadas las sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$, si $\sum a_k$ converge y $\{b_n\}$ es sucesion monotonica acotada, demuestre que $\sum a_k b_k$ converge.

Prueba:

MEP