

# **MATE 5201: Tarea 4**

Due on 8 de octubre

*Prof. Alejandro Velez , C41, 8 de octubre*

**Sergio Rodriguez**

**Problem 1**

(6 puntos) – Demuestre que un espacio metrico  $(X, d)$  es conexo si y solo si los unicos subconjuntos  $E$  abiertos y cerrados de  $X$  son  $E = \emptyset$  y  $E = X$ .

**Prueba:**

( $\Rightarrow$ )

Suponga que  $(X, d)$  es conexo. Note que  $x \in \emptyset \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}$  tal que  $B(x; r) \in X \Rightarrow \emptyset$  es abierto y  $\emptyset^c = X$  es cerrado. Tambien  $x \in \emptyset \Rightarrow U_r(x) \setminus \{x\} \cap X \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset$  es cerrado y  $\emptyset^c = X$  es abierto. Entonces, solo falta probar que estos subconjuntos son los unicos que son abiertos y cerrados. Haremos esto por contrareciproco.

Suponga que  $E \subsetneq X$  con  $E \neq \emptyset$  es abierto y cerrado. Es claro que  $E^c \neq \emptyset$ ,  $E \cup E^c = X$ , y  $E \cap E^c = \emptyset$ . Como  $E$  es cerrado, tenemos que  $E = \overline{E} \Rightarrow \overline{E} \cap E^c = \emptyset$ . Similarmente, como  $E$  es abierto,  $E^c$  es cerrado, lo que implica que  $E^c = \overline{E^c} \Rightarrow E \cap \overline{E^c} = \emptyset$ .

$\therefore E$  y  $E^c$  estan separados  $\Rightarrow X$  no es conexo.

( $\Leftarrow$ )

Por contrareciproco, suponga que  $X$  no es conexo, entonces  $\exists A, B \subseteq X$  con  $A, B \neq \emptyset$ ,  $A, B \neq X$ , y  $A \cup B = X$  tal que  $\overline{A} \cap B = \emptyset$  y  $A \cap \overline{B} = \emptyset$ . Note que  $A \cup B = X$  y  $A$  y  $B$  son disjuntos, lo que implica que los conjuntos son complementos en  $X$ . Entonces llame  $E := A$  y  $E^c := B$ .

Tome  $x$  punto limite de  $E$  y note que  $x \notin E^c$  ( $\because x \in E^c \Rightarrow x \in \overline{E} \cap E^c \times$ )  $\Rightarrow x \in E \Rightarrow E$  es cerrado. Similarmente, tome  $x$  punto limite de  $E^c$  y note que  $x \notin E \Rightarrow x \in E^c \Rightarrow E^c$  es cerrado  $\Rightarrow E$  es abierto.

$\therefore \exists E \subseteq X$  con  $E \neq \emptyset$  y  $E \neq X$  abierto y cerrado.

**MEP**

**Problem 2**

(4 puntos) – Si  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  es convexo, pruebe que  $E$  es conexo.

**Prueba:**

Por contrareciproco, suponga que  $E$  no es conexo, entonces  $\exists A, B \subseteq E$  con  $A, B \neq \emptyset$ ,  $A, B \neq E$ , y  $A \cup B = E$  tal que  $\overline{A} \cap B = \emptyset$ . Fije  $a \in A \subseteq E$ , y  $b \in B \subseteq E$ . Ahora, sean:

$$\begin{aligned} L_A &:= \{\lambda \in [0, 1] \mid \lambda a + (1 - \lambda)b \in A\}, y \\ L_B &:= \{\lambda \in [0, 1] \mid \lambda a + (1 - \lambda)b \in B\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Note que ambos  $L_A$  y  $L_B$  son subconjuntos de  $\mathbb{R}$ ,  $1 \in L_A \Rightarrow L_A \neq \emptyset$ ,  $0 \in L_B \Rightarrow L_B \neq \emptyset$ , y ambos  $L_A$  y  $L_B$  estan claramente acotados por 0 y 1. Entonces, por la propiedad de la cota superior minima y la propiedad de la cota inferior maxima de los numeros reales, tenemos que  $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha = \sup(L_A)$  y  $\beta = \inf(L_B)$ .

Es claro que  $\alpha \geq 0$  y  $\beta \leq 1$ . Pero ahora note que  $\alpha < \beta$ , porque si  $\alpha \geq \beta$ , entonces  $\exists \lambda$  tal que  $\lambda a + (1 - \lambda)b \in A \cap B$ , lo que contradice que  $E$  no es conexo. Entonces, podemos usar la densidad en los

reales para conseguir  $\lambda \in [0, 1]$  tal que  $\alpha < \lambda < \beta$ . Pero esto implica que  $\lambda a + (1 - \lambda)b \notin A$ , por definicion de  $\alpha$ , y  $\lambda a + (1 - \lambda)b \notin B$ , por definicion de  $\beta$ . Entonces, encontramos un  $\lambda \in [0, 1]$  tal que  $\lambda a + (1 - \lambda)b \notin E$ .

$\therefore E$  no es convexo.

MEP

### Problem 3

(6 puntos) – Suponga que  $0 < x_1 < 1$ , y defina la sucesion recursiva:  $x_{n+1} := 1 - \sqrt{1 - x_n}$ . Demuestre que  $\{x_n\}$  es decreciente, con  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . Luego pruebe que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}$ .

**Prueba:**

MEP

### Problem 4

(4 puntos) – Sean  $\{x_n\}, \{y_n\}$  sucesiones en un espacio metrico  $(X, d)$ , tales que  $x_n \rightarrow x$  y  $y_n \rightarrow y$  en  $X$ . Demuestre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$ .

**Prueba:**

Fije  $\varepsilon > 0$ . Entonces  $\exists N_x, N_y \in \mathbb{N}$  tal que  $n > N_x \implies d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$  y  $n > N_y \implies d(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Entonces,  $\forall n > N := \max\{N_x, N_y\}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, x) + d(x, y_n) \\ &\leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + d(x, y) + \frac{\varepsilon}{2} = d(x, y) + \varepsilon \end{aligned} \tag{2}$$

$$\implies d(x_n, y_n) - d(x, y) < \varepsilon$$

$$\implies |d(x_n, y_n) - d(x, y)| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$$

MEP

### Problem 5

(5 puntos) – En  $(X, d)$ , si  $E \subseteq X$  es completo, pruebe que  $E$  es cerrado.

**Prueba:**

Por contrareciproco, suponga que  $E$  no es cerrado. Entonces  $\exists x \in E' \setminus E$ . Ademas,  $E$  es infinito, porque todo subconjunto finito de un espacio metrico es cerrado. Tambien,  $E^0 \neq \emptyset$ , porque si lo fuera,  $E$  estaria compuesto exclusivamente de puntos aislados, lo que implicaria que  $E' = \emptyset$ . Pero entonces  $E' = \emptyset \subseteq E$ . ✖

Tome  $x_1 \in E^0$  y note que  $E^0 \subseteq E \wedge x \notin E \implies x_1 \neq x \implies d(x_1, x) > 0$ . Entonces,  $\exists x_2 \in E^0$  tal que  $d(x_2, x) = \frac{1}{2}d(x_1, x) > 0$ . Haciendo esto recursivamente, podemos definir  $x_n := \alpha \in E^0$  con  $d(\alpha, x) = \frac{1}{2}d(x_{n-1}, x)$ . Note que  $\{x_n\} \subseteq E^0 \subseteq E$ .

Note que  $d(x_1, x) = \frac{d(x_1, x)}{1} = \frac{d(x_1, x)}{2^0} = \frac{d(x_1, x)}{2^{1-1}}$  y si  $d(x_k, x) = \frac{d(x_1, x)}{2^{k-1}}$ , entonces  $d(x_{k+1}, x) = \frac{1}{2}d(x_k, x) = \frac{1}{2} \frac{d(x_1, x)}{2^{k-1}} = \frac{d(x_1, x)}{2^{(k+1)-1}}$ . Por lo tanto, por induccion,  $d(x_n, x) = \frac{d(x_1, x)}{2^{n-1}}$ .

Fije  $\varepsilon > 0$ . Considere  $N := \lceil \log_2(d(x_1, x) \cdot \varepsilon) \rceil + 1 \in \mathbb{N}$ . En el caso donde  $\log_2(d(x_1, x) \cdot \varepsilon) \in \mathbb{N}$ , tenemos que:

$$d(x_N, x) = \frac{d(x_1, x)}{2^{N-1}} = \frac{d(x_1, x)}{2^{\log_2(d(x_1, x) \cdot \varepsilon) + 1 - 1}} = \frac{d(x_1, x)}{d(x_1, x) \cdot \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} < \varepsilon \quad (3)$$

Y como  $n > N \implies \frac{d(x_1, x)}{2^{n-1}} < \frac{d(x_1, x)}{2^{N-1}}$ , la desigualdad (3) se mantiene para  $n > N$ . Por lo tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \notin E$ .

Fije  $\varepsilon > 0$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ,  $\exists N', N'' \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > N' \wedge m > N'' \implies d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \wedge d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4)$$

Entonces:

$$m, n > N := \max\{N', N''\} \implies d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (5)$$

Por lo tanto,  $\{x_n\} \subseteq E$  es de Cauchy.

Entonces construimos una sucesion de Cauchy  $\{x_n\}$  en  $E$  que no converge en  $E$ .

$\therefore E$  no es completo.

**MEP**

## Problem 6

(4 puntos) – Demuestre que  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$  de la siguiente forma: dado  $x \in \mathbb{R}$ , demuestre que existe una sucesion  $\{x_n\} \subseteq \mathbb{Q}$  tal que  $x_n \rightarrow x$ .

**Prueba:**

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considere el intervalo  $(\frac{nx-1}{n}, \frac{nx+1}{n})$ . Como el intervalo  $(nx-1, nx+1)$  contiene al menos un entero, podemos escoger  $m_n \in \mathbb{Z}$  tal que  $\frac{nx-1}{n} < \frac{m_n}{n} < \frac{nx+1}{n}$ . Entonces definamos  $x_n := \frac{m_n}{n} \in \mathbb{Q}$ .

Ahora, fije  $\varepsilon > 0$ . Entonces, por la propiedad arquimideana, podemos encontrar  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{N} < \varepsilon$ , y entonces es claro que  $n > N \implies \frac{1}{n} < \varepsilon$ . Pero sabemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{nx-1}{n} &< x_n < \frac{nx+1}{n} \\
\Rightarrow x - \frac{1}{n} &< x_n < x + \frac{1}{n} \\
\Rightarrow x - \varepsilon &< x_n < x + \varepsilon \\
\Rightarrow |x_n - x| &< \varepsilon
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Rightarrow \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

MEP

**Problem 7**

(4 puntos) – Sea  $\{x_n\}$  sucesion en  $(X, d)$ , y sea  $E_n := \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ . Demuestre que  $\{x_n\}$  es sucesion de Cauchy si y solamente si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(E_n) = 0$ .

**Prueba:** $(\Rightarrow)$ 

Fije  $\varepsilon > 0$ . Como  $\{x_n\}$  es de Cauchy,  $\exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Esto implica que  $\frac{\varepsilon}{2}$  es una cota superior para  $D_n := \{d(x, y) \mid x, y \in E_n\} \subseteq \mathbb{R}$ . Claramente,  $D_n \neq \emptyset$ , entonces  $\exists \sup(D_n) \in \mathbb{R}$ . Note que, por definicion,  $\sup(D_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \sup(D_n) < \varepsilon$ . Pero:

$$\begin{aligned}
\sup(D_n) &= \text{diam}(E_n) \\
\Rightarrow \text{diam}(E_n) &< \varepsilon \\
\Rightarrow |\text{diam}(E_n) - 0| &< \varepsilon
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(E_n) = 0.$$

 $(\Leftarrow)$ 

Fije  $\varepsilon > 0$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(E_n) = 0$ , tenemos que  $\exists N' \in \mathbb{N}$  tal que:

$$\begin{aligned}
N > N' &\Rightarrow |\text{diam}(E_N) - 0| < \varepsilon \\
&\Rightarrow \text{diam}(E_N) < \varepsilon
\end{aligned} \tag{8}$$

Pero  $\text{diam}(E_N) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in E_N\} \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon \forall m, n > N$ .

$\therefore \{x_n\}$  es de Cauchy.

MEP

**Problem 8**

(8 puntos) – Sea  $\{x_n\}$  una sucesion de numeros reales, y definamos:

$$y_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j, \quad z_n := \frac{x_n}{n}. \tag{9}$$

(a) - (4 puntos) - Si  $x_n \rightarrow x$  en  $\mathbb{R}$ , demuestre que  $y_n \rightarrow x$ .

**Prueba:**

MEP

(b) - (4 puntos) - Si  $(x_{n+1} - x_n) \rightarrow x$  en  $\mathbb{R}$ , pruebe que  $z_n \rightarrow x$ .

**Prueba:**

MEP

### Problem 9

(5 puntos) - Sean  $\{x_n\}$  y  $\{y_n\}$  dos sucesiones de Cauchy en  $(X, d)$ , y definamos  $\beta_n := d(x_n, y_n)$ . Pruebe que  $\{\beta_n\}$  converge en  $\mathbb{R}$ .

**Prueba:**

Fije  $\varepsilon > 0$ . Entonces  $\exists N_x, N_y \in \mathbb{N}$  tales que  $m, n > N_x \implies d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$  y  $m, n > N_y \implies d(y_m, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Ahora, note que  $\forall m, n > N := \max\{N_x, N_y\}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} d(x_m, y_m) &\leq d(x_m, x_n) + d(x_n, y_m) \\ &\leq d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_m) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + d(x_n, y_n) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon + d(x_n, y_n) \\ \implies d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) &< \varepsilon \implies |\beta_m - \beta_n| < \varepsilon \end{aligned} \tag{10}$$

Entonces  $\{\beta_n\}$  es de Cauchy, pero  $\{\beta_n\} \subseteq \mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}$  es completo.

$\therefore \{\beta_n\}$  converge.

MEP

### Problem 10

(4 puntos) - Considere la sucesión  $\{a_n\}$  definida como sigue:

$$a_1 = 0; \quad a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2}; \quad a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n}; \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{11}$$

Calcule  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  y  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**Prueba:**

MEP

### Problem 11

(4 puntos) - Si  $\{x_n\}$  es una sucesión acotada en  $\mathbb{R}$ , demuestre que:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty}(-x_n) = -\liminf_{n \rightarrow \infty}(x_n) \quad y \quad \liminf_{n \rightarrow \infty}(-x_n) = -\limsup_{n \rightarrow \infty}(x_n) \quad (12)$$

**Prueba:**

Primero probaremos un resultado auxiliar. Suponga que  $E \subseteq \mathbb{R}$  es acotado y no-vacio, y  $-E := \{-x \mid x \in E\}$ . Entonces sabemos que  $-E$  tambien es acotado y no-vacio. Entonces  $\sup(-E) \in \mathbb{R}$ . Ahora, note que:

$$\begin{aligned} \alpha := \sup(-E) &\implies \alpha \geq -x && \forall x \in E \\ &\implies -\alpha \leq x && \forall x \in E \\ &\implies -\alpha \text{ es una cota inferior para } E. \end{aligned} \quad (13)$$

Ademas, como  $\alpha := \sup(-E)$ , sabemos que  $x \in \mathbb{R}$  con  $x \leq \alpha \implies \exists y \in -E$  tal que  $x \leq y \leq \alpha$ . Entonces, sea  $\lambda \in \mathbb{R}$  con  $\lambda \geq -\alpha$ , entonces:

$$\begin{aligned} -\lambda \leq \alpha &\implies \exists x \in E \text{ tal que } -\lambda \leq -x \leq \alpha \\ &\implies \lambda \geq x \geq -\alpha \\ &\implies -\alpha = \inf(E) \\ &\implies -\sup(-E) = \inf(E) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\therefore \sup(-E) = -\inf(E)$$

Similarmente, si  $\alpha := \inf(-E)$ , entonces:

$$\begin{aligned} \alpha \leq -x \quad \forall x \in E &\implies -\alpha \geq x \quad \forall x \in E \\ &\implies -\alpha \text{ es una cota superior para } E. \end{aligned} \quad (15)$$

Y si  $\lambda \in \mathbb{R}$  tiene  $\lambda \leq -\alpha$ , entonces:

$$\begin{aligned} -\lambda \geq \alpha &\implies \exists x \in E \text{ tal que } -\lambda \geq -x \geq \alpha \\ &\implies \lambda \leq x \leq -\alpha \\ &\implies -\alpha = \sup(E) \\ &\implies -\inf(-E) = \sup(E) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\therefore \inf(-E) = -\sup(E)$$

Ahora, como tenemos que  $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$  es acotada y no-vacia, usando estos resultados, tenemos que:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty}(-x_n) &= \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sup \{ -x_k \mid k \geq n \} \right\} \\ &= \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ -\inf \{ x_k \mid k \geq n \} \right\} \\ &= -\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \inf \{ x_k \mid k \geq n \} \right\} \\ &= -\liminf_{n \rightarrow \infty}(x_n) \end{aligned} \quad (17)$$

Y, similarmente:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \inf(-x_n) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \inf \{ -x_k \mid k \geq n \} \right\} \\
&= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ -\sup \{ x_k \mid k \geq n \} \right\} \\
&= - \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sup \{ x_k \mid k \geq n \} \right\} \\
&= - \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n)
\end{aligned} \tag{18}$$

**MEP**