

## **MATE 6540: Tarea 3**

Due on 19 de mayo

*Prof. Iván Cardona* , C41, 19 de mayo

**Sergio Rodríguez**

**Problem 0**

Considere al espacio  $\widehat{\mathbf{2}} = \{0, 1\}$  con la topología discreta  $\mathcal{T}_{\text{disc}}$ .

Demuestre la proposición:

El espacio topológico  $(X, \mathcal{T}_X)$  es conexo  $\iff$  No existe una función continua  $g : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (\widehat{\mathbf{2}}, \mathcal{T}_{\text{disc}})$  que sea suprayectiva.

**Demo:**

$(\implies)$

Suponga que  $(X, \mathcal{T}_X)$  es conexo. Sea  $g : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (\widehat{\mathbf{2}}, \mathcal{T}_{\text{disc}})$  una función continua. Afirmamos que  $g$  no es suprayectiva. Note que  $\{0\}, \{1\} \in \mathcal{T}_{\text{disc}}$  son disjuntos con  $\{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$ . Entonces  $\{\{0\}, \{1\}\}$  es una separación de  $\widehat{\mathbf{2}}$ . Por otra parte,  $g(X) \subseteq \widehat{\mathbf{2}}$  es imagen continua de un espacio conexo. Entonces, por un teorema demostrado en clase,  $g(X)$  es conexo. Pero  $\widehat{\mathbf{2}}$  no es conexo, entonces  $g(X) \subseteq \{0\}$  o  $g(X) \subseteq \{1\}$  pero no ambos.

$\therefore g$  no es suprayectiva.

$(\impliedby)$

Demostramos el contrapositivo. Suponga que  $(X, \mathcal{T}_X)$  no es conexo, entonces existe una separación  $\{A, B\}$ . Ahora defina  $g : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (\widehat{\mathbf{2}}, \mathcal{T}_{\text{disc}})$  de la siguiente manera:

$$g(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \in B \end{cases} \quad (1)$$

Note que:

(a)  $A \cap B \neq \emptyset \implies g$  está bien definida.

(b)  $A, B \neq \emptyset \implies g$  es suprayectiva.

(c)  $g^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}_X$ ,  $g^{-1}(\{0\}) = A \in \mathcal{T}_X$ ,  $g^{-1}(\{1\}) = B \in \mathcal{T}_X$ ,  $g^{-1}(\{0, 1\}) = X \in \mathcal{T}_X$   
 $\implies g$  es continua.

$\therefore$  existe una función continua  $g : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (\widehat{\mathbf{2}}, \mathcal{T}_{\text{disc}})$  que es suprayectiva.

**MEP**

**Problem 1**

Sea  $X$  un conjunto infinito dotado de la siguiente topología

$\mathcal{T}_{\text{cof}} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ es finito o } U = \emptyset\}$  (i.e. la topología de los complementos finitos)

(a) Demuestre:  $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$  es conexo.

(b) Demuestre:  $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$  es compacto.

**Demo (a):**

Suponga, por contradicción, que  $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$  no es conexo. Entonces, existe una separación  $\{A, B\}$  de  $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ . Como  $A \neq \emptyset$  es abierto,  $X \setminus A = B$  es finito. Similarmente, como  $B \neq \emptyset$  es abierto,  $X \setminus B = A$  es finito. Entonces  $X = A \cup B$  es unión de conjuntos finitos, por lo tanto  $X$  es finito, lo cual contradice nuestra hipótesis. ✖

MEP

**Demo (b):**

Si  $X = \emptyset$ , entonces es compacto por convención. Suponga que  $X \neq \emptyset$ , y sea  $C := \{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  una cubierta abierta de  $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ . Como  $X \neq \emptyset$ , la cubierta no es vacía. Tome  $C_{\alpha_0} \in C$ , y note que  $\emptyset \neq C_{\alpha_0} \in \mathcal{T}_{\text{cof}} \implies A := X \setminus C_{\alpha_0}$  es finito. Pero  $A \subseteq X \implies A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha$ , entonces, para cada elemento  $x_i \in A, i \in \{1, \dots, |A|\}$ , existe por lo menos algún  $C_{\alpha_i} \in C$  con  $x_i \in C_{\alpha_i}$ .

Entonces  $C' := \{C_{\alpha_0}, C_{\alpha_1}, \dots, C_{\alpha_{|A|}}\}$  es una subcolección finita de  $C$ . Afirmamos que  $C'$  cubre a

$X$ , es decir, que  $\bigcup_{i=0}^{|A|} C_{\alpha_i} = X$ . Primero,  $C_{\alpha_i} \subseteq X, \forall i \in \{0, 1, \dots, |A|\} \implies \bigcup_{i=0}^{|A|} C_{\alpha_i} \subseteq X$ . Ahora

tome  $x \in X$ , si  $x \in C_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{i=0}^{|A|} C_{\alpha_i}$ , terminamos. Si  $x \in A = X \setminus C_{\alpha_0}$ , entonces  $\exists j \in \{1, \dots, |A|\}$  tal

que  $x = x_j \in A \implies x \in C_{\alpha_j} \subseteq \bigcup_{i=0}^{|A|} C_{\alpha_i}$ .

$$\therefore \bigcup_{i=0}^{|A|} C_{\alpha_i} = X$$

MEP

**Problem 2**

Dé ejemplos de subespacios  $A$  y  $B$  de  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\varepsilon^2})$  tales que:

- (a)  $A$  y  $B$  son conexos, pero  $A \cap B$  no es conexo.
- (b)  $A$  y  $B$  no son conexos, pero  $A \cup B$  es conexo.
- (c)  $A$  y  $B$  son conexos pero  $A \setminus B$  no es conexo.
- (d)  $A$  y  $B$  son conexos y  $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$ , pero  $A \cup B$  no es conexo.

**Problem 3**

Sean  $(X, \mathcal{T}_X)$  un espacio topológico y  $\{\infty\}$  un objeto que no pertenezca a  $X$ . Defina  $Y = X \cup \{\infty\}$  y  $\mathcal{T}_\infty = \{U \subseteq Y \mid U \in \mathcal{T}_X \text{ o } Y \setminus U \text{ es compacto y cerrado en } X\}$ .

- (a) Demuestre que  $\mathcal{T}_\infty$  es una topología sobre  $Y$ .
- (b) Sea  $\mathcal{T}'$  la topología relativa sobre  $X$ , la que hereda como subconjunto de  $Y$ . Demuestre que  $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_X$ .

### Problem 4

Sean  $(X, \mathcal{T}_X)$  un espacio topológico y  $\{\infty\}$  un objeto que no pertenezca a  $X$ . Defina  $Y = X \cup \{\infty\}$  y  $\mathcal{T}_\infty = \{U \subseteq Y \mid U \in \mathcal{T}_X \text{ o } Y \setminus U \text{ es compacto y cerrado en } X\}$ .

(c) Demuestre que  $(Y, \mathcal{T}_\infty)$  es compacto.