MATE 6540: Tarea 3

Due on 19 de mayo

Prof. Iván Cardona , C41, 19 de mayo

Sergio Rodríguez

Problem 0

Considere al espacio $\widehat{\mathbf{2}} = \{0, 1\}$ con la topología discreta $\mathcal{T}_{\text{disc}}$.
Demuestre la proposición:
El espacio topológico $(X, \mathcal{T}_X)$ es conexo $\iff$ No existe una función continua $g : (X, \mathcal{T}_X) \to \left(\widehat{\mathbf{2}}, \mathcal{T}_{\text{disc}}\right)$ que sea suprayectiva.

Demo:

$(\Longrightarrow)$

Suponga que $(X, \mathcal{T}_X)$ es conexo. Sea $g : (X, \mathcal{T}_X) \to \left(\widehat{\mathbf{2}}, \mathcal{T}_{\text{disc}}\right)$ una función continua. Afirmamos que g no es suprayectiva. Note que $\{0\}, \{1\} \in \mathcal{T}_{\text{disc}}$ son disjuntos con $\{0\} \cup \{1\} = \widehat{\mathbf{2}}$. Entonces $\{\{0\}, \{1\}\}$ es una separación de $\left(\widehat{\mathbf{2}}, \mathcal{T}_{\text{disc}}\right)$. Por otra parte, $g(X) \subseteq \widehat{\mathbf{2}}$ es imagen continua de un espacio conexo. Entonces, por un teorema demostrado en clase, $g(X)$ es conexo. Pero $\left(\widehat{\mathbf{2}}, \mathcal{T}_{\text{disc}}\right)$ no es conexo, entonces $g(X) \subseteq \{0\}$ o $g(X) \subseteq \{1\}$ pero no ambos.

$\therefore$ g no es suprayectiva.

$(\Longleftarrow)$

Demostramos el contrapositivo. Suponga que $(X, \mathcal{T}_X)$ no es conexo, entonces existe una separación $\{A, B\}$. Ahora defina $g : (X, \mathcal{T}_X) \to \left(\widehat{\mathbf{2}}, \mathcal{T}_{\text{disc}}\right)$ de la siguiente manera:

$$g(x) := \begin{cases} 0 \text{ si } x \in A \\ 1 \text{ si } x \in B \end{cases} \tag{1}$$

Note que:
(a) $A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = X \Longrightarrow g$ está bien definida.
(b) $A, B \neq \emptyset \Longrightarrow g$ es suprayectiva.
(c) $g^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}_X, \quad g^{-1}(\{0\}) = A \in \mathcal{T}_X, \quad g^{-1}(\{1\}) = B \in \mathcal{T}_X, \quad g^{-1}(\{0, 1\}) = X \in \mathcal{T}_X$
$\Longrightarrow g$ es continua.

$\therefore$ existe una función continua $g : (X, \mathcal{T}_X) \to \left(\widehat{\mathbf{2}}, \mathcal{T}_{\text{disc}}\right)$ que es suprayectiva.

MEP

Problem 1

Sea X un conjunto infinito dotado de la siguiente topología
$\mathcal{T}_{\text{cof}} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ es finito o } U = \emptyset\}$ *(i.e. la topología de los complementos finitos)*
(a) Demuestre: $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ es conexo.
(b) Demuestre: $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ es compacto.

Demo (a):

Suponga, por contradicción, que $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ no es conexo. Entonces, existe una separación $\{A, B\}$ de $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$. Como $A \neq \emptyset$ es abierto, $X \setminus A = B$ es finito. Similarmente, como $B \neq \emptyset$ es abierto, $X \setminus B = A$ es finito. Entonces $X = A \cup B$ es unión de conjuntos finitos, por lo tanto X es finito, lo cual contradice nuestra hipótesis. ※

$\therefore (X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ es conexo.

MEP

Demo (b):

Si $X = \emptyset$, entonces es compacto por convención. Suponga que $X \neq \emptyset$, y sea $C := \{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una cubierta abierta de $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$. Como $X \neq \emptyset$, la cubierta no es vacía. Tome $C_{\alpha_0} \in C$, y note que $\emptyset \neq C_{\alpha_0} \in \mathcal{T}_{\text{cof}} \Longrightarrow A := X \setminus C_{\alpha_0}$ es finito. Pero $A \subseteq X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha$, entonces, para cada elemento $x_i \in A$, con $i \in \{1, \ldots, |A|\}$, existe por lo menos algún $C_{\alpha_i} \in C$ con $x_i \in C_{\alpha_i}$.
Entonces $C' := \left\{C_{\alpha_0}, C_{\alpha_1}, \ldots, C_{\alpha_{|A|}}\right\}$ es una subcolección finita de C. Afirmamos que C' cubre a X, es decir, que $\bigcup_{i=0}^{|A|} C_{\alpha_i} = X$. Primero, $C_{\alpha_i} \subseteq X, \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, |A|\} \Longrightarrow \bigcup_{i=0}^{|A|} C_{\alpha_i} \subseteq X$. Ahora tome $x \in X$, si $x \in C_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{i=0}^{|A|} C_{\alpha_i}$, terminamos. Si $x \in A = X \setminus C_{\alpha_0}$, entonces $\exists j \in \{1, \ldots, |A|\}$ tal que $x = x_j \in A \Longrightarrow x \in C_{\alpha_j} \subseteq \bigcup_{i=0}^{|A|} C_{\alpha_i}$.

$\therefore \bigcup_{i=0}^{|A|} C_{\alpha_i} = X$

$\therefore (X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ es compacto.

MEP

Problem 2

Dé ejemplos de subespacios A y B de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\varepsilon^2})$ tales que:
(a) A y B son conexos, pero $A \cap B$ no es conexo.
(b) A y B no son conexos, pero $A \cup B$ es conexo.
(c) A y B son conexos pero $A \setminus B$ no es conexo.
(d) A y B son conexos y $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$, pero $A \cup B$ no es conexo.

Lema 1:

Sea X un subespacio conexo de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\varepsilon^1})$, y $f : X \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\varepsilon^1})$ una función continua. Entones, el conjunto $\left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X\right\}$ es un subespacio conexo de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\varepsilon^2})$.

Demo:

Sea $\varphi : X \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\varepsilon^2})$ una función definida por $\varphi(x) = (x, f(x))$. Tome $V \in \mathcal{T}_{\varepsilon^2}$, entonces $\varphi^{-1}(V) = \{x \in X \mid (x, f(x)) \in V\}$. Tome $y \in \varphi^{-1}(V)$, entonces $(y, f(y)) \in V$, pero $V \in \mathcal{T}_{\varepsilon^2} \Longrightarrow \exists r \in (0, \infty)$ tal que $B_{d_2}((y, f(y)); r) \subseteq V$. Donde d_2 es la métrica usual sobre $\mathbb{R}^2$. Entonces:

$$\begin{aligned} f^{-1}\Big(B_{d_2}((y,f(y));r)\Big) &= \{x \in X \mid d_2((x,f(x)),(y,f(y)) < r\} \\ &= \Big\{x \in X \mid \sqrt{(y-x)^2 + (f(y)-f(x))^2} < r\Big\} \\ &= \{x \in X \mid |y-x| < r\} \text{ (porque estamos tomando una proyección)} \\ &= \{x \in X \mid d_1(x,y) < r\} \text{ donde } d_1 \text{ es la métrica usual sobre } \mathbb{R} \\ &= B_{d_1}(y;r) \in \mathcal{T}_{\varepsilon^1} \end{aligned} \tag{2}$$

Pero $B_{d_1}(y;r) = f^{-1}\Big(B_{d_2}((y,f(y);r))\Big) \subseteq f^{-1}(V)$.

$\therefore$ φ es continua.

Pero, por el corolario 4.8, X conexo y φ continua $\Longrightarrow \varphi(X) = \{(x,f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X\}$ es un subespacio conexo de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\varepsilon^2})$.

MEP

Ejemplo (a):

Sean $f_1, g_1 : ([-1,1], \mathcal{T}_{\text{rel}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\varepsilon^1})$ definidas por $f(x) = x^2, g(x) = \frac{1}{2}$. Note que f_1, g_1 son continuas y que $[-1,1]$ es conexo. Entonces, por el lema 1,
$A := \{(x,f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1]\}, B := \{(x,g(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1]\}$ son subespacios conexos de $\mathbb{R}^2$. Pero note que $A \cap B = \left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)\right\}$, y $\left\{\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)\right\}, \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)\right\}\right\}$ sirve de separación para $A \cap B$.

$\therefore$ $A \cap B$ no es conexo.

Ejemplo (b):

Sea $A := \left[0, \frac{1}{4}\right] \sqcup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ y sea $B := \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \sqcup \left[\frac{3}{4}, 1\right]$. Note que ambos A y B no son conexos, pues están definidos como uniones disjuntas de dos subespacios propios. Ahora, note que:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \left(\left[0, \frac{1}{4}\right] \sqcup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]\right) \cup \left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \sqcup \left[\frac{3}{4}, 1\right]\right) \\ &= \left(\left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right) \cup \left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right]\right) \\ &= \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] = [0,1] \end{aligned} \tag{3}$$

$\therefore$ $A \cup B = [0,1]$ es conexo.

Ejemplo (c):

Sea $A := [0,1]$ y sea $B := \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$. Ambos son conexos pues son intervalos.
Pero $A \setminus B = [0,1] \setminus \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] = \left[0, \frac{1}{4}\right) \sqcup \left(\frac{3}{4}, 1\right]$, pero esto es la unión disjunta de dos subespacios propios.

$\therefore$ $A \setminus B$ no es conexo.

Ejemplo (d):
Sea $A := \left[0, \frac{1}{2}\right)$ y sea $B := \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Note que ambos son conexos pues son intervalos, además note que $\overline{A} = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $\overline{B} = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Entonces $\overline{A} \cap \overline{B} = \left\{\frac{1}{2}\right\} \neq \emptyset$. Pero $A \cup B = \left[0, \frac{1}{2}\right) \sqcup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, que es una unión disjunta de subespacios propios.

$\therefore$ $A \cup B$ no es conexo.

Problem 3

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ *un espacio topológico y* $\{\infty\}$ *un objeto que no pertenezca a* X. *Defina* $Y = X \cup \{\infty\}$ y $\mathcal{T}_\infty = \{U \subseteq Y \mid U \in \mathcal{T}_X \text{ o } Y \setminus U \text{ es compacto y cerrado en } X\}$.
(a) Demuestre que $\mathcal{T}_\infty$ es una topología sobre Y.
(b) Sea $\mathcal{T}'$ la topología relativa sobre X, la que hereda como subconjunto de Y. Demuestre que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_X$.

Problem 4

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ *un espacio topológico y* $\{\infty\}$ *un objeto que no pertenezca a* X. *Defina* $Y = X \cup \{\infty\}$ y $\mathcal{T}_\infty = \{U \subseteq Y \mid U \in \mathcal{T}_X \text{ o } Y \setminus U \text{ es compacto y cerrado en } X\}$.
(c) Demuestre que $(Y, \mathcal{T}_\infty)$ es compacto.