MATE 6540: Tarea 3

Due on 19 de mayo

Prof. Iván Cardona , C41, 19 de mayo

Sergio Rodríguez

Problem 0

Considere al espacio $\widehat{\mathbf{2}}$ *con la topología discreta* $\mathcal{T}_{\text{disc}}$.
Demuestre la proposición:
El espacio topológico $(X, \mathcal{T}_X)$ *es conexo* $\Longleftrightarrow$ *No existe una función continua* $g : (X, \mathcal{T}_X) \to \left(\widehat{\mathbf{2}}, \mathcal{T}_{\text{disc}}\right)$ *que sea suprayectiva.*

Problem 1

Sea X *un conjunto infinito dotado de la siguiente topología*
$\mathcal{T}_{\text{cof}} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ es finito o } U = \emptyset\}$ *(i.e. la topología de los complementos finitos)*
(a) Demuestre: $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ *es conexo.*
(b) Demuestre: $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ *es compacto.*

Problem 2

Dé ejemplos de subespacios A *y* B *de* $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\varepsilon^2}\right)$ *tales que:*
(a) A *y* B *son conexos, pero* $A \cap B$ *no es conexo.*
(b) A *y* B *no son conexos, pero* $A \cup B$ *es conexo.*
(c) A *y* B *son conexos pero* $A \setminus B$ *no es conexo.*
(d) A *y* B *son conexos y* $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$*, pero* $A \cup B$ *no es conexo.*

Problem 3

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ *un espacio topológico y* $\{\infty\}$ *un objeto que no pertenezca a* X*. Defina* $Y = X \cup \{\infty\}$ y
$\mathcal{T}_\infty = \{U \subseteq Y \mid U \in \mathcal{T}_X \text{ o } Y \setminus U \text{ es compacto y cerrado en } X\}$.
(a) Demuestre que $\mathcal{T}_\infty$ es una topología sobre Y.
(b) Sea $\mathcal{T}'$ la topología relativa sobre X, la que hereda como subconjunto de Y. Demuestre que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_X$.

Problem 4

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ *un espacio topológico y* $\{\infty\}$ *un objeto que no pertenezca a* X*. Defina* $Y = X \cup \{\infty\}$ y
$\mathcal{T}_\infty = \{U \subseteq Y \mid U \in \mathcal{T}_X \text{ o } Y \setminus U \text{ es compacto y cerrado en } X\}$.
(c) Demuestre que $(Y, \mathcal{T}_\infty)$ es compacto.