MATE 6540: Tarea 2

Due on 21 de marzo

Prof. Iván Cardona , C41, 21 de marzo

Sergio Rodríguez

Problem 1

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos y sea $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ una biyección. Demuestre que las siguientes son equivalentes:

(a) f es un homeomorfismo.

(b) f y f^{-1} son funciones abiertas.

(c) f y f^{-1} son funciones cerradas.

Demo:

MEP

Problem 2

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos. Una función $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ es fuertemente continua si $f\left(\overline{A}\right) \subseteq f(A), \quad \forall A \subseteq X$. Demuestre que f es fuertemente continua $\iff f^{-1}(B)$ es cerrado, $\forall B \subseteq Y$.

Demo:

MEP

Problem 3

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos y $\mathcal{U}$ la topología producto sobre $X \times X$. Demuestre que $(X, \mathcal{T}_X)$ es Hausdorff $\iff$ la diagonal $\Delta = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$ es un subconjunto cerrado de $(X \times X, \mathcal{U})$.

Demo:

MEP

Problem 4

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos. Demuestre que si $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ es sobreyectiva, continua, y abierta, entonces $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_{\text{FIN}}$, donde $\mathcal{T}_{\text{FIN}}$ es la topología final inducida por f.

Demo:

MEP

Problem 5

Sea $p : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ una función continua. Demuestre que si existe una función continua $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T}_X)$ tal que $p \circ f$ es la identidad en Y, entonces p es una aplicación cociente.

Demo:

MEP