Mate 6540

Tarea 3

Problema 1.	Considere al espacio $\widehat{\mathbf{2}} = \{0,1\}$ con la topología discreta $\mathscr{T}_{disc}$. <u>Demuestre la proposición</u>: "*El espacio topológico* $(X, \mathscr{T}_X)$ *es conexo* $\Longleftrightarrow$ *No existe una función continua* $g : (X, \mathscr{T}_X) \longrightarrow \left(\widehat{\mathbf{2}}, \mathscr{T}_{disc}\right)$ *que sea suprayectiva.*"
Problema 2.	Sea X un conjunto infinito dotado de la siguiente topología $\mathscr{T}_{cof} = \{U \subseteq X \mid X - U \text{ es finito o } U = \varnothing\}$ (i.e. la topología de los complementos finitos) (a) <u>Demuestre</u>: "$(X, \mathscr{T}_{cof})$ *es conexo.*" (b) <u>Demuestre</u>: "$(X, \mathscr{T}_{cof})$ *es compacto.*"
Problema 3.	Dé ejemplos de subespacios A y B de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\mathcal{E}^2})$ tales que: (a) A y B son conexos, pero $A \cap B$ no es conexo. (b) A y B no son conexos, pero $A \cup B$ es conexo. (c) A y B son conexos, pero $A - B$ no es conexo. (d) A y B son conexos y $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \varnothing$, pero $A \cup B$ no es conexo.
Problema 4.	Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico y $\{\infty\}$ un objeto que no pertenezca a X. Defina $Y = X \cup \{\infty\}$ y $\mathcal{T}_\infty = \{U \subseteq Y \mid U \in \mathcal{T}_X \text{ o } Y - U \text{ es compacto y cerrado en } X\}$. (a) Demuestre que $\mathcal{T}_\infty$ es una topología sobre Y. (b) Sea $\mathcal{T}'$ la topología relativa sobre X, la que hereda como subconjunto de Y. Demuestre que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_X$.
Problema 5.	Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico y $\{\infty\}$ un objeto que no pertenezca a X. Defina $Y = X \cup \{\infty\}$ y $\mathcal{T}_\infty = \{U \subseteq Y \mid U \in \mathcal{T}_X \text{ o } Y - U \text{ es compacto y cerrado en } X\}$. (c) Demuestre que $(Y, \mathcal{T}_\infty)$ es compacto.