

## **MATE 6540: Tarea 2**

Due on 11 de abril

*Prof. Iván Cardona* , C41, 11 de abril

**Sergio Rodríguez**

**Problem 0**

Sean  $(X, \mathcal{T}_X)$  y  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  espacios topológicos y sea  $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$  una biyección. Demuestre que las siguientes son equivalentes:

- (a)  $f$  es un homeomorfismo.
- (b)  $f$  y  $f^{-1}$  son funciones abiertas.
- (c)  $f$  y  $f^{-1}$  son funciones cerradas.

**Demo:**


---

$(a \implies b)$

---

Suponga que  $f$  es un homeomorfismo, y sea  $U \in \mathcal{T}_X$ , como  $f$  es biyectiva y un homeomorfismo,  $f^{-1}$  es continua, entonces  $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U) \in \mathcal{T}_Y$ .

$\therefore f$  es función abierta.

Similarmente, sea  $V \in \mathcal{T}_X$ , como  $f$  es homeomorfismo,  $f$  es continua, entonces  $f^{-1}(V) = (f^{-1})^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ .

$\therefore f^{-1}$  es función abierta.

---

$(b \implies c)$

---

Suponga que  $f$  y  $f^{-1}$  son funciones abiertas. Sea  $C \subseteq X$  cerrado y note que:

$$f^{-1}(Y \setminus f(C)) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(f(C)) = X \setminus C \in \mathcal{T}_X \text{ (porque } f \text{ es inyectiva)} \quad (1)$$

Pero  $f$  es función abierta, entonces:

$$f(f^{-1}(Y \setminus f(C))) = Y \setminus f(C) \in \mathcal{T}_Y \implies f(C) \text{ es cerrado} \quad (2)$$

$\therefore f$  es función cerrada.

Similarmente, sea  $K \subseteq Y$  cerrado y note que:

$$\begin{aligned} f(X \setminus f^{-1}(K)) &= (f^{-1})^{-1}(X \setminus f^{-1}(K)) = (f^{-1})^{-1}(X) \setminus (f^{-1})^{-1}(f^{-1}(K)) \\ &= f(X) \setminus f(f^{-1}(K)) = Y \setminus K \in \mathcal{T}_Y \end{aligned} \quad (3)$$

$$\implies f^{-1}(f(X \setminus f^{-1}(K))) = X \setminus f^{-1}(K) \in \mathcal{T}_X \implies f^{-1}(K) \text{ es cerrado}$$

$\therefore f^{-1}$  es función cerrada.

---

$(c \implies a)$

---

Suponga que  $f$  y  $f^{-1}$  son funciones cerradas, y sea  $C_Y$  un conjunto cerrado en  $(Y, \mathcal{T}_Y)$ , entonces  $f^{-1}(C_Y)$  es cerrado en  $(X, \mathcal{T}_X) \implies f$  es continua.

Similarmente, suponga que  $C_X$  es cerrado en  $(X, \mathcal{T}_X)$ , entonces  $(f^{-1})^{-1}(C_X) = f(C_X)$  es cerrado en  $Y \implies f^{-1}$  es continua.

$\therefore f$  es un homeomorfismo.

MEP

## Problem 1

Sean  $(X, \mathcal{T}_X)$  y  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  espacios topológicos. Una función  $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$  es fuertemente continua si  $f(\overline{A}) \subseteq f(A)$ ,  $\forall A \subseteq X$ . Demuestre que  $f$  es fuertemente continua  $\iff f^{-1}(B)$  es cerrado,  $\forall B \subseteq Y$ .

**Demo:**

$(\implies)$

Suponga que  $f$  es fuertemente continua y tome  $B \subseteq Y$ . Entonces:

$$\begin{aligned} B \subseteq Y &\implies f^{-1}(B) \subseteq X \\ \implies f(\overline{f^{-1}(B)}) &\subseteq f(f^{-1}(B)) \quad (\text{continuidad fuerte}) \\ \implies f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(B)})) &\subseteq f^{-1}(f(f^{-1}(B))) \quad (\text{TMA A.4 (ii)}) \end{aligned} \tag{4}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(B)) &\subseteq B \quad (\text{TMA A.4 (vii)}) \\ \implies f^{-1}(f(f^{-1}(B))) &\subseteq f^{-1}(B) \quad (\text{TMA A.4 (ii)}) \end{aligned} \tag{5}$$

Adicionalmente:

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(B)})) \quad (\text{TMA A.4 (viii)}) \tag{6}$$

Entonces, por la transitividad de las inclusiones  $(6) \subseteq (4) \subseteq (5)$ , tenemos que  $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B)$ .

$\therefore f^{-1}(B)$  es cerrado.

$(\impliedby)$

Suponga que  $f^{-1}(B)$  es cerrado  $\forall B \subseteq Y$ , y tome  $A \subseteq X$ . Entonces  $f(A) \subseteq Y \implies f^{-1}(f(A))$  es cerrado por hipótesis. Además,  $A \subseteq f^{-1}(f(A))$  por el TMA A.4 (viii). Pero  $\overline{A}$  es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a  $A$ , por lo tanto  $\overline{A} \subseteq f^{-1}(f(A))$ . Entonces:

$$\begin{aligned}
\overline{A} &\subseteq f^{-1}(f(A)) \\
\Rightarrow f(\overline{A}) &\subseteq f(f^{-1}(f(A))) \quad (\text{TMA A.4 (i)}) \\
&\subseteq f(A) \quad (\text{TMA A.4 (vii)})
\end{aligned} \tag{7}$$

$\therefore f$  es fuertemente continua.

MEP

## Problem 2

Sea  $(X, \mathcal{T}_X)$  un espacio topológico y  $\mathcal{U}$  la topología producto sobre  $X \times X$ . Demuestre que  $(X, \mathcal{T}_X)$  es Hausdorff  $\Leftrightarrow$  la diagonal  $\Delta = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$  es un subconjunto cerrado de  $(X \times X, \mathcal{U})$ .

### Demo:

Dado  $z \in X$ , denotaremos como  $U_z$  a una vecindad de  $z$ .

( $\Rightarrow$ )

Dados  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ , defina  $H_{x,y} := \{U_x \times U_y \mid U_x \cap U_y = \emptyset\}$ . Note que  $(X, \mathcal{T}_X)$  Hausdorff  $\Rightarrow H_{x,y} \neq \emptyset, \forall x, y \in X$  con  $x \neq y$ . Considere la familia  $\{H_{x,y}\}_{(x,y) \in \Lambda}$  donde  $\Lambda := X \times X \setminus \Delta$ . Por el axioma del escogido, existe una función de selección:

$$\begin{aligned}
c : \{H_{x,y}\}_{(x,y) \in \Lambda} &\rightarrow \bigcup_{(x,y) \in \Lambda} H_{x,y} \\
c(A) &\in A, \quad \forall A \in \{H_{x,y}\}_{(x,y) \in \Lambda}
\end{aligned} \tag{8}$$

Ahora, sea

$$B := \bigcup_{(x,y) \in \Lambda} c(H_{x,y}) \tag{9}$$

Note que  $c(H_{x,y}) \in H_{x,y} \Rightarrow \exists x', y' \in X$  tal que  $c(H_{x,y}) = U_{x'} \times U_{y'}$ . Entonces  $B$  es unión arbitraria de elementos básicos de  $\mathcal{U} \Rightarrow B \in \mathcal{U}$ .

Afirmamos que  $B = X \times X \setminus \Delta$ :

Tome  $(a, b) \in B$ . Entonces  $\exists (a', b') \in \Lambda$  tal que  $(a, b) \in U_{a'} \times U_{b'}$ , pero  $(a', b') \in \Lambda \Rightarrow U_{a'} \cap U_{b'} = \emptyset \Rightarrow a \neq b \Rightarrow (a, b) \in X \times X \setminus \Delta \Rightarrow B \subseteq X \times X \setminus \Delta$ .

Ahora tome  $(c, d) \in X \times X \setminus \Delta$ , entonces  $c \neq d \Rightarrow U_c, U_d$  con  $U_c \cap U_d = \emptyset$ , pero  $(c, d) \in U_c \times U_d \subseteq B \Rightarrow (c, d) \in B \Rightarrow X \times X \setminus \Delta \subseteq B$ .

$\therefore B = X \times X \setminus \Delta$

Entonces,  $X \times X \setminus \Delta = B \in \mathcal{U} \Rightarrow \Delta$  es cerrado en  $\mathcal{U}$ .

( $\Leftarrow$ )

Suponga que  $\Delta$  es cerrado, entonces  $X \times X \setminus \Delta \in \mathcal{U}$ . Tome  $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta$ . Como  $X \times X \setminus \Delta$  es abierto, existe un elemento básico  $U \times V$  tal que  $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta \implies U \cap V = \emptyset$ . Entonces encontramos abiertos disjuntos que contienen a dos puntos arbitrarios distintos.

$\therefore X$  es Hausdorff.

**MEP**

### Problem 3

Sean  $(X, \mathcal{T}_X)$  y  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  espacios topológicos. Demuestre que si  $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$  es sobreyectiva, continua, y abierta, entonces  $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_{\text{FIN}}$ , donde  $\mathcal{T}_{\text{FIN}}$  es la topología final inducida por  $f$ .

#### Demo:

Por definición,  $\mathcal{T}_{\text{FIN}}$  es la topología más grande que hace que  $f$  sea continua. Pero:

$f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$  es continua por hipótesis.

$\therefore \mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}_{\text{FIN}}$

Tome  $V \in \mathcal{T}_{\text{FIN}}$ . Como  $f$  es continua,  $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ . Pero  $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$  también es abierta, lo que implica que  $f(f^{-1}(V)) \in \mathcal{T}_Y$ . Finalmente,  $f$  sobreyectiva  $\implies f(f^{-1}(V)) = V$ . Entonces  $V \in \mathcal{T}_Y$ .

$\therefore \mathcal{T}_{\text{FIN}} \subseteq \mathcal{T}_Y$

$\therefore \mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_{\text{FIN}}$

**MEP**

### Problem 4

Sea  $p : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$  una función continua. Demuestre que si existe una función continua  $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{T}_X)$  tal que  $p \circ f$  es la identidad en  $Y$ , entonces  $p$  es una aplicación cociente.

#### Demo:

Para demostrar que  $p$  es una aplicación cociente, debemos demostrar que  $p$  es sobreyectiva, y que  $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}' := \{V \subseteq Y \mid p^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X\}$ .

Tome  $y \in Y$  y note que  $y = \text{id}_Y(y) = (p \circ f)(y) = p(f(y))$ . Entonces, dado un elemento arbitrario  $y \in Y$ , encontramos un elemento  $x \in X$  tal que  $y = p(x)$ .

$\therefore p$  es sobreyectiva.

Tome  $U \in \mathcal{T}_Y$ , como  $p$  es continua,  $p^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X \implies \mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}'$ .

Ahora, tome  $V \in \mathcal{T}'$ , entonces  $p^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$  por definición. Entonces,  $f^{-1}(p^{-1}(V)) \in \mathcal{T}_Y$  por la continuidad de  $f$ . Pero  $f^{-1}(p^{-1}(V)) = (f^{-1} \circ p^{-1})(V) = (p \circ f)^{-1}(V) = \text{id}_Y^{-1}(V) = V$ , lo que implica que  $V \in \mathcal{T}_Y$ .

$$\therefore \mathcal{T}_Y = \mathcal{T}'.$$

$\therefore p$  es una aplicación cociente.

**MEP**