MATE 6540: Tarea 3

Due on 19 de mayo

Prof. Iván Cardona , C41, 19 de mayo

Sergio Rodríguez

Problem 0

Considere al espacio $\widehat{\mathbf{2}} = \{0, 1\}$ *con la topología discreta* $\mathcal{T}_{\text{disc}}$.
Demuestre la proposición:
El espacio topológico $(X, \mathcal{T}_X)$ *es conexo* $\Longleftrightarrow$ *No existe una función continua* $g : (X, \mathcal{T}_X) \to \left(\widehat{\mathbf{2}}, \mathcal{T}_{\text{disc}}\right)$ *que sea suprayectiva.*

Demo:

$(\Longrightarrow)$

Suponga que $(X, \mathcal{T}_X)$ es conexo. Sea $g : (X, \mathcal{T}_X) \to \left(\widehat{\mathbf{2}}, \mathcal{T}_{\text{disc}}\right)$ una función continua. Afirmamos que g no es suprayectiva. Note que $\{0\}, \{1\} \in \mathcal{T}_{\text{disc}}$ son disjuntos con $\{0\} \cup \{1\} = \widehat{\mathbf{2}}$. Entonces $\{\{0\}, \{1\}\}$ es una separación de $\left(\widehat{\mathbf{2}}, \mathcal{T}_{\text{disc}}\right)$. Por otra parte, $g(X) \subseteq \widehat{\mathbf{2}}$ es imagen continua de un espacio conexo. Entonces, por un teorema demostrado en clase, $g(X)$ es conexo. Pero $\left(\widehat{\mathbf{2}}, \mathcal{T}_{\text{disc}}\right)$ no es conexo, entonces $g(X) \subseteq \{0\}$ o $g(X) \subseteq \{1\}$ pero no ambos.

$\therefore$ g no es suprayectiva.

$(\Longleftarrow)$

Demostramos el contrapositivo. Suponga que $(X, \mathcal{T}_X)$ no es conexo, entonces existe una separación $\{A, B\}$. Ahora defina $g : (X, \mathcal{T}_X) \to \left(\widehat{\mathbf{2}}, \mathcal{T}_{\text{disc}}\right)$ de la siguiente manera:

$$g(x) := \begin{cases} 0 \text{ si } x \in A \\ 1 \text{ si } x \in B \end{cases} \tag{1}$$

Note que:
(a) $A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = X \Longrightarrow g$ está bien definida.
(b) $A, B \neq \emptyset \Longrightarrow g$ es suprayectiva.
(c) $g^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}_X, \quad g^{-1}(\{0\}) = A \in \mathcal{T}_X, \quad g^{-1}(\{1\}) = B \in \mathcal{T}_X, \quad g^{-1}(\{0, 1\}) = X \in \mathcal{T}_X$
$\Longrightarrow g$ es continua.

$\therefore$ existe una función continua $g : (X, \mathcal{T}_X) \to \left(\widehat{\mathbf{2}}, \mathcal{T}_{\text{disc}}\right)$ que es suprayectiva.

MEP

Problem 1

Sea X *un conjunto infinito dotado de la siguiente topología*
$\mathcal{T}_{\text{cof}} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ es finito o } U = \emptyset\}$ *(i.e. la topología de los complementos finitos)*
(a) Demuestre: $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ *es conexo.*
(b) Demuestre: $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ *es compacto.*

Demo (a):

Suponga, por contradicción, que $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ no es conexo. Entonces, existe una separación $\{A, B\}$ de $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$. Como $A \neq \emptyset$ es abierto, $X \setminus A = B$ es finito. Similarmente, como $B \neq \emptyset$ es abierto, $X \setminus B = A$ es finito. Entonces $X = A \cup B$ es unión de conjuntos finitos, por lo tanto X es finito, lo cual contradice nuestra hipótesis. ※

$\therefore (X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ es conexo.

MEP

Demo (b):

Si $X = \emptyset$, entonces es compacto por convención. Suponga que $X \neq \emptyset$, y sea $C := \{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una cubierta abierta de $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$. Como $X \neq \emptyset$, la cubierta no es vacía. Tome $C_{\alpha_0} \in C$, y note que $\emptyset \neq C_{\alpha_0} \in \mathcal{T}_{\text{cof}} \Longrightarrow A := X \setminus C_{\alpha_0}$ es finito. Pero $A \subseteq X = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha$, entonces, para cada elemento $x_i \in A$, con $i \in \{1, ..., |A|\}$, existe por lo menos algún $C_{\alpha_i} \in C$ con $x_i \in C_{\alpha_i}$.
Entonces $C' := \left\{C_{\alpha_0}, C_{\alpha_1}, ..., C_{\alpha_{|A|}}\right\}$ es una subcolección finita de C. Afirmamos que C' cubre a X, es decir, que $\bigcup\limits_{i=0}^{|A|} C_{\alpha_i} = X$. Primero, $C_{\alpha_i} \subseteq X, \quad \forall i \in \{0, 1, ..., |A|\} \Longrightarrow \bigcup\limits_{i=0}^{|A|} C_{\alpha_i} \subseteq X$. Ahora tome $x \in X$, si $x \in C_{\alpha_0} \subseteq \bigcup\limits_{i=0}^{|A|} C_{\alpha_i}$, terminamos. Si $x \in A = X \setminus C_{\alpha_0}$, entonces $\exists j \in \{1, ..., |A|\}$ tal que $x = x_j \in A \Longrightarrow x \in C_{\alpha_j} \subseteq \bigcup\limits_{i=0}^{|A|} C_{\alpha_i}$.

$\therefore \bigcup\limits_{i=0}^{|A|} C_{\alpha_i} = X$

$\therefore (X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ es compacto.

MEP

Problem 2

Dé ejemplos de subespacios A y B de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\varepsilon^2})$ tales que:
(a) A y B son conexos, pero $A \cap B$ no es conexo.
(b) A y B no son conexos, pero $A \cup B$ es conexo.
(c) A y B son conexos pero $A \setminus B$ no es conexo.
(d) A y B son conexos y $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$, pero $A \cup B$ no es conexo.

Lema 1:

Sea X un subespacio conexo de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\varepsilon^1})$, y $f : X \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\varepsilon^1})$ una función continua. Entones, el conjunto $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X\}$ es un subespacio conexo de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\varepsilon^2})$.

Demo:

Sea $\varphi : X \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\varepsilon^2})$ una función definida por $\varphi(x) = (x, f(x))$. Tome $V \in \mathcal{T}_{\varepsilon^2}$, entonces $\varphi^{-1}(V) = \{x \in X \mid (x, f(x)) \in V\}$. Tome $y \in \varphi^{-1}(V)$, entonces $(y, f(y)) \in V$, pero $V \in \mathcal{T}_{\varepsilon^2} \Longrightarrow \exists r \in (0, \infty)$ tal que $B_{d_2}((y, f(y)); r) \subseteq V$. Donde d_2 es la métrica usual sobre $\mathbb{R}^2$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
f^{-1}\Big(B_{d_2}((y,f(y));r)\Big) &= \{x \in X \mid d_2((x,f(x)),(y,f(y)) < r\} \\
&= \Big\{x \in X \mid \sqrt{(y-x)^2 + (f(y)-f(x))^2} < r\Big\} \\
&= \{x \in X \mid |y-x| < r\} \text{ (porque estamos tomando una proyección)} \\
&= \{x \in X \mid d_1(x,y) < r\} \text{ donde } d_1 \text{ es la métrica usual sobre } \mathbb{R} \\
&= B_{d_1}(y;r) \in \mathcal{T}_{\varepsilon^1}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Pero $B_{d_1}(y;r) = f^{-1}\Big(B_{d_2}((y,f(y);r))\Big) \subseteq f^{-1}(V)$.

$\therefore$ φ es continua.

Pero, por el corolario 4.8, X conexo y φ continua $\Longrightarrow \varphi(X) = \big\{(x,f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X\big\}$ es un subespacio conexo de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\varepsilon^2})$.

MEP

Ejemplo (a):

Sean $f_1, g_1 : ([-1,1], \mathcal{T}_{\text{rel}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\varepsilon^1})$ definidas por $f(x) = x^2, g(x) = \frac{1}{2}$. Note que f_1, g_1 son continuas y que $[-1,1]$ es conexo. Entonces, por el lema 1,
$A := \big\{(x,f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1]\big\}, B := \big\{(x,g(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1]\big\}$ son subespacios conexos de $\mathbb{R}^2$. Pero note que $A \cap B = \Big\{\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\Big), \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\Big)\Big\}$, y $\Big\{\Big\{\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\Big)\Big\}, \Big\{\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\Big)\Big\}\Big\}$ sirve de separación para $A \cap B$.

$\therefore$ $A \cap B$ no es conexo.

Ejemplo (b):

Sea $A := \big[0, \frac{1}{4}\big] \sqcup \big[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\big]$ y sea $B := \big[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\big] \sqcup \big[\frac{3}{4}, 1\big]$. Note que ambos A y B no son conexos, pues están definidos como uniones disjuntas de dos subespacios propios. Ahora, note que:

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= \left(\left[0, \frac{1}{4}\right] \sqcup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]\right) \cup \left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \sqcup \left[\frac{3}{4}, 1\right]\right) \\
&= \left(\left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right) \cup \left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right]\right) \\
&= \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] = [0,1]
\end{aligned} \tag{3}
$$

$\therefore$ $A \cup B = [0,1]$ es conexo.

Ejemplo (c):

Sea $A := [0,1]$ y sea $B := \big[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\big]$. Ambos son conexos pues son intervalos.
Pero $A \setminus B = [0,1] \setminus \big[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\big] = \big[0, \frac{1}{4}\big) \sqcup \big(\frac{3}{4}, 1\big]$, pero esto es la unión disjunta de dos subespacios propios.

$\therefore$ $A \setminus B$ no es conexo.

Ejemplo (d):

Sea $A := \left[0, \frac{1}{2}\right)$ y sea $B := \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Note que ambos son conexos pues son intervalos, además note que $\overline{A} = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $\overline{B} = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Entonces $\overline{A} \cap \overline{B} = \left\{\frac{1}{2}\right\} \neq \emptyset$. Pero $A \cup B = \left[0, \frac{1}{2}\right) \sqcup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, que es una unión disjunta de subespacios propios.

$\therefore$ $A \cup B$ no es conexo.

Problem 3

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ *un espacio topológico y* $\{\infty\}$ *un objeto que no pertenezca a* X. *Defina* $Y = X \cup \{\infty\}$ y $\mathcal{T}_\infty = \{U \subseteq Y \mid U \in \mathcal{T}_X \;\text{ o }\; Y \setminus U \text{ es compacto y cerrado en } X\}$.
(a) Demuestre que $\mathcal{T}_\infty$ es una topología sobre Y.
(b) Sea $\mathcal{T}'$ la topología relativa sobre X, la que hereda como subconjunto de Y. Demuestre que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_X$.

Lema 2:

Sea $U \in \mathcal{T}_\infty$. Si $Y \setminus U$ es cerrado en X, entonces $(U \setminus \{\infty\}) \in \mathcal{T}_X$.

Demo:

Sea $U \in \mathcal{T}_\infty$ tal que $Y \setminus U$ es cerrado en X, entonces $(Y \setminus U) \subseteq X$. Esto implica que $\infty \notin (Y \setminus U)$. Entonces:

$$Y \setminus U = (Y \setminus U) \setminus \{\infty\} = (Y \setminus \{\infty\}) \setminus (U \setminus \{\infty\}) = X \setminus (U \setminus \{\infty\}) \tag{4}$$

Pero $X \setminus (U \setminus \{\infty\}) = Y \setminus U$ es cerrado en X.

$\therefore$ $(U \setminus \infty) \in \mathcal{T}_X$.

MEP

Demo (a):

Note que $\emptyset \in \mathcal{T}_X \implies \emptyset \in \mathcal{T}_\infty$. Además, $\emptyset$ es cerrado y compacto en X, pero $\emptyset = Y \setminus Y$ $\implies Y \in \mathcal{T}_\infty$.

$\therefore$ $\emptyset, Y \in \mathcal{T}_\infty$.

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{T}_\infty$ una familia arbitraria de abiertos y sea $\Gamma \subseteq \Lambda$ tal que $U_\gamma \in \mathcal{T}_X \iff \gamma \in \Gamma$.
Entonces sea $\tilde{\Gamma} = \Lambda \setminus \Gamma$ y note que $Y \setminus U_{\tilde{\gamma}}$ es cerrado y compacto en $X \iff \tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$.
Sea $U = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \cup \bigcup_{\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}} U_{\tilde{\gamma}}$. Llame $A := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma$ y $B := \bigcup_{\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}} U_{\tilde{\gamma}} \implies U = A \cup B$. Afirmamos que $U \in \mathcal{T}_\infty$. Note que $U_\gamma \in \mathcal{T}_X, \quad \forall \gamma \in \Gamma \implies \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma = A \in \mathcal{T}_X$, pues $\mathcal{T}_X$ es una topología.
Entonces $A \in \mathcal{T}_\infty$. Esto nos dice que si $\tilde{\Gamma} = \emptyset$, entonces $U \in \mathcal{T}_\infty$.
Ahora, note que $Y \setminus B = Y \setminus \bigcup_{\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}} U_{\tilde{\gamma}} = \bigcap_{\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}} \left(Y \setminus U_{\tilde{\gamma}}\right)$, pero la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada, y la intersección arbitraria de conjuntos compactos es compacta (suponga que no lo es, entonces existe una cubierta abierta de la intersección que no tiene una subcubierta abierta finita, esto nos produce una contradicción si extendemos esta cubierta a uno de los conjuntos siendo

intersecados). Entonces $B \in \mathcal{T}_\infty$. Esto nos dice que si $\Gamma = \emptyset$, entonces $U \in \mathcal{T}_\infty$. Para el último caso, suponga que $\Gamma, \tilde{\Gamma} \neq \emptyset$. Entonces:

$$\begin{aligned} Y \setminus U &= Y \setminus (A \cup B) = (Y \setminus A) \cap (Y \setminus B) \\ &= \left(Y \setminus \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \right) \cap \left(Y \setminus \bigcup_{\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}} U_{\tilde{\gamma}} \right) \\ &= \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (Y \setminus U_\gamma) \cap \bigcap_{\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}} (Y \setminus U_{\tilde{\gamma}}). \end{aligned} \tag{5}$$

Llame $C := \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (Y \setminus U_\gamma)$ y $D := \bigcap_{\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}} (Y \setminus U_{\tilde{\gamma}}) \Longrightarrow Y \setminus U = C \cap D$. Note que D es cerrado y compacto por un argumento anterior. Además, C es cerrado, pues es intersección arbitraria de cerrados, lo que implica que $Y \setminus U$ es cerrado. También, $Y \setminus U = C \cap D \subseteq D$, pero cualquier subconjunto cerrado de un compacto también es compacto por un teorema demostrado en clase. Entonces $Y \setminus U$ es compacto.

$\therefore U \in \mathcal{T}_\infty$.

Sean $U, V \in \mathcal{T}_\infty$. Si ambos $U, V \in \mathcal{T}_X$, entonces $U \cap V \in \mathcal{T}_X \Longrightarrow U \cap V \in \mathcal{T}_\infty$. Si ambos U y V son tales que $Y \setminus U, Y \setminus V$ son cerrados y compactos en X, entonces:
$Y \setminus (U \cap V) = (Y \setminus U) \cup (Y \setminus V)$, pero la unión finita de cerrados es cerrada. Además, tome una cubierta abierta $\{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de $(Y \setminus U) \cup (Y \setminus V)$, entonces $\{C_\alpha \cap (Y \setminus U)\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una cubierta abierta para $Y \setminus U$, y $\{C_\alpha \cap (Y \setminus V)\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una cubierta abierta para $Y \setminus V$. Pero estos son ambos compactos, entonces debe existir una subcubierta finita $\{D_i\}_{i=1}^n \subseteq \{C_\alpha \cap (Y \setminus U)\}_{\alpha \in \Lambda}$ y una subcubierta finita $\{D'_j\}_{j=1}^m \subseteq \{C_\alpha \cap (Y \setminus V)\}_{\alpha \in \Lambda}$. Entonces $\{D_i\}_{i=1}^n \cup \{D'_j\}_{j=1}^m$ es una subcolección finita de $\{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ que cubre a $(Y \setminus U) \cup (Y \setminus V) = Y \setminus (U \cap V)$. Entonces, $Y \setminus (U \cap V)$ es cerrado y compacto en $X \Longrightarrow U \cap V \in \mathcal{T}_\infty$. Para el último caso, suponga que uno de los U, V es abierto en X y que el complemento en Y del otro es cerrado y compacto en X. Suponga, sin pérdida de generalidad, que U, V son tal que $U \in \mathcal{T}_X$ y $Y \setminus V$ es cerrado y compacto en X. Note que $Y \setminus V$ cerrado y compacto en $X \Longrightarrow Y \setminus V \subseteq X \Longrightarrow \infty \notin Y \setminus V$. Entonces:
$Y \setminus V = (Y \setminus V) \setminus \{\infty\} = (Y \setminus \{\infty\}) \setminus (V \setminus \{\infty\}) = X \setminus (V \setminus \{\infty\})$. Pero $X \setminus (V \setminus \{\infty\}) = Y \setminus V$ es cerrado en X, entonces $V \setminus \{\infty\} \in \mathcal{T}_X$. Ahora, note que $U \in \mathcal{T}_X \Longrightarrow U \subseteq X \Longrightarrow \infty \notin U$, entonces $U \cap V = U \cap (V \setminus \{\infty\})$, pero ambos conjuntos siendo intersecados son abiertos en X, por lo tanto $U \cap V \in \mathcal{T}_X \Longrightarrow U \cap V \in \mathcal{T}_\infty$.

Demo (b):

Tome $U' \in \mathcal{T}'$, entonces $\exists U \in \mathcal{T}_\infty$ tal que $U' = X \cap U$. Si $U \in \mathcal{T}_X$, entonces $U \subseteq X$ $\Longrightarrow U' = X \cap U = U \in \mathcal{T}_X$. Si U es tal que $Y \setminus U$ es cerrado y compacto en X, entonces $(U \setminus \{\infty\}) \in \mathcal{T}_X$ por el lema 2. Esto implica que $U' = X \cap U = (U \setminus \{\infty\}) \in \mathcal{T}_X$.

$\therefore \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}_X$.

Tome $U \in \mathcal{T}_X$, entonces $U \in \mathcal{T}_\infty$, pero $U \subseteq X \Longrightarrow U = (X \cap U) \in \mathcal{T}'$.

$\therefore \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}'$.

$\therefore \mathcal{T}' = \mathcal{T}_X$.

MEP

Problem 4

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ *un espacio topológico y* $\{\infty\}$ *un objeto que no pertenezca a* X. *Defina* $Y = X \cup \{\infty\}$ y $\mathcal{T}_\infty = \{U \subseteq Y \mid U \in \mathcal{T}_X \text{ o } Y \setminus U \text{ es compacto y cerrado en } X\}$.
(c) Demuestre que $(Y, \mathcal{T}_\infty)$ es compacto.