

MATE 6540: Tarea 2

Due on 21 de marzo

Prof. Iván Cardona , C41, 21 de marzo

Sergio Rodríguez

Problem 0

Sean (X, \mathcal{T}_X) y (Y, \mathcal{T}_Y) espacios topológicos y sea $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ una biyección. Demuestre que las siguientes son equivalentes:

- (a) f es un homeomorfismo.
- (b) f y f^{-1} son funciones abiertas.
- (c) f y f^{-1} son funciones cerradas.

Demo:

$(a \implies b)$

Suponga que f es un homeomorfismo, y sea $U \in \mathcal{T}_X$, como f es biyectiva y un homeomorfismo, f^{-1} es continua, entonces $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U) \in \mathcal{T}_Y$.

$\therefore f$ es función abierta.

Similarmente, sea $V \in \mathcal{T}_X$, como f es homeomorfismo, f es continua, entonces $f^{-1}(V) = (f^{-1})^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

$\therefore f^{-1}$ es función abierta.

$(b \implies c)$

Suponga que f y f^{-1} son funciones abiertas. Sea $C \subseteq X$ cerrado y note que:

$$f^{-1}(Y \setminus f(C)) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(f(C)) = X \setminus C \in \mathcal{T}_X \text{ (porque } f \text{ es inyectiva)} \quad (1)$$

Pero f es función abierta, entonces:

$$f(f^{-1}(Y \setminus f(C))) = Y \setminus f(C) \in \mathcal{T}_Y \implies f(C) \text{ es cerrado} \quad (2)$$

$\therefore f$ es función cerrada.

Similarmente, sea $K \subseteq Y$ cerrado y note que:

$$\begin{aligned} f(X \setminus f^{-1}(K)) &= (f^{-1})^{-1}(X \setminus f^{-1}(K)) = (f^{-1})^{-1}(X) \setminus (f^{-1})^{-1}(f^{-1}(K)) \\ &= f(X) \setminus f(f^{-1}(K)) = Y \setminus K \in \mathcal{T}_Y \end{aligned} \quad (3)$$

$$\implies f^{-1}(f(X \setminus f^{-1}(K))) = X \setminus f^{-1}(K) \in \mathcal{T}_X \implies f^{-1}(K) \text{ es cerrado}$$

$\therefore f^{-1}$ es función cerrada.

$(c \implies a)$

Suponga que f y f^{-1} son funciones cerradas, y sea C_Y un conjunto cerrado en (Y, \mathcal{T}_Y) , entonces $f^{-1}(C_Y)$ es cerrado en $(X, \mathcal{T}_X) \implies f$ es continua.

Similarmente, suponga que C_X es cerrado en (X, \mathcal{T}_X) , entonces $(f^{-1})^{-1}(C_X) = f(C_X)$ es cerrado en $Y \implies f^{-1}$ es continua.

$\therefore f$ es un homeomorfismo.

MEP

Problem 1

Sean (X, \mathcal{T}_X) y (Y, \mathcal{T}_Y) espacios topológicos. Una función $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ es fuertemente continua si $f(\overline{A}) \subseteq f(A)$, $\forall A \subseteq X$. Demuestre que f es fuertemente continua $\iff f^{-1}(B)$ es cerrado, $\forall B \subseteq Y$.

Demo:

(\implies)

Suponga que f es fuertemente continua y tome $B \subseteq Y$. Entonces:

$$\begin{aligned} B \subseteq Y &\implies f^{-1}(B) \subseteq X \\ \implies f(\overline{f^{-1}(B)}) &\subseteq f(f^{-1}(B)) \quad (\text{continuidad fuerte}) \\ \implies f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(B)})) &\subseteq f^{-1}(f(f^{-1}(B))) \quad (\text{TMA A.4 (ii)}) \end{aligned} \tag{4}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(B)) &\subseteq B \quad (\text{TMA A.4 (vii)}) \\ \implies f^{-1}(f(f^{-1}(B))) &\subseteq f^{-1}(B) \quad (\text{TMA A.4 (ii)}) \end{aligned} \tag{5}$$

Adicionalmente:

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(B)})) \quad (\text{TMA A.4 (viii)}) \tag{6}$$

Entonces, por la transitividad de las inclusiones $(6) \subseteq (4) \subseteq (5)$, tenemos que $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B)$.

$\therefore f^{-1}(B)$ es cerrado.

MEP

Problem 2

Sean (X, \mathcal{T}_X) y (Y, \mathcal{T}_Y) espacios topológicos y \mathcal{U} la topología producto sobre $X \times X$. Demuestre que (X, \mathcal{T}_X) es Hausdorff \iff la diagonal $\Delta = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$ es un subconjunto cerrado de $(X \times X, \mathcal{U})$.

Demo:

Dado $z \in X$, denotaremos como U_z a una vecindad de z .

(\Rightarrow)

Dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, defina $H_{x,y} := \{U_x \times U_y \mid U_x \cap U_y = \emptyset\}$. Note que (X, \mathcal{T}_X) Hausdorff $\Rightarrow H_{x,y} \neq \emptyset, \forall x, y \in X$ con $x \neq y$. Considere la familia $\{H_{x,y}\}_{(x,y) \in \Lambda}$ donde $\Lambda := X \times X \setminus \Delta$. Por el axioma del escogido, existe una función de selección:

$$\begin{aligned} c : \{H_{x,y}\}_{(x,y) \in \Lambda} &\rightarrow \bigcup_{(x,y) \in \Lambda} H_{x,y} \\ c(A) &\in A, \quad \forall A \in \{H_{x,y}\}_{(x,y) \in \Lambda} \end{aligned} \quad (7)$$

Ahora, sea

$$B := \bigcup_{(x,y) \in \Lambda} c(H_{x,y}) \quad (8)$$

Note que $c(H_{x,y}) \in H_{x,y} \Rightarrow \exists x', y' \in X$ tal que $c(H_{x,y}) = U_{x'} \times U_{y'}$. Entonces B es unión arbitraria de elementos básicos de $\mathcal{U} \Rightarrow B \in \mathcal{U}$.

Afirmamos que $B = X \times X \setminus \Delta$:

Tome $(a, b) \in B$. Entonces $\exists (a', b') \in \Lambda$ tal que $(a, b) \in U_{a'} \times U_{b'}$, pero $(a', b') \in \Lambda \Rightarrow U_{a'} \cap U_{b'} = \emptyset \Rightarrow a \neq b \Rightarrow (a, b) \in X \times X \setminus \Delta \Rightarrow B \subseteq X \times X \setminus \Delta$.

Ahora tome $(c, d) \in X \times X \setminus \Delta$, entonces $c \neq d \Rightarrow U_c, U_d$ con $U_c \cap U_d = \emptyset$, pero $(c, d) \in U_c \times U_d \subseteq B \Rightarrow (c, d) \in B \Rightarrow X \times X \setminus \Delta \subseteq B$.

$$\therefore B = X \times X \setminus \Delta$$

Entonces, $X \times X \setminus \Delta = B \in \mathcal{U} \Rightarrow \Delta$ es cerrado en \mathcal{U} .

(\Leftarrow)

Suponga que Δ es cerrado, entonces $X \times X \setminus \Delta \in \mathcal{U}$. Tome $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta$.

Como $X \times X \setminus \Delta$ es abierto, existe un elemento básico $U \times V$ tal que

$(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta \Rightarrow U \cap V = \emptyset$. Entonces encontramos abiertos disjuntos que contienen a dos puntos arbitrarios distintos.

$\therefore X$ es Hausdorff.

MEP

Problem 3

Sean (X, \mathcal{T}_X) y (Y, \mathcal{T}_Y) espacios topológicos. Demuestre que si $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ es sobreyectiva, continua, y abierta, entonces $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_{\text{FIN}}$, donde \mathcal{T}_{FIN} es la topología final inducida por f .

Demo:

Por definición, \mathcal{T}_{FIN} es la topología más grande que hace que f sea continua. Pero:
 $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ es continua por hipótesis.

$$\therefore \mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}_{\text{FIN}}$$

Tome $V \in \mathcal{T}_{\text{FIN}}$. Como f es continua, $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$. Pero $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ también es abierta, lo que implica que $f(f^{-1}(V)) \in \mathcal{T}_Y$. Finalmente, f sobreyectiva $\implies f(f^{-1}(V)) = V$. Entonces $V \in \mathcal{T}_Y$.

$$\therefore \mathcal{T}_{\text{FIN}} \subseteq \mathcal{T}_Y$$

$$\therefore \mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_{\text{FIN}}$$

MEP**Problem 4**

Sea $p : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ una función continua. Demuestre que si existe una función continua $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ tal que $p \circ f$ es la identidad en Y , entonces p es una aplicación cociente.

Demo:**MEP**