MATE 6540: Tarea 1

Due on 20 de septiembre

Prof. Iván Cardona , C41, 20 de septiembre

Sergio Rodríguez

Problem 1

Sea d una métrica sobre X, entonces:

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \tag{1}$$

es una métrica acotada tal que $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$.

Demostraremos lo siguiente:

a) d' define una métrica
   1. $d'(x,y) \geq 0, \quad \forall x,y \in X$
   2. $d'(x,y) = 0 \iff x = y, \quad \forall x,y \in X$
   3. $d'(x,y) = d'(y,x), \quad \forall x,y \in X$
   4. $d'(x,z) \leq d'(x,y) + d'(y,z), \quad \forall x,y,z \in X$

b) d' es acotada

c) $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$

Demo:

a) Usamos las propiedades métricas de d para demostrar las mismas para d':
   1. $d(x,y) \geq 0, \quad \forall x,y \in X \implies \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = d'(x,y) \geq 0, \quad \forall x,y \in X$.
   2. $\left(d(x,y) = 0 \iff x = y, \quad \forall x,y \in X\right) \implies \left(\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = d'(x,y) = 0 \iff x = y, \quad \forall x,y \in X\right)$.
   3. $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = d'(y,x), \quad \forall x,y \in X$.
   4. soon tm

b) Al ser métrica, sabemos que d' está acotada por abajo. Falta demostrar que está acotada por arriba. Suponga, por contradicción, que $d'(x,y) > 1$. Entonces $\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} > 1$, y como d es no negativa, $d(x,y) > 1 + d(x,y)$. Lo cual es una contradicción. ※
   $\therefore d'$ es acotada.

c) todo

MEP

Problem 2

Si $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de topologías sobre X, demuestre que $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{T}_\alpha$ es una topología sobre X. ¿Es $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{T}_\alpha$ una topología?

Sea $\mathcal{T} = \bigcap_{\alpha\in\Lambda}$. Tenemos que demostrar:

a) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

b) $U, V \in \mathcal{T} \implies U \cap V \in \mathcal{T}$, y

c) $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda'} \subseteq \mathcal{T} \implies \bigcup_{\gamma\in\Lambda'} \mathcal{T}_\gamma \in \mathcal{T}$.

Demo:

a) Tome $\beta \in \Lambda$, entonces $\mathcal{T}_\beta$ es una topología sobre X, por lo tanto, $\emptyset, X \in \mathcal{T}_\beta$, pero β fue seleccionada arbitrariamente, por lo tanto, $\emptyset, X \in \mathcal{T}_\alpha, \quad \forall \alpha \in \Lambda \Longrightarrow \emptyset, X \in \mathcal{T}$, por definición de la intersección.

b) Tome $U, V \in \mathcal{T}$, entonces $U, V \in \mathcal{T}_\alpha, \quad \forall \alpha \in \Lambda$ por definición de intersección. Pero $\mathcal{T}_\alpha$ es una topología $\forall \alpha \in \Lambda$, por lo tanto $U \cap V \in \mathcal{T}_\alpha \forall \alpha \in \Lambda \Longrightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$.

c) Tome $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda'} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda'} \subseteq \mathcal{T}_\alpha, \quad \forall \alpha \in \Lambda$, pero $\mathcal{T}_\alpha$ es una topología $\forall \alpha \in \Lambda$, por lo tanto $\bigcup_{\gamma \in \Lambda'} U_\gamma \in \mathcal{T}_\alpha, \quad \forall \alpha \in \Lambda \Longrightarrow \bigcup_{\gamma \in \Lambda'} U_\gamma \in \mathcal{T}$.

$\therefore \mathcal{T} = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{T}_\alpha$ es una topología sobre X.

MEP

En general, $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{T}_\alpha$ no es una topología. Considere el siguiente contraejemplo:

$X := \{a, b, c\}, \quad \mathcal{T}_1 := \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}, \quad \mathcal{T}_2 := \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$.

No es difícil verificar que ambos $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son topologías sobre X. Note que $\{b\}, \{c\} \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, pero $\{b\} \cup \{c\} = \{b, c\} \notin \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$.

$\therefore \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ no es una topología.

Problem 3

Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de topologías sobre X. Demuestre que existe una topología única más pequeña que contiene todas las colecciones $\mathcal{T}_\alpha$, y una topología única más pequeña contenida en todas las colecciones $\mathcal{T}_\alpha$.

MEP

Problem 4

Demuestre que la colección

$$\mathcal{C} = \{[a, b) \mid a < b \wedge a, b \in \mathbb{Q}\} \tag{2}$$

es una base que genera una topología distinta a la topología de límites inferiores sobre $\mathbb{R}$.

Para demostrar que $\mathcal{C}$ es una base para cierta topología, tenemos que demostrar:

a) $\bigcup \mathcal{C} = X$, y

b) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{C}$, y $\forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{C}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Demo:

a) Note que $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \subseteq \bigcup_{[a,b) \in \mathcal{C}} [a, b) = \bigcup \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}$.

$\therefore \bigcup \mathcal{C} = \mathbb{R}$.

b) Tome $[a,b),[c,d)\in\mathcal{C}$. Si $b\leq c$, entonces $[a,b)\cap[c,d)=\emptyset$, y la proposición b) es vacíamente cierta. Si $b>c$, entonces $[a,b)\cap[c,d)\neq\emptyset$. Ahora tome $x\in[a,b)\cap[c,d)=[c,b)\in\mathcal{C}$.
   $\therefore \exists[c,b)\in\mathcal{C}$ tal que $x\in[c,b)\subseteq[a,b)\cap[c,d)$.

$\therefore \mathcal{C}$ es una base para cierta topología sobre X.

Ahora, note que $[\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}+1)$ es abierto en $\mathbb{R}_l$, pero $[\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}+1)\notin\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$, ya que no es unión arbitraria de elementos básicos (note que el extremo izquierdo tiene que estar incluido, pero es irracional).

$\therefore \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ es una topología distinta a la topología de límites inferiores sobre $\mathbb{R}$.

MEP

Problem 5

Sea $X=\{f\mid f:[0,1]\to[0,1]\}$. *Para cada subconjunto* A *de* $[0,1]$, *defina*

$$B_A=\{f\in X\mid f(x)=0,\forall x\in A\}. \tag{3}$$

Demuestre que $\mathcal{B}=\{B_A\mid A\subseteq[0,1]\}$ *es una base para una topología sobre* X.

Nuevamente, tenemos que demostrar:
a) $\bigcup\mathcal{B}=X$, y
b) $\forall B_1,B_2\in\mathcal{B}$, y $\forall x\in B_1\cap B_2, \exists B_3\in\mathcal{B}$ tal que $x\in B_3\subseteq B_1\cap B_2$.

Demo:

a) Note que $\bigcup\mathcal{B}=\bigcup_{A\subseteq[0,1]}B_A$, entonces es claro que $\bigcup\mathcal{B}\subseteq X$. Ahora, tome $f\in X$, y considere $A:=\{x\in[0,1]\mid f(x)=0\}\subseteq[0,1]$. Entonces $f\in B_A$ por construcción, por lo tanto, $f\in\bigcup_{A\subseteq[0,1]}B_A=\bigcup\mathcal{B}\Longrightarrow X\subseteq\mathcal{B}$.
   $\therefore \bigcup\mathcal{B}=X$
b) Ahora tome $B_A,B_C\in\mathcal{B}$, y tome:

$$\begin{aligned} g\in B_A\cap B_C &= \{f\in X\mid f(x)=0,\forall x\in A\wedge f(x)=0,\forall x\in C\} \\ &= \{f\in X\mid f(x)=0,\forall x\in A\cap C\}=B_{A\cap C}\in\mathcal{B}\end{aligned} \tag{4}$$

   $\therefore \exists B_{A\cap C}\in\mathcal{B}$ tal que $g\in B_{A\cap C}\subseteq B_A\cap B_C$

$\therefore \mathcal{B}$ es una base para cierta topología sobre X.

MEP