MATE 6540: Tarea 2

Due on 21 de marzo

Prof. Iván Cardona , C41, 21 de marzo

Sergio Rodríguez

Problem 0

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos y sea $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ una biyección. Demuestre que las siguientes son equivalentes:

(a) f es un homeomorfismo.

(b) f y f^{-1} son funciones abiertas.

(c) f y f^{-1} son funciones cerradas.

Demo:

$(a \Longrightarrow b)$

Suponga que f es un homeomorfismo, y sea $U \in \mathcal{T}_X$, como f es biyectiva y un homeomorfismo, f^{-1} es continua, entonces $\left(f^{-1}\right)^{-1}(U) = f(U) \in \mathcal{T}_Y$.

$\therefore$ f es función abierta.

Similarmente, sea $V \in \mathcal{T}_X$, como f es homeomorfismo, f es continua, entonces $f^{-1}(V) = \left(f^{-1}\right)^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

$\therefore$ f^{-1} es función abierta.

$(b \Longrightarrow c)$

Suponga que f y f^{-1} son funciones abiertas. Sea $C \subseteq X$ cerrado y note que:

$$f^{-1}(Y \setminus f(C)) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(f(C)) = X \setminus C \in \mathcal{T}_X \text{ (porque f es inyectiva)} \tag{1}$$

Pero f es función abierta, entonces:

$$f(f^{-1}(Y \setminus f(C))) = Y \setminus f(C) \in \mathcal{T}_Y \Longrightarrow f(C) \text{ es cerrado} \tag{2}$$

$\therefore$ f es función cerrada.

Similarmente, sea $K \subseteq Y$ cerrado y note que:

$$\begin{aligned} f(X \setminus f^{-1}(K)) &= \left(f^{-1}\right)^{-1}(X \setminus f^{-1}(K)) = \left(f^{-1}\right)^{-1}(X) \setminus \left(f^{-1}\right)^{-1}(f^{-1}(K)) \\ &= f(X) \setminus f(f^{-1}(K)) = Y \setminus K \in \mathcal{T}_Y \end{aligned} \tag{3}$$

$\Longrightarrow f^{-1}(f(X \setminus f^{-1}(K))) = X \setminus f^{-1}(K) \in \mathcal{T}_X \Longrightarrow f^{-1}(K)$ es cerrado

$\therefore$ f^{-1} es función cerrada.

$(c \Longrightarrow a)$

Suponga que f y f^{-1} son funciones cerradas, y sea C_Y un conjunto cerrado en $(Y, \mathcal{T}_Y)$, entonces $f^{-1}(C_Y)$ es cerrado en $(X, \mathcal{T}_X) \Longrightarrow f$ es continua.

Similarmente, suponga que C_X es cerrado en $(X, \mathcal{T}_X)$, entonces $\left(f^{-1}\right)^{-1}(C_X) = f(C_X)$ es cerrado en $Y \Longrightarrow f^{-1}$ es continua.

$\therefore$ f es un homeomorfismo.

MEP

Problem 1

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos. Una función $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ es fuertemente continua si $f\left(\overline{A}\right) \subseteq f(A), \quad \forall A \subseteq X$. Demuestre que f es fuertemente continua $\Longleftrightarrow f^{-1}(B)$ es cerrado, $\forall B \subseteq Y$.

Demo:

$(\Longrightarrow)$

Suponga que f es fuertemente continua y tome $B \subseteq Y$. Entonces:

$$\begin{aligned} & B \subseteq Y \Longrightarrow f^{-1}(B) \subseteq X \\ \Longrightarrow\ & f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) && \subseteq f(f^{-1}(B)) && \text{(continuidad fuerte)} \\ \Longrightarrow\ & f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) && \subseteq f^{-1}(f(f^{-1}(B))) && \text{(TMA A.4 (ii))} \end{aligned} \tag{4}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} & f(f^{-1}(B)) && \subseteq B && \text{(TMA A.4 (vii))} \\ \Longrightarrow\ & f^{-1}(f(f^{-1}(B))) && \subseteq f^{-1}(B) && \text{(TMA A.4 (ii))} \end{aligned} \tag{5}$$

Adicionalmente:

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \text{ (TMA A.4 (viii))} \tag{6}$$

Entonces, por la transitividad de las inclusiones $(6) \subseteq (4) \subseteq (5)$, tenemos que $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B)$.

$\therefore$ $f^{-1}(B)$ es cerrado.

MEP

Problem 2

Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico y $\mathcal{U}$ la topología producto sobre $X \times X$. Demuestre que $(X, \mathcal{T}_X)$ es Hausdorff $\Longleftrightarrow$ la diagonal $\Delta = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$ es un subconjunto cerrado de $(X \times X, \mathcal{U})$.

Demo:

Dado $z \in X$, denotaremos como U_z a una vecindad de z.

($\Longrightarrow$)

Dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, defina $H_{x,y} := \{U_x \times U_y \mid U_x \cap U_y = \emptyset\}$. Note que $(X, \mathcal{T}_X)$ Hausdorff $\Longrightarrow H_{x,y} \neq \emptyset, \quad \forall x, y \in X$ con $x \neq y$. Considere la familia $\{H_{x,y}\}_{(x,y)\in\Lambda}$ donde $\Lambda := X \times X \setminus \Delta$. Por el axioma del escogido, existe una función de selección:

$$\begin{gathered} c : \{H_{x,y}\}_{(x,y)\in\Lambda} \to \bigcup_{(x,y)\in\Lambda} H_{x,y} \\ c(A) \in A, \quad \forall A \in \{H_{x,y}\}_{(x,y)\in\Lambda} \end{gathered} \tag{7}$$

Ahora, sea

$$B := \bigcup_{(x,y)\in\Lambda} c(H_{x,y}) \tag{8}$$

Note que $c(H_{x,y}) \in H_{x,y} \Longrightarrow \exists x', y' \in X$ tal que $c(H_{x,y}) = U_{x'} \times U_{y'}$. Entonces B es unión arbitraria de elementos básicos de $\mathcal{U} \Longrightarrow B \in \mathcal{U}$.

Afirmamos que $B = X \times X \setminus \Delta$:

Tome $(a, b) \in B$. Entonces $\exists (a', b') \in \Lambda$ tal que $(a, b) \in U_{a'} \times U_{b'}$, pero $(a', b') \in \Lambda$ $\Longrightarrow U_{a'} \cap U_{b'} = \emptyset \Longrightarrow a \neq b \Longrightarrow (a, b) \in X \times X \setminus \Delta \Longrightarrow B \subseteq X \times X \setminus \Delta$.

Ahora tome $(c, d) \in X \times X \setminus \Delta$, entonces $c \neq d \Longrightarrow U_c, U_d$ con $U_c \cap U_d = \emptyset$, pero $(c, d) \in U_c \times U_d \subseteq B \Longrightarrow (c, d) \in B \Longrightarrow X \times X \setminus \Delta \subseteq B$.

$\therefore B = X \times X \setminus \Delta$

Entonces, $X \times X \setminus \Delta = B \in \mathcal{U} \Longrightarrow \Delta$ es cerrado en $\mathcal{U}$.

($\Longleftarrow$)

Suponga que Δ es cerrado, entonces $X \times X \setminus \Delta \in \mathcal{U}$. Tome $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta$.
Como $X \times X \setminus \Delta$ es abierto, existe un elemento básico $U \times V$ tal que $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta \Longrightarrow U \cap V = \emptyset$. Entonces encontramos abiertos disjuntos que contienen a dos puntos arbitrarios distintos.

$\therefore X$ es Hausdorff.

MEP

Problem 3

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos. Demuestre que si $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ es sobreyectiva, continua, y abierta, entonces $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_{\text{FIN}}$, donde $\mathcal{T}_{\text{FIN}}$ es la topología final inducida por f.

Demo:

Por definición, T_{FIN} es la topología más grande que hace que f sea continua. Pero:
$f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ es continua por hipótesis.

$\therefore \mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}_{\text{FIN}}$

Tome $V \in \mathcal{T}_{\text{FIN}}$. Como f es continua, $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$. Pero $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ también es abierta, lo que implica que $f(f^{-1}(V)) \in \mathcal{T}_Y$. Finalmente, f sobreyectiva $\Longrightarrow f(f^{-1}(V)) = V$. Entonces $V \in \mathcal{T}_Y$.

$\therefore \mathcal{T}_{\text{FIN}} \subseteq \mathcal{T}_Y$

$\therefore \mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_{\text{FIN}}$

MEP

Problem 4

Sea $p : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ una función continua. Demuestre que si existe una función continua $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T}_X)$ tal que $p \circ f$ es la identidad en Y, entonces p es una aplicación cociente.

Demo:

Para demostrar que p es una aplicación cociente, debemos demostrar que p es sobreyectiva, y que $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}' := \{V \subseteq Y \mid p^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X\}$.

Tome $y \in Y$ y note que $y = \text{id}_Y(y) = (p \circ f)(y) = p(f(y))$. Entonces, dado un elemento arbitrario $y \in Y$, encontramos un elemento $x \in X$ tal que $y = p(x)$.

$\therefore p$ es sobreyectiva.

Tome $U \in \mathcal{T}_Y$, como p es continua, $p^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X \Longrightarrow \mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}'$.

Ahora, tome $V \in \mathcal{T}'$, entonces $p^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ por definición. Entonces, $f^{-1}(p^{-1}(V)) \in \mathcal{T}_Y$ por la continuidad de f. Pero $f^{-1}(p^{-1}(V)) = (f^{-1} \circ p^{-1})(V) = (p \circ f)^{-1}(V) = \text{id}_Y(V) = V$, lo que implica que $V \in \mathcal{T}_Y$.

$\therefore \mathcal{T}_Y = \mathcal{T}'$.

$\therefore p$ es una aplicación cociente.

MEP