# MATE 6540: Tarea 1

Due on 20 de septiembre

*Prof. Iván Cardona* , C41, 20 de septiembre

**Sergio Rodríguez**

## Problem 1

*Sea $d$ una métrica sobre $X$, entonces:*

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \tag{1}$$

*es una métrica acotada tal que $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$.*

---

Demostraremos lo siguiente:

a) $d'$ define una métrica
   1. $d'(x,y) \geq 0, \quad \forall x,y \in X$
   2. $d'(x,y) = 0 \iff x = y, \quad \forall x,y \in X$
   3. $d'(x,y) = d'(y,x), \quad \forall x,y \in X$
   4. $d'(x,z) \leq d'(x,y) + d'(y,z), \quad \forall x,y,z \in X$

b) $d'$ es acotada

c) $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$

---

### Demo:

a) Usamos las propiedades métricas de $d$ para demostrar las mismas para $d'$:
   1. $d(x,y) \geq 0, \quad \forall x,y \in X \implies \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = d'(x,y) \geq 0, \quad \forall x,y \in X$.
   2. $(d(x,y) = 0 \iff x = y, \quad \forall x,y \in X) \implies \left(\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = d'(x,y) = 0 \iff x = y, \quad \forall x,y \in X\right)$.
   3. $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = d'(y,x), \quad \forall x,y \in X$.
   4. No me dio tiempo...

b) Al ser métrica, sabemos que $d'$ está acotada por abajo. Falta demostrar que está acotada por arriba. Suponga, por contradicción, que $d'(x,y) > 1$. Entonces $\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} > 1$, y como $d$ es no negativa, $d(x,y) > 1 + d(x,y)$. Lo cual es una contradicción. ※
   $\therefore d'$ es acotada.

c) No me dio tiempo, mi idea era usar el corolario 1.10 para comparar las bases dadas por las bolas abiertas dependientes de cada métrica.

**MEP**

## Problem 2

*Si $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de topologías sobre $X$, demuestre que $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{T}_\alpha$ es una topología sobre X. ¿Es $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{T}_\alpha$ una topología?*

---

Sea $\mathcal{T} = \bigcap_{\alpha\in\Lambda}$. Tenemos que demostrar:

a) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

b) $U, V \in \mathcal{T} \implies U \cap V \in \mathcal{T}$, y

c) $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda'} \subseteq \mathcal{T} \implies \bigcup_{\gamma\in\Lambda'} \mathcal{T}_\gamma \in \mathcal{T}$.

---

## Demo:

a) Tome $\beta \in \Lambda$, entonces $\mathcal{T}_\beta$ es una topología sobre $X$, por lo tanto, $\emptyset, X \in \mathcal{T}_\beta$, pero $\beta$ fue seleccionada arbitrariamente, por lo tanto, $\emptyset, X \in \mathcal{T}_\alpha, \quad \forall \alpha \in \Lambda \Longrightarrow \emptyset, X \in \mathcal{T}$, por definición de la intersección.

b) Tome $U, V \in \mathcal{T}$, entonces $U, V \in \mathcal{T}_\alpha, \quad \forall \alpha \in \Lambda$ por definición de intersección. Pero $\mathcal{T}_\alpha$ es una topología $\forall \alpha \in \Lambda$, por lo tanto $U \cap V \in \mathcal{T}_\alpha \forall \alpha \in \Lambda \Longrightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$.

c) Tome $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda'} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda'} \subseteq \mathcal{T}_\alpha, \quad \forall \alpha \in \Lambda$, pero $\mathcal{T}_\alpha$ es una topología $\forall \alpha \in \Lambda$, por lo tanto $\bigcup_{\gamma \in \Lambda'} U_\gamma \in \mathcal{T}_\alpha, \quad \forall \alpha \in \Lambda \Longrightarrow \bigcup_{\gamma \in \Lambda'} U_\gamma \in \mathcal{T}$.

$\therefore \mathcal{T} = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{T}_\alpha$ es una topología sobre $X$.

**MEP**

En general, $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{T}_\alpha$ no es una topología. Considere el siguiente contraejemplo:

$X := \{a, b, c\}, \quad \mathcal{T}_1 := \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}, \quad \mathcal{T}_2 := \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$.

No es difícil verificar que ambos $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son topologías sobre $X$. Note que $\{b\}, \{c\} \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, pero $\{b\} \cup \{c\} = \{b, c\} \notin \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$.

$\therefore \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ no es una topología.

# Problem 3

*Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de topologías sobre X. Demuestre que existe una topología única más pequeña que contiene todas las colecciones $\mathcal{T}_\alpha$, y una topología única más grande contenida en todas las colecciones $\mathcal{T}_\alpha$.*

## Demo:

Sea $\mathcal{T} := \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{T}_\alpha$. Note que, por la definición de la intersección, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\beta, \quad \forall \beta \in \Lambda$. Además, $\mathcal{T}$ es una topología, por el problema 2. Entonces $\mathcal{T}$ es una topología que contiene todas las colecciones $\mathcal{T}_\alpha$, falta demostrar que $\mathcal{T}$ es la colección más grande que cumple con ambas condiciones. Sea $\mathcal{T}'$ una topología tal que $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}_\beta, \quad \forall \beta \in \Lambda$. Pero entonces $\mathcal{T}' \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{T}_\alpha = \mathcal{T}$. $\therefore \mathcal{T}$ es la topología más grande contenida en todas las colecciones $\mathcal{T}_\alpha$.

El otro lado no me dio tiempo, pero mi idea era utilizar $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{T}_\alpha$ como base para una topología y argumentar que es la topología más pequeña que contiene a $\mathcal{T}_\alpha, \quad \forall \alpha \in \Lambda$.

**MEP**

# Problem 4

*Demuestre que la colección*

$$\mathcal{C} = \{[a, b) \mid a < b \land a, b \in \mathbb{Q}\} \tag{2}$$

*es una base que genera una topología distinta a la topología de límites inferiores sobre $\mathbb{R}$.*

---

Para demostrar que $\mathcal{C}$ es una base para cierta topología, tenemos que demostrar:
a) $\bigcup \mathcal{C} = X$, y
b) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{C}$, y $\forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{C}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

---

## Demo:

a) Note que $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \subseteq \bigcup_{[a,b)\in\mathcal{C}} [a,b) = \bigcup \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}$.
$\therefore \bigcup \mathcal{C} = \mathbb{R}$.
b) Tome $[a,b), [c,d) \in \mathcal{C}$. Si $b \leq c$, entonces $[a,b) \cap [c,d) = \emptyset$, y la proposición b) es vacíamente cierta. Si $b > c$, entonces $[a,b) \cap [c,d) \neq \emptyset$. Ahora tome $x \in [a,b) \cap [c,d) = [c,b) \in \mathcal{C}$.
$\therefore \exists [c,b) \in \mathcal{C}$ tal que $x \in [c,b) \subseteq [a,b) \cap [c,d)$.

$\therefore \mathcal{C}$ es una base para cierta topología sobre $X$.

Ahora, note que $[\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}+1)$ es abierto en $\mathbb{R}_l$, pero $[\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}+1) \notin \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$, ya que no es unión arbitraria de elementos básicos (note que el extremo izquierdo tiene que estar incluido, pero es irracional).

$\therefore \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ es una topología distinta a la topología de límites inferiores sobre $\mathbb{R}$.

**MEP**

# Problem 5

*Sea* $X = \{f \mid f : [0,1] \to [0,1]\}$. *Para cada subconjunto* $A$ *de* $[0,1]$, *defina*

$$B_A = \{f \in X \mid f(x) = 0, \forall x \in A\}. \tag{3}$$

*Demuestre que* $\mathcal{B} = \{B_A \mid A \subseteq [0,1]\}$ *es una base para una topología sobre* $X$.

---

Nuevamente, tenemos que demostrar:
a) $\bigcup \mathcal{B} = X$, y
b) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, y $\forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

---

## Demo:

a) Note que $\bigcup \mathcal{B} = \bigcup_{A\subseteq[0,1]} B_A$, entonces es claro que $\bigcup \mathcal{B} \subseteq X$. Ahora, tome $f \in X$, y considere $A := \{x \in [0,1] \mid f(x) = 0\} \subseteq [0,1]$. Entonces $f \in B_A$ por construcción, por lo tanto, $f \in \bigcup_{A\subseteq[0,1]} B_A = \bigcup \mathcal{B} \implies X \subseteq \mathcal{B}$.
$\therefore \bigcup \mathcal{B} = X$
b) Ahora tome $B_A, B_C \in \mathcal{B}$, y tome:

$$\begin{aligned} g \in B_A \cap B_C &= \{f \in X \mid f(x) = 0, \forall x \in A \land f(x) = 0, \forall x \in C\} \\ &= \{f \in X \mid f(x) = 0, \forall x \in A \cap C\} = B_{A\cap C} \in \mathcal{B} \end{aligned} \tag{4}$$

$\therefore \exists B_{A \cap C} \in \mathcal{B}$ tal que $g \in B_{A \cap C} \subseteq B_A \cap B_C$

$\therefore \mathcal{B}$ es una base para cierta topología sobre $X$.

**MEP**