MATE 6540: Tarea 3

Due on 19 de mayo

Prof. Iván Cardona , C41, 19 de mayo

Sergio Rodríguez

Problem 0

Considere al espacio $\widehat{\mathbf{2}} = \{0, 1\}$ *con la topología discreta* $\mathcal{T}_{\text{disc}}$.
Demuestre la proposición:
El espacio topológico $(X, \mathcal{T}_X)$ *es conexo* $\iff$ *No existe una función continua* $g : (X, \mathcal{T}_X) \to \left(\widehat{\mathbf{2}}, \mathcal{T}_{\text{disc}}\right)$ *que sea suprayectiva.*

Demo:

$(\Longrightarrow)$

Suponga que $(X, \mathcal{T}_X)$ es conexo. Sea $g : (X, \mathcal{T}_X) \to \left(\widehat{\mathbf{2}}, \mathcal{T}_{\text{disc}}\right)$ una función continua. Afirmamos que g no es suprayectiva. Note que $\{0\}, \{1\} \in \mathcal{T}_{\text{disc}}$ son disjuntos con $\{0\} \cup \{1\} = \widehat{\mathbf{2}}$. Entonces $\{\{0\}, \{1\}\}$ es una separación de $\left(\widehat{\mathbf{2}}, \mathcal{T}_{\text{disc}}\right)$. Por otra parte, $g(X) \subseteq \widehat{\mathbf{2}}$ es imagen continua de un espacio conexo. Entonces, por un teorema demostrado en clase, $g(X)$ es conexo. Pero $\left(\widehat{\mathbf{2}}, \mathcal{T}_{\text{disc}}\right)$ no es conexo, entonces $g(X) \subseteq \{0\}$ o $g(X) \subseteq \{1\}$ pero no ambos.

$\therefore$ g no es suprayectiva.

$(\Longleftarrow)$

Demostramos el contrapositivo. Suponga que $(X, \mathcal{T}_X)$ no es conexo, entonces existe una separación $\{A, B\}$. Ahora defina $g : (X, \mathcal{T}_X) \to \left(\widehat{\mathbf{2}}, \mathcal{T}_{\text{disc}}\right)$ de la siguiente manera:

$$g(x) := \begin{cases} 0 \text{ si } x \in A \\ 1 \text{ si } x \in B \end{cases} \tag{1}$$

Note que:
(a) $A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = X \Longrightarrow g$ está bien definida.
(b) $A, B \neq \emptyset \Longrightarrow g$ es suprayectiva.
(c) $g^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}_X, \quad g^{-1}(\{0\}) = A \in \mathcal{T}_X, \quad g^{-1}(\{1\}) = B \in \mathcal{T}_X, \quad g^{-1}(\{0, 1\}) = X \in \mathcal{T}_X$
$\Longrightarrow g$ es continua.

$\therefore$ existe una función continua $g : (X, \mathcal{T}_X) \to \left(\widehat{\mathbf{2}}, \mathcal{T}_{\text{disc}}\right)$ que es suprayectiva.

MEP

Problem 1

Sea X *un conjunto infinito dotado de la siguiente topología*
$\mathcal{T}_{\text{cof}} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ es finito o } U = \emptyset\}$ *(i.e. la topología de los complementos finitos)*
(a) Demuestre: $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ *es conexo.*
(b) Demuestre: $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ *es compacto.*

Demo (a):

Suponga, por contradicción, que $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ no es conexo. Entonces, existe una separación $\{A, B\}$ de $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$. Como $A \neq \emptyset$ es abierto, $X \setminus A = B$ es finito. Similarmente, como $B \neq \emptyset$ es abierto, $X \setminus B = A$ es finito. Entonces $X = A \cup B$ es unión de conjuntos finitos, por lo tanto X es finito, lo cual contradice nuestra hipótesis. ※

$\therefore (X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ es conexo.

MEP

Demo (b):

Si $X = \emptyset$, entonces es compacto por convención. Suponga que $X \neq \emptyset$, y sea $C := \{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una cubierta abierta de $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$. Como $X \neq \emptyset$, la cubierta no es vacía. Tome $C_{\alpha_0} \in C$, y note que $\emptyset \neq C_{\alpha_0} \in \mathcal{T}_{\text{cof}} \Longrightarrow A := X \setminus C_{\alpha_0}$ es finito. Pero $A \subseteq X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha$, entonces, para cada elemento $x_i \in A$, con $i \in \{1, ..., |A|\}$, existe por lo menos algún $C_{\alpha_i} \in C$ con $x_i \in C_{\alpha_i}$.
Entonces $C' := \left\{C_{\alpha_0}, C_{\alpha_1}, ..., C_{\alpha_{|A|}}\right\}$ es una subcolección finita de C. Afirmamos que C' cubre a X, es decir, que $\bigcup_{i=0}^{|A|} C_{\alpha_i} = X$. Primero, $C_{\alpha_i} \subseteq X, \quad \forall i \in \{0, 1, ..., |A|\} \Longrightarrow \bigcup_{i=0}^{|A|} C_{\alpha_i} \subseteq X$. Ahora tome $x \in X$, si $x \in C_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{i=0}^{|A|} C_{\alpha_i}$, terminamos. Si $x \in A = X \setminus C_{\alpha_0}$, entonces $\exists j \in \{1, ..., |A|\}$ tal que $x = x_j \in A \Longrightarrow x \in C_{\alpha_j} \subseteq \bigcup_{i=0}^{|A|} C_{\alpha_i}$.

$$\therefore \bigcup_{i=0}^{|A|} C_{\alpha_i} = X$$

$\therefore (X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ es compacto.

MEP

Problem 2

Dé ejemplos de subespacios A y B de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\varepsilon^2})$ tales que:
(a) A y B son conexos, pero $A \cap B$ no es conexo.
(b) A y B no son conexos, pero $A \cup B$ es conexo.
(c) A y B son conexos pero $A \setminus B$ no es conexo.
(d) A y B son conexos y $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$, pero $A \cup B$ no es conexo.

Problem 3

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico y $\{\infty\}$ un objeto que no pertenezca a X. Defina $Y = X \cup \{\infty\}$ y $\mathcal{T}_\infty = \{U \subseteq Y \mid U \in \mathcal{T}_X \;\text{ o }\; Y \setminus U \text{ es compacto y cerrado en } X\}$.
(a) Demuestre que $\mathcal{T}_\infty$ es una topología sobre Y.
(b) Sea $\mathcal{T}'$ la topología relativa sobre X, la que hereda como subconjunto de Y. Demuestre que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_X$.

Problem 4

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ *un espacio topológico y* $\{\infty\}$ *un objeto que no pertenezca a* X*. Defina* $Y = X \cup \{\infty\}$ y $\mathcal{T}_\infty = \{U \subseteq Y \mid U \in \mathcal{T}_X \;\text{ o }\; Y \setminus U \text{ es compacto y cerrado en } X\}$.
(c) Demuestre que $(Y, \mathcal{T}_\infty)$ es compacto.