Práctica 3

> Sergio Guachalla

Ejercicio 1

Sea $x =$ tiempo que tarda en programar (minutos)

Datos proporcionados:

Intervalo X	Frecuencia Observada n_i	Marca de Clase $\left(\frac{L_i+L_{i+1}}{2}\right)$
10-15	30	12.5
15-20	25	17.5
20-25	22	22.5
25-30	18	27.5
30-35	19	32.5
35-40	12	37.5
40-45	8	47.5
Total	**134**	

1. Estimación de λ

Para la distribución exponencial, el parámetro λ se estima como:

$$\lambda = \frac{1}{\bar{x}}$$

donde $\bar{x}$ es la media muestral, calculada como:

$$\bar{x} = \frac{\sum(n_i \cdot \text{Marca de Clase})}{\sum n_i}$$

Calculamos $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{(30 \cdot 12.5) + (25 \cdot 17.5) + (22 \cdot 22.5) + (18 \cdot 27.5) + (19 \cdot 32.5) + (12 \cdot 37.5) + (8 \cdot 47.5)}{134}$$

$$\bar{x} = \frac{(375 + 437.5 + 495 + 495 + 617.5 + 450 + 380)}{134} = \frac{3249}{134} \approx 24.25$$

Por lo tanto,

$$\lambda = \frac{1}{24.25} \approx 0.04124$$

2. Cálculo de Probabilidades

La función de distribución acumulada (FDA) de una distribución exponencial es:

$$P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Para cada intervalo, calculamos:

- **Para** $10 \leq x \leq 15$:

$$\begin{aligned} P(10 \leq X \leq 15) &= e^{-0.04124(10)} - e^{-0.04124(15)} \\ &= e^{-0.4124} - e^{-0.6186} \\ &= 0.662 - 0.538 \\ &= 0.124 \end{aligned}$$

  Número esperado:

$$n_{1e} = 134 \times 0.124 = 16.62$$

- **Para** $15 \leq x \leq 20$:

$$\begin{aligned} P(15 \leq X \leq 20) &= e^{-0.6186} - e^{-0.8248} \\ &= 0.538 - 0.439 \\ &= 0.099 \end{aligned}$$

  Número esperado:

$$n_{2e} = 134 \times 0.099 = 13.27$$

- **Para** $20 \leq x \leq 25$:

$$\begin{aligned} P(20 \leq X \leq 25) &= e^{-0.8248} - e^{-1.031} \\ &= 0.439 - 0.356 \\ &= 0.083 \end{aligned}$$

  Número esperado:

$$n_{3e} = 134 \times 0.083 = 11.12$$

- **Para** $25 \leq x \leq 30$:

$$\begin{aligned} P(25 \leq X \leq 30) &= e^{-1.031} - e^{-1.237} \\ &= 0.356 - 0.290 \end{aligned}$$

$$= 0.066$$

Número esperado:

$$n_{4e} = 134 \times 0.066 = 8.84$$

- **Para** $30 \leq x \leq 35$:

$$P(30 \leq X \leq 35) = e^{-1.237} - e^{-1.444}$$
$$= 0.290 - 0.236$$
$$= 0.054$$

Número esperado:

$$n_{5e} = 134 \times 0.054 = 7.24$$

- **Para** $35 \leq x \leq 40$:

$$P(35 \leq X \leq 40) = e^{-1.444} - e^{-1.650}$$
$$= 0.236 - 0.192$$
$$= 0.044$$

Número esperado:

$$n_{6e} = 134 \times 0.044 = 5.90$$

- **Para** $40 \leq x \leq 45$:

$$P(40 \leq X \leq 45) = e^{-1.650} - e^{-1.856}$$
$$= 0.192 - 0.157$$
$$= 0.035$$

Número esperado:

$$n_{7e} = 134 \times 0.035 = 4.69$$

3. Cálculo del Estadístico X_c^2

$$X_c^2 = \sum \frac{(n_i - n_{ie})^2}{n_{ie}}$$

Sustituyendo los valores:

$$X_c^2 = \frac{(30 - 16.62)^2}{16.62} + \frac{(25 - 13.27)^2}{13.27} + \frac{(22 - 11.12)^2}{11.12}$$
$$+ \frac{(18 - 8.84)^2}{8.84} + \frac{(19 - 7.24)^2}{7.24} + \frac{(12 - 5.90)^2}{5.90} + \frac{(8 - 4.69)^2}{4.69}$$

$$X_c^2 \approx 10.99 + 8.24 + 10.54 + 9.43 + 13.63 + 6.43 + 2.37$$

$$X_c^2 \approx 61.63$$

4. Comparación con $X^2_{crítico}$

Para $\alpha = 0.05$ y $k - 1 = 7 - 1 = 6$ grados de libertad, de la tabla chi-cuadrado:

$$X^2_{0.05,6} = 12.59$$

Dado que $X_c^2 > X^2_{0.05,6}$, rechazamos H_0. Esto significa que los datos **no siguen** una distribución exponencial.

Ejercicio 2

6 monedas fueron lanzadas 1400 veces:
x : número de caras

x	0	1	2	3	4	5	6
n_i	36	146	342	350	320	158	48

Se quiere probar que x tiene distribución binomial

$$H_0 : x = b(m;p) H_i : x \neq (m;p)$$

Paso 1: Estimación de (p)

Para una distribución **binomial** (B(m, p)), la media se calcula como:

$$\bar{x} = mp$$

La media muestral se obtiene como:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i}$$

Sustituyendo los valores:

$$\bar{x} = \frac{(0 \cdot 36) + (1 \cdot 146) + (2 \cdot 342) + (3 \cdot 350) + (4 \cdot 320) + (5 \cdot 158) + (6 \cdot 48)}{1400}$$

$$\bar{x} = \frac{0 + 146 + 684 + 1050 + 1280 + 790 + 288}{1400} = \frac{4238}{1400} \approx 3.03$$

Como (m = 6), estimamos (p):

$$p = \frac{\bar{x}}{m} = \frac{3.03}{6} \approx 0.505$$

Paso 2: Cálculo de Probabilidades Teóricas

La fórmula de la **distribución binomial** es:

$$P(x) = \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x}$$

Para cada (x):

$$P(x) = \binom{6}{x} (0.505)^x (1-0.505)^{6-x}$$

Calculamos los valores:

(x)	**(\binom{6}{x})**	**(P(x))**
0	1	((0.495)^6 = 0.0215)
1	6	(6 (0.505)^1 (0.495)^5 = 0.0779)
2	15	(15 (0.505)^2 (0.495)^4 = 0.1797)
3	20	(20 (0.505)^3 (0.495)^3 = 0.2481)
4	15	(15 (0.505)^4 (0.495)^2 = 0.2248)
5	6	(6 (0.505)^5 (0.495)^1 = 0.1186)
6	1	((0.505)^6 = 0.0304)

Los valores esperados (E_i) se calculan multiplicando por 1400:

$$E_i = 1400 \cdot P(x)$$

(x)	**(n_i)**	**(P(x))**	**(E_i = 1400 P(x))**
0	36	0.0215	30.1
1	146	0.0779	109.1
2	342	0.1797	251.6
3	350	0.2481	347.3
4	320	0.2248	314.7
5	158	0.1186	166.1
6	48	0.0304	42.6

Paso 3: Cálculo de (X^2)

La fórmula del estadístico **chi-cuadrado** es:

$$X^2 = \sum \frac{(n_i - E_i)^2}{E_i}$$

Sustituyendo los valores:

$$X^2 = \frac{(36 - 30.1)^2}{30.1} + \frac{(146 - 109.1)^2}{109.1} + \frac{(342 - 251.6)^2}{251.6}$$

$$+ \frac{(350 - 347.3)^2}{347.3} + \frac{(320 - 314.7)^2}{314.7} + \frac{(158 - 166.1)^2}{166.1} + \frac{(48 - 42.6)^2}{42.6}$$

$$X^2 \approx \frac{5.9^2}{30.1} + \frac{36.9^2}{109.1} + \frac{90.4^2}{251.6} + \frac{2.7^2}{347.3} + \frac{5.3^2}{314.7} + \frac{8.1^2}{166.1} + \frac{5.4^2}{42.6}$$

$$X^2 \approx 1.16 + 12.47 + 32.47 + 0.02 + 0.09 + 0.39 + 0.68$$

$$X^2 \approx 47.28$$

Paso 4: Comparación con (X^2) Crítico

Para (k-1 = 7-1 = 6) grados de libertad y (\alpha = 0.05), buscamos en la tabla de chi-cuadrado:

$$X^2_{0.05,6} = 12.59$$

Como:

$$X^2_c = 47.28 > X^2_{0.05,6} = 12.59$$

Rechazamos (H_0) y concluimos que **los datos NO siguen una distribución binomial**.

📌 Conclusión

Dado que el valor de (X^2) calculado es significativamente mayor que el valor crítico, podemos decir que **los datos no siguen una distribución binomial con los parámetros estimados**.