ALGORÍTMICA NUMÉRICA **EXAMEN TEÓRICO** **JULIO 2021**

La duración del examen es de una hora.
La fecha estimada de publicación de notas es el lunes 5 de julio.
La fecha estimada de la revisión presencial es el jueves 8 de julio a las 13h.

Problema 1: Se han tomado medidas de la altura h(x) del perfil de una ladera y se va a simular dicho perfil utilizando distintos tipos de funciones y conjuntos de datos, en el intervalo [0, 3], según se indica en cada apartado:

1. Se considera una función h(x) del tipo

$$h(x) = \begin{cases} ax^2, & x \in [0,1] \\ A(x-1)^2 + B(x-1) + C, & x \in [1,3] \end{cases}$$

Determinar los valores de a, A, B y C para que dicha función sea un spline cuadrado e interpole los datos h(0)=0, h(1)=10 y h(3)=54.

2. Si los datos de los que se dispone son h(0)=0, h(3)=54 y h'(0)=d (siendo d un valor dado), dar la expresión usando la Fórmula de Newton del polinomio de interpolación de grado 2 (en función de d) que interpola dichos datos.

3. Se consideran los datos del perfil de la ladera que se recogen en la siguiente tabla

x_1=1	x_2=2
h_1=10	h_2=30

Calcular el valor de d en la expresión del polinomio obtenido en el apartado 2 para que dicha función ajuste lo mejor posible (en sentido mínimos cuadrados) los datos de la tabla anterior. Dar la matriz H de coeficientes de las incógnitas y el vector b de términos independientes del sistema lineal sobredeterminado. Resolver las ecuaciones normales.
Sin realizar ningún cálculo ¿cuál es la derivada en 0 del polinomio de grado dos que interpola los datos h(0)=0 y h(3)=54 y ajusta los datos de la tabla?

Problema 2: Se va a aplicar el método Newton-Raphson a la ecuación x^4-5=0

- Demostrar que tiene una solución en el intervalo [1.4, 1.5].
- Dar la expresión de dicho método y realizar dos iteraciones comenzando en x_0=1.
- Sabiendo que los cinco primeros dígitos de la solución exacta son 1.4953, calcular el error relativo entre la segunda iteración y la solución exacta y las cifras decimales correctas.
- Verificar que el método es convergente si comenzamos las iteraciones en cualquier punto x_0 del intervalo [1.4, 1.5]
- Si comenzamos en cualquier punto x_0 del intervalo [1.4, 1.5], ¿cuántas iteraciones son suficientes para tener todas las cifras correctas si se trabaja en doble precisión?

Ejercicio 1

1.

Verifica h(0)=0.

h(1)=10, tenemos a=C=10.

h(3)=54, tenemos 4A+2B+10=54.

h'(1)=2a=20=B. Luego A=1.

$$h(x) = \begin{cases} 10x^2, \ x \in [0,1] \\ (x-1)^2 + 20(x-1) + 10, \ x \in [1,3] \end{cases}$$

2.

Tabla de diferencias divididas

0	0	d	(18-d)/3
0	0	54/3=18	
3	54		

El polininomio de Newton es $h(x) = d + \frac{18-d}{3}$

3.

Imponemos $h(x_i) = h_i$ y obtenemos el sistema lineal sobredeterminado:

$$h(1) = d + \frac{18-d}{3}, \ \ \frac{2}{3}d = 4$$

$$h(2) = 2d + \frac{18-d}{3}4, \ \ \frac{2}{3}d = 6$$

$$\begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} d = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} d = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$(8/9)d = 20/3 \qquad d = 7{,}5 \qquad h(x) = 7{,}5x + 3{,}5x^2$

El polinomio que interpola los datos h(0)=0 y h(3)=54 y ajusta los datos de la tabla del apartado anterior es el mismo polinomio solución del apartado anterior

$h(x) = 7{,}5x + 3{,}5x^2 \qquad h'(0) = 7{,}5$

Ejercicio 2

La función es continua (polinomio) y $1{,}4^4 - 5 < 0 \qquad 1{,}5^4 - 5 > 0$ por el Teorema de Bolzano, al cambiar de signo, tiene al menos una raíz.

$$x_{n+1} = x_n - (x_n^4 - 5)/(4 * x_n^3)$$

$$x_1 = 1 + 1 = 2 \qquad x_2 = 1{,}6562$$

errorrelativo=(1.6562- 1.4953) / 1.4953=0.10764
cifras=-log10(errorrelativo)=0.96804 prácticamente una.
$C = max\{|f''(x)|\}/(2min\{|f'(x)\}$ con $x \in$ [1.4,1.5]
$f'(x) = 4x^3 \qquad f''(x) = 12x^2$ son positivas y crecientes, por lo que
$C = 27/21{,}952.. \approx 1{,}23$

Puesto que la longitud del intervalo es 0.1 entonces $|Ce_0| < 1$ y es convergente.

Como C es muy similar a 1 usando la propiedad $|e_{n+1}| \approx C|e_n|^2 \approx |en|^2$ y la longitud del intervalo inicial,tengo un cifra decimal 10^{-1}, en la primera iteración dos 10^{-2}, luego cuatro 10^{-4}, ocho, dieciseis. O sea, cuatro iteraciones para alcanzar la precisión máxima.