

Teoría del Tema 1

- 1.1 Definición de grupo. Sea $(G, *)$ grupo con elemento neutro $e \in G$ y sea $a \in G$ tal que $a * a = a$. Demostrar que entonces: $a = e$.
- 1.1 Definición de subgrupo. Sean $(G, *)$ grupo y $H \subseteq G$ con $H \neq \emptyset$. Demostrar que $(H, *)$ es subgrupo de $(G, *)$ si y sólo si para todos $a, b \in H$ se verifica que $a * b^{-1} \in H$.
- 1.2 Definición de orden de un elemento. Sea $(G, *)$ grupo, $a \in G$ con $|a| = n$ y $k \in \mathbb{N}$. Demostrar:
- $a^k = e_G \Leftrightarrow n$ divide a k .
 - $|a^k| = \frac{n}{\text{mcd}(n, k)}$.
- 1.3 Definición de ciclo. Demostrar que los ciclos disjuntos conmutan y obtener el orden de un producto de dos ciclos disjuntos.
- 1.4 Definición de producto directo interno. Sea $(G, *)$ grupo que es producto directo interno de los subgrupos H y K . Demostrar: $G \approx H \times K$

Teoría del Tema 2

- 2.1 Enunciar y demostrar el Teorema de Lagrange.
- 2.1 Enunciar y demostrar el Teorema de Cauchy.
- 2.2 Demostrar que todo subgrupo de índice 2 es normal.
- 2.2 Demostrar que todo subgrupo único en su orden es normal.
- 2.3 Enunciar y demostrar el primer teorema de isomorfía para grupos.
- 2.4 Enunciar y demostrar la caracterización de p -grupos de Sylow para un grupo abeliano finito.
- 2.4 Demostrar que si $(G, *)$ es grupo, para todo $a \in G$ con $|a| = mn$ tal que $\text{mcd}(n, m) = 1$, existen $b, c \in G$ tales que $a = b * c$ siendo $|b| = n$ y $|c| = m$.
- 2.4 Demostrar que si $(G, *)$ es grupo abeliano con $|G| = p^t m$, siendo $p \in \mathbb{N}$ primo, $m, t \in \mathbb{N}$ y $\text{mcd}(p, m) = 1$ entonces $G \approx S_p \times K$, siendo $S_p = \{x \in G : x^{p^t} = e_G\}$, $K = \{x \in G : x^m = e_G\}$.

Teoría del Tema 3

- 3.2 Demostrar que todo dominio de integridad finito es cuerpo.
- 3.2 Enunciar y demostrar los posibles valores que puede tener la característica de un dominio de integridad.
- 3.3 Enunciar y demostrar los posibles ideales que tiene un cuerpo.
- 3.3 Enunciar y demostrar el papel que realizan los ideales maximales para la obtención de cuerpos.

Teoría del Tema 4

- 4.1 Enunciar y demostrar el teorema de Kronecker.
- 4.2 Enunciar y demostrar la caracterización de los elementos algebraicos sobre un cuerpo \mathbb{K}
- 4.3 Enunciar y demostrar la estructura del grupo de unidades de un cuerpo finito.