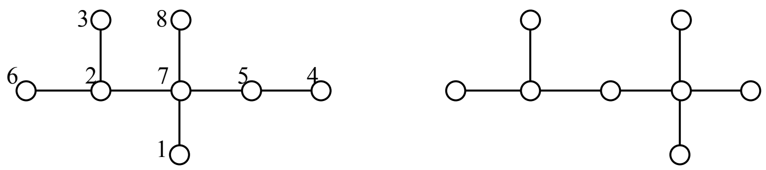
SOLUCIONES

1. **(2 puntos)**
(a) Un árbol T de orden 36 tiene un vértice de grado 5. El conjunto de grados es {1, 3, 5}. ¿Cuántas hojas tiene T?

(b) El código de Prüfer de un árbol es [7, 2, 5, 7, 2, 7]. ¿Cuál es la sucesión de grados? Construye un árbol etiquetado T con ese código. Construye otro árbol NO etiquetado con la misma sucesión de grados que T y que no sea isomorfo a T.

(a) Sean **x** el número de hojas e **y** el número de vértices de grado 3. Por tanto,
$x + y + 1 = 36$ (*)
La fórmula de Euler de los grados en T es $x + 3y + 5 = 2(36 – 1)$
Resolviendo el sistema formado por esta ecuación y la anterior tenemos que $x = 20$, $y = 15$
El árbol T consta de 20 hojas

(b) La sucesión de grados es [4,3,2,1,1,1,1]
El árbol etiquetado correspondiente al código dado es el de la figura

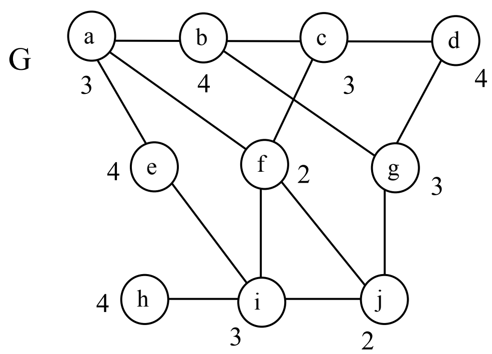


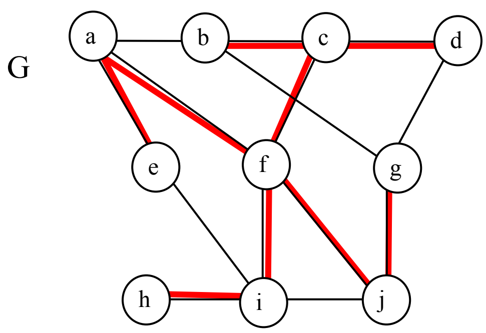
El árbol de la derecha tiene la misma sucesión de grados pero no es isomorfo a T, porque los vértices de grados 3 y 4 no son adyacentes en el segundo árbol.

2. **(2 puntos)**
(a) Define excentricidad de un vértice y diámetro de un grafo.

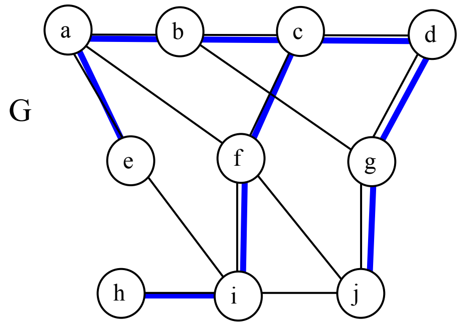
En el grafo G de la figura se piden las siguientes cuestiones:

(b) Calcula la excentricidad de cada vértice, el diámetro de G, su centro y su periferia.
(c) Dibuja dos árboles generadores de G, uno de diámetro 4 y otro de diámetro 6.





La excentricidad de cada vértice se indica en la figura
Centro de G, {f,j}
Periferia de G, {b,d,e,h}
Diam(G) = 4
Árbol rojo de diámetro 4
Árbol azul de diámetro 6



3. **(1 punto)** Demuestra las siguientes afirmaciones:

   (a) Si G es un grafo no conexo con al menos dos vértices, entonces su complementario sí es conexo.
   (b) Si G es un grafo 4-regular entonces G no tiene puentes.

   (a) Para demostrar que G’ (complementario de G) es conexo necesitamos comprobar que para cada par de vértices a y b hay un camino en G’ que los conecta.
   Distinguimos dos casos:
   Si a y b están en diferente componente conexa de G, entonces existe la arista ab en G’
   Si a y b están en la misma componente conexa de G, entonces existe un vértice z en otra componente. En G’ estarán las aristas az y zb que forman un camino entre a y b en G’.
   En cualquiera de los dos casos hemos encontrado un camino en G’ entre a y b

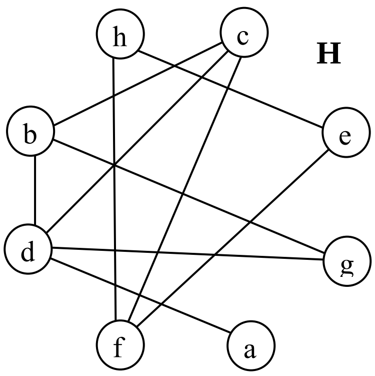
   (b) El razonamiento (incorrecto) seguido por muchos alumnos era independiente del valor 4 de la regularidad. Espero que mañana lunes alguien presente un ejemplo de un grafo 3-regular o 5-regular con un puente.
   Vamos a demostrar que **si G es un grafo k-regular con k par, entonces G no tiene puentes**.

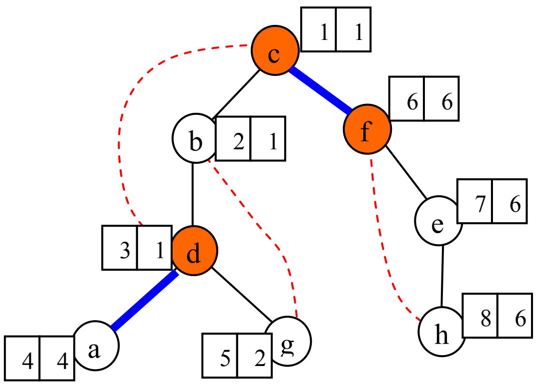
   Procedemos por reducción al absurdo: Supongamos que la arista e = ab es un puente y consideremos la componente conexa H de G – e que contiene el vértice a. En H el vértice a tiene grado k – 1 (impar) y el resto de vértices tiene grado k (par). Esto es imposible porque el número de vértices de grado impar debe ser una cantidad par.

4. **(1 punto)** Demuestra que si en un grafo simple G el grado de cada vértice es al menos 3, entonces G tiene un ciclo de longitud par.

Explicado en clase

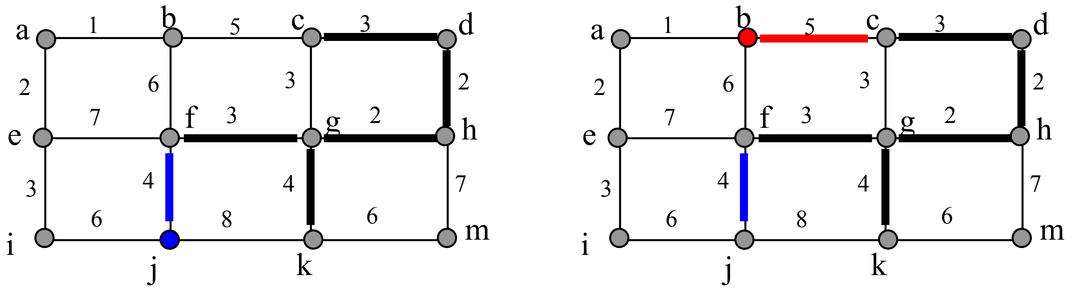
5. **(2 puntos)** Aplica al grafo H de la figura el algoritmo de búsqueda en profundidad, indicando el doble etiquetado de cada vértice. Detecta los vértices-corte y las aristas puente de H a partir del doble etiquetado indicando la condición sobre las etiquetas que los caracteriza.
   (La búsqueda en profundidad debe empezar en el vértice **c** y los vértices se eligen siguiendo el orden alfabético)





   (Las aristas en rojo discontinuo son aristas de retroceso. No pertenecen al árbol de búsqueda)
   El vértice raíz c es corte porque tiene dos hijos.
   La condición en las etiquetas para que un vértice v sea corte es que exista un hijo z de v tal que:
   2^a etiq(z) $\geq$ 1^a etiq(v).
   Por tanto, los vértices c, d y f son corte.
   Una arista del árbol uv es puente si v es hijo de u y 2^a etiq(v) > 1^a etiq(u). Por tanto las aristas ad y cf son aristas puente.

6. **(2 puntos)**
   (a) Demuestra que la arista de menor peso de un conjunto corte en un grafo ponderado G (con pesos diferentes en las aristas) siempre pertenece al árbol generador mínimo de G.
   (b) Describe con una frase la estrategia que sigue el algoritmo de Prim para construir el árbol generador de peso mínimo de un grafo ponderado. En el grafo de la figura aparece la situación tras aplicar parcialmente este algoritmo. Indica cuáles son los dos pasos siguientes, utilizando un dibujo para cada paso del algoritmo.



(a) Demostrado en clase. Y la demostración se puede encontrar en cualquier libro de grafos. Por cierto, algunos alumnos han intentado (sin éxito) demostrar que la arista de **¡mayor peso de un ciclo!** no pertenece al MST.

(b) Estrategia del algoritmo de Prim.

La idea básica de este algoritmo consiste en añadir, en cada paso, un nuevo vértice a un árbol T previamente construido. Este nuevo vértice (de V – V(T)) se une a T por la arista de menor peso que conecta un vértice de T con otro que no está en T. En el inicio del algoritmo, T es el árbol formado por un único vértice.

En el grafo de la figura se muestra los dos pasos siguientes: En el primero (azul) se captura el vértice j con la arista fj. En el segundo (rojo) se captura el vértice b por la arista cb.

Observaciones:

(1) Muchos alumnos indican que hay que comprobar que ¡no se forman ciclos! En la estrategia seguida por el algoritmo de Prim eso es IMPOSIBLE, porque siempre se captura desde T un nuevo vértice que NO está en T.

(2) No resista la tentación de mostraros algunas frases incoherentes que habéis escrito en vuestras descripciones del algoritmo:

“El camino a seguir es el formado al coger aristas de valor mínimo del conjunto al que pertenecen los puntos”

“Desde un vértice arbitrario se toma la arista con menor peso comprobamos que si del nuevo vértice del árbol también es la de menor peso, si es así se toma otro vértice hasta el momento de unirlos . si no es la misma se une al siguiente vértice por el camino de menor peso”

“El algoritmo de Prim recoge las aristas de menor peso para crear el camino mínimo para el árbol de peso mínimo del grafo”