<table>
<tr><td>Estructuras Algebraicas
Primer parcial. Examen de suficiencia</td><td rowspan="2">1er Apellido: ____________
2º Apellido: ____________
Nombre: ____________
Número de matrícula: </td><td rowspan="2">3 de mayo de 2022
Tiempo 1 h
Calificación:</td></tr>
<tr><td>Dpt. Matemática Aplicada a las T.I.C.
E.T.S. de Ingenieros Informáticos
Universidad Politécnica de Madrid</td></tr>
</table>

Para que sean consideradas como válidas, todas las respuestas deben estar adecuadamente justificadas.
No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.
Examen de conocimientos básicos. Con este ejercicio se puede optar a un máximo de 5 puntos en la calificación del primer parcial. Para ello habrá que responder correctamente, al menos la mitad de las cuestiones planteadas.

Ejercicio 1.

Indica en cada caso si la afirmación dada es verdadera o falsa. Justifica cada respuesta con demostraciones, enunciado de teoremas o ejemplos, dependiendo de lo que sea apropiado en cada caso.

1. Todo grupo abeliano es cíclico.
2. Existe un grupo diédrico de orden 7.
3. Si $(G,*)$ es un grupo finito de orden impar, entonces no tiene elementos de orden 2.
4. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un grupo que tiene subgrupos de órdenes $1, 2, \cdots, n$.
5. Si todo elemento de un grupo tiene orden finito, el grupo es finito.

Ejercicio 2.

6. Obtener $\sigma^{-1} \in S_5$, siendo $\sigma = (1,3,5)(2,4,5,1)(3,4) \in S_5$.
7. El grupo de cuaterniones $(Q_8, \cdot)$, se considera el subgrupo $H = \{1, -1\}$. Describir las clases laterales e indicar si $H \trianglelefteq Q_8$.
8. Sea $(G,*)$ grupo, con $G = \langle a \rangle$ y $|G| = 28$. Enumerar todos los elementos de G que tienen orden 7.
9. Calcular, salvo isomorfismos, los posibles factores invariantes de un grupo abeliano de orden 450. Indicar cuáles de ellos son cíclicos.
10. Demostrar que si $(G,*)$ es grupo y se verifica que $\forall a \in G$ es $a^2 = e$, entonces $(G;*)$ es abeliano.

Soluciones

1. 1. Falso.
   2. Falso.
   3. Verdadero.
   4. Verdadero.
   5. Falso.
2. 6. $\sigma^{-1} = (1, 3, 5, 4, 2)$
   7. $1H = \{1, -1\}$, $iH = \{i, -i\}$, $jH = \{j, -j\}$, $kH = \{k, -k\}$. $H \trianglelefteq Q_8$ por ser el único subgrupo de orden 2.
   8. $b \in G$ con $|b| = 7 \Leftrightarrow b \in \{a^4, a^8, a^{12}, a^{16}, a^{20}, a^{24}\}$
   9. $\mathbb{Z}_{450}$ que es cíclico. El resto no son cíclicos: $\mathbb{Z}_{150} \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_{90} \times \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{15}$,
   10. Consultar los problemas resueltos.