Matemática Discreta I

Tema 5. Técnicas de contar

Luis Magdalena Layos
luis.magdalena@upm.es

Departamento de Matemática Aplicada a las TIC
E.T.S. Ingenieros Informáticos
Universidad Politécnica de Madrid

Grado en Ciencia de Datos e Inteligencia Artificial
Grado en Matemáticas e Informática
Curso 2020/21

Contenidos

Principios básicos

Definición

Se dice que el conjunto A tiene cardinal n (tiene n elementos) si se puede establecer una biyección $f : \{1, \dots, n\} \to A$. Se representa como $|A| = n$.
Se dice que $A \neq \emptyset$ es infinito si no existe ninguna biyección $f : \{1, \dots, n\} \to A$, para ningún $n \in \mathbb{N}$.
Se define $|\emptyset| = 0$.

Teorema (Principio de la unión o de la suma)

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son conjuntos finitos y disjuntos dos a dos, se cumple que
$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$

Ejemplo

El número de aulas del Bloque 6 es igual al número de aulas de la planta 0, más el número de aulas de la primera planta, más el número de aulas de la segunda planta, más el número de aulas de la tercera planta.

Principios básicos

Teorema (Principio del producto)

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *son conjuntos finitos y no vacíos se tiene que* $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$.

Ejemplo

El número de palabras distintas de cuatro bits es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Ejercicio 12

Calcula el número de divisores de 112000. ¿Cuántos son impares?

Al ser $112000 = 2^7 \cdot 5^3 \cdot 7$, el número de sus divisores es el producto de los divisores de 2^7 por los divisores de 5^3 por los divisores de 7, en total $8 \cdot 4 \cdot 2 = 64$.
Serán impares todos los que no sean múltiplos de dos, es decir, de los ocho divisores de 2^7 debemos descartar todos menos el uno. Por tanto serán impares $1 \cdot 4 \cdot 2 = 8$.

Principios básicos

Teorema (Principio del complementario)

Si A y B son dos conjuntos finitos y B es un subconjunto de A, se tiene que $|A \setminus B| = |A| - |B|$.

Ejemplo

En el ejercicio anterior podríamos haber calculado cuantos divisores de 112000 son pares considerando los que son múltiplos de dos: $7 \cdot 4 \cdot 2 = 56$. Pero resulta mucho más sencillo ver que los divisores pares son el conjunto complementario de los divisores impares, y por tanto serán $64 - 8 = 56$.

Ejercicio 11

¿Cuántos enteros del 1 al 1000 no son divisibles por 3?

El conjunto de los enteros del 1 al 1000 que no son múltiplos de tres se puede definir como $\{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq n \leq 1000\} \setminus \{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq n \leq 1000, n = 3k, k \in \mathbb{N}\}$. Por tanto el cardinal del conjunto será $1000 - 333 = 667$.

Principio de las cajas.

Teorema (Principio de las cajas o de distribución)

Si se reparten n objetos en m cajas, y $n > m$, entonces alguna caja recibe más de un elemento.

Teorema

Si n objetos se distribuyen en m cajas, y $n > m \times p$, entonces alguna caja recibe más de p objetos.

Ejemplos

En una clase con 70 alumnos alguna semana coincidirá más de un cumpleaños.
En una clase con 70 alumnos algún mes coincidirán más de cinco cumpleaños.

Teorema (Principio de las cajas generalizado)

Si n objetos se distribuyen en m cajas, entonces alguna caja recibe al menos $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ elementos y alguna caja recibe a lo sumo $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ elementos, donde $\lceil x \rceil$ es el menor entero mayor o igual que x y $\lfloor x \rfloor$ es el mayor entero menor o igual que x.

Principio de las cajas.

Ejercicio 1

Demuestra que si se eligen 5 puntos cualesquiera en un cuadrado de lado 2, al menos dos de ellos se encuentran a una distancia no superior a $\sqrt{2}$.

Si dividimos el cuadrado en cuatro partes iguales (cuadrados de lado 1), al haber cinco puntos repartidos, al menos dos estarán en el mismo cuadrado. Dos puntos situados en un cuadrado de lado 1 estarán a una distancia no superior a $\sqrt{2}$.

Ejercicio 2

¿Cuántos puntos han de elegirse en un cuadrado de lado 2 para asegurar que al menos 2 de ellos estarán a una distancia no superior a $\dfrac{\sqrt{2}}{n}$?

Si dividimos el cuadrado en $2n \times 2n = 4n^2$ cuadrados, cada uno medirá $\frac{1}{n}$ de lado, y su diagonal será $\dfrac{\sqrt{2}}{n}$. Si se tienen $4n^2 + 1$ puntos, al menos dos de ellos quedarán dentro del mismo cuadrado, y por tanto a una distancia no superior a $\dfrac{\sqrt{2}}{n}$.

Principio de las cajas.

Ejercicio 4

¿Cuál es el mínimo número de estudiantes que debe tener la clase de Matemática Discreta para estar seguros de que al menos 6 estudiantes recibirán la misma nota? (Se supone que sólo hay puntuaciones enteras).

Si sólo hay puntuaciones enteras tenemos 11 calificaciones posibles. Sabemos que si hay n alumnos y 11 calificaciones distintas, alguna calificación la recibirán al menos $\left\lceil \frac{n}{11} \right\rceil$ alumnos. El menor valor de n que hace $\left\lceil \frac{n}{11} \right\rceil = 6$ es 56. Por tanto el mínimo número de estudiantes será 56.

Ejercicio 5

Demuestra que en un conjunto de 12 enteros existen dos cuya diferencia es divisible por 11.

Si la diferencia entre dos números es divisible por 11, significa que los dos números son congruentes en módulo 11. Sólo hay 11 congruencias módulo 11, por lo que al menos dos números pertenecerán a la misma congruencia generando una diferencia divisible por 11.

Variaciones

Definición

Llamamos variaciones de m elementos tomados de n en n $(n < m)$ a cada una de las selecciones ordenadas de n objetos distintos, tomados de un conjunto de m objetos.

Observación.

Una variación de m elementos tomados de n en n $(n < m)$ es una aplicación inyectiva $f : \{1, \ldots, n\} \to \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.

Teorema

El número de variaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n es

$$V_{m,n} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Observación. El problema es equivalente a plantear de cuántas formas se pueden distribuir n objetos distintos en m cajas distintas haciendo que en ninguna caja haya más de un objeto.

Variaciones

Ejemplo

¿De cuántas formas pueden sentarse 7 personas en 10 asientos numerados?
La primera persona en sentarse tiene 10 asientos libres, para la segunda solo quedan 9 asientos libres. Sucesivamente cada nueva persona solo podrá elegir entre los asientos no ocupados previamente, por tanto la solución será:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{10!}{(10-7)!} = V_{10,7}.$$

Ejemplo

¿Cuántos números naturales mayores que 99 y menores que 1000 tienen las cifras distintas entre sí y distintas de 0?
La primera cifra podrá tomar cualquier valor entre 1 y 9, para la segunda solo nos quedarán 8 opciones, y 7 para la tercera. En total:

$$9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{9!}{(9-3)!} = V_{9,3}.$$

Permutaciones

Definición

Llamamos permutaciones de n elementos tomados de n en n a cada una de las variaciones de n elementos tomados de n en n.

Observación.
Una permutación de $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es una aplicación biyectiva $f : \{1, \ldots, n\} \to \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Teorema

El número de permutaciones de n elementos es

$$P_n = n!.$$

Observación. El problema es equivalente a plantear de cuántas formas se pueden distribuir n objetos distintos en n cajas distintas poniendo un objeto en cada caja.

Permutaciones

Ejemplo

El número de formas de ordenar cinco alumnos en una fila es $P_5 = 5!$.

Ejemplo

¿De cuántas formas pueden sentarse 10 personas en 10 asientos numerados?
Se trata de un problema similar al resuelto anteriormente con la única diferencia de que en este caso se acabaran eligiendo todos los asientos. La primera persona en sentarse tiene 10 asientos libres, para la segunda solo quedan 9 asientos libres. Sucesivamente cada nueva persona solo podrá elegir entre los asientos no ocupados previamente, hasta el último que solo tendrá un asiento libre en el que deberá sentarse sin elección posible, por tanto la solución será:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10! = V_{10,10} = P_{10}.$$

Combinaciones

Definición

Llamamos combinaciones de m elementos tomados de n en n a cada una de las selecciones, no ordenadas y sin repeticiones, de n objetos, tomados de un conjunto de m objetos.

Teorema

El número de combinaciones de m elementos tomados de n en n es igual a

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Observación. El problema es equivalente a plantear de cuántas formas se pueden distribuir n objetos iguales en m cajas distintas.

Combinaciones

Ejemplo

¿De cuántas formas distintas se pueden elegir 5 representantes de una clase de 40 alumnos?
Podemos realizar un proceso de selección similar al empleado previamente en las variaciones, pero debemos tener en cuenta que los cinco representantes son *equivalentes* por lo que el orden de selección no es importante.

En consecuencia empezamos calculando $V_{40,5} = \dfrac{40!}{(40-5)!}$, y a continuación tenemos que eliminar todas las elecciones *equivalentes*, es decir, las que se corresponden con los mismos individuos cambiados de orden. Esto supondrá dividir por las posibles reordenaciones de cinco alumnos, es decir, P_5.
Por tanto el resultado será:

$$\frac{V_{40,5}}{P_5} = \frac{40!}{5!(40-5)!} = C_{40,5}.$$

Números combinatorios

Definición

Se llama número combinatorio m sobre n al número de combinaciones de m elementos tomados de n en n. Se denota

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Se define $\binom{m}{0} = 1$, siendo además $\binom{m}{m} = 1$.

Propiedades:

1. $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$.
2. $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n$ (Terorema del binomio).
3. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

El triángulo de Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Ejercicios de selecciones sin repetición

Ejercicio 27.

Un banco tiene que elegir 5 cargos: director, subdirector, interventor, cajero y cobrador, entre 8 personas, de las cuales 3 son hombres $\{A, E, O\}$ y 5 mujeres $\{X, Y, Z, V, W\}$ ¿De cuántas formas puede hacerse la elección si...

1. ...los hombres A y E no pueden estar juntos en la misma elección?
2. ...se eligen los tres hombres?
3. ...se eligen tres mujeres y dos hombres?
4. ...se eligen tres mujeres al menos?

1. $V_{8,5} - C_{6,3} \cdot P_5$;
2. $C_{5,2} \cdot P_5$;
3. $C_{5,3} \cdot C_{3,2} \cdot P_5$;
4. $C_{5,3} \cdot C_{3,2} \cdot P_5 + C_{5,4} \cdot C_{3,1} \cdot P_5 + P_5$.

Ejercicios de selecciones sin repetición

Ejercicio 21.

Calcula cuántas cadenas de ceros y unos de longitud 7,

1. Contienen exactamente 3 unos y 4 ceros.
2. Contienen como máximo 3 unos.
3. Contienen exactamente 4 unos consecutivos.
4. No contienen 4 o más unos consecutivos.

1. $C_{7,3}$;
2. $1 + C_{7,1} + C_{7,2} + C_{7,3}$;
3. 4;
4. $2^7 - (12 + 5 + 2 + 1)$.

Ejercicio 22.

Se tienen siete libros azules, cinco negros y tres blancos, distintos entre sí. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden alinear en un estante si han de colocarse juntos los del mismo color?

$P_3 \cdot P_7 \cdot P_5 \cdot P_3$.

Variaciones con repetición

Definición

Llamamos variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n a cada una de las selecciones ordenadas de n objetos, tomados de un conjunto de m objetos.

Observación.
Una variación con repetición de m elementos tomados de n en n es una aplicación $f : \{1, \ldots, n\} \to \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.

Teorema

El número de variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n es

$$VR_{m,n} = m^n.$$

Observación. El problema es equivalente a plantear de cuántas formas se pueden distribuir n objetos distintos en m cajas distintas.

Ejemplo

El número de palabras distintas de cuatro letras que pueden formarse con las letras del abecedario es $27 \cdot 27 \cdot 27 \cdot 27$.

Permutaciones con repetición

Definición

Llamamos permutaciones con repetición de n elementos en la que cada elemento a_i se repite n_i veces ($n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$), a cada una de las ordenaciones distintas de los n elementos.

Teorema

El número de permutaciones con repetición de $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ *elementos es*

$$PR_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}.$$

Ejemplo

El número de palabras distintas que puedo formar con las letras de RECADERO es $\dfrac{8!}{2! \cdot 2!}$.

Permutaciones con repetición

Observación. Podemos establecer una relación directa entre las Permutaciones con repetición, y las Combinaciones. Para ello definiremos el concepto de *número multinómico*.

Definición

Denominamos a $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \dfrac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$ números multinómicos.

Propiedades:

1. $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n_k}{n_k}$.
2. $(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \displaystyle\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_m^{k_m}$ (Terorema del multinomio).

Observación. A partir de la primera propiedad podemos ver como:

$$PR_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = C_{n,n_1} C_{n-n_1,n_2} C_{n-n_1-n_2,n_3} \cdots C_{n_k,n_k}.$$

Combinaciones con repetición

Definición

Llamamos combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n a cada una de las selecciones, no ordenadas, de n objetos tomados de un conjunto de m objetos.

Teorema

El número de combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n es igual a

$$CR_{m,n} = C_{m+n-1,n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$$

Observación. El problema es equivalente a plantear de cuántas formas se pueden distribuir n objetos iguales en m cajas distintas.

Ejemplo

El número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 18$ es $CR_{3,18}$. El problema equivale a repartir 18 unidades (iguales) entre 3 variables (distintas).

Ejercicios de selecciones con repetición

Ejercicio 28.

El consejo de administración de una empresa está compuesto por 5 personas $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$. Se somete a votación secreta la aprobación de un proyecto y nadie puede abstenerse, pero sí votar en blanco. ¿Cuántos resultados distintos se pueden extraer de la urna una vez efectuada la votación? Considerando que se aprueba el proyecto con al menos 3 votos favorables, ¿cuántos resultados de los anteriores aprueban el proyecto?

Resultados distintos: $CR_{3,5} = 21$.
Aprueban el proyecto: $CR_{2,2} + CR_{2,1} + 1 = 6 = CR_{3,2}$.

Ejercicio 35.

¿De cuántas maneras se pueden distribuir 10 canicas idénticas entre 6 niños? ¿Y si las canicas son todas de distintos colores?

Con canicas idénticas: $CR_{6,10} = \binom{15}{5}$.

Con canicas distintas: $VR_{6,10} = 6^{10}$.

Ejercicios de selecciones con repetición

Ejercicio 45.

Calcular el número de sucesiones que se pueden formar con 3 A, 5 B y 8 C. ¿Y si no puede haber dos B consecutivas? ¿Y si no hay dos letras iguales consecutivas?

Sin restricciones: $PR_{16}^{8,5,3} = \dfrac{16!}{8! \cdot 5! \cdot 3!}$.

Sin B consecutivas: $CR_{6,7} \cdot PR_{11}^{8,3} = \binom{12}{5} \cdot \binom{11}{8,3} = \dfrac{12!}{5! \cdot 7!} \cdot \dfrac{11!}{8! \cdot 3!}$.

Sin letras iguales consecutivas: $2 \cdot PR_8^{5,3} + 2 \cdot 7 \cdot PR_6^{4,2} = \dfrac{2 \cdot 8!}{5! \cdot 3!} + \dfrac{2 \cdot 7 \cdot 6!}{4! \cdot 2!}$.

Ejercicio 70.

Una pandilla de 8 chicos y 5 chicas va al cine y se sientan todos juntos en una fila. Si ningún par de chicas quiere sentarse juntas, ¿de cuántas formas pueden sentarse?

$CR_{6,4} \cdot P_8 \cdot P_5$.

Principio de inclusión-exclusión

Teorema (Principio de inclusión-exclusión)

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *son conjuntos finitos no vacios se tiene que*

1. $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|,$
2. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \sum_{i=1}^{3} |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|,$
3. $|\cup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$

Ejemplo

El número de alumnos de primero o segundo es igual al número de alumnos de primero, más el número de alumnos de segundo, menos el número de alumnos que están en ambos cursos.

Combinaciones con repetición limitada

Definición

Denominamos combinación con repetición limitada a la combinación con repetición en la que el número de repeticiones posibles está limitado para al menos uno de los elementos.

Observación.

- Cuando la limitación se refiere a un número mínimo de repeticiones, se realiza una asignación previa que satisfaga el número mínimo de repeticiones, y se resuelve a continuación un problema de combinaciones con repetición para asignar el resto de elementos.
- Cuando la limitación se refiere a un número máximo de repeticiones, el número de combinaciones con repetición limitada se obtiene partiendo del número de combinaciones con repetición, aplicando a continuación el principio de inclusión-exclusión para descartar las combinaciones que exceden el límite de repeticiones.
- Si se dan ambas limitaciones, se realiza la asignación previa y posteriormente se resuelve la asignación del resto de elementos considerando el número máximo de repeticiones.

Combinaciones con repetición limitada

Ejercicio 36.

Determina el número de soluciones enteras de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32,$$

donde:

c) $x_1, x_2 \geq 5$ y $x_3, x_4 \geq 7$;

f) $x_1, x_2, x_3 > 0$ y $0 < x_4 \leq 25$.

c) Considerando que $x_1, x_2 \geq 5$ y $x_3, x_4 \geq 7$ tenemos que partir de una asignación previa de $5 + 5 + 7 + 7$ unidades, por lo que 24 unidades quedan preasignadas a las variables correspondientes.

En consecuencia el problema se reduce ahora a distribuir 8 unidades entre 4 variables, y por tanto el número de soluciones será $CR_{4,8} = \dfrac{(4+8-1)!}{8!(4-1)!}$.

Combinaciones con repetición limitada

Ejercicio 36.

f) Consideramos en primer lugar que $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$ por lo que tenemos que partir de una asignación previa de $1+1+1+1$ unidades, quedando 4 unidades preasignadas a las variables correspondientes. En consecuencia la limitación inferior del problema se reduce a distribuir 28 unidades entre 4 variables, y el número de soluciones que cumplen la limitación inferior será $CR_{4,28}$.

Para resolver ahora la limitación superior, debemos eliminar las soluciones en las que $x_4 > 25$ (teniendo en cuenta además que $x_1, x_2, x_3 > 0$). Para ello realizamos una asignación previa de $1+1+1+26$ unidades, quedando 29 unidades preasignadas y pudiendo distribuir las 3 unidades restantes entre las 4 variables, resultando $CR_{4,3}$.

La solución global deberá considerar (aplicando el principio de inclusión-exclusión) las soluciones que satisfacen la limitación inferior, menos las que incumplen además la limitación superior. En consecuencia el número de soluciones enteras que satisfacen $x_1, x_2, x_3 > 0$ y $0 < x_4 \leq 25$ son $CR_{4,28} - CR_{4,3} = \dfrac{(4+28-1)!}{28!(4-1)!} - \dfrac{(4+3-1)!}{3!(4-1)!}$.

Combinaciones con repetición limitada

Ejercicio 68.

En una bolsa hay caramelos de varios sabores: fresa, naranja, limón y menta, 30 de cada sabor. Extraemos 15 caramelos de la bolsa.

1. ¿Cuántas extracciones diferentes se pueden realizar de forma que al menos haya dos caramelos de fresa?
2. ¿Y de forma que haya a lo más 5 de cada sabor?

1. Si asumimos que x_1 representa a los caramelos de fresa, las posibilidades se corresponden con las soluciones de

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ x_1 \geq 2. \end{cases}$$

Al asumir que hay dos caramelos de fresa, solo quedan 13 caramelos para distribuir entre los cuatro sabores. Las posibilidades son: $CR_{4,13}$.

Combinaciones con repetición limitada

2. Las posibilidades se corresponden con las soluciones de

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ x_i \leq 5. \end{cases}$$

Partimos de todas las formas de distribuir los 15 caramelos y aplicamos el principio de inclusión-exclusión: restamos aquellas en la que hay más de 5 de un sabor (multiplicando por el número de sabores) y sumamos en las que simultáneamente haya más de 5 de dos sabores (multiplicando por el número de combinaciones de dos sabores). No puede haber más de 5 de tres sabores pues se superarían los 15 caramelos.
$CR_{4,15} - (4 \cdot CR_{4,9} - C_{4,2} \cdot CR_{4,3})$.

Desórdenes

Definición

Llamamos desorden de n elementos a una permutación de n elementos en la que ningún elemento conserva su posición original.

Teorema

El número de desordenes de n elementos se calcula mediante el principio de inclusión-exclusión, siendo igual a:

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)!$$

$$= n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Ejemplo

Los 30 alumnos de una clase hacen un examen. Si queremos que cada alumno corrija un examen, pero que no sea el suyo, el número de posibles formas de distribuir los exámenes se corresponde con D_{30}.

Ejercicios de desordenes

Ejercicio 30.

Se tienen 5 sobres y 5 cartas, y se distribuyen al azar las cartas en los sobres. ¿De cuántas formas se pueden distribuir para que no haya ninguna coincidencia? ¿Y para que haya una coincidencia? ¿Y para que haya dos coincidencias?... ¿Y para que haya cinco?

- Ninguna coincidencia: D_5.
- Una coincidencia: $5 \cdot D_4$.
- Dos coincidencias: $C_{5,2} \cdot D_3$.
- Tres coincidencias: $C_{5,3} \cdot D_2$.
- Cuatro coincidencias: 0.
- Cinco coincidencias: 1.

Ejercicio 31.

En un tablero de ajedrez de 8×8 casillas, ¿de cuántas formas distintas se pueden colocar 8 torres iguales de forma que ninguna esté en la diagonal principal ni se puedan comer entre ellas?

D_8.

Particiones

Definición

Una partición de un conjunto A es una colección de subconjuntos de A, no vacios y disjuntos, cuya unión es A.

Observación.

Una partición de un conjunto A con m elementos ($A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$), en n clases (subconjuntos de A, no vacios y disjuntos, cuya unión es A), es una aplicación suprayectiva $f : \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Teorema

El número de particiones distintas de un conjunto A con m elementos, en n clases, es $S(m, n)$ (número de Stirling de segunda clase), definido de forma recursiva como:

1. $S(n, 1) = 1.$
2. $S(n, n) = 1.$
3. $S(m, n) = S(m-1, n-1) + n \cdot S(m-1, n).$

Observación. El problema es equivalente a plantear de cuántas formas se pueden distribuir m objetos distintos en n cajas indistinguibles, haciendo que en toda caja haya al menos un objeto.

Cálculo del número de Stirling de segunda clase

	1	2	3	4	5	6
1	$S(1,1)$					
2	$S(2,1)$	$S(2,2)$				
3	$S(3,1)$	$S(3,2)$	$S(3,3)$			
4	$S(4,1)$	$S(4,2)$	$S(4,3)$	$S(4,4)$		
5	$S(5,1)$	$S(5,2)$	$S(5,3)$	$S(5,4)$	$S(5,5)$	
6	$S(6,1)$	$S(6,2)$	$S(6,3)$	$S(6,4)$	$S(6,5)$	$S(6,6)$

1	2	3	4	5	6
1					
1	1				
1	3	1			
1	7	6	1		
1	15	25	10	1	
1	31	90	65	15	1

Particiones

Observación. Del problema previo podríamos derivar dos variaciones:

1. De cuántas formas se pueden distribuir m objetos distintos en n cajas indistinguibles.
   Al no imponer que las cajas no estén vacías, bastaría con sumar las particiones para cualquier número de clases entre 1 y n, asumiendo que las restantes cajas están vacías.
   $\sum_{k=1}^{n} S(m,k)$.
2. De cuántas formas se pueden distribuir m objetos distintos en n cajas distintas, haciendo que en toda caja haya al menos un objeto.
   Como las cajas pasan a ser distintas, bastaría con multiplicar el resultado para cajas indistinguibles por las posibles ordenaciones de las n cajas: $S(m,n) \cdot P_n$.

Este último caso se corresponde con el número de aplicaciones suprayectivas de un conjunto de m elementos en un conjunto de n elementos.

Ejemplo

Tres amigos que comparten un piso han definido seis tareas para realizar en la casa. ¿De cuantas formas distintas podrían repartirse las tareas si: todos deben hacer alguna tarea y cada tarea la hace una sola persona?

Se trata de repartir seis tareas entre tres amigos, siendo necesario que todo amigo reciba al menos una tarea. Por tanto el problema es equivalente a distribuir 6 objetos distintos en 3 cajas distintas, haciendo que en toda caja haya al menos un objeto. Es por tanto un problema de particiones, pero con particiones ordenadas (cada una se asigna a un amigo distinto).

El número de posibles distribuciones se corresponde con el número de particiones de 6 elementos en 3 clases, multiplicado por el número de posibles asignaciones de las clases a los amigos:

$$S(6,3) \cdot P_3 = 90 \cdot 3! = 540.$$