DMATIC
ETSIInf, UPM

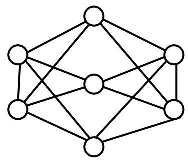
Curso 17-18
**Matemática Discreta II (MI-B)**
**Control 2**
**23-04-18**

## SOLUCIONES

1. **(1,5 puntos)**

   (a) Diseña una red que tolere el fallo de dos de sus nodos y de tres de sus aristas. ¿Cuál debe ser su grado mínimo? (El orden y el tamaño de la red deben ser tan pequeños como se pueda)
   (b) Demuestra que un grafo simple G es 2-conexo si y sólo si para cada vértice u y cada arista e de G existe un ciclo de G que contiene a ambos.

Solución:
(a) El grado mínimo es 4.



(b) Si G es 2-conexo construimos un nuevo grafo insertando un vértice z de grado dos en la arista e. Por la 2-conexión existen dos caminos internamente disjuntos de u hasta z. Estos dos caminos nos dan el ciclo que contiene al vértice u y la arista e.

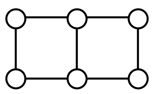
Si G no fuera 2-conexo entonces tendría un vértice corte x. Se elige un vértice u en una componente de G –x y una arista e=xv con v en otra componente de G – x. Entonces no existe ciclo en G que contenga al vértice u y la arista e.

2. **(1 punto)**

   ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Demuéstralas o encuentra un contraejemplo.

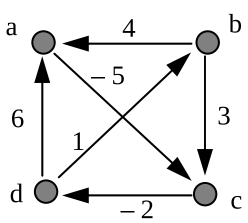
   a) Si un grafo G es bipartido y 2-conexo entonces es euleriano.
   b) Todo grafo bipartido euleriano tiene un número par de aristas.

Solución:
La afirmación a) es falsa



La afirmación b) es cierta. En un grafo euleriano todos los vértices tienen grado par. Y en un grafo bipartido todas las aristas son adyacentes a los vértices de un nivel. Por tanto, el número total de aristas siempre es un número par.

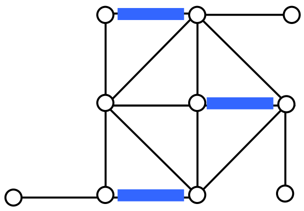
3. **(1,5 puntos)**
   Describe brevemente el algoritmo de Bellman-Ford. Aplícalo al digrafo de la figura partiendo del vértice b. (Son suficientes dos iteraciones completas).



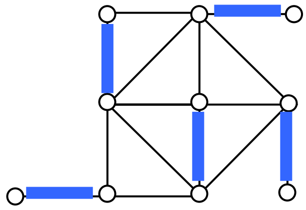
4. **(2 puntos)**

(a) Define emparejamiento y recubrimiento por vértices en un grafo.

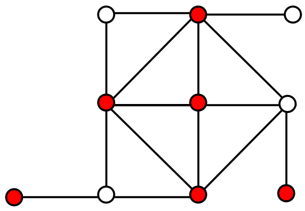
(b) Construye un emparejamiento maximal no máximo, un emparejamiento máximo, un recubrimiento minimal no mínimo y un recubrimiento mínimo en el grafo de la figura, justificando todas las construcciones.



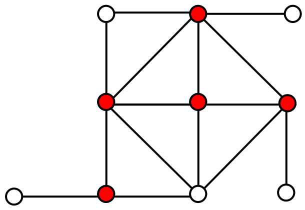
Emparejamiento maximal (no se puede añadir ninguna arista más)



Emparejamiento máximo (es perfecto)



Recubrimiento minimal (no se puede eliminar ningún vértice)



Recubrimiento mínimo (no existe otro de menor cardinal porque hay un emparejamiento de cardinal 5)

(c) Entre los participantes en un rally se pueden formar 50 parejas de piloto-copiloto, pero cada participante sólo puede emparejarse con otros cinco participantes. Demuestra que puede celebrarse la competición con al menos 10 vehículos, cada uno de ellos con su pareja de piloto-copiloto

Se forma un grafo bipartido (pilotos – copilotos) con 50 aristas. Este grafo es 5-regular y admite un emparejamiento con al menos $q/\Delta$ aristas, es decir, 10 aristas. Este emparejamiento constituye las parejas piloto-copiloto que pueden competir simultáneamente.

5. **(1 punto)**

Construye un emparejamiento estable (de dos formas distintas) para los conjuntos X={x,y,z,w,t} y A={a,b,c,d,e}, siendo las preferencias:

| | |
|---|---|
| x: c > a > e > d > b | a: x > z > w > y > t |
| y: a > e > b > c > d | b: w > t > x > y > z |
| z: a > c > d > b > e | c: w > y > t > z > x |
| w: c > e > b > d > a | d: x > t > z > w > y |
| t: e > c > b > d > a | e: t > x > z > w > y |

Solución:

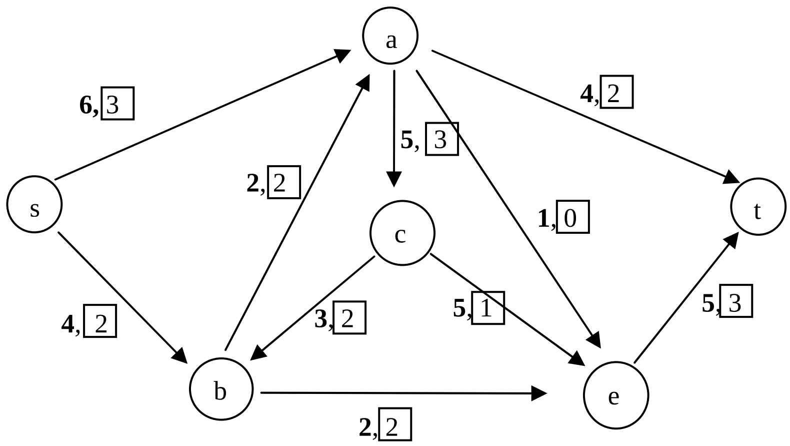
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | ~~c~~ | a | a | a |
| y | ~~a~~ | ~~e~~ | b | b |
| z | a | ~~a~~ | ~~c~~ | d |
| w | c | c | c | c |
| t | e | e | e | e |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | x | x | x | x |
| b | ~~w~~ | ~~t~~ | ~~x~~ | y |
| c | w | w | w | w |
| d | ~~x~~ | ~~t~~ | z | z |
| e | t | t | t | t |

Tanto al analizar preferencias desde un nivel como desde el otro, se obtiene el mismo emparejamiento estable, M = {xa, yb, wc, te}

6. **(3 puntos)**

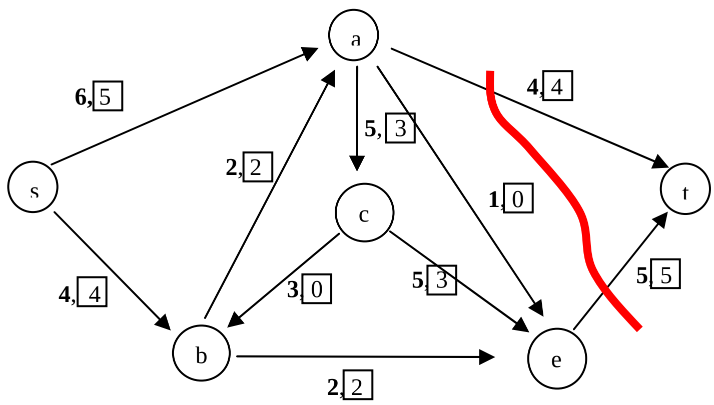
Enuncia el Teorema de Ford-Fulkerson definiendo los conceptos que aparecen en el enunciado. **Demuestra el teorema de Ford-Fulkerson**. En la red de la figura circula un flujo f de valor 5. Las etiquetas de cada arista indican su capacidad (en negrita y en primer lugar) y el valor actual del flujo (en segundo lugar y en recuadro). Indica un camino de f-aumento en la red con arista de retroceso. Aplica el algoritmo de etiquetado para obtener un flujo de valor máximo. Comprueba el enunciado del teorema en esta red.



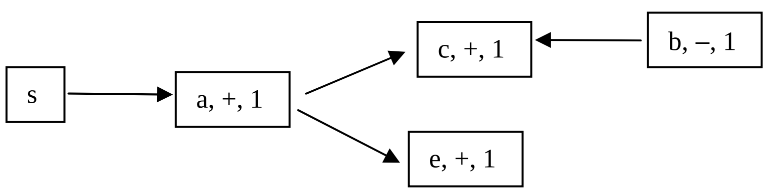

Solución:

Camino de f-aumento con arista de retroceso: P = sbcet, con residuo 2. Se aumenta el flujo a lo largo de P obteniendo un flujo f’ de valor 7.

Es inmediato comprobar que sigue habiendo un camino de f’-aumento P’: sat de residuo 2. Así tenemos un flujo f’’ de valor 9 mostrado en la siguiente figura




Aplicamos el algoritmo para detectar nuevos caminos de aumento.




Como NO se alcanza el destino t el flujo f’’ de valor 9 es de valor máximo. Un corte de capacidad mínima está determinado por los vértices alcanzados en el último árbol. El corte es (S,T) donde S = {s,a,b,c,e}, indicado en rojo en la figura