CÁLCULO III **Matemáticas e Informática** **Curso 2018/2019**	1er Apellido: ____________ 2^{o} Apellido: ____________	**18/12/2018** Tiempo: **2h**
Dpto. Matemática Aplicada ETSI Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: ____________ Número de matrícula:	**Calificación:**

SEGUNDO PARCIAL

1. **(2 puntos)** Se considera el campo vectorial $F(x,y) = (2x + \sin y)\mathbf{i} + (1 + x\cos y)\mathbf{j}$.
(a) Determina si F es o no conservativo y, en caso afirmativo, calcula su función potencial.
(b) Calcula la integral de F sobre la parte de la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ comprendida en el primer cuadrante y orientada positivamente.

2. **(2 puntos)** Calcula la integral del campo vectorial $F(x,y) = (x^2 - y,\, 2x + y^3)$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 4x$ orientada positivamente.

3. **(2 puntos)** Se considera la superficie $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z = 2,\, 1 \le z \le 2\}$ con orientación hacia afuera (vector normal con $z \ge 0$).
(a) Describe geométricamente la superficie S, parametrízala y calcula su área.
(b) Calcula la integral del campo vectorial $F(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ sobre S.

4. **(2 puntos)** Calcula la integral del campo vectorial $F(x,y,z) = \left(x(x^2+y^2),\, 1 - x^2y,\, x + zy^2\right)$ sobre la frontera del recinto $\Omega = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le 1,\, |z| \le 1\}$ con orientación hacia afuera.

5. **(2 puntos)** Se considera la función $f(x) = \pi - x$, $0 < x < \pi$.
(a) Halla su serie de Fourier de cosenos.
(b) Dibuja la función a la que converge puntualmente la serie obtenida en el intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.
(c) Usando la serie obtenida, calcula la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

SOLUCIONES

① $F(x,y) = (2x + \sin y,\ 1 + x\cos y) \Rightarrow P = 2x + \sin y\ ;\ Q = 1 + x\cos y$. continuas y derivables en $\mathbb{R}^2$

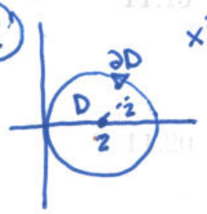
a) $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \cos y - \cos y = 0$ en $\mathbb{R}^2 \Rightarrow F$ es conservativo en $\mathbb{R}^2$ y la función potencial es

$$f \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \sin y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1 + x\cos y \end{cases} \Rightarrow f(x,y) = x^2 + y + x\sin y + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

b) $4x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

$$\int_\gamma F\,ds = \left[f(x,y)\right]_{(x,y)=(1,0)}^{(x,y)=(0,2)} = f(0,2) - f(1,0) = 2 - 1 = 1$$

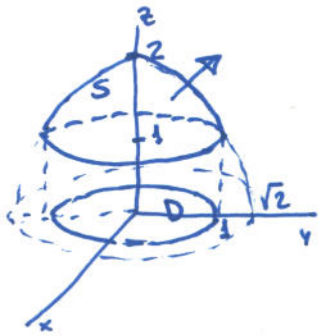
② $x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$ circunferencia de centro $(2,0)$ y radio 2



$$\oint_{\partial D} F\,ds = \oint_{\partial D} \underbrace{(x^2 - y)}_{P}dx + \underbrace{(2x + y^3)}_{Q}dy \overset{\text{GREEN}}{=} \iint_D \Big(\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x}}_{2} - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial y}}_{-1}\Big)dx\,dy = 3 \cdot \iint_D dx\,dy =$$

$$= 3 \cdot A(D) = 3 \cdot \pi \cdot 2^2 = 12\pi$$

(3) $z = 2 - x^2 - y^2 \;,\; 1 \le z \le 2$



a) Trozo del paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ entre $z = 1$ y $z = 2$

$z = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

Parametrización: $\Phi(u,v) = (u, v, 2 - u^2 - v^2)$

$(u,v) \in D = \{(u,v) : u^2 + v^2 \le 1\}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} = (1, 0, -2u) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} = (0, 1, -2v) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (2u, 2v, 1) \Rightarrow \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = \sqrt{1 + 4(u^2+v^2)}$$

$$A(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| du\,dv = \iint_D \sqrt{1+4(u^2+v^2)}\, du\,dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1+4\rho^2)^{1/2} \rho \cdot d\rho = \ldots$$

$$= 2\pi \left[\frac{(1+4\rho^2)^{3/2}}{3/2 \cdot 8} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{(5\sqrt{5}-1)\pi}{6}$$

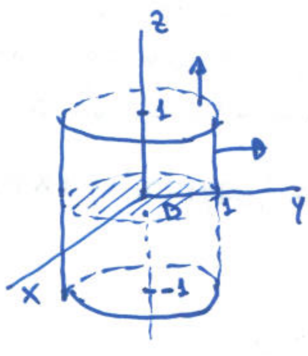
b) $F(x,y,z) = (x, y, z)$

$$\iint_S F\,d\sigma = \iint_D F(\Phi(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) du\,dv = \iint_D (u, v, 2-u^2-v^2) \cdot (2u, 2v, 1)\, du\,dv =$$

$$= \iint_D (2 + u^2 + v^2)\, du\,dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2+\rho^2)\rho\, d\rho = 2\pi \left[\rho^2 + \frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{5\pi}{2}$$

---

(4) $F(x,y,z) = (x(x^2+y^2),\, 1 - x^2 y,\, x + z y^2) \Rightarrow \operatorname{div}(F) = 2(x^2+y^2)$



Ω es el cilindro de base $x^2+y^2 = 1$ y altura $z = 1 - (-1) = 2$

$$\iint_{\partial\Omega} F\,d\sigma \overset{\text{Gauss}}{=} \iiint_\Omega \operatorname{div}(F)\, dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega 2(x^2+y^2)\, dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_{-1}^{1} dz \iint_{x^2+y^2 \le 1} 2(x^2+y^2)\, dx\,dy = 2 \cdot 2 \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho\, d\rho =$$

$$= 4 \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} = 2\pi$$

⑤ $f(x) = \pi - x, \quad 0 < x < \pi$

a) Serie de Fourier de cosenos: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\pi} = \pi$$

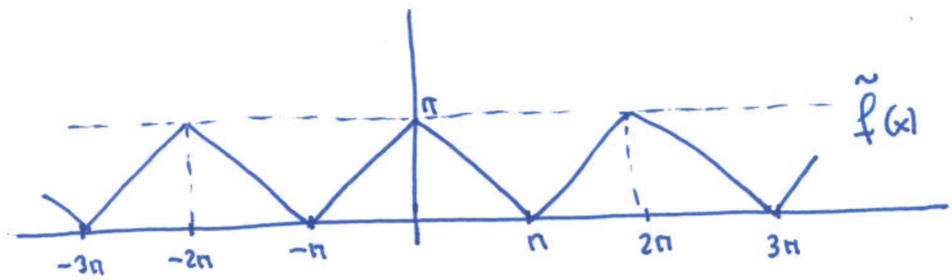
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\underbrace{(\pi - x)}_{u}\,\underbrace{\cos nx\,dx}_{dv} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\left[(\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi}(-1)\cdot\frac{\sin nx}{n}\,dx\right. =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{-\cos nx}{n^2}\right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1 - \cos n\pi}{n^2} = \frac{2\left[1 - (-1)^n\right]}{\pi\cdot n^2}$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - (-1)^n}{n^2}\cos nx = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$$

b)



c) $\tilde{f}(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$

$$\Downarrow x=0$$

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$