0.1. Lección 16

0.2. Optimización: Cálculo de máximos y mínimos absolutos de funciones en intervalos cerrados y acotados.

En lo que sigue vemos cómo se utiliza la continuidad y derivabilidad de una función, que llamaremos función objetivo, para resolver problemas de optimización (Maximización y Mínimización)

MAXIMIZAR (MINIMIZAR):

$$f(x) \qquad \text{si} \qquad a \leq x \leq b.$$

• ¿Existen el máximo o mínimo absoluto? Si la función es continua en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ el teorema de Weierstrass nos asegura que existen el máximo y el mínimo absoluto de f.

• ¿Cómo calcularlo? Buscamos los **posibles extremos absolutos** de la función entre los siguientes puntos :

▷ Los extremos del intervalo $x = a$ o $x = b$.

▷ Los puntos $c \in (a, b)$ en los que f no es derivable.

▷ Los puntos $c \in (a, b)$ en los que f es derivable y $f'(c) = 0$.

Una vez obtenidos todos los posibles extremos evalúamos f en todos ellos: el punto (o puntos) donde el valor de $f(x)$ es mayor es el máximo (o los máximos) absoluto y el punto (o puntos) donde el valor $f(x)$ es menor es el mínimo (o mínimos) absoluto.

Vemos cómo modelizamos dos problemas de optimización:

Problema: ¿ Cuál es el valor máximo del producto de dos números reales positivos cuya suma es 1?

Si $x, y \geq 0$ y $x + y = 1$, se trata de maximizar xy. Pasamos a un problema en una variable, puesto que $y = 1 - x$ y las restricciones $x, y \geq 0$ son equivalentes a $x \geq$ e $1 - x \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq 1$ el problema se puede modelizar de la siguiente forma:

Modelización: Maximizar $f(x) = x(1 - x)$ si $0 \leq x \leq 1$.

• Puesto que f es continua, f alcanza el máximo absoluto en $[0, 1]$ por el teorema de Weierstrass.

• Posibles extremos absolutos:

$\triangleright$ Los extremos del intervalo $x = 0$ o $x = 1$.

$\triangleright$ Los puntos $c \in (0,1)$ en los que f no es derivable: no hay, f es derivable en $\mathbb{R}$.

$\triangleright$ Los puntos $x \in (0,1)$ en los que f es derivable y $f'(x) = 0 = 1 - 2x \iff x = \frac{1}{2}$.

Puesto que $f(0) = f(1) = 0$ y $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ se tiene que f alcanza el máximo absoluto en $x = \frac{1}{2}$ siendo $\frac{1}{4}$ el valor máximo de f en $[0,1]$, por lo que:

Solución del problema: Los números son $x = y = \frac{1}{2}$ y el valor máximo es $\frac{1}{4}$.

Ejemplo 1. Calcular los máximos y mínimos absolutos de $f(x) = |x-1|x$ en $[0,2]$. Puesto que $f(x)$ es continua en $[0,2]$ podemos asegurar que existe el máximo y el mínimo absoluto. Buscamos los **posibles extremos** :

$\triangleright$ Los extremos del intervalo $\boxed{x = 0}$ o $\boxed{x = 2}$

$\triangleright$ Los puntos $x \in (0,2)$ en los que f puede no ser derivable. La función puede no ser derivable en $\boxed{x = 1}$ (de hecho, se puede probar que no lo es).

$\triangleright$ Los puntos $x \in (a,b)$ en los que f es derivable y $f'(x) = 0$. Nótese que:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

Por lo tanto $f'(x) = 0$ sólo en $\boxed{x = \dfrac{1}{2}}$

Finalmente, evalúamos f en dichos puntos, $f(0) = 0$, $f(2) = 2$, $f(1) = 0$ y $f(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{4}$.

Conclusión:

- Los puntos $x = 0$ y $x = 1$ son mínimos absolutos de $f(x)$ en $[0,2]$ y 0 es el valor mínimos de f en $[0,2]$.
- El punto 2 es el máximo absoluto de $f(x)$ en $[0,2]$ y 2 es el valor máximo de f en $[0,2]$.

0.2.1. Optimización en intervalos no acotados.

En algunos problemas de optimización el intervalo en el que tenemos que maximizar o minimizar la función objetivo no es acotado. En estos casos, cuando las funciones verifican ciertas propiedades en el límite, obtenemos algunos resultados que aseguran la existencia de máximos o mínimos absolutos de algunas funciones en intervalos no acotados:

Proposición 2. *Sea f continua en $(-\infty, \infty)$. Supongamos que*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Entonces f alcanza el mínimo absoluto en $\mathbb{R}$.

Demostración. Consideremos f continua en $(-\infty, \infty)$ y

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

En primer lugar, consideramos $R = |f(0)| > 0$;
$\triangleright$ Puesto que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, existe $M > 0$ tal que si $x > M$ que $f(x) > |f(0)| \geq f(0)$ si $x > M$.
$\triangleright$ Puesto que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, existe $S < 0$ tal que $f(x) > |f(0)| \geq f(0)$ si $x < S$.
$\triangleright$ Consideramos ahora el intervalo $[S, M]$ y puesto que f es continua en dicho intervalo, por el teorema de Weierstrass la función alcanza mínimo absoluto en $[R, M]$; es decir, existe $c \in [S, M]$ tal que $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in [S, M]$. En particular, $f(c) \leq f(0)$. Entonces f alcanza un mínimo absoluto en $x = c$. En efecto, si $x \in (-\infty, S] \cup [M, \infty)$ se tiene que $f(x) > f(0) \geq f(c)$. Por otra parte, si $x \in [S, M]$ también se tiene que $f(x) \geq f(c)$. Luego para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x) \geq f(c)$.

□

De forma análoga se obtienen las siguientes versiones en intervalos del tipo $(-\infty, b]$ o $[a, \infty)$

Proposición 3.

1. *Sea f una función continua en $[a, \infty)$ tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, entonces f alcanza el mínimo absoluto en $[a, \infty)$.*
2. *Sea f una función continua en $(-\infty, b]$ tal que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, entonces f alcanza el mínimo absoluto en $(-\infty, b]$.*

Otro resultado del mismo tipo:

Proposición 4. *Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Si*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

Entonces f alcanza el máximo absoluto en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 5. *Calcula, si existe, el máximo absoluto de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ en $\mathbb{R}$. Puesto que f es continua en $\mathbb{R}$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+x^2} = 0$ y $f(x) \geq 0$ podemos asegurar la existencia de máximo absoluto. Como $f(x)$ es derivable, para buscar el extremo absoluto basta resolver la ecuación $f'(x) = 0$:*

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$$

luego el máximo absoluto de f en $\mathbb{R}$ es $x = 0$ y el valor máximo de f en $\mathbb{R}$ es $f(0) = 1$. Nótese que esto se podría haber probado directamente puesto que $f(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ puesto que $1 + x^2 \geq 1$ y $f(0) = 1$.

Ejemplo 6. *Calcula, si existe, el mínimo absoluto de $f(x) = x^2 + bx + c$. Puesto que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ existe el mínimo absoluto. Como $f(x)$ es derivable y*

$$f'(x) = 2x + a = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

el mínimo absoluto es $x = \dfrac{-b}{2}$ y el valor mínimo de $f(x)$ en $\mathbb{R}$ es $f(\dfrac{-b}{2}) = \dfrac{4c - b^2}{4}$.

0.3. La derivada segunda. Aplicaciones.

En lo que sigue vemos las derivadas de orden dos.

Función dos veces derivable en un punto Sea $f(x)$ una función derivable en un intervalo abierto I y sea $a \in I$. Diremos que f es dos veces derivable en a si la función f' es derivable en a. A la derivada de f' en a se la llama derivada segunda de f en a y se denota por $f''(a)$. Es decir,

$$f''(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}.$$

Cuando decimos que f es dos veces derivable en a estamos asumiendo que f es derivable en algún intervalo abierto que contiene al punto a; por lo tanto, f es derivable en a y continua en a.

Diremos que una función es dos veces derivable en un intervalo abierto I si f es dos veces derivable en todos los puntos de I, siendo la función derivada segunda de f la función derivada de f', es decir, $f'' = (f')'$ en I. La derivada segunda tiene una importante aplicación para la determinación de extremos relativos.

Teorema 7. *(El criterio de la derivada segunda para clasificación de extremos locales) Sea f una función derivable en $(a-r, a+r)$ para algún $r > 0$ y tal que $f'(a) = 0$. Supongamos que f esa dos veces derivable en a, y $f''(a) \neq 0$. Entonces,*

1. *Si $f''(a) > 0$ la función f tiene un mínimo relativo en $x = a$.*
2. *Si $f''(a) < 0$ la función f tiene un máximo relativo en $x = a$.*

Demostración. Suponemos el caso $f''(a) > 0$ (el otro caso es análogo). Puesto que $f'(a) = 0$ y f es dos veces derivable en a,

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{x - a} > 0,$$

por las propiedades de conservación del signo del límite tenemos que hay algún intervalo centrado en a, $(a-r, a+r)$ tal que $f'(x) < 0$ si $x \in (a-r, a)$ y $f'(x) > 0$ si $x > a$.

$(a-r, a)$	$(a, a+r)$
$f' < 0$	$f' > 0$
f decreciente	f decreciente

Por lo tanto, puesto que f <u>es continua</u> en a (por ser derivable en a) y
▷ f es estrictamente creciente en $(a-r, a]$ y por tanto si $x \in (a-r, a)$ se tiene que $f(x) < f(a)$.
▷ f es estrictamente decreciente en $(a-r, a]$ y por tanto si $x \in (a, a+r)$ se tiene que $f(x) < f(a)$.
Podemos afirmar entonces que f tiene un mínimo relativo en a.

□

0.3.1. Concavidad y convexidad.(*)

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo (a, b). Diremos que $f(x)$ es *convexa* en el intervalo (a, b) si para todo $x, y \in (a, b)$ y $0 \leq \lambda \leq 1$ se tiene que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

De forma análoga, diremos que $f(x)$ es *cóncava* en el intervalo (a, b) si para todo $x, y \in (a, b)$ y $0 \leq \lambda \leq 1$ se tiene que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Gráficamente, la convexidad significa que dados dos puntos x, y la gráfica de la función queda por debajo de la recta que une los puntos la gráfica $(x, f(x))$ y $(y, f(y)$.

Teorema 8. *Sea $f(x)$ una función dos veces derivable en un intervalo abierto I.*

1. *Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces $f(x)$ es convexa en (a, b).*

2. *Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces $f(x)$ es cóncava en (a, b).*

Un punto $c \in (a, b)$ es un *punto de inflexión* de $f(x)$ si existe $r > 0$ tal que $f(x)$ es convexa (resp. cóncava) en $(c - r, c)$ y cóncava (resp. convexa) en $(c, c + r)$.

Lema 9. *Si $f(x)$ es dos veces derivable en (a, b) y c es un punto de inflexión de $f(x)$ entonces $f''(c) = 0$.*

Observación 10. No es cierto, en general, que si $f''(c) = 0$ el punto c sea un punto de inflexión. Basta considerar la función $f(x) = x^4$ que es convexa en todo $\mathbb{R}$ y sin embargo $f''(0) = 0$.

0.4. Funciones n-veces derivables. Funciones de clase $\mathcal{C}^n$ y $\mathcal{C}^\infty$.

De la misma forma que se define la derivada segunda, para cualquier $n \geq 2$ se pueden definir recursivamente las derivadas n-ésimas de una función en un punto a medidante la derivada de la funció $f^{n-1)}$ en el punto a; dicha derivada n-ésima de f en a se denota como $f^{n)}(a)$. Si f es n-veces derivable en todos los puntos de un intervalo abierto I denotamos por $f^{n)}(x)$ a la derivada n-ésima de f en I, que es precisamente la derivada $n - 1$-ésima de la función f'.

En secciones anteriores hemos introducido las funciones de clase $\mathcal{C}^1$; generalizamos esta noción al caso de funciones de clase $\mathcal{C}^n$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, diremos que una función f es de clase $\mathcal{C}^n$ en un intervalo abierto I si f es n-veces derivable en el intervalo I y la función $f^{n)}$ es continua en I. Diremos que f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en I si f es de clase $\mathcal{C}^n$ en I para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 11. *Todos los polinomios son de clase* $\mathcal{C}^\infty$ *en* $\mathbb{R}$. *De hecho, si* $p(x)$ *es un polinomio hay un* $k \in \mathbb{N}$, *tal que* $p^{k)}(x) \equiv 0$ *(siendo* $k = grado(p) + 1$*) en* $\mathbb{R}$. *Más aún, utilizando resultados de las secciones anteriores se puede probar que si una función verifica que para algún* $k \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $f^{k)}(x) \equiv 0$ *entonces la función es un polinomio de grado* $k-1$.

Ejemplo 12. *Todas las funciones elementales, es decir, las funciones polinómicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, y composición de funciones elementales, son de clase* $\mathcal{C}^\infty$ *en su dominio. Sin embargo, hay funciones que no son de clase* $\mathcal{C}^\infty$ *en su dominio. Por ejemplo, la función* $f(x) = x^{5/3}$ *es derivable en* $\mathbb{R}$ *siendo su función derivada* $f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3}$ *continua en* $\mathbb{R}$*; sin embargo,* f' *no es derivable en* 0 *por lo que se tiene que la función* f *es de clase* $\mathcal{C}^1$ *en* $\mathbb{R}$ *pero no es de clase* $\mathcal{C}^2$ *en* $\mathbb{R}$. *Más generalmente, si* $N \in \mathbb{N}$, *la función* $f(x) = x^{N+\frac{1}{3}}$ *con* $N \in \mathbb{N}$ *es de clase* $\mathcal{C}^N$ *en* $\mathbb{R}$ *pero no es de clase* $\mathcal{C}^{N+1}$*; en efecto,* $f^{N)}(x) = (N + \frac{1}{3})(N - 1 + \frac{1}{3}) \ldots (1 + \frac{1}{3})x^{1/3}$ *que es continua en* $\mathbb{R}$ *pero no es derivable en* $\mathbb{R}$ *(no es derivable en* 0*).*

Ejemplo 13. *Un ejemplo de función interesante que no es de clase* $\mathcal{C}^2$ *es la función definida a trozos,*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \ \ x \geq 0 \\ -x^2 & si \ \ x < 0 \end{cases}$$

Se puede comprobar que f *es derivable en* $\mathbb{R}$ *siendo* $f'(x) = 2|x|$*; sin embargo, claramente* f' *no es derivable en* $\mathbb{R}$.