0.1. Lección 7

0.1.1. El límite de una función.

El objetivo de esta clase es el estudio, desde el punto de vista teórico, del límite de una función en un punto a, es decir,

$$\lim_{x\to a} f(x).$$

Se dice que $f(x)$ *tiende a* L *cuando* x *tiende a* a o que $f(x)$ *se aproxima a* L *cuando* x *se aproxima a* a y se denota como $\lim_{x\to a} f(x) = L$ cuando f transforme puntos próximos a a (pero distintos de a) en puntos próximos a L, es decir, se quiere considerar la *tendencia* que manifiestan los valores cercanos a a pero distintos de a.

Distintos comportamientos de una función cerca de un punto :

Estudiamos $f(x)$ cuando $x \to 0$ para las siguientes funciones:

1. $\boxed{f(x) = x}$ si $x \to 0$, en este caso los valores de $f(x)$ si $x \sim 0$ están próximos a cero. Este caso será un ejemplo de la situación $\lim_{x\to 0} x = 0$

2. $\boxed{f(x) = \dfrac{|x|}{x}}$ si $x \to 0$: en este caso $f(x) = \begin{cases} 1 \; si x > 0 \\ -1 \; si; x < 0 \end{cases}$; por lo tanto, como justificaremos más adelante, no existe $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$.

3. $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x^2}}$; si $x \sim 0$ los valores $f(x)$ son muy grandes y positivos, será un ejemplo de límite infinito del tipo $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$

4. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$; en este caso si $x \sim 0$ pero $x \neq 0$ los valores de $f(x)$ se aproximan a 0 luego será un ejemplo de $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

5. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; si $x \sim 0$ y $x > 0$ se tiene que $f(x)$ es muy grande y positivo; y si $x \sim 0$ y $x < 0$ los valores son negativos y tienden a $-\infty$; es claro que

$$\text{NO EXISTE} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = 0.$$

Otras situaciones: $f(x) = \operatorname{sen}(\dfrac{1}{x})$....

0.1.2. La definición de límite de una función en un punto.

Para estudiar $\lim\limits_{x\to a} f(x)$:

▷ f tiene que estar definida cerca de a.

▷ f no tiene porqué estar definida en a.

Consideramos funciones definidas en $(a-r, a+r)\setminus\{a\}$ para algún $r>0$.
En lo que sigue formalizamos la idea de proximidad de $f(x)$ a L cuando $x\to a$ mediante la definición del límite de una función. Vemos la definición $\epsilon-\delta$.

Sea f definida en $(a-r, a+r)\setminus\{a\}$ para algún $r>0$. Diremos que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si para todo $\epsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<|x-a|<\delta$ entonces

$$|f(x)-L|<\epsilon.$$

Diremos que existe $\lim_{x\to a} f(x)$ o que la función f tiene límite en a si existe $L\in\mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to a} f(x) = L$.
A partir de ahora, si escribimos $\lim_{x\to a} f(x) = L$ significará que f está definida en algún $(a-r, a+r)\setminus\{a\}$ y que el límite de f en a es L.

0.1.3. Un ejemplo de cálculo de un límite mediante la definición.

Juego $\epsilon - \delta$ en la definición:

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

Pregunta: Dado $\epsilon > 0$, ¿podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 0| < \delta$ se tiene que

$$||f(x) - 0| = x^2 < \epsilon$$

ϵ	$\epsilon = 1$	$\epsilon = 0,5$	$\epsilon = \frac{1}{100^2}$
δ			

Vemos en lo que sigue un límite utilizando la definición:

Proposición 1. *Si $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces para todo $a \in$ se tiene que $\lim_{x\to a} x = a$.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$, tenemos que probar que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Basta elegir $\delta = \epsilon > 0$ y se tiene que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces

$$|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \epsilon$$

$\square$

0.1.4. Interpretación geométrica del límite.

Sea f definida en $(a-r, a+r) \setminus \{a\}$ para algún $r > 0$. Diremos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ entonces

$$f(x) \in (L-\epsilon, L+\epsilon).$$

Observación 2. *Nótese que la condición $0 < |x-a|$ es para que se tenga en cuenta que $x \neq a$, puesto que a podría incluso no estar en el dominio de f.*

Unicidad del límite:

(Propiedad de unicidad del límite) Si existe el límite de f en a, dicho límite es único.

Demostración: Por reducción al absurdo:
Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} f(x) = M$ y que $L \neq M$. Sea $\epsilon = \dfrac{|M-L|}{2} > 0$. Utilizando las definiciones de límite:

$\triangleright$ Puesto que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, para $\epsilon = \dfrac{|M-L|}{2} > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta_1$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$

$\triangleright$ Puesto que $\lim_{x\to a} f(x) = M$, para $\epsilon = \dfrac{|M-L|}{2} > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta_2$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$

Consideremos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ entonces

Ahora, si $0 < |x-a| < \delta$ entonces

$\triangleright$ si $0 < |x-a| < \delta \leq \delta_1$ entonces $|L - f(x)| < \dfrac{|M-L|}{2}$

$\triangleright$ si $0 < |x-a| < \delta \leq \delta_2$ entonces $|M - f(x)| < \dfrac{|M-L|}{2}$

$$|L-M| = |L-f(x)+f(x)-M| \leq |L-f(x)|+|f(x)-M| < \frac{|M-L|}{2}+\frac{|M-L|}{2} = |L-M|$$

es decir, $|L-M| < |L-M|$!!

Luego el resultado queda probado. $\square$

0.1.5. Límites laterales.

Definimos a continuación los límites laterales y su aplicación en el cálculo de límites:

Límites laterales:

1. Sea f definida en $(a, a+r)$ para algún $r > 0$. Diremos que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $a < x < a + \delta$ entonces
$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

2. Sea f definida en $(a, a+r)$ para algún $r > 0$. Diremos que $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $a - \delta < x < a$ entonces
$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

Proposición 3. *Sea f definida en $(a-r, a+r)\setminus\{a\}$ para algún $r > 0$ y $L \in \mathbb{R}$. Entonces $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si y sólo si existen los dos límites laterales y además coinciden, es decir,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L.$$

Demostración. La implicación $\Longrightarrow$ es consecuencia directa de la definición.

Supongamos ahora que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$; tenemos que probar que $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Sea $\epsilon > 0$,

• Puesto que $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $x \in (a, a + \delta_1)$ se tiene que $|f(x) - L| < \epsilon$.

• Puesto que $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $x \in (a - \delta_2, a)$ se tiene que $|f(x) - L| < \epsilon$.

Basta elegir $\boxed{\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0}$ y si $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ se tiene que: o bien $x \in (a-\delta_1, a) \subset (a-\delta, a)$ en cuyo caso $|f(x)-L| < \epsilon$, o bien $x \in (a, a+\delta) \subset (a, a+\delta_1)$ y por tanto $|f(x) - L| < \epsilon$, con lo cual queda probado.

□

Corolario 4. *Si $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$ o alguno de los dos límites anteriores no existe, entonces NO EXISTE $\lim_{x\to a} f(x)$.*

Vemos la aplicación del resultado anterior para la resolución de algunos límites.

Ejemplo 5. *NO EXISTE* $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$. *En efecto:*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|}$$

Ejemplo de función tal que no ninguno de los límites laterales, ni son ∞ ni $-\infty$.
La función $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$.

Proposición 6. *El* $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ *NO EXISTE.*

Demostración. Suponemos, por reducción al absurdo que dicho límite existe y es L.
En primer lugar, para cualquier función f es fácil ver que si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = L$ entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(-x) = 0$. En este caso, como la función es además *impar* se tendría que

$$L = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(\frac{-1}{x}) = -\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$$

Por lo que $L = -L$ y $L = 0$. Veamos ahora que no es posible que $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = 0$. Supongamos que lo fuese: para $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$ existiría $\delta > 0$ tal que para todo $0 < |x| < \delta$ se tiene que $|\operatorname{sen}(\frac{1}{x})| < \frac{1}{2}$. Pero esto no es posible, puesto que utilizando la propiedad Arquimediana, para $\delta > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \delta$ y en particular,

$$|\frac{1}{2n\pi + \pi/2}| < \frac{1}{n} < \delta$$

y sin embargo $f(\frac{1}{2n\pi+\pi/2}) = 1 < \frac{1}{2}$!!!!.
Esto prueba que el límite que $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ no puede ser cero y como de existir sería 0 no puede existir. $\square$

Nótese que en el ejemplo anterior no existen tampoco los límites laterales.

Vemos ahora el ejemplo de una función que no tiene límite en ningún punto de su dominio.

Ejemplo 7. *Una función que no tiene límite en nigún punto. Sea*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Veamos que no existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. *Supongamos por reducción al absurdo que* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *en algún punto* a. *Entonces, para* $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - L| < L$ *para todo* $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$. *Ahora bien, por las propiedades de densidad de los números reales existe algún racional* $\frac{p}{q} \in (a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$ *y algún irracional* $\alpha \in (a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$. *Entonces* $|f(\frac{p}{q}) - L| = |1 - L| < \frac{1}{2}$ *y* $|L| = |f(\alpha) - L| < \frac{1}{2}$ *lo cual no puede ser (si lo fuese* $|1| = |1 - L + L| \leq |L - 1| + |L| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ *!!!).*
Por tanto no hay puntos en los que esta función tenga límite.