Soluciones comentadas

1. **(1 punto)** ¿Se pueden dibujar nueve segmentos en el plano de forma que cada uno corte exactamente a otros tres segmentos? Responde razonadamente interpretando el enunciado en términos de grafos.

Construimos un grafo G cuyos vértices corresponden a los segmentos y donde la adyacencia entre vértices significa que existe intersección entre los correspondientes segmentos. El grafo G tendrá 9 vértices y cada vértice será de grado 3. Esto es imposible porque el número de vértices de grado impar debe ser un número par. Por tanto, la configuración geométrica del enunciado NO existe.

2. **(1 punto)** Sea G un grafo simple, de 14 vértices, tal que el grado de sus vértices es al menos 9 y el número de aristas es múltiplo de 28. ¿Cuál es el número de aristas de G? ¿G es bipartido?

Para responder a la primera pregunta debemos utilizar dos resultados, la fórmula de los grados y el número máximo de aristas de un grafo de n vértices.
Por la fórmula de los grados, $2q = \Sigma d(v) \geq 9n = 9 \cdot 14 = 126$, luego $q \geq 63$
Por otra parte, el número de aristas de un grafo de 14 vértices es, a lo sumo, $\frac{14 \cdot 13}{2} = 91$
El único múltiplo de 28 entre 63 y 91 es 84, que es el número de aristas del grafo.

Para la segunda pregunta basta observar que, si el grafo fuera bipartido entonces una de las dos partes de la partición de los vértices tendría a lo sumo 7 vértices y los vértices de la otra parte no podrían tener, por tanto, grado superior a 7. En consecuencia, el grafo NO es bipartido.

3. **(1,5 puntos)** Demuestra que la arista de mayor peso de un ciclo en un grafo ponderado G (con pesos diferentes en las aristas) nunca pertenece al árbol generador mínimo de G.

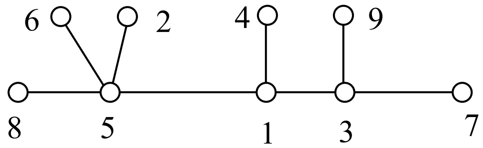
La demostración se realiza por reducción al absurdo. Llamemos T al árbol generador de peso mínimo y sea C un ciclo de G y $e = ab$ la arista de mayor peso de C. Supongamos que $e \in T$.
$T - e$ consta de dos componentes conexas T_1 y T_2, una conteniendo al vértice a y la otra al vértice b.
Además $C - e$ tiene un camino en G que conecta los vértices a y b, extremos de la arista e. Por tanto, existe una arista e' del ciclo C, que no es arista del árbol T y que une un vértice de T_1 con un vértice de T_2

Así construimos un árbol $T^* = T - e + e'$ cuyo peso es
$$w(T^*) = w(T) - w(e) + w(e') < w(T)$$
porque $w(e) > w(e')$ ya que e es la arista de mayor peso del ciclo C.

Hemos construido un árbol T* de menor peso que T, lo que contradice que T sea el árbol generador de peso mínimo.

4. **(1 punto)** Construye el árbol T cuyo código de Prüfer es [5,1,5,3,5,1,3]. ¿Se puede conocer el número de hojas de T mirando sólo al código? Razona la respuesta.

El árbol pedido es



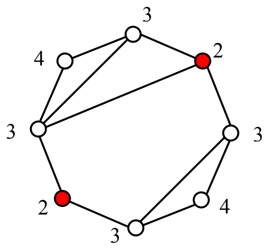
La construcción del árbol correspondiente a un código dado C de longitud $n - 2$ se realiza siguiendo los siguientes pasos.

1. Se construye una lista con los elementos 1, 2, … , n

2. Se toma el primer elemento j de C y el primero k de la lista L que no esté en C. Se añade la arista jk al árbol y se eliminan j y k de sus respectivas listas.
3. Se repite el proceso anterior hasta terminar con los elementos de C. Se forma una arista cuyos extremos sean los dos elementos restantes de L.

Las hojas de un árbol son los vértices cuyas etiquetas NO aparecen en el código. Basta recordar cómo se construye el código. Se elige la hoja de menor etiqueta y se pone en el código la etiqueta de su único vecino. Por tanto, las hojas no están en el código y cualquier otro vértice sí lo está.

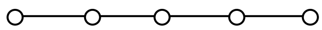
5. **(1,5 puntos)** Definición de diámetro de de un grafo. Indica cuál es el diámetro y el centro del grafo de la figura. Dibuja dos grafos con 6 vértices, que no sean árboles, de radio 2, de diámetro 4 y que no sean isomorfos. Y otro de radio 3 y diámetro 6. Indica como construir un grafo que no sea árbol con radio r y diámetro 2r.



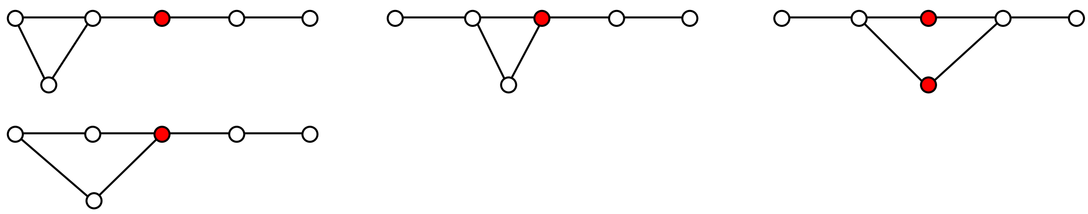
El diámetro de un grafo es la máxima distancia entre dos de sus vértices, es decir, $\operatorname{diam}(G) = \max\{\operatorname{dist}(a,b) / a,b \in V(G)\}$

En la figura se han etiquetado los vértices con el valor de su excentricidad. Los vértices rojos, de excentricidad mínima, forman el centro de G. El diámetro del grafo es 4.

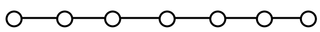
Construcción de grafos con radio y diámetro dados:
Si se quiere un grafo de diámetro 4 debe haber un camino P_5 de longitud 4 y no puede haber otro camino mínimo de mayor longitud. Por tanto hay que partir de P_5 (que ya tiene radio 2) y añadir algún vértice adecuadamente.

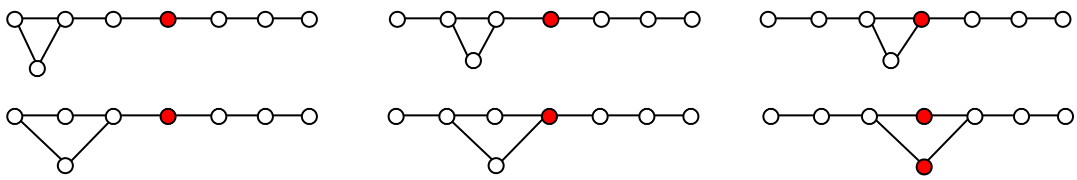

P_5

Añadiendo sólo un nuevo vértice e imponiendo que el grafo no sea un árbol y que el radio siga siendo 2, tenemos cuatro posibilidades, que dan lugar a cuatro grafos no isomorfos de orden 6 cumpliendo las condiciones exigidas y de orden mínimo: (marcamos en rojo los vértices del centro)



Si ahora queremos grafos de diámetro 6 y radio 3, no árboles y de orden mínimo basta repetir la construcción anterior partiendo de P_7, el camino de longitud 6.


P_7



Para construir un grafo de diámetro 2r y radio r basta partir del camino P_{2r+1} y añadir un vértice conectado a dos vértices consecutivos o situados a distancia 2 en el camino. El grafo construido será de orden mínimo 2r + 2.

6. **(1,5 puntos)** Estudiar si son ciertas las siguientes afirmaciones:

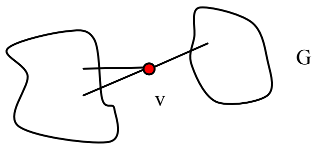
(a) Si v es un vértice corte de G, entonces v no es vértice corte del complementario G'.
(b) Si un vértice v no está en ningún ciclo de G, entonces v es vértice-corte.
(c) Si todos los vértices de un grafo son pares, el grafo es bipartido.

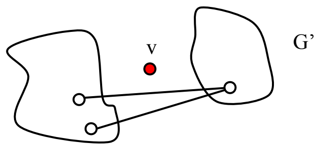
(a) CIERTO.

Utilizaremos la siguiente caracterización de los vértices corte:

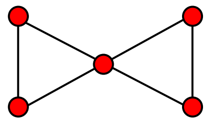
"v es vértice corte si existen x,z tales que TODOS los caminos de x a z pasan por v"

Si v es corte entonces G – v consta de (al menos) dos componentes conexas V' y V''. Es fácil comprobar que en el complementario G' siempre hay un camino entre dos vértices cualesquiera que NO pasa por v





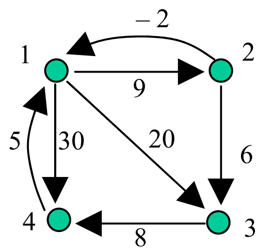
(b) FALSO.
Una hoja de un árbol no está en ningún ciclo pero no es vértice-corte



(c) FALSO.
El grafo de "la pajarita" no es bipartido pero todos sus vértices son pares

7. **(1,5 puntos)** ¿Qué problema en digrafos resuelve el algoritmo de Floyd-Warshall? Describe la iteración 3 y construye la matriz correspondiente para el digrafo de la figura a partir de la matriz anterior.

$$W^2 = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 15 & 30 \\ -2 & 0 & 6 & 28 \\ \infty & \infty & 0 & 8 \\ 5 & 14 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$



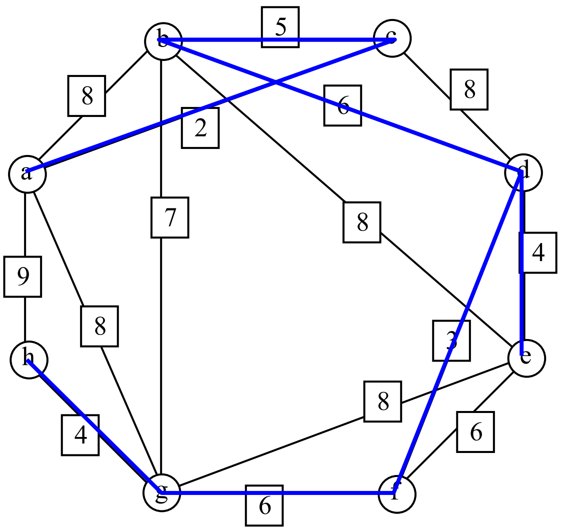
El algoritmo de Floyd-Warshall calcula el peso del camino mínimo entre cualquier par de vértices de un grafo (o digrafo) con pesos en las aristas. (NO calcula el árbol de caminos mínimos NI el árbol generador mínimo)
En la iteración 3 del algoritmo se calcula el peso del camino mínimo entre cada par de vértices permitiendo sólo los vértices 1, 2 y 3 como vértices intermedios.
Los elementos de la matriz W^3 se calculan así:

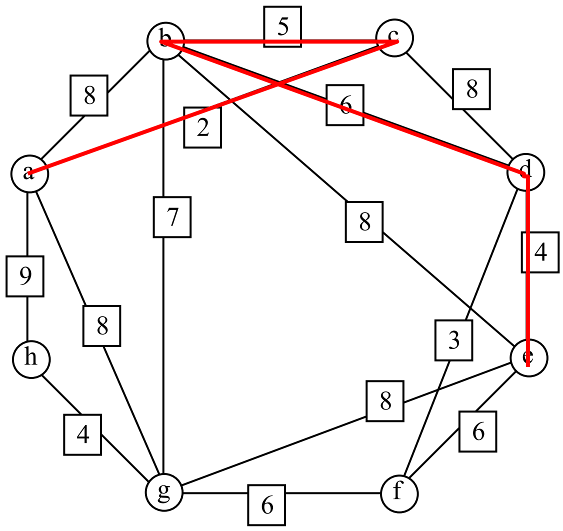
$$w^3_{ij} = \min\{ w^3_{ij} , w^2_{i3} + w^2_{3j} \}$$

Por lo que dicha matriz es:

$$W^3 = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 15 & \boxed{23} \\ -2 & 0 & 6 & \boxed{14} \\ \infty & \infty & 0 & 8 \\ 5 & 14 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

8. **(1,5 puntos)** En la central nuclear de NUCLON se ha producido un escape radiactivo. Cada pasillo de la central tiene un nivel de radiación que se indica en el grafo de la figura en el que los vértices representan lugares importantes de la central. Queremos construir los caminos más seguros (con menor nivel de radiación) entre cada par de vértices. El nivel de radiación de un camino es el nivel máximo de radiación en los pasillos que recorre. Describe un algoritmo que construye dichos caminos y demuestra que es correcto. Aplícalo al grafo de la figura e indica cuál es el camino más seguro entre los vértices a y e.
Indicación: Existe un árbol generador del grafo que contiene un camino de nivel mínimo entre cada par de vértices.





Probaremos que el árbol generador de peso mínimo (MST) contiene un camino de nivel de radiación mínimo entre cada par de vértices.

Lema. Sea G un grafo conexo con pesos en las aristas que indican su nivel de radiación y T el árbol generador de peso mínimo. Entonces para cada par (u,v) de vértices de G el único camino entre u y v en T, es un camino de nivel de radiación mínimo en G.

Dem.: Sea P ese camino en T y e la arista con el máximo nivel de radiación en P. Es decir c(P)=c(e)

Supongamos que hay otro camino P' en G de de u a v con menor nivel, c(P')<c(P). Este camino P' no contiene a la arista e (pues en caso contrario su nivel de radiación sería el de P), por lo que debe contener a una arista e' que conecte las dos componentes de T – e.

Además el nivel de radiación de e' es c(e')<c(e). Por tanto, si consideramos el árbol T – e + e' tendremos un árbol de menor peso que T, contradiciendo que T sea el de peso mínimo.

Algoritmo

Primer paso. Construir el árbol generador de peso mínimo T (algoritmo de Prim, Kruskal o Borüvka)

Segundo paso. Dados u y v, hallar en T el único camino entre u y v. (Por DFS o BFS sobre T empezando la búsqueda en u)

La complejidad viene dada por la construcción del árbol T.

La solución está marcada en azul. El camino más seguro (en rojo) entre a y e es de nivel 6.