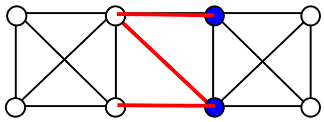
SOLUCIONES

1. **(2 puntos)**

   (a) Define grafo 3-conexo y grafo 3-aristo-conexo. Dibuja un grafo simple con al menos 8 vértices que sea 3-aristoconexo pero no sea 3-conexo. Justifica que el grafo dibujado cumple las condiciones pedidas.
   (b) Demuestra que un grafo simple G es 2-conexo si y sólo si para cada par de aristas e y e' de G existe un ciclo que las contiene.



El grafo de la figura es 3-aristoconexo, pero sólo es 2-conexo. Se necesita eliminar al menos 3 aristas, por ejemplo las rojas, para desconectar, pero basta eliminar los vértices azules para desconectar

2. **(1 punto)**

Indica las relaciones que existen entre número cromático, índice cromático, grado máximo y número de independencia. Demuestra una de ellas.

3. **(1,5 puntos)** ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Demuéstralas o encuentra un contraejemplo.

   (a) Todo grafo planar de 7 vértices tiene menos de 16 aristas.
   (b) Existen grafos no planares de 7 vértices y 15 aristas.

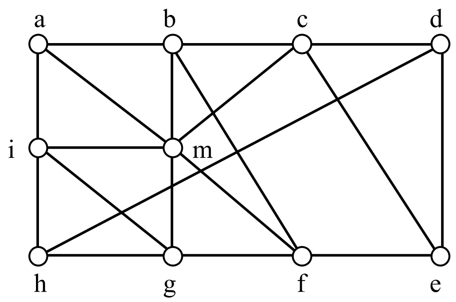
(a) Hay que demostrar que en todo grafo planar de n vértices y q aristas se cumple que $q \leq 3n - 6$
(b) Un ejemplo es K_5 al que se añaden dos vértices, uno de grado 2 y otro de grado 3

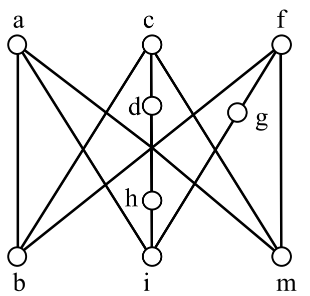
4. **(1 punto)** Describe el algoritmo de Fleury y analiza su complejidad.

5. **(2 puntos)** La banda de "El Rata" guarda el botín de sus atracos en un entramado de sociedades opacas relacionadas entre sí según el grafo de la figura. Se pide interpretar en términos de grafos y responder razonadamente a las siguientes preguntas:

(a) "El Rata" quiere un dibujo de la red en el que no se corte ningún par de líneas, ¿es posible?
(b) ¿Pueden los ladrones distribuir el botín en cinco sociedades que no tengan relación entre sí?
(c) La banda desea repartir el botín de sus últimos tres atracos de forma que cada sociedad reciba botín de un único atraco y que sociedades relacionadas no reciban botín del mismo atraco. ¿Es posible?

(a) Se pregunta si el grafo es planar. No lo es porque contiene una subdivisión de $K_{3,3}$

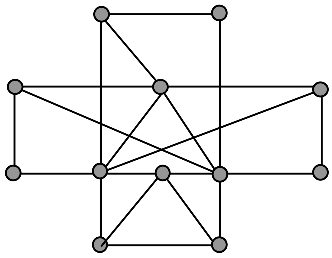




(b) En términos de grafos se pregunta si el grafo contiene un conjunto independiente de cardinal 5. No lo contiene porque el ciclo exterior abcdefghia tiene cardinal 9, así solo puede contener 4 vértices independientes, por ejemplo I = {a,c,f,h}, pero el vértice restante m es de grado 6 por lo que es adyacente a alguno de I. Así que el número de independencia del grafo es 4.

(c) Nos preguntan si el grafo admite una 3-coloración en los vértices. La respuesta es negativa, el grafo contiene una rueda impar que es el subgrafo generado por {a,b,f,g,i,m}. Por tanto su número cromático es mayor que 3.

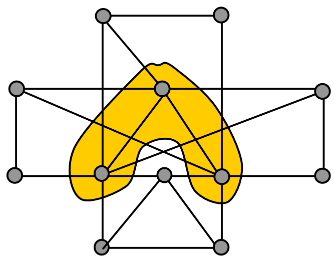
6. **(1 punto)** Enuncia una condición necesaria y una condición suficiente para decidir si un grafo es hamiltoniano. ¿Puedes decidir con alguna de ellas si el grafo de la figura es hamiltoniano?

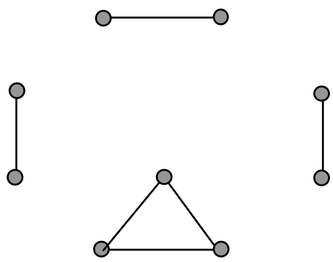


Condición necesaria. Si G es un grafo hamiltoniano entonces para todo conjunto S⊂V(G) se debe cumplir que

|componentes de G – S | ≤ |S|

Esta condición NO se cumple para el conjunto S, luego el grafo NO es hamiltoniano



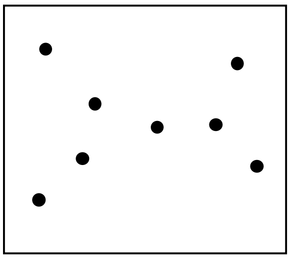


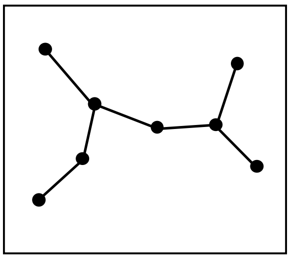
Condición suficiente. Si en un grafo simple G de orden n para todo par de vértices no adyacentes x, y se cumple que d(x) + d(y) ≥ n entonces G es un grafo hamiltoniano

7. **(1,5 puntos)**

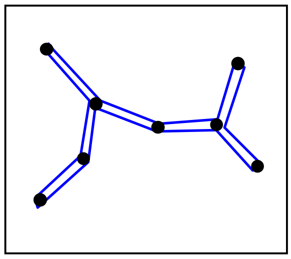
(a) ¿Qué significa que un algoritmo garantice una solución 2-aproximada para un problema de optimización? Describe una aproximación con ese factor para el "Problema del Viajante (euclídeo)" utilizando las siguientes viñetas. Los vértices del grafo G aparecen en la primera viñeta, las aristas de G son todos los segmentos que unen cada par de vértices y el peso de cada arista es la distancia euclídea entre sus extremos. En la segunda viñeta aparece el …. ¿?. Dibuja los pasos siguientes en las viñetas sucesivas y descríbelos brevemente.

(b) Demuestra que el algoritmo descrito es una 2-aproximación

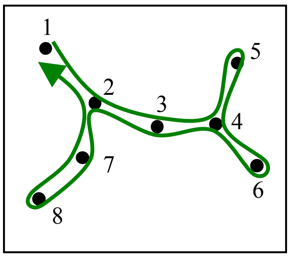




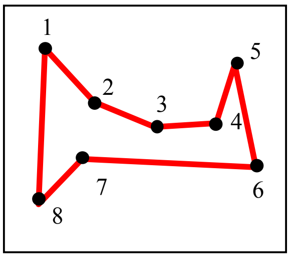
MST



Grafo euleriano H formado al duplicar las aristas del MST



Recorrido euleriano en H



Ciclo hamiltoniano en G visitando los vértices en el **mismo orden** que en el recorrido euleriano pero sin repetir ninguno