Estructuras Algebraicas Examen final de junio	1^{er} Apellido: ______	5 de junio de 2020
Dpt. Matemática Aplicada a las T.I.C. E.T.S. de Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	2^{o} Apellido: ______ Nombre: ______ Número de matrícula:	Tiempo 3 h **Calificación:**

Declaro que he realizado la prueba de evaluación conforme a las indicaciones facilitadas, y sin haber hecho uso de ningún recurso externo que no haya sido autorizado expresamente. Asumo toda la responsabilidad administrativa y disciplinaria que pudiera derivarse de la utilización de medios fraudulentos.

- Asignatura
- Fecha
- Titulación
- Nombre y apellidos
- Número DNI
- Firma
- Carné estudiante / DNI físico

1. (1 punto) Sean $(G,*)$ grupo, $a\in G$ de orden infinito y $r,s\in\mathbb{Z}$ tales que $\langle a^r\rangle=\langle a^s\rangle$. Obtener razonadamente la relación que existe entre r y s.

2. (2 puntos)

   a) Sea $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&4&3&2&7&1&6\end{pmatrix}$.
   Obtener la expresión en producto de ciclos disjuntos y el orden de τ y de τ^{-1}.

   b) Estudiar si la siguiente aplicación es homomorfismo de grupos. En caso afirmativo calcular el núcleo, la imagen e indicar si se trata de un epimorfismo, monomorfismo y/o isomorfismo.
   $$f:(\mathbb{R},+)\longrightarrow(\mathbb{R}^+,\cdot),\qquad f(x)=e^x$$

   c) Estudiar, dando una razón justificada para la respuesta, si el grupo diédrico $(D_{12},\circ)$ y el grupo simétrico $(S_4,\circ)$ son grupos isomorfos.

   d) Obtener los divisores elementales del grupo de las unidades módulo 16: $(U_{16},\cdot_{16})$

3. (2 puntos) Se considera el grupo $(G,\cdot)$, donde $G=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&1\end{pmatrix}:a,b\in\mathbb{Z}_5,a\neq 0\right\}$ y sea $H=\left\{\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}:b\in\mathbb{Z}_5\right\}$

   a) Obtener el centro de $(G,\cdot)$. Demostrar que $H\trianglelefteq G$.

   b) Calcular el orden de cada elemento de $(G/H,\cdot_H)$. Obtener los factores invariantes de $(G/H,\cdot_H)$.

4. (1 punto) Sea $(R,+,\cdot)$ un anillo y sea $\mathtt{I}\subset R$ ideal de R. Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

   a) Si $(R,+,\cdot)$ es dominio de integridad $\Rightarrow (R/\mathtt{I},+_{\mathtt{I}},\cdot_{\mathtt{I}})$ es dominio de integridad.

   b) Si $(R/\mathtt{I},+_{\mathtt{I}},\cdot_{\mathtt{I}})$ es dominio de integridad $\Rightarrow (R,+,\cdot)$ es dominio de integridad.

5. (2 puntos) Sea $R=\{e,x,y,z\}$. Sabiendo que $(R,+,\cdot)$ es anillo, completar la tabla del producto. Indicar si se trata de un anillo conmutativo y con identidad. Obtener todos los ideales del anillo.

$+$	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	y	z	e
y	y	z	e	x
z	z	e	x	y

$\cdot$	e	x	y	z
e	e	e	e	e
x	e	y		
y	e			
z	e			

6. (2 puntos) Estudiar si el anillo $\mathbb{Z}_2[x]/\left(x^5+x^4+x^3+x^2+1\right)$ es cuerpo. Estudiar si en dicho anillo se puede realiza la siguiente operación, y en caso afirmativo obtener el resultado de tal operación.
$$(x^4+x^3+x+1)^{-1}+\left((x^3+x^2+x+1)^{-1}\cdot(x^3+x^2+1)\right)$$

Para que sean consideradas como válidas, todas las respuestas deben estar adecuadamente justificadas.
No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.

Soluciones

1. $s = \pm r$

2. *a)* $\tau = (1,5,7,6)(2,4)$, $\tau = (1,6,7,5)(2,4)$, $|\tau| = |\tau^{-1}| = 4$.
   b) Es un isomorfismo de grupos. $\ker(f) = \{0\}$, $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^+$.
   c) Entre los elementos de $(D_{12}, \circ)$ hay un giro que tiene orden 12. Entre los elementos de $(S_4, \circ)$ ningún elemento puede tener orden 12.
   d) $(4,2)$

3. *a)* $Z(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow H \neq \emptyset, \forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G, C = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$:
   $C \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & c-d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H, \qquad ACA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & ac \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$
   b) $G/H = \left\{ \left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] : a \in U_5 \right\}$, $\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1$, $\left| \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 4$, $\left| \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 4$, $\left| \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 2$,
   Factores invariantes: 4.

4. *a)* Falso: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}/H, +_H, \cdot_H)$ con $H = 10\mathbb{Z}$
   b) Falso: $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$ y $(\mathbb{Z}_6/I, +_I, \cdot_I)$, con $I = (2)$

5.

$\cdot$	e	x	y	z
e	e	e	e	e
x	e	y	e	y
y	e	e	e	e
z	e	y	e	y

   Es una anillo conmutativo, pero no tiene identidad.
   Sus ideales, primero deben ser subgrupos: $I_0 = \{e\}$, $R = \{e, x, y, z\}$, $I_1 = \{e, y\}$, los tres son ideales.

6. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ es irreducible por no tener raíces en $\mathbb{Z}_2$ y ser
   $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 + 1) + x \Rightarrow \mathbb{Z}_2[x]/\left(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 \right)$ es cuerpo.
   $(x^4 + x^3 + x + 1)^{-1} + \left((x^3 + x^2 + x + 1)^{-1} \cdot (x^3 + x^2 + 1) \right) = (x^3 + x + 1) + \left(x^2 \cdot (x^3 + x^2 + 1) \right) = x$