Lógica de Primer Orden: Unificación y Resolución (2020)

(Con soluciones)

Ejercicio 1.

Justificar si son unificables o no las siguientes parejas de fórmulas atómicas A y B. Caso de serlo, indíquese el UMG y la formula atómica resultado de su aplicación. Indicar por medio de una tabla los pasos principales de aplicación del algoritmo de unificación: cada línea de la tabla tiene que contener por lo menos (1) el valor de α en cada paso; (2) $A\alpha$ y $B\alpha$; (3) tA y tB.

A = R (f(x),f(x)); B = R(y,f(y))
A = T (u,f(x),x); B = T (g(z),z,a)

Ejercicio 2.

Si P(f(y, a), y, f(x, g(b))) y P(x, g(b), f(z, y)) son unificables, hallar el Unificador de Máxima Generalidad, justificando en cualquier caso cada paso del algoritmo UMG

Solución

α $A\alpha$ $B\alpha$ tA, tB

{} P(f(y, a), y, f(x, g(b))) P(x, g(b), f(z, y)) f(y, a), x
{x/f(y, a)} P(f(y, a), y, f(f(y, a), g(b))) P(f(y, a), g(b), f(z, y)) y, g(b)
{x/f(g(b), a), y/g(b)} P(f(g(b), a), g(b), f(f(g(b), a), g(b))) P(f(g(b), a), g(b), f(z, g(b))) f(g(b), a), z
{x/f(g(b), a), y/g(b), z/f(g(b), a)} P(f(g(b), a), g(b), f(f(g(b), a), g(b))) P(f(g(b), a), g(b), f(f(g(b), a), g(b)))

UMG = {x/f(g(b), a), y/g(b), z/f(g(b), a)}

Ejercicio 3.

Aplicar el algoritmo de unificación al siguiente par de átomos A y B. En cada línea de la tabla tiene que aparecer, al menos, (1) el valor actual de la sustitución alfa; (2) el resultado de aplicar la sustitución a A y B; y (3) los términos tA y tB.

A = r(x,a,f(g(c,y))) B = r(g(w,w),z,f(x))

Ejercicio 4.

Para los siguientes pares de fórmulas atómicas encontrar, si existe, el unificador de máxima generalidad (UMG) detallando el proceso de obtención.

F ≡ p (g(x) , x , g(h(t)) , t) G ≡ p (y , h(z) , y, b)
F ≡ q (x , h(x) , h(h(f(z,a)))) G ≡ q (f(t,y) , y , h(y))

Ejercicio 5.

Calcular, si es posible, el UMG entre los siguientes dos átomos. Detallar tanto el procedimiento como el resultado final.

A = p(g(x),g(y),f(a,z)) B = p(y,z,f(x,g(z)))

Solución

α Aα
Bα
tA tB n. lig.

{} p(g(x),g(y),f(a,z))
p(y,z,f(x,g(z))) g(x) y
y/g(x)
{y/g(x)} p(g(x),g(g(x)),f(a,z))
p(g(x),z,f(x,g(z))) g(g(x)) z z/g(g(x))
{y/g(x),z/g(g(x))} p(g(x),g(g(x)),f(a,g(g(x))))
p(g(x),g(g(x)),f(x,g(g(g(x))))) a x x/a
{y/g(a),z/g(g(a)),x/a} p(g(a),g(g(a)),f(a,g(g(a)))) p(g(a),g(g(a)),f(a,g(g(g(a)))))
a g(a) FALLO

Los átomos no son unificables.

Ejercicio 6.

Encontrar, si existe, el unificador de máxima generalidad (UMG) de los siguientes pares de átomos F y G (x, y, z, v, w, t son nombres de variable). En cada paso (cada linea de la tabla) indicar, el unificador α obtenido hasta el momento (nota: no la ligadura) y la aplicación de α a F y G (no hace falta reescribirla si es igual a la del paso anterior).

(a) p (g(a,f(y)), f(y), y)   p (g(z,f(z)), f(f(z)), z)
(b) p (y, z, x, f(y,z))   p (w, t, g(a,w), f(t, g(a, v)))

Ejercicio 7.

Para cada una de las siguientes parejas de fórmulas atómicas determinar si son unificables o no y porqué; y caso de serlo, decir cuál es el unificador de máxima generalidad:

(a) P(f(x, y), g(y), a)   P(f(t, z), t, z)
(b) Q(f(x), a, x   Q(f(g(y)), y, z)
(c) R(x, a, f(x, y))   R(g(z), t, f(z, b))

Ejercicio 8.

Determinar el resolvente que se obtendría al aplicar un paso de resolución a las siguientes cláusulas, así como el unificador de máxima generalidad necesario (indicando TODOS los pasos del algoritmo de unificación):

C1: P(x, f(x), g(f(x)), f(g(x))) ∨ ¬Q(f(x),a,b)
C2: ¬P(y, f(g(z)), g(f(g(a))), w) ∨ ¬R(y,z,f(w))

Ejercicio 9.

Demuestra por resolución UMG (comenzando con la cláusula C7), que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible:

C1: ¬P(x) ∨ ¬Q(y,z,w) ∨ ¬R(x,w) ∨ R(x,y)
C2: Q(a,f(b),f(c))
C3: Q(x,x,f(x))
C4: ¬Q(x,y,z) ∨ R(x,z)
C5: P(a)
C6: ¬R(a,c) ∨ ¬S(f(x))
C7: S(f(x)) ∨ ¬P(x)

Solución

Renombramos las variables de las clausulas:

C1:   ¬P(x1) ∨ Q(y1, h(y1))

C2: S(u1, f(x2), x2) ∨ ¬P(x2)
C3: P(a)
C4: ¬R(x3, h(y2)) ∨ ¬S(g(z1), z1, a)
C5: ¬T(g(x4)) ∨ ¬R(x4, h(x4))
C6: R(y3, z2) ∨ ¬Q(x5, z2)

Podemos eliminar la cláusula 5 ya que el predicado T no aparece en ninguna otra cláusula. Una posible derivación que nos permite llegar a la cláusula vacía es la siguiente:

R1:	Q(y1, h(y1))	C1 con C3: {x1/ a}
R2:	R(y3, h(x5))	R1 con C6: { y1/ x5, z2/ h(x5)}
R3:	¬S(g(z1), z1, a)	R2 con C4: { y3/ x3, y2/ x5}
R4:	¬P(a)	R3 con C2: { u1/ g(f(a)) , z1/ f(a), x2/ a}
R5:	□	R4 con C3

La resolución obtenida sigue una estrategia lineal. Además es una estrategia input y también es dirigida.

Ejercicio 10.

Dar todos los pasos de resolución posibles entre las siguientes dos cláusulas. Para los pasos posibles, detallar el proceso de obtención del UMG utilizado, y para los que no lo sean, justificar la respuesta.

C1: P(x, f(y, x), g(y)) ∨ ¬Q(x, f(y, x), g(y))
C2: ¬P(z, f(w, g(w)), g(z)) ∨ Q(z, f(w, g(w)), g(h(a)))

Ejercicio 11.

Determinar si son unificables los siguientes pares de fórmulas atómicas,encontrando,si existe,el unificador de máxima generalidad (umg) y detallando el proceso de obtención del umg.

(a) A: P(g(x),x,g(t),t) B: P(y,h(z),z,b) siendo x,y,z,t variables y h,g funciones
(b) A: Q(h(x),g(x,z),z) B: Q(h(t),g(y,h(y)),t) siendo x,y,z,t variables y g,h funciones

Solución

(a) A: P(g(x),x,g(t),t) B: P(y,h(z),z,b)
s = {y/g(x)} As: P(g(x),x,g(t),t)
Bs: P(g(x),h(z),z,b)
s = {y/g(h(z)),x/h(z)} As: P(g(h(z)),h(z),g(t),t)
Bs: P(g(h(z)),h(z),z,b)
s = {y/g(h(g(t))),x/h(g(t)),z/g(t)} As: P(g(h(g(t))),h(g(t)),g(t),t))
Bs: P(g(h(g(t))),h(g(t)),g(t),b)

s = {y/g(h(g(b))),x/h(g(b)),z/g(b),t/b}   As: P(g(h(g(b))),h(g(b)),g(b),b)
Bs: P(g(h(g(b))),h(g(b)),g(b),b)

A y B son unificables y s = {y/g(h(g(b))),x/h(g(b)),z/g(b),t/b} es su UMG

(b) A: Q(h(x),g(x,z),z) B: Q(h(t),g(y,h(y)),t)
s = {t/x}   As: Q(h(x),g(x,z),z)   Bs: Q(h(x),g(y,h(y)),x)
s = {t/x,y/x}   As: Q(h(x),g(x,z),z)   Bs: Q(h(x),g(x,h(x)),x)
s = {t/x,y/x,z/h(x)}   As: Q(h(x),g(x,h(x)),h(x))   Bs: Q(h(x),g(x,h(x)),x)

La discordancia (x,h(x)) no tiene solución,por lo que A y B no son unificables

Ejercicio 12.

Dado el conjunto de cláusulas:

C1: ¬B(x) ∨ M(x)
C2: ¬M(x) ∨ E(b,x) ∨ A(b,x)
C3: ¬M(x) ∨ ¬A(x,x)
C4: ¬D(x,y) ∨ ¬A(y,x)
C5: A(f(x),x)
C6: D(a,b)
C7: B(a)
C8: ¬E(b,a)

Demostrar que dicho conjunto es insatisfacible mediante resolución con UMG, indicando en cada paso el unificador empleado.

Solución

C2   C8   C4   C6
x2/a   x4/a,y4/b
se unifican los dos E   se unifican los dos D
¬M(a) ∨ A(b,a)   ¬A(b,x)
¬M(a)   C1
¬B(a)   C7
□

Otras soluciones con resolución lineal:
... // ...
C2   C8
¬M(a) ∨ A(b,a)   C4

¬M(a) ∨ ¬D(a,b) C6
¬M(a) C1
¬B(a) C7
□

C4 C6
¬A(b,a) C2 (no es posible con C3 ,C5)
¬M(a) ∨ E(b,a) C8
¬M(a) C1
¬B(a) C7
□

Ejercicio 13.

Estudiar por resolución con UMG si es insatisfacible el siguiente conjunto C de cláusulas, indicando en cada paso el unificador empleado:

C0 : ¬p(x) ∨ ¬r(x,y) ∨ q(x)
C1 : ¬d(x) ∨ ¬r(x,y) ∨ ¬q(y)
C2 : ¬d(x) ∨ p(x)
C3 : d(f(x))
C4 : d(a)
C5 : r(x,f(x))

Ejercicio 14.

(a) Decir si es unificable o no el siguiente par de átomos y, en caso afirmativo, dar el unificador más general, justificando adecuadamente la respuesta.

P(a,x,f(g(y))) P(y,f(z),f(z))

(b) Demostrar con el método de resolución con UMG que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible

C1: ¬P(x,x,g(y)) ∨ ¬Q(x,g(y)) ∨ R(y)
C2: ¬P(y,x,x) ∨ ¬R(x)
C3: ¬Q(g(y),x) ∨ P(x,x,y)
C4: Q(y,x)

Solución

A. Unificación

α;	Aα;	Bα
{};	P(a,x,f(g(y)));	P(y,f(z),f(z))
{y/a};	P(a,x,f(g(a)));	P(a,f(z),f(z))

{y/a, x/f(z)}; P(a,f(z),f(g(a))); P(a,f(z),f(z))
{y/a, x/f(g(a), z/g(a)}; P(a,f(g(a)),f(g(a))); P(a,f(g(a)),f(g(a)))

Los átomos son unificables y su UMG es { y/a, x/f(g(a), z/g(a) }

B. Renombrar variables

C1: ¬P(x1, x1, g(y1)) ∨ ¬Q(x1, g(y1)) ∨ R(y1)
C2: ¬P(y2, x2, x2) ∨ ¬R(x2)
C3: ¬Q(g(y3), x3) ∨ P(x3, x3, y3)
C4: Q(y4, x4)

R1:	P(x3, x3, y3)	(C3,C4)	{ y4/g(y3), x4/x3 }
R2:	¬R(x3)	(R1,C2)	{ y3/x3, y2/x3, x2/x3 }
R3:	¬P(x1, x1, g(x3)) ∨ ¬Q(x1, g(x3))	(R2,C1)	{ y1/x3 }
R4:	¬Q(x3, g(x3))	(R3,R1)	{ x1/x3, y3/g(x3) }
R5:	[]	(R4,C4)	{ y4/x3, x4/g(x3) }

Ejercicio 15.

Demostrar, mediante el método de resolución, que la siguiente estructura deductiva es correcta:

T[C1, C2, C3, C4 C5] ⊢ ∃x∀y(P(x) ∨ T(x,y))

C1: Q(x) ∨ R(x)
C2: R(x) ∨ P(x) ∨ ¬Q(f(x))
C3: R(x) ∨ P(x) ∨ T(x, y)
C4: ¬R(x)
C5: Q(a)

Solución

Se renombran las variables:

C1: Q(x1) ∨ R(x1)
C2: R(x2) ∨ P(x2) ∨ ¬Q(f(x2))
C3: R(x3) ∨ P(x3) ∨ T(x3, x3)
C4: ¬R(x4)
C5: Q(a)

Se hace la forma clausular de la negación de la conclusión

C6: ¬P(x5)
C7: ¬T(x6, f(x6))

Para que el conjunto sea insatisfacible debe existir una derivación que permita llegar a la cláusula vacía:

C2: $R(x2) \lor P(x2) \lor \neg Q(f(x2))$ C6: $\neg P(x5)$

$\{x2/x5\}$

R1: $R(x5) \lor \neg Q(f(x5))$ C4: $\neg R(x4)$

$\{ x5/x4\}$

R2: $\neg Q(f(x4))$ C1: $Q(x1) \lor R(x1)$

$\{ x1/f(x4)\}$

R3: $R(f(x4))$ C'4: $\neg R(x7)$

$\{ x7/f(x4)\}$

R4: $\square$

Ejercicio 16.

Demostrar, por resolución con UMG, que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible:

C1: $\neg P(x,y) \lor \neg A(x) \lor B(y)$
C2: $\neg P(x,y) \lor \neg D(x) \lor \neg B(f(y))$
C3: $\neg D(x) \lor A(x)$
C4: $D(f(x)) \lor D(f(y))$
C5: $P(x, f(x))$

Ejercicio 17.

Demostrar, mediante el método de resolución, que la siguiente estructura deductiva es correcta:

$$T[C1, C2, C3, C4] \vdash \exists x\, (\neg Q(x) \land \neg R(x))$$

C1: $R(x) \lor P(x) \lor S(x)$
C2: $R(x) \lor P(x) \lor \neg Q(f(x))$
C3: $\neg P(x)$
C4: $\neg R(x)$

Solución

Se renombran las variables:

C1: $R(x1) \lor P(x1) \lor S(x1)$
C2: $R(x2) \lor P(x2) \lor \neg Q(f(x2))$
C3: $\neg P(x3)$
C4: $\neg R(x4)$

Se hace la forma clausular de la negación de la conclusión

C5: $Q(x5) \lor R(x5)$

La cláusula C1 se puede simplificar al ser S(x1) un literal puro.

Para que el conjunto sea insatisfacible debe existir una derivación que permita llegar a la cláusula vacía:

C2: R(x2) ∨ P(x2) ∨ ¬Q(f(x2)) C3: ¬P(x3)

{x2/x3}

R1: R(x3) ∨ ¬Q(f(x3)) C4: ¬R(x4)

{ x3/x4}

R2: ¬Q(f(x4)) C5: Q(x5) ∨ R(x5)

{ x5/f(x4)}

R3: R(f(x4)) C'4: ¬R(x6)

{ x6/f(x4)}

R4: □

Hemos encontrado la cláusula vacía □, luego el conjunto de cláusulas es insatisfacible. La estructura deductiva es correcta.

Ejercicio 18.

Demostrar que el siguiente conjunto es insatisfacible utilizando el método de resolución con UMG:

C1 : P(f(x)) ∨ ¬Q(x) ∨ R(x)
C2 : ¬P(f(x)) ∨ S(g(y), y)
C3 : P(y) ∨ R(y) ∨ ¬S(y, g(y))
C4 : Q(x) ∨ R(y)
C5 : ¬S(x, y)
C6 : ¬R(x)

Solución

Renombrado de variables:

C1 : P(f(x1)) ∨ ¬Q(x1) ∨ R(x1)
C2 : ¬P(f(x2)) ∨ S(g(y2), y2)
C3 : P(y3) ∨ R(y3) ∨ ¬S(y3, g(y3))
C4 : Q(x4) ∨ R(y4)
C5 : ¬S(x5, y5)
C6 : ¬R(x6)

Resolución:

R1: P(f(x1)) ∨ ¬Q(x1)	C1,C6 {x6/x1}
R2: Q(x4)	C4,C6' {x6'/y4}, siendo C6': ¬r(x6')
R3: P(f(x1))	R1,R2 {x4/x1}
R4: S(g(y2),y2)	R3,C2 {x2/x1}
R5: □	R4,C5 {x5/g(y2), y5/y2}

(C6 se usa dos veces con su correspondiente renombrado y C3 no se usa)

Ejercicio 19.

Dado el conjunto de cláusulas:

C1 ≡ ¬ P(x,y) ∨ ¬ Q(x,y) ∨ ¬ R(y) C5 ≡ P(x,f(x))
C2 ≡ ¬ P(x,y) ∨ Q(y,x) C6 ≡ P(f(x),x)
C3 ≡ ¬ P(x,y) ∨ S(y,x) C7 ≡ P(f(x),f(x))
C4 ≡ R(x) ∨ ¬ S(x,x)

(a) Demostrar que dicho conjunto es insatisfacible mediante resolución con UMG, indicando en cada paso de resolución el unificador empleado.
(b) La refutación anterior, ¿es lineal?, ¿es input?
(c) Si se definiera {C2, C3, C4} como conjunto soporte, la refutación anterior ¿sería dirigida?
(d) Este mismo conjunto soporte ¿cumple la condición de completud de la resolución dirigida?

Ejercicio 20.

Demostrar, por resolución con UMG, que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible:

C1: M(a,f(c),f(b))
C2: M(x,x,f(x))
C3: ¬ M(x,y,z) ∨ M(y,x,z)
C4: ¬ M(x,y,z) ∨ N(x,z)
C5: P(a)
C6: ¬ N(a,b)
C7: ¬ M(y,z,u) ∨ ¬ P(x) ∨ ¬ N(x,u) ∨ N(x,y) ∨ N(x,z)

Ejercicio 21.

Dado el siguiente conjunto de cláusulas:

C1: ¬ t(y)
C2: p(x) ∨ t(x) ∨ ¬ r(x, g(x))
C3: r(h(z), z) ∨ ¬ p(h(z))
C4: t(y) ∨ ¬ q(g(y)) ∨ p(y)
C5: ¬ r(x,y)
C6: q(x) ∨ t(x)

(a) probar que es insatisfacible por resolución input lineal con umg.
(b) elegir {C2,C3,C4,C5,C6} como conjunto soporte, ¿garantiza que existe una resolución dirigida? Decir por qué.

Solución

C4 C6

{ x6/g(y4) }

t(g(y4)) ∨ t(y4) ∨ p(y4) C1

{ y4/y1 }

t(g(y1)) ∨ p(y1) C1'

p(y1) C3

r(h(z),z) C5

□

No se ha utilizado C2.

- Es lineal
- Es input: siempre se utiliza una clausula de {C1…C6}

b) Sí, puesto que {C2,C3,C4,C5,C6} es satisfacible :

- interpretaciones que hacen verdaderas estas 5 cláusulas:

  D dominio cualquiera ,

  tD(x) = V para todo x ∈ D → hace V las cláusulas C2 , C4 y C6

  rD(x,y) = V para todo x,y ∈ D → hace V la cláusula C5

  pD(x) = V para todo x ∈ D → hace V la cláusula C4

  qD cualquiera

Otra solución:

R1 = (C3, C5) = ¬ p(h(z)) x5/h(z), y5/z

R2 = (R1, C4) = b(h(z)) ∨ ¬ q(g(h(z))) y4/h(z)

R3 = (R2, C1) = ¬ q(g(h(z))) x1/h(z)

R4 = (R3, C6) = t(g(h(z))) x6/g(h(z)) No se utiliza C2

R5 = □ = (R4, C1)

{C2,C3,C4,C5,C6} también es satisfacible

Otra solución dirigida:

R1 ≡ (C1, C6) ≡ q(x6) y1 / x6

R2 ≡ (R1, C4) ≡ t(y4) ∨ p(y4) x6 / g(y4)

R3 ≡ (R2, C1) ≡ p(y4) y1 / y4

R4 ≡ (R3, C3) ≡ r(h(z3), z3) y4 / h(z3)

R5 ≡ (R4, C5) ≡ □

Ejercicio 22.

Aplicar la factorización, de todas las formas posibles (es decir, generando todos los posibles factores), a la siguiente cláusula:

q(x,f(y)) ∨ p(a,g(z,z),z) ∨ p(z,w,y) ∨ p(f(b),f(c),y) ∨ q(z,f(g(w,w)))

Solución

Se puede intentar factorizar las q, o las p (entre dos o entre tres), o ambas. Notamos que la primera y la tercera p no unifican, así que se nos quitan algunas posibilidades de generar factores. Por lo tanto, los factores se pueden obtener

- con las q (se obtiene F1)
- con las q, luego con la primera y segunda p (pero ya no unifican)
- con las q, luego con la segunda y tercera p (F2)
- con la primera y segunda p (F3)
- con la primera y segunda p, luego con las q (pero ya no unifican)
- con la segunda y tercera p (F4)
- con la segunda y tercera p, luego con las q (F5)

F0: $q(x,f(y)) \lor p(a,g(z,z),z) \lor p(z,w,y) \lor p(f(b),f(c),y) \lor q(z,f(g(w,w)))$

F1: $q(z,f(g(w,w))) \lor p(a,g(z,z),z) \lor p(z,w,g(w,w)) \lor p(f(b),f(c),g(w,w))$
(F0) $\{ x/z, y/g(w,w) \}$

F2: $q(f(b),f(g(f(c),f(c)))) \lor p(a,g(f(b),f(b)),f(b)) \lor p(f(b),f(c),g(f(c),f(c)))$
(F1) $\{ z/f(b), w/f(c) \}$

F3: $q(x,f(a)) \lor p(a,g(a,a),a) \lor p(f(b),f(c),a) \lor q(a,f(g(g(a,a),g(a,a))))$
(F0) $\{ z/a, w/g(a,a), y/a \}$

F4: $q(x,f(y)) \lor p(a,g(f(b),f(b)),f(b)) \lor p(f(b),f(c),y) \lor q(f(b),f(g(f(c),f(c))))$
(F0) $\{ z/f(b), w/f(c) \}$

F5: $q(f(b),f(g(f(c),f(c)))) \lor p(a,g(f(b),f(b)),f(b)) \lor p(f(b),f(c),g(f(c),f(c)))$
(F4) $\{ x/f(b), y/g(f(c),f(c)) \}$

Ejercicio 23.

Dado el siguiente conjunto de cláusulas:

C1: $\neg P(x) \lor Q(x) \lor \neg R(x, y)$
C2: $\neg D(x) \lor \neg Q(y) \lor \neg R(x, y)$
C3: $\neg D(x) \lor P(x)$
C4: $D(f(x))$
C5: $D(a)$
C6: $R(x, f(x))$

(a) Demostrar que es insatisfacible usando resolución.
(b) La refutación que se ha obtenido ¿es lineal? ¿es input?
(c) ¿Qué condición la haría dirigida? Justificar las respuestas.

Solución

- 1er intento:

R1 $\equiv$ (C1,C2) unificando átomos con el predicado Q :

≡ ¬ P(x1) ∨ ¬ R(x1, y1) ∨ ¬ D(x2) ∨ ¬ R(x2, x1) y2/x1

factorizando R(x1, y1) y R(x2, x1) :

R(x1, y1) R(x2, y1)

x1/x2 y1/x2 → R(x2, x2)

R(x2, x1) R(x2, x2)

≡ ¬ P(x2) ∨ ¬ D(x2) ∨ ¬ R(x2, x2) (que no se puede unificar con C6 : R(x, f(x)))

- idea: C1 C6 C2 C6'

{ x1/x6, y1/f(x6) } { x2/x6', y2/f(x6') }

← P(x6) ∨ Q(x6) ← D(x6') ∨ ← Q(f(x6'))

{ x6/f(x6') }

← P(f(x6')) ∨ ← D(x6') C5

{ x6'/a }

← P(f(a)) C3

{ x3/f(a) }

← D(f(a)) C4

□

Ejercicio 24.

Dado el conjunto de cláusulas:

C1: A(x) ∨ ¬B(g(x)) ∨ C(x)
C2: ¬C(x)
C3: A(x) ∨ C(x) ∨ ¬D(x,g(x))
C4: C(x) ∨ ¬D(x,y)
C5: B(x) ∨ C(x)
C6: ¬A(f(x)) ∨ D(f(x),x)

(a) Demostrar que dicho conjunto es insatisfacible mediante resolución con UMG, indicando en cada paso el unificador empleado.
(b) La refutación obtenida ¿es lineal?, ¿es input?. Justificar la respuesta.
(c) Definir un conjunto soporte, con más de una cláusula, para que la refutación anterior sea dirigida. Justificar la respuesta.

El conjunto soporte anterior, ¿cumple la condición de completud?, ¿por qué?.

Solución

(*) Se quita C(x) de todas las clausulas, utilizando C2 :

C1 C2 C3 C2 C2

C4 C2 C5

A(x) ∨ ←B(g(x))   A(x) ∨ ←D(x,g(x))   ←D(x,y)

B(x)

(*) ¬D(x,g(x)) y D(f(x),x) no son unificables:

C3 se puede eliminar pero D(f(x),x) y ¬D(x,y) sí son unificables.

(*) C'1: A(x) ∨ ¬B(g(x))

C'4: ¬D(x,y)

C'5: B(x)

C'6: ¬A(f(x)) ∨ D(f(x),x)

C'4   C'6

{ x4/f(x6), y4/x6 }

←A(f(x6))   C'1

{ x1/f(x6) }

←B(g(f(x6)))   C'5

□

(*) No es input, ni lineal PERO es fácil ir eliminando C(x) a medida que aparece:

C4   C6

{ x4/f(x6), y4/x6 }

←A(f(x6)) ∨ C(f(x6))   C2

{ x2/f(x6) }

←A(f(x6))   C1

{ x1/f(x6) }

←B(g(f(x6))) ∨ C(f(x6))   C'2

←B(g(f(x6)))   C5

{ x5/g(f(x6)) }

C(g(f(x6)))   C''2

□

Que es lineal e input.

Dirigida: S cualquier subconjunto de {C1, … , C6} que no contenga simultáneamente C4 y C6 (puede incluir C3).

Ejercicio 25.

Sea el conjunto de fórmulas siguiente:

A1: $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y Q(x, y))$

A2: $\forall x \forall y(Q(x, y) \rightarrow P(f(y)))$

B: $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y P(f(y)))$

(1) Construir el conjunto de cláusulas correspondientes a las fórmulas anteriores.
(2) Estudiar, utilizando el método de resolución, si $T[A1,A2] \vdash B$.
(3) Una vez comprobado, ¿sería posible realizar la demostración utilizando una derivación lineal?, ¿sería posible realizar la demostración utilizando una derivación input? y ¿una derivación dirigida?

Ejercicio 26.

Estudiar, utilizando el método de resolución, si $T [A1, A2, A3] \vdash B$ siendo:

A1 : $\forall x \neg\exists y (\neg H(x,y) \wedge P(y) \wedge \neg T(y))$
A2 : $\forall x \exists y \forall z (A(x,y) \wedge \neg T(y) \wedge (H(z,y) \vee T(x)))$
A3 : $\forall x \neg P(x)$
B : $\exists x \exists y \neg (A(x,y) \wedge H(x,y) \rightarrow P(y))$

Ejercicio 27.

Demostrar que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible mediante resolución con UMG, indicando en cada paso el unificador empleado:

C1: $\neg Q(x) \vee P(x) \vee P(f(a))$
C2: $\neg P(x) \vee \neg S(x,x)$
C3: $\neg P(x) \vee R(b,x) \vee S(b, x)$
C4: $\neg T(x,y) \vee \neg S(y,x)$
C5: $\neg R(b,f(a))$
C6: $S(f(x),x)$
C7: $T(f(a),b)$
C8: $Q(f(x))$

Ejercicio 28.

Sea el conjunto de fórmulas siguiente:

A1: $\exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(x, y)$
A2: $\exists x \exists y Q(x, y) \rightarrow P(g(y))$
B: $P(x) \rightarrow \forall x \exists y P(g(y))$

(1) Construir el conjunto de cláusulas correspondientes a las fórmulas anteriores.
(2) Estudiar, utilizando el método de resolución, si $T[A1,A2] \vdash B$.

Una vez comprobado, ¿sería posible realizar la demostración utilizando una derivación lineal?, ¿sería posible realizar la demostración utilizando una derivación input? y ¿una derivación dirigida?

Ejercicio 29.

Demostrar por Resolución con UMG que la fórmula ¬E(s(a),s(s(a))) se deduce a partir del siguiente conjunto de cláusulas:

C1: N(a)
C2: ¬N(x) ∨ N(s(x))
C3: ¬N(x) ∨ ¬E(a,s(x))
C4: ¬N(x) ∨ ¬N(y) ∨ ¬E(s(x),s(y)) ∨ E(x,y)
C5: E(f(x,a),x)
C6: E(s(f(x,s(y))),f(s(x),s(y))

Solución

Se trata de algunos de los axiomas de la aritmética de Peano, donde la constante a representa el número 0, la función s representa el "sucesor", la función f representa la suma, el predicado N representa el concepto de "ser un número natural", y el predicado E representa la igualdad.
La afirmación que se pide demostrar es que 1 no es igual a 2.
Negando la conclusión se obtiene una nueva cláusula
C0: E(s(a),s(s(a)))
A continuación se renombran todas las variables para evitar, en la medida de lo posible, problemas con la resolución.
C1: N(a)
C2: ¬N(x2)∨N(s(x2))
C3: ¬N(x3)∨¬E(a,s(x3))
C4: ¬N(x4)∨¬N(y4)∨¬E(s(x4),s(y4))∨E(x4,y4)
C5: E(f(x5,a),x5)
C6: E(s(f(x6,s(y6))),f(s(x6),s(y6))

La refutación es la siguiente:

C7: ¬N(a)∨¬N(s(a))∨E(a,s(a))	(C0,C4) { x4/a, y4/s(a) }
C8: ¬N(s(a))∨E(a,s(a))	(C7,C1) { }
C9: ¬N(a)∨E(a,s(a))	(C8,C2) { x2/a }
C10: E(a,s(a))	(C9,C1) { }
C11: ¬N(a)	(C10,C3) { x3/a }
C12: □	(C11,C1) { }

Ejercicio 30.

Considerar los siguientes conjuntos de cláusulas. Para cada uno, demostrar que no es satisfacible utilizando el método de resolución con UMG.

C_1: $\neg p(a)$
C_2: $p(x) \vee q(x,x)$
C_3: $s(f(z)) \vee \neg q(w,f(z)) \vee r(z)$
C_4: $\neg r(b)$
C_5: $\neg p(f(x))$
C_6: $\neg s(f(b))$

C_1: $\neg C(a,g(f(x)))$
C_2: $A(x,y) \vee D(y,x)$
C_3: $B(z,y) \vee \neg A(a,x) \vee C(f(y),g(x))$
C_4: $\neg B(x,g(z)) \vee \neg B(f(y),y)$
C_5: $\neg C(y,g(z)) \vee B(y,z)$
C_6: $C(x,y) \vee \neg D(y,x)$

Ejercicio 31.

Dado el siguiente conjunto de cláusulas:

C1: $A(x) \vee \neg B(g(x)) \vee C(X)$
C2: $\neg C(x)$
C3: $\neg E(x,g(x)) \vee A(x) \vee C(x)$
C4: $C(x) \vee \neg D(x,y)$
C5: $B(x) \vee C(x)$
C6: $\neg A(f(x)) \vee D(f(x),x)$

(a) Demostrar que es insatisfacible usando resolución.
(b) La refutación obtenida ¿es lineal? ¿es input? ¿qué elección de cláusulas objetivo la haría dirigida? Justificar las respuestas.