

Lógica de Primer Orden: Paso a Forma Clausular (2020)

(Con soluciones)

Ejercicio 1.

Obtener la forma clausular de la siguiente estructura deductiva $T [A1, A2] \vdash B$:

$$A1: \forall x P(x) \rightarrow \forall y Q(z,y) \vee R(a)$$

$$A2: \forall y \neg R(y) \rightarrow \exists y P(a,y)$$

$$B: \exists x \forall y P(x,y)$$

Solución

Otra

forma:

$$A1 \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall y Q(z,y) \vee R(a)$$

$$\exists x (P(x) \rightarrow \forall y Q(z,y) \vee R(a))$$

$$\exists x (P(x) \rightarrow \forall y (Q(z,y) \vee R(a)))$$

$$\exists x \forall y (P(x) \rightarrow Q(z,y) \vee R(a))$$

$$\exists x \forall y (\neg P(x) \vee Q(z,y) \vee R(a))$$

$$\exists z \exists x \forall y (\neg P(x) \vee Q(z,y) \vee R(a))$$

$$\Rightarrow FC(A1) = \{ \neg P(b) \vee Q(c,y) \vee R(a) \}$$

$$\forall x P(x) \rightarrow \forall y (Q(z,y) \vee R(a))$$

$$\forall y (\forall x P(x) \rightarrow Q(z,y) \vee R(a))$$

$$\forall y \exists x (P(x) \rightarrow Q(z,y) \vee R(a))$$

$$\exists z \forall y \exists x (\neg P(x) \vee Q(z,y) \vee R(a))$$

$$\Rightarrow \{ \neg P(f(y)) \vee Q(b,y) \vee R(a) \}$$

$$A2 \equiv \forall y \neg R(y) \rightarrow \exists y P(a,y)$$

$$\exists y (\neg R(y) \rightarrow \exists y P(a,y)) \exists y (\forall y \neg R(y) \rightarrow P(a,y))$$

$$\exists y (\neg R(y) \rightarrow \exists v P(a,v)) \exists y (\forall v \neg R(v) \rightarrow P(a,y))$$

$$\exists y \exists v (\neg R(y) \rightarrow P(a,v)) \exists y \exists v (\neg R(v) \rightarrow P(a,y))$$

$$\exists y \exists v (R(y) \vee P(a,v))$$

$$\Rightarrow FC(A2) = \{ R(d) \vee P(a,e) \} \text{ sale lo mismo}$$

$$B \equiv \exists x \forall y P(x,y)$$

$$\neg B \equiv \neg \exists x \forall y P(x,y)$$

$$\forall x \exists y \neg P(x,y)$$

$$\Rightarrow FC(\neg B) = \{ \neg P(x,f(x)) \}$$

Forma clausular de la estructura deductiva:

$$FC = \{ \neg P(b) \vee Q(c,y) \vee R(a), R(d) \vee P(a,e), \neg P(x,f(x)) \}$$

Ejercicio 2.

Obtener la forma clausular de la siguiente fórmula:

$$\neg(\exists x (\forall y A(x,y) \vee B(x,y,x)) \wedge \exists z C(y,z))$$

Ejercicio 3.

Construir la forma clausular de la estructura deductiva $[A1, A2] \vdash B$, siendo:

$$A1: \forall x \forall y (\forall z P(f(x, a), z) \rightarrow \neg R(x, y))$$

$$A2: \exists x (\neg Q(x, y) \wedge R(x, b)) \vee \forall x S(x)$$

$$B: \exists x \exists y (S(x) \vee \neg P(x, y))$$

Para justificar la respuesta, se deben indicar al menos los 4 pasos principales de la estandarización de cada fórmula.

Ejercicio 4.

Ponga en forma clausular la estructura deductiva $[P1, P2] \vdash C$ donde:

$$P1: \exists y \forall x (A(x,y) \rightarrow B(x) \wedge D(x,y))$$

$$P2: \forall x (B(x) \rightarrow \neg \forall y D(y,x) \vee \exists y E(x,y))$$

$$C: \forall x \neg E(x)$$

Ejercicio 5.

Transformar la siguiente fórmula en forma clausular, indicando los pasos principales del procedimiento:

$$\exists y (p(y) \vee \neg q(y,y)) \leftrightarrow \exists y r(y,x)$$

Solución

$$(\exists y (p(y) \vee \neg q(y,y)) \rightarrow \exists w r(w,x)) \wedge (\exists w' r(w',x) \rightarrow \exists y' (p(y') \vee \neg q(y',y')))$$

transformaciones previas

$$\forall y \exists w \forall w' \exists y' ((p(y) \vee \neg q(y,y) \rightarrow r(w,x)) \wedge (r(w',x) \rightarrow p(y') \vee \neg q(y',y')))$$

forma prenex

$$\exists x \forall y \exists w \forall w' \exists y' ((p(y) \vee \neg q(y,y) \rightarrow r(w,x)) \wedge (r(w',x) \rightarrow p(y') \vee \neg q(y',y')))$$

cierre existencial

$$\exists x \forall y \exists w \forall w' \exists y' ((\neg p(y) \vee r(w,x)) \wedge (q(y,y) \vee r(w,x)) \wedge (\neg r(w',x) \vee p(y') \vee \neg q(y',y')))$$

forma normal conjuntiva

$\forall y \forall w' ((\neg p(y) \vee r(f(y), a)) \wedge (q(y, y) \vee r(f(y), a)) \wedge (\neg r(w', a) \vee p(g(y, w'))) \vee \neg q(g(y, w'), g(y, w'))))$ f. n. de Skolem
 $\{\neg p(y) \vee r(f(y), a), q(y, y) \vee r(f(y), a), \neg r(w', a) \vee p(g(y, w')) \vee \neg q(g(y, w'), g(y, w'))\}$
 forma clausular

Ejercicio 6.

Obtener la forma clausular de la siguiente estructura deductiva:

$$\{ \forall x (P(x, y) \rightarrow (R(a) \wedge \exists x S(x))), \neg \forall x S(x) \wedge \exists y R(y) \} \vdash \exists x (\neg P(x, x) \wedge \forall y R(y))$$

Solución

$$\begin{aligned}
 &\forall x (P(x, y) \rightarrow (R(a) \wedge \exists x S(x))) \\
 &\forall x (P(x, y) \rightarrow \exists z (R(a) \wedge S(z))) \\
 &\forall x \exists z (P(x, y) \rightarrow (R(a) \wedge S(z))) && \text{(prenex)} \\
 &\exists y \forall x \exists z (P(x, y) \rightarrow (R(a) \wedge S(z))) && \text{(Cierre Existencial)} \\
 &\exists y \forall x \exists z (\neg P(x, y) \vee (R(a) \wedge S(z))) \\
 &\exists y \forall x \exists z ((\neg P(x, y) \vee R(a)) \wedge (\neg P(x, y) \vee S(z))) && \text{(FNC)} \\
 &\forall x ((\neg P(x, b) \vee R(a)) \wedge (\neg P(x, b) \vee S(f(x)))) && \text{(Skolem)} \\
 &\{\neg P(x, b) \vee R(a), \neg P(x, b) \vee S(f(x))\} && \text{(FC)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\neg \forall x S(x) \wedge \exists y R(y) \\
 &\exists x \neg S(x) \wedge \exists y R(y) \\
 &\exists x (\neg S(x) \wedge \exists y R(y)) \\
 &\exists x \exists y (\neg S(x) \wedge R(y)) \\
 &\text{(prenex)} \\
 &(\neg S(c) \wedge R(d)) \\
 &\text{(Skolem)} \\
 &\{\neg S(c), R(d)\} && \text{(FC)}
 \end{aligned}$$

Negando la conclusión:

$$\begin{aligned}
 &\neg \exists x (\neg P(x, x) \wedge \forall y R(y)) \\
 &\forall x \neg (\neg P(x, x) \wedge \forall y R(y)) \\
 &\forall x (P(x, x) \vee \neg \forall y R(y)) \\
 &\forall x (P(x, x) \vee \exists y \neg R(y)) \\
 &\forall x \exists y (P(x, x) \vee \neg R(y)) && \text{(prenex)} \\
 &\forall x (P(x, x) \vee \neg R(g(x))) && \text{(Skolem)} \\
 &\{P(x, x) \vee \neg R(g(x))\} && \text{FC}
 \end{aligned}$$

La forma clausular es

$$\{\neg P(x_1, b) \vee R(a), \neg P(x_2, b) \vee S(f(x_2)), \neg S(c), R(d), P(x_3, x_3) \vee \neg R(g(x_3))\}$$

Ejercicio 7.

Transformar la siguiente estructura deductiva en forma clausular, escribiendo para cada una de las fórmulas involucradas (A) la forma prenex; (B) el cierre existencial; (C) la forma normal conjuntiva; (D) la forma normal de Skolem; y (E) la forma clausular propiamente dicha.

$$\begin{aligned} T[& \exists x p(x) \rightarrow \forall x q(x), \\ & \exists x \forall z (\neg \exists y r(x,y,z) \wedge p(z)) \wedge l(z), \\ & \exists x \exists z ((\neg t(x) \vee \exists y r(x,y,z)) \wedge (\neg l(w) \vee \neg t(x)))] \\ \vdash & \exists x \neg(q(x) \rightarrow \exists y t(y)) \end{aligned}$$

Ejercicio 8.

Para las dos fórmulas siguientes, decir si las posibles formas clausulares que aparecen a continuación son correctas o incorrectas, en todos los casos:

$$(a) \forall x (\neg P(x) \rightarrow \exists y \neg Q(y, f(a)) \vee R(x))$$

$$(a.1) P(x) \vee \neg Q(a, f(a)) \vee R(x)$$

$$(a.2) P(x) \vee \neg Q(b, f(a)) \vee R(x)$$

$$(a.3) P(x) \vee \neg Q(f(x), f(a)) \vee R(x)$$

$$(a.4) P(x) \vee \neg Q(g(x), f(a)) \vee R(x)$$

$$(b) \forall x (\exists y x \geq y \rightarrow \exists z Q(f(x,a), z) \wedge P(x))$$

$$(b.1) \neg(x \geq y) \vee P(x), \neg(x \geq y) \vee Q(f(x,a), g(x,y))$$

$$(b.2) \neg(x \geq y) \vee Q(f(x,a), g(x,y)), P(x)$$

$$(b.3) \neg(x \geq y) \vee P(x), \neg(x \geq y) \vee Q(f(x,a), g(x))$$

$$(b.4) x \geq y \vee Q(f(x,a), g(x)) \vee P(x)$$

Solución

$$1. \forall x (\neg P(x) \rightarrow \exists y \neg Q(y, f(a)) \vee R(x))$$

- Forma prenex:

$$\forall x \exists y (\neg P(x) \rightarrow \neg Q(y, f(a)) \vee R(x))$$

- FN Conjuntiva:

$$\neg A \rightarrow \neg B \vee C \equiv \neg \neg A \vee (\neg B \vee C) \equiv A \vee \neg B \vee C$$

$$\forall x \exists y (P(x) \vee \neg Q(y, f(a)) \vee R(x))$$

- FN Skolem:

$$y \rightarrow g(x)$$

$$P(x) \vee \neg Q(g(x), f(a)) \vee R(x)$$

⇒ Forma clausular: una sola cláusula:

$$\{ P(x) \vee \neg Q(g(x), f(a)) \vee R(x) \}$$

⇒ solo es correcta a.4)

$$2. \forall x (\exists y x \geq y \rightarrow \exists z Q(f(x, a), z) \wedge P(x))$$

- Forma prenex:

hay 2 formas de empezar:

$$2.1 \quad \forall x \forall y (x \geq y \rightarrow \exists z Q(f(x, a), z) \wedge P(x))$$

$$2.2 \quad \forall x \exists z (\exists y x \geq y \rightarrow Q(f(x, a), z) \wedge P(x))$$

$$2.1 \quad \forall x \forall y \exists z (x \geq y \rightarrow Q(f(x, a), z) \wedge P(x))$$

$$2.2 \quad \forall x \exists z \forall y (x \geq y \rightarrow Q(f(x, a), z) \wedge P(x))$$

A

B

C

- FN Conjuntiva:

$$A \rightarrow B \wedge C \equiv \neg A \vee (B \wedge C) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)$$

- FN Skolem:

$$2.1 \quad z \leftrightarrow g(x, y) \\ (\neg(x \geq y) \vee Q(f(x, a), g(x, y))) \wedge (\neg(x \geq y) \vee P(x))$$

$$2.2 \quad z \leftrightarrow g(x) \\ (\neg(x \geq y) \vee Q(f(x, a), g(x))) \wedge (\neg(x \geq y) \vee P(x))$$

⇒ Forma clausular:

$$2.1 \quad \{ \neg(x \geq y) \vee Q(f(x, a), g(x, y)), \neg(x \geq y) \vee P(x) \}$$

$$2.2 \quad \{ \neg(x \geq y) \vee Q(f(x, a), g(x)), \neg(x \geq y) \vee P(x) \}$$

⇒ son correctas b.1) y b.3)

Ejercicio 9.

Obtener la forma clausular de la siguiente estructura deductiva: $[P1, P2] \vdash Q$ donde:

$$P1: \forall x (A(x) \wedge \exists y (B(y, x) \wedge C(y)) \rightarrow D(x))$$

$$P2: \exists x (\exists y (B(y, x) \wedge \neg C(y)) \rightarrow C(a))$$

$$Q: \exists x (\neg A(x) \vee \forall y (B(y, x) \wedge D(y)))$$

Ejercicio 10.

Obtener la forma clausular de la estructura deductiva $[C1, C2] \vdash Q$ donde:

$$C1: \exists x \neg(A(x) \rightarrow \exists y (\neg C(y) \rightarrow \neg B(y, x))) \wedge \forall x (\neg D(x) \rightarrow \neg C(x))$$

$$C2: \forall x (A(x) \wedge \neg E(x) \rightarrow \exists y (B(y, x) \wedge \neg D(y)))$$

$$Q: \forall x \neg(\exists y (B(y, x) \wedge C(y)) \wedge \neg E(x) \wedge A(x))$$