0.1. Lección 19

El Teorema Fundamental del Cálculo

El teorema fundamental del Cálculo nos permite asegurar que el proceso de derivación e integración son inversos. Más precisamente, dicho teorema asegura que toda función continua en un intervalo $[a, b]$ tiene una *primitiva* en $[a, b]$.

Definición 1. *Una función G es una primitiva de f en $[a, b]$ si es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) siendo la derivada de G la función f, es decir, $G'(x) = F(x)$.*

Para la prueba del teorema, dada una función f continua en $[a, b]$ se construye la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

y se probará que la derivada de esta función es f, es decir, que

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

Por otra parte, la regla de Barrow nos permitirá calcular integrales de una función en un intervalo medidante el uso de las primitivas.

En primer lugar tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2. *Sea f una función integrable en $[a, b]$ entonces la función*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es continua en $[a, b]$.

Teorema fundamental del Cálculo. Sea f una función continua en $[a, b]$. Entonces la función

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

es derivable en (a, b) y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

Demostración: Sea $c \in (a, b)$, probaremos que $F'(c) = f(c)$, es decir, que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c)$$

o lo que es lo mismo que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) = 0$$

Probaremos en primer lugar que

$$\lim_{h\to 0^+} |\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)| = 0$$

Dado $\epsilon > 0$, tenemos que encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < h < \delta$ se tiene que

$$|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)| < \epsilon$$

.

En primer lugar, utilizando las propiedades de aditividad con respecto al intervalo :

$$\frac{F(c+h)-F(c)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{c+h} f(t)dt - \int_a^c f(t)dt\right) = \frac{1}{h}\left(\int_a^c f(t)dt + \int_c^{c+h} f(t)dt - \int_a^c f(t)\right) dt =$$

$$\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)dt$$

Por otra parte,

$$f(c) = \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(c)\ dt$$

Por lo tanto, utilizando la linealidad de la integral:

$$\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c) = \frac{1}{h}\left(\int_c^{c+h} f(t)dt - \int_c^{c+h} f(c)\ dt\right) = \frac{1}{h}\int_c^{c+h} (f(t)-f(c))\, dt$$

Y utilizando la propiedad del valor absoluto de la integral:

$$|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)| = |\frac{1}{h}\int_c^{c+h} (f(t)-f(c))\, dt| \le \frac{1}{h}\int_c^{c+h} |f(t)-f(c)|dt$$

A continuación usamos la continuidad de la función $f(t)$ en el punto c, y puesto que $\lim_{x\to c} f(x) = f(c) = \lim_{h\to 0} f(c+h)$, para cada $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < h < \delta$ se tiene que $|f(c+h)-f(c)| < \epsilon$. Por lo tanto, si $t \in (c, c+h)$ se verifica que $|f(t)-f(c)| < \epsilon$ y por la propiedad de monotonía,

$$\frac{1}{h}\int_c^{c+h} |f(t)-f(c)|dt < \frac{1}{h}\int_c^{c+h} \epsilon dt = \epsilon$$

Por lo tanto, si $0 < h < \delta$ se tiene que $|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)| < \epsilon$, y así

$$\lim_{h\to 0^+} |\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)| = 0$$

De foma análoga, se puede probar que:

$$\lim_{h\to 0^-} |\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)| = 0$$

Por lo tanto, F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

Como consecuencia de los resultados anteriores se tiene la regla de Barrow que nos permitirá calcular integrales de Riemann mediante las primitivas:

Regla de Barrow. Sea f una función continua en $[a, b]$ y $G(x)$ una primitiva de f en $[a, b]$, es decir, una función continua en $[a, b]$ y tal que $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Demostración: Consideremos la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Esta función es continua en $[a, b]$ y además $F'(x) = f(x)$ por el teorema fundamental del Cálculo. Si consideramos la función $F(x) - G(x)$ se tiene que para todo $x \in (a, b)$:

$$(F(x) - G(x)) = F'(x) - G'(x) = 0$$

Luego por los resultados del Cálculo diferencial la función $F(x) - G(x)$ es constante, es decir, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) - G(x) = C$ para todo $x \in [a, b]$. Sustituyendo
• en $x = a$ se tiene que $F(a) - G(a) = C$, puesto que $F(a) = 0$ se tiene que $G(a) = -C$.
• en $x = b$ se tiene que $F(b) - G(b) = C$, luego $F(b) = G(b) - G(a)$, y por tanto,

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

como queríamos demostrar.
Damos una generalización del teorema fundamental del Cálculo que es consecuencia de la regla de la cadena de la derivación:
$\star$ *Interesante:* Uno podría preguntarse si toda función integrable en $[a, b]$ tiene una primitiva en $[a, b]$. Esto no es cierto, en general. Por ejemplo, si consideramos la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ si \ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \ si \ 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

es claro que f es integrable en $[0, 2]$ puesto que f está acotada y es continua en dicho intervalo salvo en un punto de $[0, 1]$ (no es continua en $x = 1$). Sin embargo f no tiene ninguna primitiva en $[a, b]$. En efecto, si existiese tal primitiva F, por la propiedad de los valores intermedios de la derivada que vimos en la parte de cálculo diferencial puesto que $F'(\frac{1}{2}) = 0$ y $F'(\frac{3}{2}) = 0$ tendría que existir $c \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ tal que $f(c) = F'(c) = \frac{1}{2}$ y esto no es cierto.

⋆ *Interesante:* Los métodos de cálculo de primitivas nos permiten calcular las primitivas de algunas funciones elementales. Sin embargo, hay muchas funciones para las que no es posible encontrar sus primitivas, aún sabiendo que existen, mediante estas técnicas. Es el caso de la función e^{x^2} de la cual no es posible obtener una primitiva en términos de la funciones elementales. De hecho, para calcular $\int_0^1 e^{t^2}\,dt$ utilizaríamos la aproximación mediante sumas de Riemann o más generalmente, utilizando métodos de cálculo numérico.

Versión generalizada del teorema fundamental del Cálculo: Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ y g una función derivable en $\mathbb{R}$, y sea

$$F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt.$$

La función F es derivable en $\mathbb{R}$ y $F'(x) = f(g(x))g'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Vemos a continuación el teorema del cambio de variable que da lugar al método de integración por cambio de variable.

Teorema del cambio de variable. Sea f una función continua en $[a, b]$ y sea $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ una función continua en $[c, d]$ y derivable en (c, d) con $\varphi'(t)$ continua en (c, d). Si $\varphi'(t) \neq 0$ para todo $t \in (c, d)$ y $\varphi(c) = a$ y $\varphi(d) = b$ entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Nótese que si $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ una función continua en $[c, d]$ y derivable en (c, d) con $\varphi'(t) \neq 0$ para todo $t \in (c, d)$ y $\varphi(c) = a$ y $\varphi(d) = b$ entonces por los resultados del Cálculo diferencial se tiene que φ es estrictamente creciente. La prueba entonces se deduce de la regla de la cadena.

Ejemplo: Calcula la integral de $\int_1^4 \dfrac{1}{\sqrt{x}(x-16)}\,dx$
Hacemos el cambio de variable $x = \varphi(t) = t^2$. La función $\varphi : [1, 2] \to [1, 4]$ es continua y derivable en $(1, 2)$ siendo $\varphi'(t) = 2t \neq 0$ para todo $t \in (1, 2)$. De hecho, $\sqrt{x} = t$ para todo $t \in (1, 2)$

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(x-16)}\,dx = \int_1^2 \frac{2t}{t(t^2-16)}\,dt = 2\int_1^2 \frac{1}{t^2-16}\,dt$$

y mediante la descomposición en fracciones simples se tiene que $\dfrac{1}{t^2-16} = \dfrac{1/8}{t-4} + \dfrac{-1/8}{t+4}$ se obtiene

$$\int \frac{2}{t^2-16}\,dt = \frac{1}{4}(\ln|t-4| - \ln|t+4|) + C = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{|t-4|}{|t+4|}\right) + C$$

por lo que, puesto que si $1 \leq t \leq 2$ se tiene que $|t-4| = 4-t$ y $|t+4| = t+4$ entonces

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(x-16)}\,dx = \int_1^2 \frac{2}{t^2-16}\,dt = \sqsubset \frac{1}{4}\ln\left(\frac{|t-4|}{|t+4|}\right)]_1^2 = \frac{1}{4}\ln(\frac{5}{9})$$

Finalizamos con una versión del teorema del valor medio integral o del promedio integral:

Teorema del valor medio integral o del promedio Sea f continua en $[a,b]$ entonces existe un $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Demostración. Puesto que f es continua en $[a,b]$, por el teorema de Weierstrass f alcanza máximo y mínimo en $[a,b]$, es decir, existen $\alpha, \beta \in [a,b]$ de modo que

$$m = f(\alpha) \leq f(x) \leq M = f(\beta) \qquad \text{para todo } x \in [a,b]$$

Por otra parte, por la propiedad de monotonía de la integral:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \Rightarrow f(\alpha) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq f(\beta)$$

Finalmente, aplicando a f el teorema de los valores intermedios de las funciones continuas, existe c en el intervalo de extremos α y β y por tanto en $[a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

□