

Demostraciones y definiciones para examen

Tema 1

- 1.1 Dar la definición de grupo. Sea $(G, *)$ grupo con elemento neutro $e \in G$ y sea $a \in G$ tal que $a * a = a$. Demostrar que entonces: $a = e$.
- 1.1 Dar la definición de subgrupo. Sean $(G, *)$ grupo y $H \subseteq G$ con $H \neq \emptyset$. Demostrar que $(H, *)$ es subgrupo de $(G, *)$ si y sólo si para todos $a, b \in H$ se verifica que $a * b^{-1} \in H$.
- 1.2 Dar la definición de orden de un elemento en un grupo. Sea $(G, *)$ un grupo, $a \in G$ con $|a| = n$ y $k \in \mathbb{N}$. Demostrar que:
 - a) $a^k = e_G \Leftrightarrow n$ divide a k .
 - b) $|a^k| = \frac{n}{\text{mcd}(n,k)}$.
- 1.3 Dar la definición de ciclo. Demostrar que los ciclos disjuntos conmutan y obtener el orden de un producto de dos ciclos disjuntos.
- 1.4 Dar la definición de producto directo interno. Sea $(G, *)$ grupo que es producto directo interno de los subgrupos H y K . Demostrar que

$$G \approx H \times K$$

.