Estructuras Algebraicas Primer examen parcial	1^{er} Apellido: ______________	4 de abril de 2017
Departamento Matem. aplic. TIC ETS de Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	2^{o} Apellido: ______________ Nombre: ______________ Número de matrícula:	Tiempo 2 h. **Calificación:**

1. (3 puntos) Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo).

   a) Dado un grupo $(G, *)$ se verifica que el orden de $a * b$ coincide con el orden de $b * a$ para todo par de elementos $a, b \in G$.

   b) Sea $(G_1, *)$ un grupo de orden infinito y $(G_2, \cdot)$ un grupo de orden finito. Entonces no existe ningún homomorfismo no trivial de grupos φ entre G_1 y G_2 $\varphi : G_1 \to G_2$.

   c) $(U_{16}, \cdot_{16})$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

2. (2 puntos) Se consideran las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

   a) Calcular el orden de A, el orden de B y el orden de AB como elementos del grupo $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$

   b) Sea $(G, \cdot)$ el grupo generado por A y B con la multiplicación de matrices habitual. Demostrar que existe un homomorfismo inyectivo de $(\mathbb{Z}, +)$ en $(G, \cdot)$.

3. (3 puntos) Se considera el siguiente subgrupo de S_8:

$$G = \{e = (1),\ \alpha = (1,2,3)(4,5,6)(7,8),\ \beta = (1,2,3)(4,5,6),$$

$$\gamma = (1,3,2)(4,6,5),\ \delta = (1,3,2)(4,6,5)(7,8),\ \tau = (7,8)\}$$

   a) Obtener el resultado, en forma de ciclos disjuntos, de la siguiente operación:

$$\alpha^2\ \beta\ \gamma\ \delta\ \tau$$

   b) Sea H el subgrupo de G formado pos sus permutaciones pares: $H = \{\sigma \in G : \sigma \text{ es par}\}$. Estudiar, justificando la respuesta, si $H \trianglelefteq G$. En caso afirmativo obtener el grupo G/H e indicar si se trata de un grupo cíclico.

4. (2 puntos)

   a) Sea $(G, *)$ un grupo abeliano de orden 120. Determinar los divisores elementales y los factores invariantes de $(G, *)$ sabiendo que tiene exactamente 3 elementos de orden 2.

   b) Sea $(G, *)$ un grupo de orden 63. Usar el tercer teorema de Sylow para calcular el número de $7-$grupos de Sylow de $(G, *)$. Determinar razonadamente si $(G, *)$ es simple.

Solución:

1. *a*) La afirmación es verdadero, demostrado en clase Tema 1.2 ejercicio 1c).

   b) La afirmación es falsa: $\varphi : \mathbb{Q}^* \to \{1, -1\}$ definida por $\varphi(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r > 0 \\ -1 & \text{si } r < 0 \end{cases}$ es un homomorfismo de grupos, no trivial.
   $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ definida por $\varphi(r) = [r]_n$ es un homomorfismo de grupos, no trivial.

   c) La afirmación es falsa: $[3]_{16} \in U_{16}$ y $|[3]_{16}| = 4$

2. *a*) $|A| = 4$, $|B| = 3$, $|AB| = \infty$

   b) $\phi : \mathbb{Z} \to G$ definida por $\phi(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es homomorfismo de grupos: $\phi(n+m) = \begin{pmatrix} 1 & n+m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \phi(n)\phi(m)$ y $\ker(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, por tanto es inyectiva.

3. *a*) β

   b) $H = \{e, \beta, \gamma\}$. $[G : H] = 2 \Rightarrow H \trianglelefteq G$. $|G/H| = 2 \Rightarrow G/H$ es un grupo cíclico de orden 2.

4. *a*) Divisores elementales: $(4, 2, 3, 5)$. Factores invariantes: $(60, 2)$

   b) $63 = 3^2 \cdot 7$, por el tercer teorema de Sylow, el número de $7-$grupos de Sylow es n_7 tal que $n_7|36$ y $n_7 \equiv 1 \mod 7 \Rightarrow n_7 = 1 \Rightarrow S_7 \trianglelefteq G$ es propio y no trivial $(|S_7 = 7|) \Rightarrow G$ no es simple.