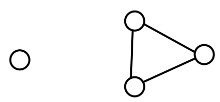
SOLUCIONES COMENTADAS

1. **(1,5 puntos)**
(a) Sea G un grafo simple de 12 vértices tal que el grado de cada vértice es al menos 6 y el número de aristas es impar y múltiplo de 21. Se pide demostrar que G es conexo, que contiene ciclos impares y hallar el número de aristas de G.
(b) Construye el árbol etiquetado cuyo código de Prüfer es [7, 5, 5, 5, 7, 1, 2]. ¿Puedes indicar cuál es la sucesión de grados del árbol antes de construir el árbol?, ¿por qué?

SOLUCIÓN
(a) El número de aristas se obtiene aplicando la Fórmula de Euler $\Sigma d(v) = 2q$ y recordando cuál es el número máximo de aristas de un grafo de n vértices
Por la fórmula de los grados, $2q = \Sigma d(v) \geq 6n = 6 \cdot 12 = 72$, luego $q \geq 36$
Por otra parte, el número de aristas de un grafo de 12 vértices es, a lo sumo, $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$
El único múltiplo impar de 21 entre 36 y 66 es 63, que es el número de aristas del grafo.

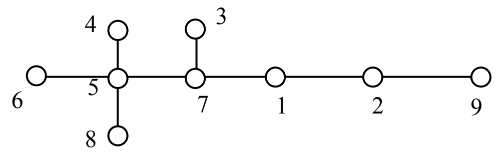
Ahora respondamos a las otras preguntas. Si el grafo no fuera conexo la componente conexa más pequeña G' tendría a lo sumo 6 vértices. Luego el grado de cualquier vértice de G' sería a lo sumo 5, en contradicción con el dato que nos dan en el enunciado.
La presencia de ciclos impares es equivalente a que el grafo NO sea bipartido. Si el grafo fuera bipartido, $G=(V \cup V')$ entonces una de las dos partes V o V' tendría a lo sumo 6 vértices. Si $|V| \leq 5$ entonces los vértices de V' no tendrían grado ≥ 6. Si $|V| = |V'| = 6$ entonces todos los vértices de G tendrían grado 6 y el grafo sería $K_{6,6}$ que sólo tiene 36 aristas. Por tanto el grafo NO es bipartido y tiene ciclos impares.

OBSERVACIÓN
Algunos alumnos han escrito que un grafo de n vértices y n – 1 aristas es un grafo conexo. Esto es FALSO
El siguiente grafo tiene 4 vértices, 3 aristas y NO es conexo.



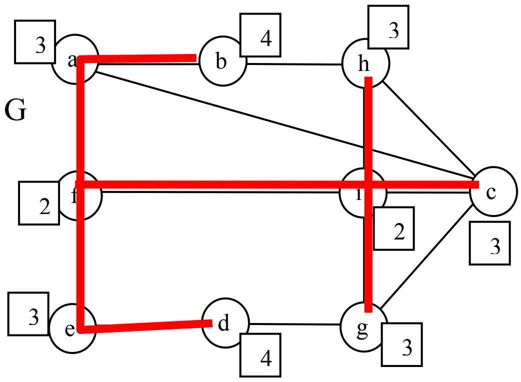
El número mínimo de aristas que garantizan la conexión es $\binom{n-1}{2} + 1$

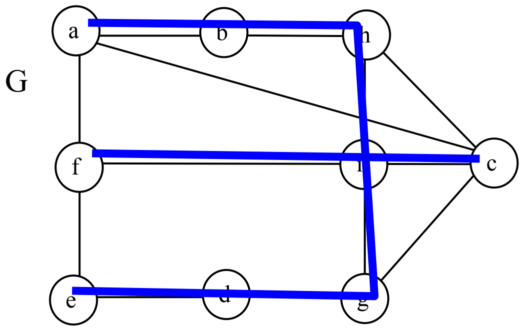
(b) Cada vértice de grado k aparece k – 1 veces en el código de Prüfer. Por tanto, la sucesión de grados del árbol será 4, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1
Se parte del código [7, 5, 5, 5, 7, 1, 2] y la lista de vértices [1,2,3,4,5,6,7,8,9]
Se elige primer elemento del código C y primero de la lista (que no esté en C), se forma la arista correspondiente y se eliminan esos elementos. Se prosigue hasta que restan sólo dos elementos en la lista que se conectan para formar la última arista del árbol.



2. **(2 puntos)**
(a) Define excentricidad de un vértice, diámetro de un grafo y camino diametral en un grafo.
(b) Construye un grafo simple de orden 7, diámetro 4 y que tenga el mayor tamaño posible. ¿Es único, salvo isomorfismo?

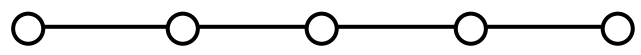
En el grafo G de la figura se piden las siguientes cuestiones:
(c) Calcula la excentricidad de cada vértice y el diámetro de G.
(d) Dibuja dos árboles generadores de G, uno de diámetro 4 y otro de diámetro 6. ¿Existe uno de diámetro 3?, ¿por qué?



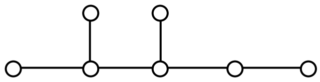


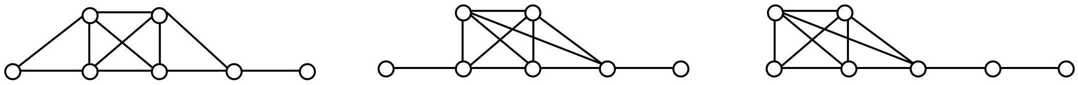
SOLUCIÓN

(a) Es inadmisible que no se responda correctamente a esta pregunta.
(b) Si debemos construir un grafo de diámetro 4, empezaremos por un camino de longitud 4 al que luego añadiremos más vértices con las condiciones exigidas.


P_5

Necesitamos añadir 2 vértices sin variar el diámetro y luego agregar cuantas más aristas se pueda sin disminuir el diámetro.





Estos tres grafos son no isomorfos dos a dos (basta observar la vecindad de los vértices de grado 1)

(c) La excentricidad de cada vértice se muestra en la figura. El grafo tiene diámetro 4.
(d) Los árboles generadores de diámetro 4 (en rojo) y diámetro 6 (en azul) se muestran en la figura. Y no puede haber de diámetro 3, porque el grafo original ya tiene diámetro 4. (Es inmediato observar que el diámetro de cualquier árbol generador debe ser mayor o igual que el diámetro del grafo inicial)

Algunos alumnos dibujan respuestas que tienen ciclos o que no contienen todos los vértices de G. Recuerdo que se piden árboles generadores.

3. **(1,5 puntos)** Demuestra que la arista de menor peso de un conjunto corte en un grafo ponderado G (con pesos diferentes en las aristas) siempre pertenece al árbol generador mínimo de G.

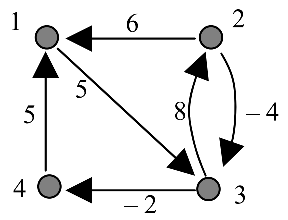
En los apuntes, en cualquier libro de grafos, etc.

4. **(1 punto)** Se construye un árbol generador T del grafo simple G. ¿Puede ser una hoja de T vértice corte de G? Demuestra que siempre hay al menos dos vértices en G que no son vértices corte.

SOLUCIÓN
En primer lugar observar que en el enunciado NO se pide demostrar que una hoja (vértice de grado uno) de G es un vértice-corte en G, que es lo que han entendido algunos alumnos.

La respuesta a la pregunta del enunciado es NO. Una hoja de T NO es vértice-corte del grafo G. Demostrémoslo.
Sea x un vértice de G tal que $d_T(x)=1$. Si x fuera vértice-corte en G entonces existirían u, vértices de G, tales que todo camino en G entre u y v pasaría por x. Por tanto, todo camino entre u y v en T (sólo habría uno por ser T árbol) también debe pasar por x. Y en consecuencia el grado de x en T debe ser mayor que uno.
Una vez que hemos demostrado que toda hoja de T no es vértice-corte en G recordemos que en todo árbol existen al menos dos hojas. Por tanto, en cualquier grafo hay al menos dos vértices que no son corte.

5. **(1 punto)** Describe el algoritmo de Floyd-Warshall ¿Qué problema resuelve? Aplícalo al digrafo de la figura a partir de la matriz W^2.



$$W^2 = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 5 & \infty \\ 6 & 0 & -4 & \infty \\ 14 & 8 & 0 & -2 \\ 5 & \infty & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN

Se pide una descripción del algoritmo de Floyd-Warshall, ¿qué significa esto? Que con las frases que escribamos quede bien claro para qué sirve este algoritmo, a qué grafos se aplica y cuáles son los elementos básicos de su estrategia.

El algoritmo de Floyd-Warshall responde a este problema: Dado un grafo (o digrafo) con pesos en las aristas hallar el camino mínimo (y su peso) entre dos vértices cualesquiera del grafo. El algoritmo permite que haya pesos negativos y detecta ciclos de peso negativo si los hubiera.

El algoritmo construye n matrices W^0, W^1, … , W^n de forma que en la matriz W^k aparecen los pesos de los caminos mínimos entre cada par de vértices permitiendo sólo los vértices 1, 2 … , k como vértices intermedios.

Así en la iteración 3 del algoritmo se calcula el peso del camino mínimo entre cada par de vértices permitiendo sólo los vértices 1, 2 y 3 como vértices intermedios.
Los elementos de la matriz W^3 se calculan a partir de la matriz W^2 así:

$$w^3_{ij} = \min\{ w^2_{ij} , w^2_{i3} + w^2_{3j} \}$$

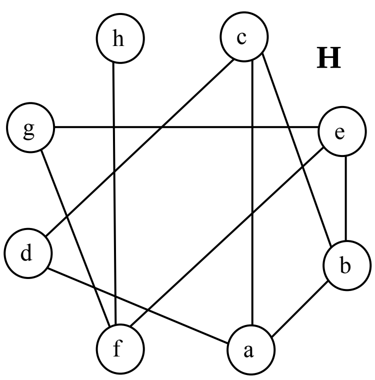
Por lo que dicha matriz es:

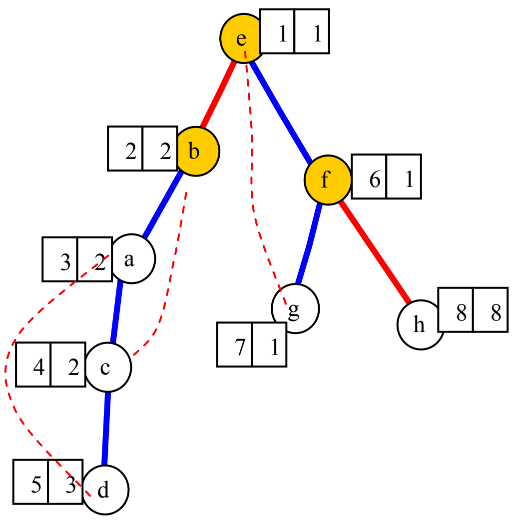
$$W^3 = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 5 & 3 \\ 6 & 0 & -4 & -6 \\ 14 & 8 & 0 & -2 \\ 5 & 18 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo,

$$w^3_{24} = \min\{w^2_{24}, w^2_{23} + w^2_{34}\} = \min\{\infty, -4-2\} = -6$$

6. **(1 punto)** Aplica al grafo H de la figura el algoritmo de búsqueda en profundidad, indicando el doble etiquetado de cada vértice. Detecta los vértices-corte y las aristas puente de H a partir del doble etiquetado indicando la condición sobre las etiquetas que los caracteriza.
(La búsqueda en profundidad debe empezar en el vértice **e** y los vértices se eligen siguiendo el orden alfabético)





Los vértices-corte son b, f y e.

El vértice raíz e es corte porque tiene dos hijos

La condición en las etiquetas para que un vértice (no raíz) v sea corte es que exista un hijo z de v tal que: 2ª etiq(z)≥ 1ª etiq(v)

Una arista uv con 1ª etiq(u) < 1ª etiq(v) es puente si 2ªetiq(v) > 1ªetiq(u) . En el grafo H las aristas que cumplen esta condición son be y fh

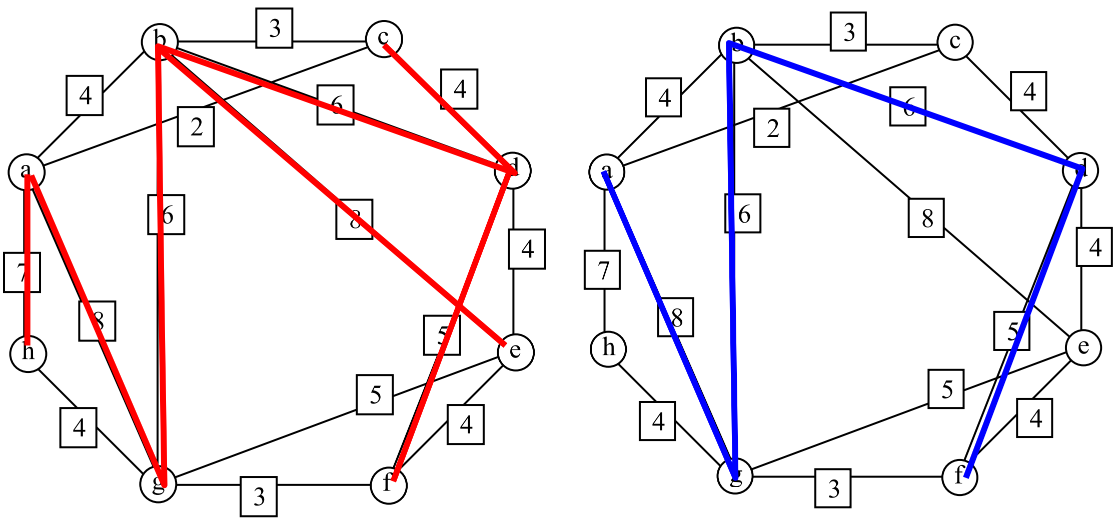
7. **(2 puntos)**
En el grafo de la figura se representa, en forma esquemática, la red de transmisión de datos de la empresa LiaDatos. La etiqueta de cada arista indica el ancho de banda, en megabytes por segundo, en el correspondiente tramo de la red. Por ejemplo, la etiqueta 4 de la arista ab indica que en dicho tramo se dispone de un ancho de 4 megabytes. El ancho de banda de un camino en la red es el mínimo de los anchos de banda de sus tramos. Así el ancho de banda disponible en el camino ahgf es de 3 megabytes por segundo.

Se pide:

a) Demuestra que existe cierto árbol generador de la red que contiene un camino de máximo ancho de banda entre dos vértices cualesquiera de la red.

b) Describe un algoritmo que determine, dada una red de transmisión de datos y dos vértices *u* y *v* cualesquiera, un camino entre *u* y *v* de máximo ancho de banda.

c) Comprueba su funcionamiento en la red de LiaDatos. ¿Cuál es el camino con mayor ancho de banda entre a y f?



(a) Probaremos que el árbol generador de peso máximo (MaxST) contiene un camino de ancho de banda máximo entre dos vértices cualesquiera de la red.

Lema. Sea G un grafo conexo con pesos en las aristas que indican su capacidad (o ancho de banda) y T el árbol generador de peso máximo. Entonces para cada par (u,v) de vértices de G el único camino entre u y v en T, es un camino de capacidad (o ancho de banda) máxima en G.

Dem.: Sea P ese camino en T y e la arista que determina su ancho de banda. Es decir c(P)=c(e)

Supongamos que hay otro camino P' en G de de u a v con mayor ancho, c(P')>c(P). Este camino P' no contiene a la arista e, por lo que debe contener a una arista e' que conecte las dos componentes de T – e.

Además el ancho de banda de e' es c(e')>c(e). Por tanto, si consideramos el árbol T – e + e' tendremos un árbol de mayor peso que T, contradiciendo que T sea el de peso máximo.

(b) **Algoritmo**

Primer paso. Construir el árbol generador de peso máximo T (algoritmo de Prim, Kruskal o Borüvka, eligiendo en cada momento arista de peso máximo en vez de mínimo)

Segundo paso. Dados u y v, hallar en T el único camino entre u y v. (Por DFS o BFS con raíz en u)

(c) En rojo MaxST y en azul el camino de máximo ancho de banda entre a y f contenido en MaxST, de 50 megabytes por segundo.