

## TEMA 3: AJUSTE de DATOS

### Sistema sobredeterminado: problema tipo

**Ejercicio 1:** Dado el siguiente sistema sobredeterminado  $Hc = b$  (número de ecuaciones mayor que el número de incógnitas),

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.05 \\ 0.05 \\ -1.15 \\ 1.05 \end{pmatrix}$$

Cuya solución viene dada por la solución del sistema de ecuaciones normales  $H^T Hc = H^T b$  (número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas).

- Calcular la solución del sistema de ecuaciones normales  $c = (H^T H)^{-1} H^T b$ . Comprobar que se obtiene el mismo resultado utilizando el comando  $c = H \backslash b$ .
- Calcular el vector residuo  $r = Hc - b$ .
- La segunda ecuación del sistema sobredeterminado es  $x+y=0.05$ . A partir de la solución obtenida y del vector residuo ¿Cuánto difieren los valores de la aproximación  $x+y@0.05$ ?

### Ajuste de datos: problema tipo

**Ejercicio 2:** Sea la tabla de datos:

|       |    |    |   |   |
|-------|----|----|---|---|
| $x_i$ | -1 | 0  | 1 | 2 |
| $y_i$ | -2 | -1 | 0 | 3 |

a) Recta de regresión lineal o recta que mejor se "ajusta" a esos datos.

- Plantear el sistema sobredeterminado  $Hc=b$  del ajuste de los datos a la recta

$$y_l(x) = A + Bx$$

- Resolver el sistema sobredeterminado.
- Calcular el vector residuo  $r_1 = Hc - b$ .
- Calcular el error del ajuste  $E_1 = \text{sum}(r_1.^2)$ .
- Hacer un plot de los datos de la tabla ('rs') con la recta  $y_1$  en el intervalo  $[-1,2]$ .

b) Repetir el apartado anterior para las funciones

$$y_2(x) = A + Bx^2, \quad y_3(x) = A + Bx + Cx^2, \quad y_4(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

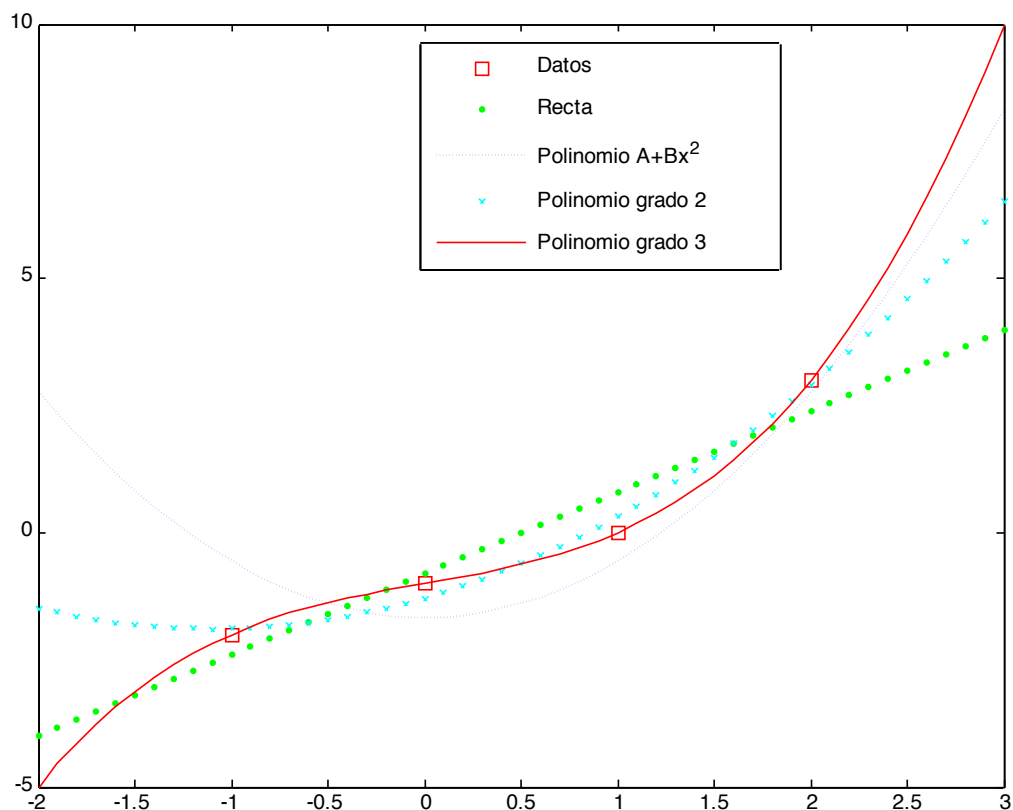
- Hacer un plot de los datos de la tabla junto con las 4 funciones  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  e  $y_4$  en el intervalo  $[-1, 2]$ .

Nota: Podeis utilizar los comandos:

```
plot(xi,yi,'rs',xx,yy1,'g.',xx,yy2,'b:',xx,yy3,'cx',xx,yy4,'r')
```

```
legend({'Datos','Recta','Polinomio A+Bx^2','Polinomio grado 2','Polinomio grado 3'});
```

Debeis obtener una gráfica similar a la siguiente.



- Ordenar los ajustes obtenidos de mayor a menor error ( $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $E_4$ ). Comentar los resultados.
- ¿Cuál es el ajuste de menor error?. Comentar el resultado.
- Dibujar sobre la gráfica obtenida el vector  $r_1$ . Indicar su significado.

**Ejercicio 3:** Nos planteamos hallar la mejor aproximación a los datos de la tabla siguiente:

|       |       |      |      |       |       |      |       |      |
|-------|-------|------|------|-------|-------|------|-------|------|
| $x_i$ | -0.44 | 0.09 | 0.92 | 0.23  | -0.68 | 0.81 | -0.85 | 0.55 |
| $y_i$ | 0.12  | 0.09 | 0.48 | -0.01 | 0.26  | 0.30 | 0.38  | 0.15 |

usando funciones de dos posibles formas: 
$$\begin{cases} p(x) = A + Bx + Cx^2 \\ u(x) = A + Be^x + Ce^{-x} \end{cases}$$

Construir en ambos casos la matriz H de los correspondientes sistemas sobredeterminados. Resolver listando los coeficientes A, B y C, junto con el error en cada caso. ¿Cuál sería el mejor ajuste según el criterio de mínimos cuadrados?

Reflejar los resultados en una gráfica pintando los puntos de la tabla y las dos funciones resultantes

**Ejercicio 4:** Lanzamos una piedra hacia arriba desde el suelo y medimos (aproximadamente) su altura en varios instantes de tiempo. El tiempo (en segundos [s]) y las alturas (en metros [m]) se dan en la siguiente tabla:

|    |      |       |       |      |      |
|----|------|-------|-------|------|------|
| ti | 0.69 | 1.46  | 1.82  | 2.67 | 2.85 |
| hi | 8.19 | 11.34 | 11.50 | 5.05 | 2.97 |

Sabiendo que la posición de la piedra responde a la siguiente ecuación:

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

se desea determinar el valor de la velocidad inicial (m/s) y la gravedad g (m/s<sup>2</sup>) a partir de los datos anteriores.

- Ajustar los datos a la ecuación. ¿Qué valores obtenéis para  $v_0$  y  $g$ ? A partir del residuo dar una estimación del error ([m]) de las medidas. ¿En qué medida se ha cometido el mayor error de medición?, ¿y el menor?
- Sabiendo que  $g=9.8$  m/s<sup>2</sup>, resolver de nuevo el problema anterior pero ahora con  $v_0$  como única incógnita. ¿Qué valor obtenéis ahora para  $v_0$ ? ¿Os fiaríais más del este nuevo valor o del anterior? ¿Por qué?  
Dibujar la gráfica de los datos y el ajuste obtenido. ¿Cuánto tiempo aproximadamente tarda en caer la piedra al suelo?. ¿En qué instante la piedra alcanza su altura máxima, y cuál es esa altura?.

**Ejercicio 5:** En la siguiente tabla k representa la tasa de crecimiento diario de una población bacteriana frente a la concentración (c) de oxígeno presente (mg/l):

|   |     |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| c | 0.5 | 0.8 | 1.5 | 2.5 | 4   |
| K | 1.1 | 2.4 | 5.3 | 7.6 | 8.9 |

Se sabe que la relación entre  $k$  y  $c$  viene dada por la fórmula:  $k = \frac{Ac^2}{B + c^2}$   
 Determinar los valores de  $A$  y  $B$  que mejor ajustan los datos anteriores y determinar cuál sería la tasa de crecimiento para una concentración de  $c=2$  mg/lit.

**Ejercicio 6:** La siguiente tabla corresponde a la viscosidad ( $V$ ) del aceite SAE70 a diferente temperaturas ( $T$ )

|     |     |       |       |         |
|-----|-----|-------|-------|---------|
| $T$ | 25  | 100   | 150   | 300     |
| $V$ | 1.4 | 0.075 | 0.010 | 0.00075 |

Ajustar los datos a una curva del tipo  $V = Ae^{-BT}$  y deducir la viscosidad del aceite a 200 grados.

**Ejercicio 7:** Nos planteamos hallar el polinomio de grado menor o igual a dos que sea la mejor aproximación a los datos de la tabla siguiente:

|       |       |      |      |       |       |      |       |      |
|-------|-------|------|------|-------|-------|------|-------|------|
| $x_i$ | -0.44 | 0.09 | 0.92 | 0.23  | -0.68 | 0.81 | -0.85 | 0.55 |
| $y_i$ | 0.12  | 0.09 | 0.48 | -0.01 | 0.26  | 0.30 | 0.38  | 0.15 |

usando los siguientes pesos:

|       |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $W_i$ | 0.5 | 0.1 | 1.0 | 0.1 | 0.7 | 1.0 | 1.0 | 0.5 |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

Comparar gráficamente el polinomio del ajuste con pesos obtenido y el polinomio del ajuste sin pesos obtenido en el ejercicio 3.