Estructuras Algebraicas Primer examen parcial	1^{er} Apellido: ______________	29 de marzo de 2022
	2^{o} Apellido: ______________	Tiempo 2 h
Dpt. Matemática Aplicada a las T.I.C. E.T.S. de Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: ______________ Número de matrícula:	**Calificación:**

Para que sean consideradas como válidas, todas las respuestas deben estar adecuadamente justificadas.
No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.

Ejercicio 1. (2 puntos)

Sea $(G, *)$ grupo y sea $a \in G$. Demuestra que si $|a| = mn$ con $\text{mcd}\{m, n\} = 1$ entonces existen $b, c \in G$ tales que $a = b * c$ siendo $|b| = m$ y $|c| = n$.

Ejercicio 2. (2,5 puntos)

Sea $(G, *)$ el grupo definido por la tabla anexa.

$a)$ Calcular el orden de cada elemento de G.

$b)$ Encontrar el centralizador de los elementos $3 \in G$ y $5 \in G$.

$c)$ Obtener el centro del grupo.

$d)$ Encontrar razonadamente un subgrupo propio no trivial de $(G, *)$, que sea un subgrupo normal.

$e)$ Calcular la tabla del grupo cociente de $(G, *)$ con el subgrupo normal encontrado en el apartado anterior.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	1	8	7	6	5	4	3
3	3	4	5	6	7	8	1	2
4	4	3	2	1	8	7	6	5
5	5	6	7	8	1	2	3	4
6	6	5	4	3	2	1	8	7
7	7	8	1	2	3	4	5	6
8	8	7	6	5	4	3	2	1

Ejercicio 3. (3 puntos)

Sea $(G, *)$ grupo y sea $T = G \times G$.

$a)$ Demostrar que $D = \{(g, g) \in G \times G \,:\, g \in G\}$ es un grupo isomorfo a $(G, *)$.

$b)$ Demostrar que si $D \trianglelefteq T$ entonces $(G, *)$ es abeliano.

Ejercicio 4. (2,5 puntos)

$a)$ Sea $a = (1, 3, 5)(1, 2) \in S_9$, $b = (1, 5, 7, 9) \in S_9$, calcular, en forma de producto de ciclos disjuntos, $a^{-1}ba$

$b)$ Sea $(G, *)$ grupo abeliano finito, con $G = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$. Dar la expresión más sencilla posible del elemento

$$(a_0 * a_1 * \cdots * a_n)^2$$

$c)$ Sea $(G, *)$ grupo y sean $x, y \in G$ tales que $z = x * y \in Z(G)$ es un elemento del centro del grupo. Demostrar o refutar si se verifica que $z = x * y = y * x$

$d)$ Describir los factores invariantes de todos los grupos abelianos de orden 540.

$e)$ Estudiar cuales de los grupos descritos en el apartado anterior, tienen elementos de orden 20.

Soluciones

1. Consultar apuntes.

2. *a)* $|1| = 1,\ |2| = 2,\ |3| = 4,\ |4| = 2,\ |5| = 2,\ |6| = 2,\ |7| = 4,\ |8| = 2.$

   b) $C(3) = \{1, 3, 5, 7\}, \qquad C(5) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

   c) $Z(G) = \{1, 5\}$

   d) $C(3) \trianglelefteq G$ porque $[G : C(3)] = 2$

   e) $G/C(3) = \{[1], [2]\}$, siendo $[1] = \{1, 3, 5, 7\}$, $[2] = \{2, 4, 6, 8\}$ y

	$[1]$	$[2]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$
$[2]$	$[2]$	$[1]$

3. *a)* $(D, \cdot)$ es grupo por ser producto directo de grupos, y
   $\varphi : G \to D$ definida por $\varphi(g) = (g, g)$ es isomorfismo de grupos por verificarse las condiciones siguientes:

   - Está bien definida y es inyectiva: $\varphi(g) = \varphi(h) \Leftrightarrow (g, g) = (h, h) \Leftrightarrow g = h$
   - Es suprayectiva: $\forall (g, g) \in D$ se verifica que $g \in G$ y $\varphi(g) = (g, g)$
   - Conserva la operación: $\varphi(g * h) = (g * h, g * h) = (g, g) \cdot (h, h) = \varphi(g) \cdot \varphi(h)$

   b) Si $D \trianglelefteq T$ entonces para todo $(a, b) \in T$ y para todo $(g, g) \in D$ se verifica que $(a, b) \cdot (g, g) \cdot (a, b)^{-1} \in D$ $\Rightarrow (a * g * a^{-1}, b * g * b^{-1}) \in D \Rightarrow a * g * a^{-1} = b * g * b^{-1} \Rightarrow (b^{-1} * a) * g = g * (b^{-1} * a)$.
   En particular, tomando $b = e$ se tiene que para todos $a, g \in G$ se verifica que $a * g = g * a$, por tanto $(G, *)$ es abeliano.

4. *a)* $a^{-1}ba = (3, 7, 9, 5)$

   b) $(a_0 * a_1 * \cdots * a_n)^2 = e$

   c) $z \in Z(G) \Rightarrow z * x = x * z \Rightarrow (x * y) * x = x * (x * y) \Rightarrow x * (y * x) = x * (x * y) \Rightarrow y * x = x * y$

   d) $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$. $\mathbb{Z}_{540}$, $\mathbb{Z}_{180} \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_{270} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_{90} \times \mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$.

   e) Tienen elementos de orden 20, los grupos: $\mathbb{Z}_{540}$, $\mathbb{Z}_{180} \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.