Departamento Inteligencia Artificial

POLITÉCNICA

LÓGICA - 1º Grado en Ingeniería Informática

Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid

Demostración Automática de Teoremas (DAT): Estandarización de Fórmulas

David Pérez del Rey
dperezdelrey@fi.upm.es

Despacho 2104
Tel: +34 91 336 74 45

Demostración Automática

- El **cálculo de deducción natural** es intuitivo, pero no es óptimo para la automatización de demostraciones lógicas

- La **Demostración Automática de Teoremas (DAT)** tiene como objetivo:
  - El desarrollo de **algoritmos** que verifiquen un razonamiento mediante pasos de inferencia
  - Cómo utilizar un **ordenador** para ayudar en la parte de resolución de problemas que requieren razonamiento

- Temas involucrados:
  - Representación del conocimiento
    - **Forma clausular** (FC)
  - Reglas para derivar conocimiento
    - **Métodos de Resolución** (Robinson)
  - Estrategias para controlar dichas reglas
    - **Input, ordenada, SLD**…
  - Implementaciones
    - **Prolog**…

Demostración Automática

Formalización de Enunciados en Lógica Proposicional → Deducción Natural → Resultado de la Demostración

↓

Fórmulas en forma Clausular → Estrategias de Resolución

Pruebas por contradicción (o refutación) → Resultado de la Demostración

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Estandarización de Fórmulas

- Objetivo: Simplificar las fórmulas
  - Queremos obtener, mediante una serie de transformaciones, una fórmula que sea más fácil de manipular automáticamente, pero que siga teniendo ciertas propiedades de la fórmula original

- *Fórmula en un lenguaje de primer orden*
  - $\exists y\ (\ \forall x(P(x,f(y)) \rightarrow Q(z)) \land \neg\exists w\ P(g(w),y))$

- *Fórmula en forma normal de Skolem*
  - $\forall x \forall w((\neg P(x,f(b)) \lor Q(a)) \land \neg P(g(w),b))$

- *Fórmula en forma clausular*
  - $\{\neg P(x,f(b)) \lor Q(a),\ \neg P(g(w),b)\}$

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Estandarización de Fórmulas

- ¿Qué **propiedad lógica** preserva esta transformación?
  - Preserva la **satisfacibilidad**
  - Pero no preserva todos los *modelos* (es decir, la semántica): el resultado **NO** es equivalente a la fórmula original

- Preservación semántica:
  - Consideremos una transformación de B a B'
  - Preservar la semántica significa que, para toda interpretación i, i es un modelo de B sii es un modelo de B'
  - e.g. $\forall x\ P(x)$ es semánticamente equivalente a $\neg\exists x\ \neg P(x)$

- **Preservar la satisfacibilidad** significa que existe un modelo i de B sii existe un modelo i'(posiblemente no el mismo) de B'

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Estandarización de Fórmulas

- Forma Normal de Skolem (FNS):
  - Todos los cuantificadores a la cabeza de la fórmula (forma Prenex)
  - No hay variables libres
  - Sólo hay cuantificadores universales
  - Matriz de la fórmula (subfórmula tras los cuantificadores) está en forma normal conjuntiva (FNC, conjunción de disyunciones de literales)

- Método para obtener la FNS de cualquier fórmula:
  1. Poner la fórmula en forma Prenex
  2. Realizar el cierre existencial
  3. Poner la fórmula en forma normal conjuntiva
  4. Eliminar los cuantificadores existenciales

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Forma Prenex

- Se utilizarán los siguientes teoremas de equivalencia:
  - Cambio de nombre de variables ligadas:
    - $\models \forall x A(x) \leftrightarrow \forall y A(x/y)$ $\quad\models \exists x A(x) \leftrightarrow \exists y A(x/y)$ si y no está ya en A
  - Interdefinición de cuantificadores:
    - $\models \neg\forall x A(x) \leftrightarrow \exists x \neg A(x)$
    - $\models \neg\exists x A(x) \leftrightarrow \forall x \neg A(x)$
  - Distribución de conectivas respecto a cuantificadores
    - $\models \forall x A \wedge C \leftrightarrow \forall x(A \wedge C)$ $\quad\models (\forall x A \rightarrow C) \leftrightarrow \exists x(A \rightarrow C)$
    - $\models \exists x A \wedge C \leftrightarrow \exists x(A \wedge C)$ $\quad\models (\exists x A \rightarrow C) \leftrightarrow \forall x(A \rightarrow C)$
    - $\models \forall x A \vee C \leftrightarrow \forall x(A \vee C)$ $\quad\models (A \rightarrow \forall x C) \leftrightarrow \forall x(A \rightarrow C)$
    - $\models \exists x A \vee C \leftrightarrow \exists x(A \vee C)$ $\quad\models (A \rightarrow \exists x C) \leftrightarrow \exists x(A \rightarrow C)$

    si x no está libre en la otra subfórmula
  - $\models \forall x A \wedge \forall x C \leftrightarrow \forall x(A \wedge C)$ $\quad\models (\exists x A \vee \exists x C) \leftrightarrow \exists x(A \vee C)$

- Lema: Para toda fórmula A, $\models A \leftrightarrow \models \text{Prenex}(A)$

- Lema: La forma Prenex de una fórmula siempre existe, aunque puede no ser única

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Cierre Existencial

- Las variables libres de la fórmula se ligan existencialmente poniendo el cuantificador correspondiente en cabeza de la fórmula

- Lema: Una fórmula A(x) es satisfacible sii ∃xA(x) es satisfacible

- Ejemplo:
  - $\forall y \exists z(p(\mathbf{x}) \wedge q(y) \rightarrow r(f(z), \mathbf{x}))$ se transformaría en $\mathbf{\exists x} \forall y \exists z(p(x) \wedge q(y) \rightarrow r(f(z), x))$

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Forma Normal Conjuntiva (FNC)

- Se utilizarán los siguientes teoremas de equivalencia:
  - Interdefinición:
    - $\vdash (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$
    - $\vdash (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
  - Leyes de Morgan
    - $\vdash \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
    - $\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
  - Distribución de $\vee$ y $\wedge$
    - $\vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \leftrightarrow A \wedge (B \vee C)$
    - $\vdash A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- Lema: Para toda fórmula A, $\vdash A \leftrightarrow FNC(A)$
- Lema: La forma normal conjuntiva (FNC) de una fórmula siempre existe

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Eliminación de cuantificadores existenciales (Skolemización)

- Se elimina el cuantificador existencial sustituyendo la variable que ligaba por una **función de Skolem** o **constante de Skolem**

- La función de Skolem será una **función nueva** en la fórmula, aplicada a todas la variables cuantificadas universalmente que aparecen antes que el cuantificador existencial a eliminar.
  - Si no hay tales variables se utilizará una **constante nueva**

- Ejemplos:
  - $FNS(\exists \mathbf{x} \forall z(Q(\mathbf{x},z) \vee R(a,\mathbf{x}))) = \forall z(Q(\mathbf{b},z) \vee R(a,\mathbf{b}))$
  - $FNS(\forall x \exists \mathbf{y}(P(x) \rightarrow \neg Q(\mathbf{y}))) = \forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(\mathbf{f(x)}))$
  - $FNS(\exists x \forall y \exists \mathbf{z}(P(x) \wedge Q(y) \rightarrow R(f(\mathbf{z}), x))) = \forall y(P(a) \wedge Q(y) \rightarrow R(f(\mathbf{g(y)}), a))$
  - $FNS(\forall x \forall y \exists \mathbf{z}(P(x) \wedge Q(y) \rightarrow R(f(\mathbf{z}), x))) = \forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y) \rightarrow R(f(\mathbf{g(x, y)}), x))$

- Lema: Una fórmula A es satisfacible sii Skolem(A) es satisfacible

Forma Normal de Skolem (FNS)

- **Teorema: Una fórmula A es satisfacible sii FNS(A) es satisfacible**
  1. A satisfacible sii Prenex(A) satisfacible (por lemas 1 y 5)
  2. Prenex(A) satisfacible sii Cierre(Prenex(A)) satisfacible (por lema 2)
  3. Sea Cierre(Prenex(A)) satisfacible de la forma Q.M, donde Q son los cuantificadores y M es la matriz de la fórmula. Entonces M satisfacible sii FNC(M) satisfacible (por lemas 3 y 5)
  4. Pero también Q.M satisfacible sii Q. FNC(M) satisfacible, puesto que cuantifican las mismas variables en idéntica forma
  5. Q.FNC(M) satisfacible sii Skolem(Q.FNC(M)) satisfacible (por lema 4). Pero Skolem(Q.FNC(M)) es precisamente FNS(A)
  6. A satisfacible sii FNS(A) satisfacible (por silogismo 1, 2, 3, 4, 5)

    - Lema 1: Para toda fórmula A, $\vdash A \leftrightarrow$ Prenex(A)
    - Lema 2: Una fórmula A(x) es satisfacible sii $\exists x A(x)$ es satisfacible
    - Lema 3: Para toda fórmula A, $\vdash A \leftrightarrow$ FNC(A)
    - Lema 4: Una fórmula A es satisfacible sii Skolem(A) es satisfacible.
    - Lema 5: Si $\vdash A \leftrightarrow A'$ entonces: A satisfacible sii A' satisfacible

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Forma Clausular

- Entonces sabemos que “Una fórmula A es satisfacible sii FNS(A) es satisfacible” y que “FNS(A) existe siempre para cualquier fórmula A”, luego **podemos trabajar exclusivamente con fórmulas en forma normal de Skolem** si sólo tuviéramos que comprobar la satisfacibilidad

- Para trabajar más cómodamente con fórmulas en FNS utilizaremos la forma clausular
  - Cláusula: Disyunción de literales
  - La forma clausular de una fórmula A es el conjunto de cláusulas de la FNS(A)
  - La forma clausular se entiende com la conjunción de las cláusulas, cuyas variables están todas ellas cuantificadas universalmente.

- Ejemplo:
  - A: $\forall x \forall y(P(x) \wedge (Q(y) \vee R(a,x)))$
  - FC(A): $\{P(x), Q(y) \vee R(a,x)\}$

- Teorema: Una fórmula A es satisfacible sii FC(A) es satisfacible

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Forma clausular de una deducción

- Una deducción T[A1, A2, …, An] |– B es correcta sii A1 ∧ A2 ∧ … ∧ An ∧ ¬B es insatisfacible
  - i.e. no existe una interpretación modelo de las premisas y contramodelo de la conclusión

DEFINICIÓN FUNDAMENTAL!!!

- ¿Existe un método para decidir automáticamente si una argumentación es correcta?

- Dada una deducción: T[A1, A2, …, An] |– B
  1. Obtener la forma clausular de cada Ai, 1 ≤i ≤n
  2. Obtener la forma clausular de ¬B
  3. Realizar la unión de todos los conjuntos de cláusulas
  4. Comprobar la **satisfacibilidad**

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Ejercicios de Forma Clausular en LPO

1. $\exists x(\neg R(x,a) \vee P(f(x))) \rightarrow \exists y R(y,x)$
2. $\forall x(x > 2 \rightarrow \exists y(y = f(x,z)))$
3. $\exists x \forall y(A(x) \rightarrow B(x) \wedge (C(y) \wedge D(x,y)))$
4. $\forall x \exists y(A(y) \wedge D(x,y))$
5. $\neg\exists x \forall y(\neg C(x) \vee (B(a) \wedge D(x,y))) \wedge \neg\exists x A(x)$
6. $\forall x R(x,a) \leftrightarrow \exists x Q(x,f(x,b))$ **(DIFICIL!!!)**

7. $\{ \exists y \forall x(A(x,y) \rightarrow B(x) \wedge D(x,y)),$
   $\forall x(B(x) \rightarrow \exists y \neg D(y,x) \vee E(x)) \} \mid\!- \forall x \neg E(x)$

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es