3.2. Dominios de integridad

Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo y sea $R^* = R - \{0_R\}$.

- Se dice que $r, s \in R^*$ son **divisores de cero** del anillo si $r \cdot s = 0_R$.
- Si $(R, +, \cdot)$ es un anillo con identidad $1_R \in R$, un elemento $a \in R^*$ se dice que es una **unidad** del anillo si existe $a^{-1} \in R^*$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1_R$.

Un anillo conmutativo, con identidad y sin divisores de cero, se denomina **dominio de integridad**.

Grupo de unidades de un anillo con identidad

Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo con identidad y sea $U_R = \{a \in R : a \text{ es unidad de } R\}$.
Se verifica que $(U_R, \cdot)$ es un grupo, que se denomina **grupo de unidades** del anillo.

Caracterización de dominios de integridad: Propiedad cancelativa

Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo conmutativo y con identidad. Entonces $(R, +, \cdot)$ es dominio de integridad $\Leftrightarrow$ para todos $a, b, c \in R$ tales que $a \neq 0_R$ y $a \cdot b = a \cdot c$ se verifica que $b = c$

Relación entre dominios de integridad y cuerpos

1. Todo cuerpo es un dominio de integridad
2. Todo dominio de integridad finito es cuerpo

Operaciones sucesivas en anillos

Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo. Para todo $a \in R$ y para todo $r \in \mathbb{N}$ se escribe

$$ra = \overbrace{a + \cdots + a}^{r}, \qquad (-r)a = \overbrace{(-a) + \cdots + (-a)}^{r}$$

1. $(rs)a = r(sa)$
2. $r(a \cdot b) = (ra) \cdot b$

Definición de característica de un anillo

Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo y sea $C = \{r \in \mathbb{N} : \ ra = 0_R \text{ para todo } \ a \in R\}$.
Si $C \neq \emptyset$ se llama **característica** de R al valor $\mathrm{char}(R) = \min(C)$ (mínimo natural en C).
Si $C = \emptyset$ entonces se dice que el anillo tiene **característica cero**: $\mathrm{char}(R) = 0$.

Característica de anillos con identidad

Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo con identidad $1_R \in R$.

1. Si el orden de $1_R \in R$ en el grupo aditivo $(R, +)$ es finito entonces $\mathrm{char}(R) = |1_R|$.
2. Si el orden de $1_R \in R$ en el grupo aditivo $(R, +)$ es infinito entonces $\mathrm{char}(R) = 0$.

Característica de un dominio de integridad

La característica de un dominio de integridad es cero o un número primo

Corolario

La característica de todo cuerpo es cero o un número primo

3.2.20. Problemas

1. Describir todas las unidades de cada uno de los siguientes anillos:
   $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},+,\cdot)$ $(\mathbb{Z}_3,+_3,\cdot_3)$ $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Z},+,\cdot)$ $(\mathbb{Z}_4,+_4,\cdot_4)$

2. Encontrar los divisores de cero y las unidades en los siguientes anillos:

   a) $(\mathbb{Z}_{10},+_{10},\cdot_{10})$
   b) $(\mathbb{Z}_{12},+_{12},\cdot_{12})$
   c) $(\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_2,+_9\times+_2,\cdot_9\times\cdot_2)$
   d) $(\mathcal{P}(X),\triangle,\cap)$, siendo $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$
   e) $(\mathbb{Z}_2^{2\times 2},+,\cdot)$
   f) $(\mathbb{R}^{n\times n},+,\cdot)$

3. Demostrar que todo elemento no nulo de $(\mathbb{Z}_n,+_n,\cdot_n)$ es una unidad o un divisor de cero.

4. Encontrar un elemento de un anillo que no sea ni divisor de cero ni unidad.

5. Encontrar dos elementos $a,b\in R$ en un anillo $(R,+,\cdot)$ que ambos sean divisores de cero pero que $a+b$ no sea cero ni divisor de cero.

6. ¿Cuáles de los siguientes anillos son dominios de integridad?, ¿cuáles son cuerpos?

   a) $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+,\cdot)$
   b) $(\mathcal{P}(\{a\}),\triangle,\cap)$, donde $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$
   c) $(\{a+bi : a,b\in\mathbb{Q}\},+,\cdot)$
   d) $(\mathbb{Z}\times\mathbb{R},+,\cdot)$
   e) $(\{[0]_{10},[2]_{10},[4]_{10},[6]_{10},[8]_{10}\},+_{10},\cdot_{10})$

7. Dar un ejemplo de anillo conmutativo sin divisores de cero que no sea dominio de integridad.

8. En un anillo $(R,+,\cdot)$, un elemento $a\in R$ se dice **idempotente** si $a^2=a$, se dice **nilpotente** si existe un $n\in\mathbb{N}$ tal que $a^n=0_R$. Encontrar todas las unidades, todos los divisores de cero, los elementos nilpotentes e idempotentes del anillo $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_6$

9. Si $a\in R$ es nilpotente en un anillo con identidad $(R,+,\cdot)$, probar que 1_R-a es unidad.

10. Encontrar la característica de cada uno de los siguientes anillos:
    $(2\mathbb{Z},+,\cdot)$, $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},+,\cdot)$, $(\mathbb{Z}_3\times 3\mathbb{Z},+,\cdot)$, $(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$, $(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$, $(\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_{15},+,\cdot)$, $(\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$, $(\{[0]_{12},[2]_{12},[4]_{12},[6]_{12},[8]_{12},[10]_{12}\},+_{12},\cdot_{12})$.

11. Sea $(R,+,\cdot)$ un anillo conmutativo con identidad. Si la característica es $\mathrm{char}(R)=p$ primo demostrar que $(x+y)^p=x^p+y^p$. Encontrar un anillo con característica $\mathrm{char}(R)=4$ y elementos $x,y\in R$ tales que $(x+y)^4\neq x^4+y^4$.