CÁLCULO III **Matemáticas e Informática** **Curso 2019/2020**	1erApellido: ______	**13/12/2019**
	2º Apellido: ______	Tiempo: **2h**
Dpto. Matemática Aplicada ETSI Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: ______ Número de matrícula:	**Calificación:**

SEGUNDO PARCIAL

1. (a) **(1 punto)** Sea $F = (P, Q)$ una función vectorial derivable con continuidad en el dominio $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-4, 0), (0, 0), (2, 0)\}$ y tal que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en Ω. Sabiendo que la integral de línea de F sobre las circunferencias centradas en el origen de radios 5, 3 y 1 orientadas positivamente son 2π, 4π y 3π, respectivamente, calcula la integral de línea de F sobre la circunferencia de centro $(-2, 0)$ y radio 3 orientada positivamente.
   (b) **(1 punto)** Calcula el área de una esfera de radio r.
   (c) **(1 punto)** Usando el teorema de Gauss, establece la relación existente entre el volumen y el área de una esfera de radio r.

2. **(1,5 puntos)** Se considera el campo vectorial $F(x, y) = (1 - y,\, x + 1)$.
   (a) Calcula la integral de línea de F sobre la parte de la parábola $y = 1 - x^2$ del semiplano $y \geq 0$.
   (b) Usando lo anterior, calcula el área del recinto encerrado por la parábola en dicho semiplano.

3. **(2 puntos)** Sea S la parte del cono $x^2 + y^2 = z^2$ interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4y$ en el semiespacio $z \geq 0$.
   (a) Halla el área de la superficie S.
   (b) Calcula la integral del campo vectorial $F(x, y, z) = y\mathbf{i} \cancel{+ x\mathbf{j}} + z^2\mathbf{k}$ sobre dicha superficie, indicando la orientación considerada.

4. **(1,5 puntos)** Utiliza el teorema de Stokes para hallar la integral de línea del campo vectorial $F(x, y, z) = (y,\, x + x^3,\, -z^2)$ a lo largo de la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 1$ orientada en el sentido positivo de su proyección sobre el plano $z = 0$.

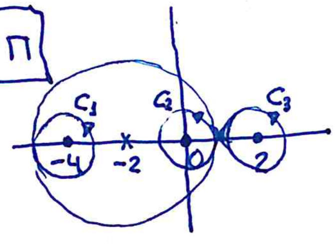
5. **(2 puntos)** Se considera la función $f(x) = |x|$, $-\pi < x < \pi$.
   (a) Calcula su serie clásica de Fourier.
   (b) Estudia la convergencia puntual de la serie obtenida y dibuja el grafo de la función suma en el intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.
   (c) Utiliza la serie obtenida para halla la suma de las siguientes series numéricas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots$$

SOLUCIONES

(1) a) Llamando C_1, C_2 y C_3 a las circunferencias de radio 1 centradas en $(-4,0)$, $(0,0)$ y $(2,0)$, respectivamente, e I_1, I_2 e I_3 a las integrales de F sobre estas circunferencias de radio 1 orientadas positivamente, entonces:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 2\pi \\ \quad\;\; I_2 + I_3 = 4\pi \\ \quad\;\; I_2 \qquad = 3\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} I_1 = -2\pi \\ I_2 = 3\pi \\ I_3 = 1\pi \end{cases} \Longrightarrow \boxed{I = I_1 + I_2 = \pi}$$



[illegible]

b) Parametrizando la esfera ~~para~~ $x^2+y^2+z^2=r^2$ por:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(\theta,\varphi)=(r\cos\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\varphi)\\ (\theta,\varphi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]=D\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}=-r\sin\varphi\cdot\Phi(\theta,\varphi)$$

$$\Downarrow$$

$$\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right\|=r^2\sin\varphi$$

$$A(\text{esfera})=\iint_D\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right\|d\theta\, d\varphi=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}r^2\sin\varphi\, d\varphi=r^2\cdot 2\pi\cdot\left[-\cos\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}=\boxed{4\pi r^2}$$

c) Si $F(x,y,z)=(x,y,z)$ entonces $\mathrm{div}(F)=3$, y si Ω es el recinto encerrado por la esfera $\partial\Omega$; aplicando el teorema de Gauss:

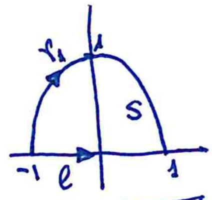
$$\boxed{V(\Omega)}=\iiint_\Omega dx\,dy\,dz\overset{\text{Gauss}}{=}\iint_{\partial\Omega}\frac{(x,y,z)}{3}\,d\sigma=\iint_{\partial\Omega}\frac{(x,y,z)}{3}\cdot\underbrace{\frac{(x,y,z)}{r}}_{=\bar n}\,d\sigma=$$

$$=\frac{1}{3r}\iint_{\partial\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,d\sigma=\frac{1}{3r}\iint_{\partial\Omega}r^2\,d\sigma=\frac{r}{3}\cdot\iint_{\partial\Omega}d\sigma=\boxed{\frac{r}{3}\cdot A(\partial\Omega)}$$

donde se usa que $\mathrm{div}\left(\frac{x}{3},\frac{y}{3},\frac{z}{3}\right)=\mathrm{div}\,\frac{(x,y,z)}{3}=1$, y se ha pasado de la integral de superficie de una función vectorial a otra escalar multiplicando por el vector unitario $\bar n=\frac{(x,y,z)}{r}$ normal a la esfera, y se ha tenido en cuenta que sobre la esfera $x^2+y^2+z^2=r^2$.

---

② $F(x,y)=(1-y,x+1)\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2$



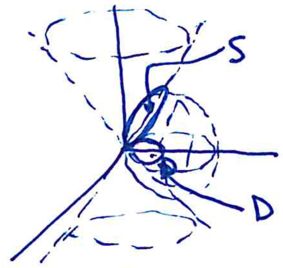
a) $\gamma_1\rightarrow\alpha(t)=(t,1-t^2),\ -1\le t\le 1\Rightarrow\alpha'(t)=(1,-2t)$

$$\int_{\gamma_1}F\,ds=\int_{\gamma_1}(1-y)\,dx+(x+1)\,dy=\int_{-1}^{1}\left[(1-(1-t^2))\cdot 1+(t+1)(-2t)\right]dt=\int_{-1}^{1}(-t^2-2t)\,dt=\boxed{\frac{-2}{3}}$$

b) Aplicando el teorema de Green a la frontera de S orientada positivamente $\partial S=\ell\cup(-\gamma_1)$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\partial S}F\,ds=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=2\iint_S dx\,dy=2\cdot A(S)\\ \displaystyle\int_{\partial S}F\,ds=\int_\ell F\,ds-\int_{\gamma_1}F\,ds\ ;\ \int_\ell F\,ds\underset{\alpha(t)=(t,0),\ -1\le t\le 1}{=}\int_{-1}^{1}\left[(1-0)\cdot 1+(t+1)\cdot 0\right]dt=\int_{-1}^{1}dt=2\end{array}\right\}\Rightarrow A(S)=\frac{2-\left(\frac{-2}{3}\right)}{2}\Rightarrow\boxed{A(S)=\frac{4}{3}}$$

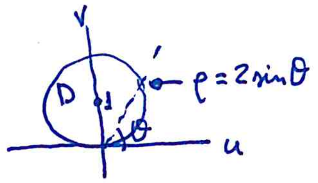
(3)



$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ x^2+y^2+z^2=4y \end{cases} \Rightarrow 2(x^2+y^2)=4y \Rightarrow x^2+y^2=2y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+(y-1)^2=1$$

La superficie S se parametriza como el grafo del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ sobre su proyección sobre el plano $z=0$:

$$\Phi(u,v)=(u,v,\sqrt{u^2+v^2}) \quad \text{con } (u,v)\in D=\{(u,v):\ u^2+(v-1)^2\le 1\}$$



$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial u}&=\left(1,0,\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) \\ \frac{\partial\phi}{\partial v}&=\left(0,1,\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\frac{\partial\phi}{\partial u}\times\frac{\partial\phi}{\partial v}=\left(\frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}},\frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}},1\right) \\ &\left\|\frac{\partial\phi}{\partial u}\times\frac{\partial\phi}{\partial v}\right\|=\sqrt{\frac{u^2}{u^2+v^2}+\frac{v^2}{u^2+v^2}+1}=\sqrt{2} \end{aligned}$$

a) $$A(S)=\iint_D \left\|\frac{\partial\phi}{\partial u}\times\frac{\partial\phi}{\partial v}\right\| du\,dv=\iint_D \sqrt{2}\cdot du\,dv=\sqrt{2}\cdot A(D)=\boxed{\pi\sqrt{2}}$$

b) $$F(x,y,z)=(y,-x,z^2)$$

$$\iint_S F\,d\sigma=\iint_D F(\phi(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\times\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)du\,dv=\iint_D (v,-u,u^2+v^2)\cdot\left(\frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}},\frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}},1\right)du\,dv=$$

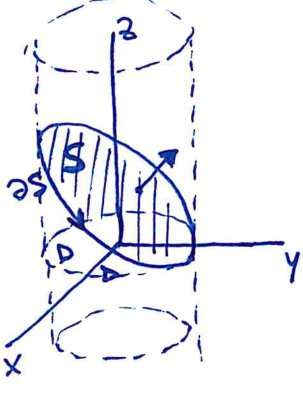
$$=\iint_D\left(\frac{-vu+uv}{\sqrt{u^2+v^2}}+u^2+v^2\right)du\,dv=\iint_D (u^2+v^2)\,du\,dv \overset{\text{Polares}}{=}$$

$$=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^2\cdot\rho\,d\rho=\int_0^{\pi}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\rho=0}^{\rho=2\sin\theta}d\theta=\int_0^{\pi}4\sin^4\theta\,d\theta=$$

$$=4\cdot 2\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cdot d\theta=4\cdot2\cdot\frac{1}{2}\beta\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)=4\cdot\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}}{2!}=\boxed{\frac{3\pi}{2}}$$

---

(4)

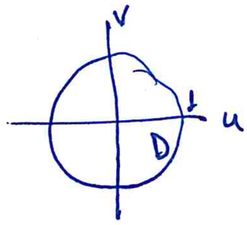


$$F(x,y,z)=(y,x+x^3,-z^2)\ ;\ \text{rot}(F)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x+x^3 & -z^2 \end{vmatrix}=(0,0,3x^2)$$

$$\begin{aligned} &\Phi(u,v)=(u,v,1-u-v) \\ &(u,v)\in D=\{(u,v):u^2+v^2\le 1\} \end{aligned}\ \left\}\ \begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial u}&=(1,0,-1) \\ \frac{\partial\phi}{\partial v}&=(0,1,-1) \end{aligned}\right. \quad \frac{\partial\phi}{\partial u}\times\frac{\partial\phi}{\partial v}=(1,1,1)$$

$$\int_{\partial S} F\,ds \overset{\text{Stokes}}{=} \iint_S rot(F)\,d\sigma = \iint_S (0,0,3x^2)\,d\sigma = \iint_D (0,0,3u^2)\cdot(1,1,1)\,du\,dv =$$

$$= \iint_D 3u^2\,du\,dv \underset{\text{Polares}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 3\rho^2\cos^2\theta\,\rho\,d\rho =$$



$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{3\rho^4}{4}\right]_{\rho=0}^{\rho=1}\cdot\cos^2\theta\,d\theta = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \boxed{\frac{3\pi}{4}}$$

---

5. $f(x)=|x|,\quad -\pi<x<\pi$

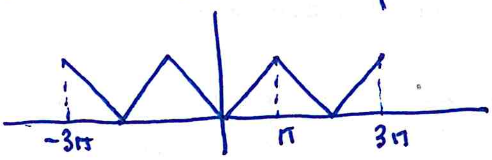
a) $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx = \pi$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\underbrace{}_{\cos nx}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx = \cdots\cdots = \frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi} = \begin{cases}\dfrac{-4}{\pi(2k-1)^2}, & \text{si } n=2k-1,\ k\geq 1\\ 0, & \text{si } n=2k\end{cases}$$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cdot\sin nx\,dx = 0,\quad \forall n\geq 1$

$$\boxed{f(x)=|x| \sim \frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{9}+\frac{\cos 5x}{25}+\cdots\right)}$$

b) Converge puntualmente a su extensión periódica y normalizada:



c) En $x=0 \Rightarrow \frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=0 \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}}$

Por la identidad de Parseval:

$$\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{1}{\pi}\|f\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^2}{16}\left(\frac{2\pi^2}{3}-\frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}}$$