4.1. Cuerpos de fracciones y extensiones

Sean $(\mathbb{K},+,\cdot)$ y $(\mathbb{F},+,\cdot)$ dos cuerpos tales que $\mathbb{K}\subseteq\mathbb{F}$ y las operaciones de $(\mathbb{F},+,\cdot)$ restringidas a $\mathbb{K}$ coinciden con las operaciones de $(\mathbb{K},+,\cdot)$, en estas condiciones se dice que $\mathbb{F}$ es un cuerpo **extensión** de $\mathbb{K}$ y que $\mathbb{K}$ es un **subcuerpo** de $\mathbb{F}$.

Cuerpos mínimos

1. Todo cuerpo de característica cero contiene un cuerpo isomorfo a $(\mathbb{Q},+,\cdot)$.

2. Todo cuerpo de característica $p\in\mathbb{N}$ primo, contiene un cuerpo isomorfo a $(\mathbb{Z}_p,+_p,\cdot_p)$.

Mínimo subanillo que contiene a un cuerpo y un elemento α

Si $(\mathbb{F},+,\cdot)$ es una extensión del cuerpo $\mathbb{K}$ y $\alpha\in\mathbb{F}$ entonces el mínimo subanillo de $(\mathbb{F},+,\cdot)$, que contiene a $\mathbb{K}$ y a α, se nota por $\mathbb{K}[\alpha]$ y es: $\quad\mathbb{K}[\alpha]=\{h(\alpha):h\in\mathbb{K}[x]\}\subseteq\mathbb{F}$.

Cuerpo de fracciones

Sea $(\mathcal{D},+,\cdot)$ un dominio de integridad y sea $\mathcal{D}^*=\mathcal{D}-\{0_{\mathcal{D}}\}$, entonces:
En el producto cartesiano $\mathcal{D}\times\mathcal{D}^*=\{(a,b):a,b\in\mathcal{D},b\neq 0_{\mathcal{D}}\}$, la relación definida por:
$(a,b)\sim(c,d)\Leftrightarrow ad=bc$ es una relación de equivalencia, por lo que define un conjunto cociente:

$$\operatorname{Frac}(\mathcal{D})=(\mathcal{D}\times\mathcal{D}^*)/\sim$$

La clase del elemento (a,b) se escribe $\quad\frac{a}{b}=[(a,b)]=\{(c,d)\in\mathcal{D}\times\mathcal{D}^*:(a,b)\sim(c,d)\}$
En el conjunto cociente $\operatorname{Frac}(\mathcal{D})=\left\{\frac{a}{b}\ :\ a,b\in\mathcal{D},\ \text{con } b\neq 0_{\mathcal{D}}\right\}$ se definen:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=[(a,b)]+[(c,d)]=[(ad+bc,bd)]=\frac{ad+bc}{bd}$$
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=[(a,b)]\cdot[(c,d)]=[(ac,bd)]=\frac{ac}{bd}$$

$(\operatorname{Frac}(\mathcal{D}),+,\cdot)$ es cuerpo y se denomina **Cuerpo de Fracciones** de $(\mathcal{D},+,\cdot)$.
$(\operatorname{Frac}(\mathcal{D}),+,\cdot)$ contiene un subanillo isomorfo a $\mathcal{D}$.
$(\operatorname{Frac}(\mathcal{D}),+,\cdot)$ es el mínimo cuerpo que contiene a un subanillo isomorfo a $(\mathcal{D},+,\cdot)$.

Mínimo cuerpo que contiene un cuerpo y un elemento de extensión

Si $(\mathbb{F},+,\cdot)$ es una extensión del cuerpo $\mathbb{K}$ y $\alpha\in\mathbb{F}$ entonces el mínimo cuerpo que contiene a $\mathbb{K}$ y a α, se nota por $\mathbb{K}(\alpha)$, y es el cuerpo de fracciones de $\mathbb{K}[\alpha]$:

$$\mathbb{K}(\alpha)=\left\{\frac{g(\alpha)}{h(\alpha)}:g,h\in\mathbb{K}[x],h(\alpha)\neq 0_{\mathbb{K}}\right\}\subseteq\mathbb{F}$$

Teorema de Kronecker (1887)

Sea $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un cuerpo y sea $h\in\mathbb{K}[x]$ polinomio irreducible en $\mathbb{K}[x]$, con $\operatorname{gr}(h)>1$. Entonces:

1. Existe un cuerpo $\mathbb{F}$, extensión de $\mathbb{K}$, en el cual el polinomio h tiene una raíz.

2. Si $\alpha\in\mathbb{F}$ es una raíz de h, entonces $\mathbb{K}(\alpha)\approx\mathbb{K}[x]/(h)\approx\mathbb{K}[\alpha]$

4.1.10. Problemas

1. Obtener el cuerpo de fracciones de los siguientes anillos:

   a) $A = \{\frac{a}{2^k} : a, k \in \mathbb{Z}\}$

   b) Los enteros Gausianos: $\mathbb{Z}[i] = \{n + mi : n, m \in \mathbb{Z}\}$

   c) $\mathbb{Z}[\sqrt{3}i] = \{a + b\sqrt{3}i : a, b \in \mathbb{Z}\}$

2. Se considera el dominio de integridad $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$

   a) Determinar el cuerpo de fracciones de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

   b) Demostrar que en $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ hay infinitas unidades.

3. Sean $\mathbb{Z}[\sqrt{21}] = \{a + b\sqrt{21} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ y $\mathbb{F}$ su cuerpo de fracciones. Demostrar que el polinomio $x^2 - x - 5$ es irreducible en $(\mathbb{Z}[\sqrt{21}])[x]$ pero no en $\mathbb{F}[x]$

4. Demostrar que $\mathbb{Q}(4 - i) = \mathbb{Q}(1 + i)$

5. Una extensión $\mathbb{F}$ de un cuerpo $\mathbb{K}$ se dice que es una **extensión simple de** $\mathbb{K}$ si existe $\alpha \in \mathbb{F}$ tal que $\mathbb{F} = \mathbb{K}(\alpha)$. Demostrar que las siguientes extensiones son extensiones simples de $\mathbb{Q}$:

   a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

   b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$

6. Dado el polinomio $h = x^3 - 6x - 3 \in \mathbb{Q}[x]$

   a) Obtener el mínimo cuerpo $\mathbb{K}$, extensión de $\mathbb{Q}$, en el cual $h \in \mathbb{K}[x]$ tiene una raíz $\alpha \in \mathbb{K}$.

   b) Calcular, en $\mathbb{Q}(\alpha)$, el resultado de las siguientes operaciones:

      1) $\alpha^3 - 6\alpha$
      2) $\alpha^4 - 6\alpha^2 - 1$
      3) $(\alpha^2 - 2\alpha - 2)^{-1}$

7. Dado el polinomio $h = x^3 - 2x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$

   a) Obtener el mínimo cuerpo $\mathbb{K}$, extensión de $\mathbb{Q}$, en el cual $h \in \mathbb{K}[x]$ tiene una raíz $\alpha \in \mathbb{K}$.

   b) Calcular, en $\mathbb{Q}(\alpha)$, el resultado de las siguientes operaciones:

      1) $\alpha^3 - 6\alpha$
      2) $\alpha^4 - 6\alpha^2 - 1$
      3) $(\alpha^2 - 2\alpha - 2)^{-1}$