CÁLCULO III **Matemáticas e Informática** **Curso 2019/2020**	1$^{\text{er}}$Apellido: ____________ 2$^{\text{o}}$ Apellido: ____________	**17/01/2020** Tiempo: **3h**
Dpto. Matemática Aplicada ETSI Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: ____________ Número de matrícula:	**Calificación:**

EXAMEN FINAL (PRIMERA PARTE)

1. **(a)** **(0,5 puntos)** Demuestra si el conjunto $A = [0, +\infty) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ tiene o no medida nula.

(b) **(0,5 puntos)** Halla la longitud de la curva cicloide: $\alpha(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

2. **(1,5 puntos)** Calcula la integral de la función $f(x, y) = x^2 y$ sobre el recinto interior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2y$.

3. **(1,5 puntos)** Halla el volumen del recinto acotado interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ comprendido entre el paraboloide $x^2 + y^2 + z = 4$ y el plano $x + y - z = 0$.

4. **(1 punto)** Calcula la masa de un sólido que tiene la forma de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, $z \ge 0$, y densidad puntual $\delta(x, y, z) = z$. Calcula su masa.

EXAMEN FINAL (SEGUNDA PARTE)

5. **(1,5 punto)** Calcula la integral del campo vectorial $F(x, y) = (x^2 + y)\mathbf{i} + (3x - y)\mathbf{j}$ sobre:
(a) La parte de la parábola $y = x^2$ que va del origen al punto $(1,\ 1)$
(b) La elipse de ecuación $x^2 + 4y^2 = 4$ orientada positivamente.

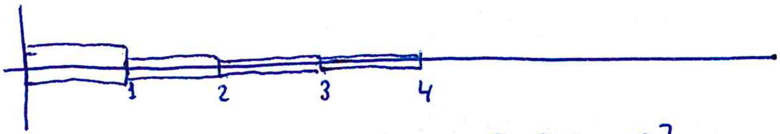
6. **(1 punto)** Enuncia y demuestra la relación existente entre la integral de un campo vectorial sobre una superficie y la integral de la componente normal (proyección sobre el vector normal a la superficie en cada punto) de dicho campo sobre la misma superficie.

7. **(1,5 puntos)** Sea S la parte del paraboloide $x^2 + y^2 = z$, $1 \le z \le 4$.
(a) Calcula el área de la superficie S .
(b) Calcula el flujo del campo vectorial $F(x, y, z) = (y,\ -x,\ z)$ sobre la superficie S orientada con el vector normal hacia el interior del paraboloide.

8. **(1 punto)** Calcula la serie de Fourier de senos de la función $f(x) = \pi - x$, $0 < x < \pi$, y estudia y dibuja su convergencia puntual en $[-\pi,\ \pi]$.

SOLUCIONES

① a) $A = [0,\infty)\times\{0\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ donde $A_i = [i-1, i]\times\{0\}$



Dado $\varepsilon > 0$, $A_i \subset R_i = [i-1, i]\times\left[\frac{-\varepsilon}{2^{i+1}}, \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right]$ y $V(R_i) = \frac{\varepsilon}{2^i}$ y entonces:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{\infty} V(R_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

Luego A tiene medida nula.

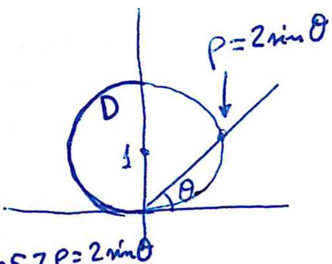
b) Longitud $= 8$ (véase ejemplo 5.1.8(2) de la guía).

---

② $x^2+y^2 = 2y \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$

$\Big\downarrow$ Polares

$\rho^2 = 2\rho\sin\theta \Rightarrow \begin{cases} \rho = 0 \\ \rho = 2\sin\theta \end{cases}$



$$\iint_D x^2 y \, dx\, dy = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} (\rho\cos\theta)^2\cdot\rho\sin\theta\cdot\rho\, d\rho = \int_0^{\pi} \cos^2\theta\cdot\sin\theta\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_{\rho=0}^{\rho=2\sin\theta} d\theta =$$

$$= \frac{32}{5}\int_0^{\pi} \sin^6\theta\cdot\cos^2\theta\, d\theta = \frac{32}{5}\cdot 2\int_0^{\pi/2} \sin^6\theta\cos^2\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{32}{5}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\beta\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right) = \cdots\cdots = \frac{\pi}{4}$$

---

③ $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 1,\ x+y \leq z \leq 4-(x^2+y^2)\}$

$$V(\Omega) = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \left[4-(x^2+y^2)-(x+y)\right] dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left[4-\rho^2-\rho(\cos\theta+\sin\theta)\right]\rho\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3}(\cos\theta+\sin\theta)\right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{7}{4}-\frac{1}{3}(\cos\theta+\sin\theta)\right) d\theta =$$

$$= \left[\frac{7\theta}{4} - \frac{1}{3}(\sin\theta-\cos\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{7\pi}{2}$$

④ Sea $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$; $\delta(x,y,z) = z$

$$m(S) = \iiint_S z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\cos\varphi \cdot \rho^2 \sin\varphi\, d\rho =$$

$$= \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \cdot \left[\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \cdot \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$

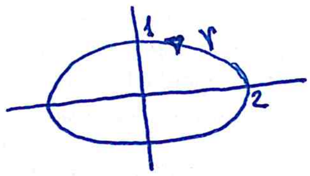
---

⑤ $F(x,y) = (x^2+y,\ 3x-y)$

a) $\alpha(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$; $\alpha'(t) = (1, 2t)$

$$\int_\gamma F\,ds = \int_0^1 (t^2+t^2, 3t-t^2)\cdot(1,2t)\,dt = \int_0^1 (8t^2-2t^3)\,dt = \ldots = \frac{13}{6}$$

b) $x^2+4y^2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow$ elipse de semiejes 2 y 1



$$F \equiv \left\{\begin{array}{l} P(x,y) = x^2+y \\ Q(x,y) = 3x-y \end{array}\right\} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$$

$$\oint_\gamma F\,ds = \iint_{\mathrm{int}(\gamma)} 2\,dx\,dy = 2\cdot A(\mathrm{int}\,\gamma) = 2\cdot 2\pi = 4\pi$$

Th. de Green.

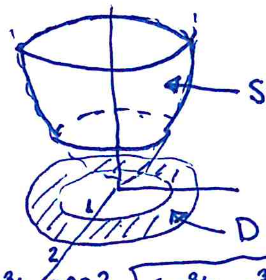
---

⑥ Véase 7.3.2. en la guía de la asignatura

---

⑦ $x^2+y^2 = z$ $\begin{array}{l} \nearrow z=1 \Rightarrow x^2+y^2=1 \\ \searrow z=4 \Rightarrow x^2+y^2=4 \end{array}$; $D = \{(u,v) : 1 \leq u^2+v^2 \leq 4\}$

$S \longrightarrow \Phi(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$, $(u,v) \in D$



a) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} = (1, 0, 2u) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} = (0, 1, 2v) \end{array}\right\}$ $\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \times \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} = (-2u, -2v, 1)$

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = \sqrt{1+4(u^2+v^2)}$$

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1+4(u^2+v^2)}\,du\,dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho\,d\rho = 2\pi \left[\frac{(1+4\rho^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}\cdot 8}\right]_{\rho=1}^{\rho=2} = \boxed{\frac{(17^{3/2}-5^{3/2})\pi}{6}}$$

$F(x,y,z) = (y,-x,z)$

b) $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (-2u,-2v,1)$ está orientado hacia el interior del paraboloide.

$$\iint_S F\,d\sigma = \iint_D F(\Phi(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) du\,dv = \iint_D (v,-u,u^2+v^2)\cdot(-2u,-2v,1)\,du\,dv =$$

$$= \iint_D (\cancel{-2uv} + \cancel{2uv} + u^2+v^2)\,du\,dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \rho^2 \cdot \rho\, d\rho = \cdots = \frac{15\pi}{2}$$

8

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{(\pi - x)}_{u} \underbrace{\sin nx\, dx}_{dv} = \frac{2}{\pi}\left(\left[(\pi-x)\cdot\frac{-\cos nx}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi} (-1)\cdot \frac{-\cos nx}{n}\,dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{\pi}{n} - \left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{x=0}^{x=\pi}\right) = \frac{2}{n}, \quad n \geq 1.$$

$$\boxed{f(x) = \pi - x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\sin nx = 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}}$$