Estructuras Algebraicas Segundo examen parcial	1^{er} Apellido: ______________	30 de mayo de 2017
	2^{o} Apellido: ______________	Tiempo 2 h.
Departamento Matem. aplic. TIC ETS de Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: ______________ Número de matrícula:	**Calificación:**

1. (3 puntos) Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo).

   a) Dados dos cuerpos $(\mathbb{K}_1, +_1, \cdot_1)$ y $(\mathbb{K}_2, +_2, \cdot_2)$ se verifica que el anillo producto $\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2$ también es cuerpo.

   b) $\mathbb{Z}[x]$ es un ideal de $\mathbb{Q}[x]$

   c) La aplicación $f : \mathbb{Z}_{11} \to \mathbb{Z}_{11}$ definida por $f(x) = x^{11}$, es un homomorfismo de anillos.

   d) El polinomio $x^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}_{17}$

   e) $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 1)$ es un cuerpo

   f) $\sqrt[8]{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt[12]{2}]$

2. (3 puntos) Se considera el conjunto:

$$R = \{aI + bM \ : \ a, b \in \mathbb{Z}\}, \qquad \text{donde} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Demostrar que $(R, +, \cdot)$ es un anillo con identidad (las operaciones son las usuales de suma y producto de matrices).

   b) Estudiar si R es anillo conmutativo y si es de división.

   c) Indicar justificadamente cuales de los siguientes elementos son unidades en R: $2I$, $I - M$.

   d) Demostrar que $J = \{3aI + 3bM \ : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ es un ideal de R.

   e) Estudiar si alguno de los siguientes elementos son divisores de cero en el anillo cociente R/J: $[2I - M]_J$, $[M^2]_J$.

   f) ¿Es J un ideal maximal de R?

3. (2 puntos) Sea $h = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$

   a) Demostrar que h es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$

   b) Sea $\mathbb{K}$ el cuerpo que es la mínima extensión de $\mathbb{Q}$ en el cual h tiene una raíz $\alpha \in \mathbb{K}$. Dar una base de $\mathbb{K}$ sobre $\mathbb{Q}$ y expresar el resultado de la operación $\alpha^5 - 2\alpha^2$ en dicha base.

   c) Expresar el elemento $(\alpha^3 - \alpha^2 - 3\alpha + 2)^{-1}$ en combinación lineal de los elementos de la base dada en el apartado anterior.

4. (2 puntos)

   a) Calcular el polinomio mínimo de $\alpha = \sqrt{3 + \sqrt{3}}$ sobre $\mathbb{Q}$. Indicar razonadamente si existe una relación de igualdad o de contenido entre los cuerpos $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ y $\mathbb{Q}(\sqrt{3 + \sqrt{3}})$

   b) En $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + x + 2)$ determinar el resultado de $(2x + 1)^2(x + 2)$

Solución:

1. *a*) La afirmación es falsa: Hoja de problemas 3-1, ejercicio $8c$.

   b) La afirmación es falsa: $x+1 \in \mathbb{Z}[x]$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}[x]$ pero $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}[x]$

   c) La afirmación es verdadera: $f(xy) = (xy)^{11} = x^{11}y^{11} = f(x)f(y)$, $\quad f(x+y) = f(x) + f(y)$ (para detalles, consultar el ejercicio 11 de la hoja de problemas 3-2).

   d) La afirmación es falsa: $x^2 + 1 = (x-4)(x-13)$ en $\mathbb{Z}_{17}[x]$

   e) La afirmación es falsa

   f) La afirmación es falsa: $B_{\mathbb{Q}(\sqrt[12]{2})} = \{1, \sqrt[12]{2}, \sqrt[6]{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[12]{2^5}, \sqrt{2}, \sqrt[12]{2^7}, \sqrt[3]{2^2}, \sqrt[4]{2^3}, \sqrt[6]{2^5}, \sqrt[12]{2^{11}}\}$ y $\sqrt[8]{2}$ no se puede expresar como combinación lineal de los elementos de $B_{\mathbb{Q}(\sqrt[12]{2})}$ con coeficientes racionales.

2. *a*) R es subanillo de $\mathbb{Z}^{2\times 2}$: $I \in R \Rightarrow R \neq \emptyset$ y tiene identidad, y para todos $X, Y \in R$ es $X = aI + bM$, $Y = cI + dM$, con $a, b, c, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow X - Y = (a-c)I + (b-d)M \in R$ y $XY = acI + (ad + bc)M + bdM^2$, como $M^2 = 2M$ se tiene que $XY = acI + (ad + bc + 2bd)M \in R$

   b) R es conmutativo: $XY = acI + (ad + bc + 2bd)M = YX$, R no es de división: $(2I - M)M = 0$

   c) $2I$ no es unidad en R. $I - M$ sí es unidad en R: $(I - M)^2 = I$

   d) $J \neq \emptyset$ porque $3I \in J$. Para todos $A, B \in J$, $A = 3aI + 3bM$, $B = 3cI + 3dM \Rightarrow A - B = 3(a-c)I + 3(b-d)M \in J$ y para todo $X = rI + sM \in R$ es $XA = AX = 3(ar)I + 3(as + br + 6bs)M \in J$

   e) Ambos son divisores de cero en R/J: $M^2(2I - M) = 2M(2I - M) = 0$

   f) J no es ideal maximal porque R/J tiene divisores de cero.

3. *a*) $[h]_2 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ que es irreducible en $\mathbb{Z}_2[x]$ porque no tiene raíces y no es $(x^2 + x + 1)^2$.

   b) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha)$, $B_{\mathbb{K}} = \{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$, $\qquad 4\alpha^3 - 2\alpha - 1$

   c) $\alpha^3 - 3\alpha - 1$

4. *a*) Consultar ejercicio 6 de la hoja 4.2

   b) Consultar ejercicio 1 de la hoja 4.3