Matemática Discreta I

Tema 4. Retículos y Álgebras de Boole

Jesús Martínez Mateo
Luis Magdalena Layos
luis.magdalena@upm.es

Departamento de Matemática Aplicada a las TIC
E.T.S. Ingenieros Informáticos
Universidad Politécnica de Madrid

Grado en Ciencia de Datos e Inteligencia Artificial
Grado en Matemáticas e Informática
Curso 2020/21

Contenidos

1. **Retículos**
   - Subretículos
   - Retículos producto
   - Homomorfismos de retículos
   - Propiedades de los retículos
2. **Álgebras de Boole**
   - Álgebras de Boole finitas
3. **Expresiones booleanas**
   - Variables y funciones booleanas
   - Simplificación de expresiones booleanas

Retículos

Primera definición de retículo

Definición

Un conjunto ordenado (A, R) es un **retículo** si todo par de elementos en A tienen supremo e ínfimo en A, es decir,

$$\forall a, b \in A,\ \exists \sup\{a, b\}, \text{ínf}\{a, b\} \in A$$

Observación. Esto no implica la existencia de supremo e infimo del conjunto. $(\mathbb{Z}, \leq)$ es retículo pero no tiene supremo ni ínfimo.

Propiedades. Sea (A, R) un retículo. $\forall a, b, c, d \in A$ se verifica que:

- $\text{ínf}\{a, b\}\ R\ a$, $b\ R \sup\{a, b\}$.
- Si $a\ R\ c$, $b\ R\ c$ entonces $\sup\{a, b\}\ R\ c$.
- Si $a\ R\ b$, $c\ R\ d$ entonces $\begin{cases} \sup\{a, c\}\ R \sup\{b, d\} \\ \text{ínf}\{a, c\}\ R\ \text{ínf}\{b, d\} \end{cases}$.
- $a\ R\ b \Leftrightarrow \sup\{a, b\} = b \Leftrightarrow \text{ínf}\{a, b\} = a$.

Retículos

Ejemplos

- $(\mathbb{N}, \leq)$ es retículo, y se tiene que

$$\sup_{\leq}\{a,b\} = \max\{a,b\} \qquad \inf_{\leq}\{a,b\} = \min\{a,b\}.$$

- $(\mathbb{N}, |)$ y $(D_n, |)$ son retículos, y se tiene que

$$\sup_{|}\{a,b\} = \mathrm{mcm}\{a,b\} \qquad \inf_{|}\{a,b\} = \mathrm{mcd}\{a,b\}.$$

- Sea S un conjunto. $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es retículo, y se tiene que

$$\sup_{\subseteq}\{A,B\} = A \cup B \qquad \inf_{\subseteq}\{A,B\} = A \cap B.$$

Observación. Nótese que, todo conjunto totalmente ordenado es un retículo, aunque el recíproco no es cierto en general.

Retículos

Segunda definición de retículo

Definición

Un **retículo** es una terna $(A, \vee, \wedge)$ donde A es un conjunto y $\vee, \wedge$ son dos operaciones binarias definidas en A, es decir $\vee, \wedge$: $A \times A \to A$, tal que verifican las siguientes propiedades:

- Idempotente: $\forall a \in A, \quad a \vee a = a, \quad a \wedge a = a.$
- Conmutativa: $\forall a, b \in A, \quad a \vee b = b \vee a, \quad a \wedge b = b \wedge a.$
- Asociativa:

$$\forall a, b, c \in A, \quad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), \quad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c).$$

- Absorción: $\forall a, b \in A, \quad a \vee (b \wedge a) = a, \quad a \wedge (b \vee a) = a.$

Equivalencia entre las definiciones de retículo

Teorema

Las dos definiciones de retículo son equivalentes.
La relación entre las operaciones y el orden es la siguiente:

$$a \, R \, b \quad \Leftrightarrow \quad a \vee b = b \quad \Leftrightarrow \quad a \wedge b = a,$$

o equivalentemente $a \vee b = \sup\{a, b\}$, $a \wedge b = \inf\{a, b\}$.

Demostración.

Sea el conjunto ordenado (A, R) un retículo. Construimos las operaciones $\vee, \wedge \colon A \times A \to A$ como $a \vee b = \sup\{a, b\}$, $a \wedge b = \inf\{a, b\}$. Es inmediato comprobar que las operaciones $\vee, \wedge$ verifican las propiedades idempotente, conmutativa, asociativa y absorción, y además $\forall a, b \in A, \; a \, R \, b \Leftrightarrow a \vee b = b \Leftrightarrow a \wedge b = a$.

Equivalencia entre las definiciones de retículo

Demostración (continuación).
Recíprocamente, sea $(A, \vee, \wedge)$ un retículo. La relación dada por $a\ R\ b \Leftrightarrow a \vee b = b \Leftrightarrow a \wedge b = a$ es una relación de orden puesto que verifica las propiedades:

- Reflexiva: $\forall a \in A$, $a \vee a = a, a \wedge a = a \Rightarrow a\ R\ a$.
- Antisimétrica: $\forall a, b \in A$,

$$\left.\begin{array}{l} a\ R\ b \Rightarrow a \vee b = b,\ a \wedge b = a \\ b\ R\ a \Rightarrow b \vee a = a,\ b \wedge a = b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \vee b = b,\ b \vee a = a \Rightarrow b = a \\ a \wedge b = a,\ b \wedge a = b \Rightarrow a = b \end{array}\right\}.$$

- Transitiva: $\forall a, b, c \in A$, $\left.\begin{array}{l} a\ R\ b \Rightarrow a \vee b = b,\ a \wedge b = a \\ b\ R\ c \Rightarrow b \vee c = c,\ b \wedge c = b \end{array}\right\} \Rightarrow .$

$$\left.\begin{array}{l} c = b \vee c = (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) = a \vee c \Rightarrow a \vee c = c \\ a = a \wedge b = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c \Rightarrow a \wedge c = a \end{array}\right\} \Rightarrow a\ R\ c$$

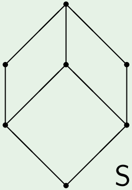
.

□

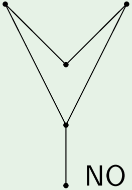
Ejemplos

Ejemplos

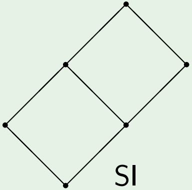
Veamos cuales de los siguientes conjuntos ordenados son retículos



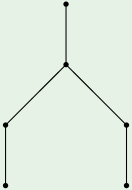
SI



NO



SI



NO

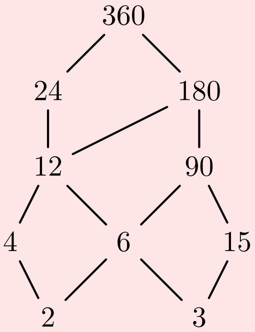
Observación: Si en un conjunto ordenado existen dos elementos maximales o dos minimales entonces ese conjunto ordenado no es un retículo. Tampoco lo es si existen dos puntos (necesariamente no comparables) sin cotas superiores o inferiores o de tal forma que dentro del conjunto de cotas superiores (o inferiores) existan dos elementos minimales (o dos elementos maximales).

Retículos

Ejercicio 8.

Se considera el conjunto $A = \{2, 3, 4, 6, 12, 15, 24, 90, 180, 360\}$ y la relación de orden de divisibilidad. ¿Es $(A, |)$ un retículo?

El diagrama de Hasse de $(A, |)$ es:

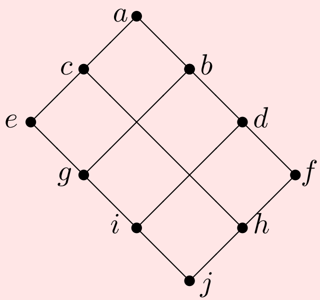


No es un retículo porque el conjunto $\{2, 3\} \subseteq A$ no tiene ínfimo.

Retículos

Ejercicio 9.

Considera el conjunto ordenado A de la figura. ¿Es A un retículo? Sea A' el conjunto ordenado cuyo diagrama de Hasse es el mismo que el de A, pero eliminando las aristas que van de b a g y de d a i. ¿Es A' un retículo?



A no es un retículo, ya que, por ejemplo, el conjunto de dos elementos $\{h, i\}$ tienen como cotas superiores $\{a, b, c, d\}$, pero no tiene supremo.
A' sí es un retículo, ya que todo par de elementos tienen supremo e ínfimo.

Subretículos

Definición

Sea (A, R) un retículo y B un subconjunto no vacío de A. Se dice que (B, R) es un subretículo, si es un retículo y para cualesquiera $a, b \in B$ se tiene que

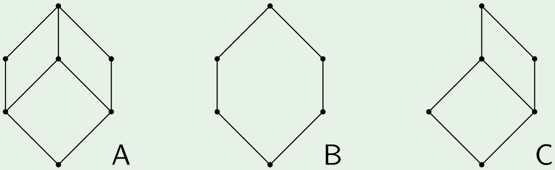
$$\sup_B\{a, b\} = \sup_A\{a, b\} \text{ e } \inf_B\{a, b\} = \inf_A\{a, b\}.$$

Esto es equivalente a que para cualesquiera $a, b \in B$ se cumpla que

$$\sup_A\{a, b\} \in B \text{ e } \inf_A\{a, b\} \in B.$$

Ejemplos

B no es subretículo de A, pero C si.



Retículos producto

Proposición.

Si (A,R) y (B,S) son retículos, entonces $(A\times B, PROD)$ también lo es.
Si (A,R) y (B,S) son retículos, entonces $(A\times B, LEX)$ es retículo si R es un orden total en A o si existe $\inf B$ y $\sup B$.

Demostración.

Comprobamos que cualquier par de elementos $(a,b),(c,d)\in A\times B$, tienen supremo e ínfimo.
Si $a=c$, $\sup_{LEX}\{(a,b),(a,d)\}=(a,\sup_S\{b,d\})$ e $\inf_{LEX}\{(a,b),(a,d)\}=(a,\inf_S\{b,d\})$.
Si $a\neq c$ y $a\ R\ c$, $\sup_{LEX}\{(a,b),(c,d)\}=(c,d)$ e $\inf_{LEX}\{(a,b),(c,d)\}=(a,b)$.
Si $a\neq c$ y $c\ R\ a$, $\sup_{LEX}\{(a,b),(c,d)\}=(a,b)$ e $\inf_{LEX}\{(a,b),(c,d)\}=(c,d)$.
Finalmente, si a y c no son comparables, entonces

$$\sup_{LEX}\{(a,b),(c,d)\}=(\sup_R\{a,c\},\inf B) \text{ e } \inf_{LEX}\{(a,b),(c,d)\}=(\inf_S\{a,c\},\sup B)$$

siempre que existan $\inf B$ y $\sup B$. $\square$

Ejemplo

Dados los reticulos $(D_6,|)$ y $(\mathbb{N},\leq)$, vemos que $(D_6\times\mathbb{N}, LEX)$ no es retículo ya que no existe el ínfimo de $\{(2,n),(3,k)\}$ para ningún valor de n y k. En cambio $(D_6\times\mathbb{N}, PROD)$ y $(\mathbb{N}\times D_6, LEX)$ si son retículos.

Ejercicios

Hoja Retículos, ejercicio 4.

Sea $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ la colección de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. ¿Es $(\mathcal{F}(\mathbb{N}), \subseteq)$ un retículo?

Sí es un retículo, porque para cada par de elementos $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$,

$$\sup\{A, B\} = A \cup B \text{ e } \inf\{A, B\} = A \cap B$$

son subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$.

Hoja Retículos, ejercicio 5.

Sea $E(\mathbb{N})$ la colección de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ que tienen un número par de elementos. ¿Es $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$ un retículo?

Si consideramos los elementos $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 3\}$, el conjunto $\{A, B\}$ no tiene supremo en $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$, ya que cualquier conjunto de la forma $\{1, 2, 3, k\}$ (con $k \in \mathbb{N}$) es una cota superior de $\{A, B\}$, que no contiene ningún conjunto que sea cota superior de $\{A, B\}$.
Como el conjunto de cotas superiores tiene infinitos minimales, no hay supremo.
Por tanto el conjunto ordenado $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$ no es un retículo.

Homomorfismos de retículos

Definición

Sean (A, R) y (B, S) retículos. Se dice que una aplicación $f : A \to B$ es un homomorfismo de retículos si para cualesquiera $a, b \in A$ se tiene que

$$f(\sup_R\{a,b\}) = \sup_S\{f(a), f(b)\} \text{ y } f(\inf_R\{a,b\}) = \inf_S\{f(a), f(b)\}.$$

Observación: Utilizando la segunda definición de retículo se tiene la siguiente caracterización equivalente de homomorfismo de retículos.

Definición

Sean $(A, \vee, \wedge)$ y $(B, \vee', \wedge')$ retículos y sea $f : A \to B$ una aplicación entre ambos. Entonces f es un homomorfismo de retículos si para cualesquiera $a, b \in A$ se tiene que

$$f(a \vee b) = f(a) \vee' f(b) \text{ y } f(a \wedge b) = f(a) \wedge' f(b).$$

Isomorfismos de retículos

Definición

Sean $(A, \vee, \wedge)$ y $(B, \vee', \wedge')$ retículos y sea $f : A \to B$ un homomorfismo entre ambos. Se dice que:

i) f es un monomorfismo si f es inyectiva,

ii) f es un epimorfismo si f es suprayectiva,

iii) f es un isomorfismo si f es biyectiva.

Proposición.

Sean (A, R) y (B, S) retículos y sea $f : A \to B$ una aplicación biyectiva. Entonces f es un isomorfismo de retículos si y solo si f es un isomorfismo de conjuntos ordenados.

Ejemplo

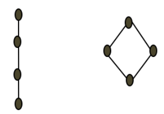
$(\mathcal{P}(\{a, b\}), \subset)$ y $(D_6, |)$ son retículos isomorfos.

Ejercicios

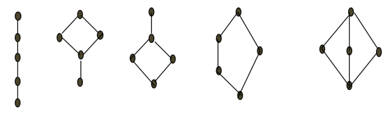
Hoja Retículos, ejercicio 3.

Obtén los diagramas de Hasse de todos los retículos, salvo isomorfismos, de uno, dos, tres, cuatro y cinco elementos.

De un elemento y de dos elementos, trivial, sólo hay uno.
De tres elementos, sólo hay uno, que es una cadena.
De cuatro elementos, existen dos:



De cinco elementos existen cinco:



Propiedades de los retículos

Definición

Un retículo es **acotado** si posee elemento máximo y mínimo. Notaremos por 1 al elemento máximo y por 0 al elemento mínimo.

Definiciones

- Sea $(A, \vee, \wedge)$ un retículo acotado. $\forall a \in A$ decimos que $a' \in A$ es el **elemento complementario** de a si $a \vee a' = 1$ y $a \wedge a' = 0$.
- Un retículo es **complementario** si es acotado y todos sus elementos poseen complementario.

Definición

Un retículo $(A, \vee, \wedge)$ es **distributivo** si $\forall a, b, c \in A$ se verifica que:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \qquad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Propiedades de los retículos

Teorema

Todo retículo finito es acotado.

Demostración.
Sea $(A, \vee, \wedge)$ un retículo con $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ finito. Veamos primero que existe $b \in A$ tal que $a\ R\ b$, es decir, $a \vee b = b, a \wedge b = a \quad \forall a \in A$.
Elegimos $b = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$. Por las propiedades asociativa y de absorción tenemos que

$$(a_1 \vee \dots \vee a_n) \wedge a_i = (a_i \vee (a_1 \vee \dots \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee \dots \vee a_n)) \wedge a_i = a_i,$$

mientras que $(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n) \vee a_i = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n = b$, para todo a_i con $i \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto b es máximo en $(A, \vee, \wedge)$, es decir $a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n = 1$.
Análogamente, veamos que $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = 0$. Por la propiedad de absorción tenemos que $(a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n) \vee a_i = a_i$, mientras que $(a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n) \wedge a_i = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$, para todo a_i con $i \in \{1, \dots, n\}$, por lo tanto $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$ es mínimo. $\square$

Propiedades de los retículos

Ejemplos (Retículos complementarios)

- $(\mathbb{N}, |)$ no es un retículo acotado y por lo tanto tampoco es complementario.
- $(D_n, |)$ es un retículo complementario si y sólo si n es producto de números primos distintos.
- Sea S un conjunto. $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un retículo complementario.

Teorema

En un retículo acotado y distributivo, el complementario de un elemento, si existe, es único.

Corolario

Si en un retículo acotado un elemento tiene más de un complementario, entonces el retículo no es distributivo.

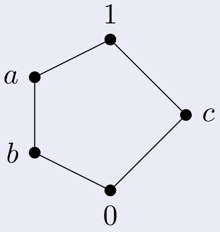
Propiedades de los retículos

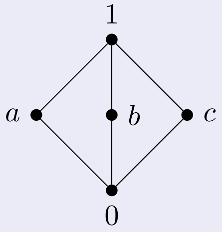
Ejemplos (Retículos distributivos)

- $(D_n, |)$ es un retículo distributivo $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Sea S un conjunto. $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un retículo distributivo.

Teorema

Un retículo es no distributivo si y sólo si tiene un subretículo isomorfo a cualquiera de los siguientes retículos:

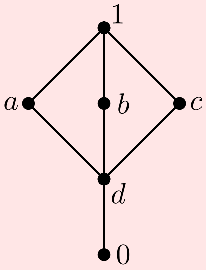




Ejercicios

Hoja Retículos, ejercicio 6.

Estudia si en el siguiente retículo se verifica la igualdad $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$



No se verifica, ya que $a \vee (b \wedge c) = a \vee d = a$, pero $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = 1 \wedge 1 = 1$.

Ejercicios

Hoja Retículos, ejercicio 7.

Encuentra el complementario de cada elemento en $(D_{42}, /)$, $(D_{45}, /)$ y $(D_{105}, /)$. ¿Son álgebras de Boole estos retículos?

La descomposición de 42 en factores primos es $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, y por lo tanto sí es un álgebra de Boole. $|D_{42}| = 8$, con $D_{42} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$ y los complementarios son

$$1' = 42, \quad 2' = 21, \quad 3' = 14 \quad 6' = 7.$$

La descomposición en factores primos de 45 es $45 = 3^2 \cdot 5$ y, por tanto, no es un álgebra de Boole. $|D_{45}| = 6$, donde $D_{45} = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$, y

$$1' = 45, \quad 5' = 9, \text{ pero } \nexists\, 3', \nexists\, 15'.$$

La descomposición en factores primos de 105 es $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ y, por tanto, sí es un álgebra de Boole. El número de elementos es $|D_{105}| = 8$ donde $D_{105} = \{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105\}$, y los complementarios son:

$$1' = 105, \quad 3' = 35, \quad 5' = 21, \quad 7' = 15.$$

Álgebras de Boole

Definición

Un **álgebra de Boole** es un retículo acotado, complementario y distributivo.

Un álgebra de Boole es, por lo tanto, una terna $(A, \vee, \wedge)$ compuesta por un conjunto A y dos operaciones $\vee, \wedge \colon A \times A \to A$ (suma y producto) que $\forall x, y, z \in A$ verifican las siguientes propiedades:

- Idempotente: $x \vee x = x, \quad x \wedge x = x$.
- Conmutativa: $x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x$.
- Asociativa: $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.
- Absorción: $x \vee (y \wedge x) = x, \quad x \wedge (y \vee x) = x$.
- Existen elementos neutros $\begin{cases} \text{para la suma: } 0 & x \vee 0 = x \\ \text{para el producto: } 1 & x \wedge 1 = x \end{cases}$
- Complementario: $\forall x \in A, \exists!\, x' \in A$ tal que $x \vee x' = 1, x \wedge x' = 0$.
- Distributiva: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Álgebras de Boole

Ejemplos

- Sea S un conjunto. $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un álgebra de Boole.
- El conjunto de Boole $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ con las operaciones suma y producto dadas en la siguiente tabla es un álgebra de Boole.

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

- Sea $\mathcal{B}^n = \{0, 1\}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathcal{B}\}$ y las operaciones:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \dots, x_n \vee y_n)$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \dots, x_n \wedge y_n)$$

$(\mathcal{B}^n, \vee, \wedge)$ es un álgebra de Boole.

Álgebras de Boole

Teorema

Sea $(A, \vee, \wedge)$ *un álgebra de Boole. Se verifican las siguientes propiedades:*

- *Absorción del neutro:* $1 \vee x = 1, \quad 0 \wedge x = 0.$
- *Involución:* $(x')' = x.$
- *Leyes de De Morgan:* $(x \vee y)' = x' \wedge y', \quad (x \wedge y)' = x' \vee y'.$

Demostración.

- $1 \vee x = (x \vee x') \vee x = (x \vee x) \vee x' = x \vee x' = 1.$
  $0 \wedge x = (x \wedge x') \wedge x = (x \wedge x) \wedge x' = x \wedge x' = 0.$

□

Álgebras de Boole

Teorema

El producto de álgebras de Boole (con el orden producto) es un álgebra de Boole.

Demostración.

Sean A y B álgebras de Boole, por tanto retículos acotados. Al ser retículos acotados (con máximo y mínimo), $A \times B$ también será un retículo acotado con $1_{A\times B} = (1_A, 1_B)$ y $0_{A\times B} = (0_A, 0_B)$. También $A \times B$ es complementario pues para todo $(a, b) \in A \times B$ se tiene $(a, b)' = (a', b')$. Finalmente, es fácil ver que $A \times B$ es distributivo y por tanto un álgebra de Boole. $\square$

Ejemplo

$(\mathcal{B}^n, \leq_{PROD}) = (\{0, 1\}^n, \leq)$ es un álgebra de Boole.

Álgebras de Boole finitas

Teorema

Si $(A, \vee, \wedge)$ es un álgebra de Boole finita, existe un conjunto finito C tal que A y $\mathcal{P}(C)$ son isomorfos.

Demostración.
Sea $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ el conjunto de los elementos minimales de $A \setminus \{0\}$. Es fácil ver que para todo $a \in A$ existen $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n} \in C$ tales que $a = a_{i_1} \vee a_{i_2} \vee \cdots \vee a_{i_n}$, y que esta expresión es única (salvo orden). Este hecho permite definir una biyección $\phi : A \to \mathcal{P}(C)$ que resulta ser un isomorfismo de conjuntos ordenados y por tanto de retículos. $\square$

Corolario: Si $(A, \vee, \wedge)$ es un álgebra de Boole finita, $|A| = 2^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

Álgebras de Boole finitas

Teorema

Si C es un conjunto finito con n elementos, entonces las álgebras de Boole $\mathcal{P}(C)$ y $\mathcal{B}^n$ son isomorfas ($\mathcal{B} = \{0, 1\}$).

Demostración.
Si $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, consideramos

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathcal{P}(C) & \to & \mathcal{B}^n \\ & S = \{c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_k}\} & \longmapsto & \phi(S) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \end{array}$$

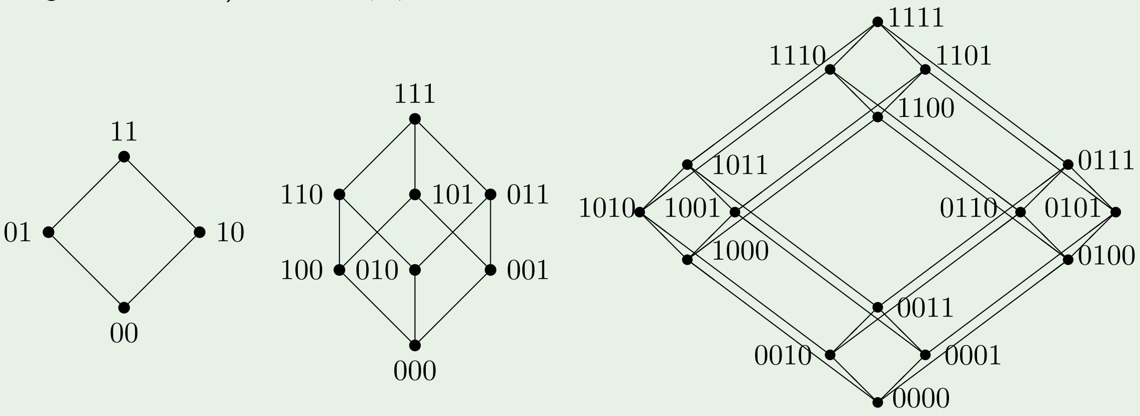
donde $b_i = 1$ si y solo si $c_i \in S$. Es fácil ver que ϕ es biyectiva y que ϕ y ϕ^{-1} conservan el orden. $\square$

Corolario: Todo álgebra de Boole finita es isomorfa a $\mathcal{B}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, el diagrama de Hasse de todo álgebra de Boole es de tipo cúbico y para toda álgebra de Boole finita, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|A| = 2^n$.

Álgebras de Boole finitas

Ejemplo

Representamos los diagramas de Hasse de $\mathcal{B}^n$ (isomorfas a cualquier Algebra de Boole finita de igual dimensión) con $n = 2, 3, 4$.

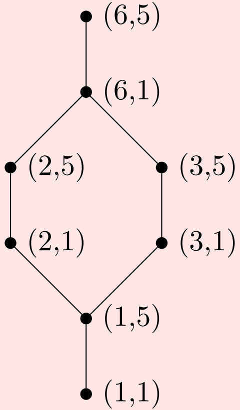


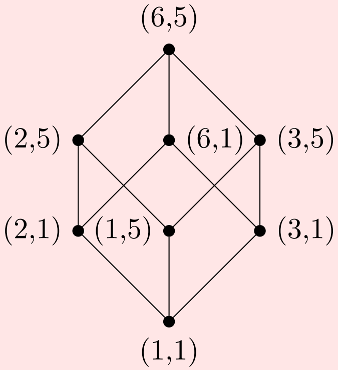
Álgebras de Boole finitas

Primer parcial octubre de 2019. Ejercicio 2d.

Razona si $(D_6 \times D_5,\ \text{Lex})$ y/o $(D_6 \times D_5,\ \text{Prod})$ son Álgebras de Boole.

Representamos los conjuntos $(D_6 \times D_5,\ \text{Lex})$ y $(D_6 \times D_5,\ \text{Prod})$. El conjunto $(D_6 \times D_5,\ \text{Lex})$ no es un Álgebra de Boole puesto que varios de sus elementos no tienen elemento complementario ($(1, 5)$, $(2, 1)$, $(2, 5)$, $(3, 1)$, $(3, 5)$ y $(6, 1)$). El conjunto $(D_6 \times D_5,\ \text{Prod})$ es un Álgebra de Boole puesto que es Isomorfo con $[0, 1]^3$, o con $(D_{30}, |)$, siendo ambos conjuntos Álgebras de Boole.





Variables y funciones booleanas

Definición

Una **función booleana** es una aplicación $f : A \to C$ entre álgebras de Boole finitas.

Observación: Puesto que toda álgebra de Boole finita es isomorfa a $\mathcal{B}^n$ para algún n, podemos definir función boolena como toda aplicación $f : \mathcal{B}^k \to \mathcal{B}^m$.
Por otro lado, como toda función $f : \mathcal{B}^k \to \mathcal{B}^m$ tiene m componentes bastará estudiar las funciones booleanas de la forma $f : \mathcal{B}^k \to \mathcal{B}$.

Variables y funciones booleanas

Definición

- Una **variable booleana** es una variable que representa dos posibles valores, e.g. $x \in \{0, 1\}$.
- Una **función booleana** de n variables es una aplicación $f : \mathcal{B}^n \to \mathcal{B}$ tal que

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \qquad \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{B}^n.$$

- Sea $f : \mathcal{B}^n \to \mathcal{B}$ una función booleana. Llamamos **conjunto de verdad** de la función f al conjunto

$$S(f) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{B}^n \mid f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1\}.$$

Tablas de verdad

Definición

Una **tabla de verdad** es una tabla que contiene todos los posibles valores que pueden tomar un conjunto de variables booleanas.

Podemos representar una función booleana mediante una tabla de verdad de la forma

x_1	x_2	$\dots$	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	$\dots$	0	$f(0, 0, \dots, 0)$
0	0	$\dots$	1	$f(0, 0, \dots, 0)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
0	1	$\dots$	1	$f(0, 1, \dots, 1)$
1	0	$\dots$	0	$f(1, 0, \dots, 0)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	$\dots$	1	$f(1, 1, \dots, 1)$

Tablas de verdad

Ejemplo

La tabla de verdad de la función dada por el conjunto de verdad $S(f) = \{(0,0,1),(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ es

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Expresiones booleanas

Definición

Definimos una **expresión booleana** (o expresión de Boole) en n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de forma recursiva:

- Las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son expresiones de Boole.
- Los símbolos 0 y 1 son expresiones de Boole.
- Si $E_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $E_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son expresiones de Boole, entonces $E_1 \vee E_2$, $E_1 \wedge E_2$ y E_1' son expresiones de Boole.
- No existen más expresiones de Boole.

Propiedad. Sea $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una expresión booleana en n variables. Existe una función booleana $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ en m variables con $m \geq n$ tal que $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Decimos entonces que $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una expresión que representa a $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Expresiones booleanas

Ejemplo

La expresión booleana $E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2' \wedge x_3)$ representa a la función booleana $f(x_1, x_2, x_3)$ con la siguiente tabla de verdad

x_1	x_2	x_3	$x_1 \wedge x_2$	x_2'	$x_2' \wedge x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1

Expresiones booleanas

Definiciones

- Llamamos **producto elemental** asociado a $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a la expresión

$$E_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = E_{x_1} \wedge E_{x_2} \wedge \ldots \wedge E_{x_n},$$

donde $E_{x_i} = \begin{cases} x_i \text{ si } x_i = 1 \\ x_i' \text{ si } x_i = 0 \end{cases} \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$

- Decimos que una expresión E está en forma de **suma de productos elementales** cuando $E = E_1 \vee E_2 \vee \ldots \vee E_k$ donde $E_1, E_2, \ldots, E_k$ son productos elementales.

Propiedad. Sea $f\colon \mathcal{B}^n \to \mathcal{B}$ una función booleana. Existe una expresión booleana $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en n variables que representa a $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. A partir del conjunto de verdad, $S(f)$, podemos construir una expresión $E(f)$ como suma de productos de elementales que representa a f,

$$E(f) = \vee_{x \in S(f)} E_x.$$

Expresiones booleanas

Ejemplos

1. Sea $f\colon \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}$ una función booleana con conjunto de verdad $S(f) = \{(0,0),(0,1)(1,0)\}$. Una expresión booleana que representa a f es
$$E(f) = E_{(0,0)} \vee E_{(0,1)} \vee E_{(1,0)} = (x_1' \wedge x_2') \vee (x_1' \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2')$$
2. Sea $f\colon \mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}$ una función booleana con conjunto de verdad $S(f) = \{(0,1,1),(1,0,1)(1,1,1)\}$. Una expresión booleana que representa a f es
$$E(f) = E_{(0,1,1)} \vee E_{(1,0,1)} \vee E_{(1,1,1)} = (x_1' \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2' \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

Simplificación de expresiones booleanas

Definición

Decimos que dos expresiones booleanas son **equivalentes** si y sólo si representan la misma función booleana, y por lo tanto coinciden sus tablas de verdad.

Teorema

Sean $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una expresión booleana en n variables, y z una variable booleana. Las expresiones $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y

$$E(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = (E(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge z) \vee (E(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge z')$$

son expresiones equivalentes.

Demostración.

$E(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = (E(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge z) \vee (E(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge z')$
$= E(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge (z \vee z') = E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\square$

Ejercicios

Algebras de Boole. Ejercicio 5

Determina $S(f)$ para las funciones $f : B^3 \longrightarrow B$ definidas por:

a) $f(x, y, z) = x \wedge y$

b) $f(x, y, z) = z'$

c) $f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee z'$

a) $S(f) = \{111, 110\}$

b) $S(f) = \{110, 100, 010, 000\}$

c) $S(f) = \{111, 110, 100, 010, 000\}$

Ejercicios

Algebras de Boole. Ejercicio 10a

Dada la función booleana $f : B^4 \longrightarrow B$
$f\left(x,y,z,t\right) = xyzt + xy'zt + xyzt' + xy'zt' + x'y'z't' + x'yz't' + x'y'z't + x'yz't$, demuestra que $f\left(x,y,z,t\right) = xz + x'z'$, utilizando las propiedades de un Álgebra de Boole.

Usamos la propiedad distributiva sobre t, t', y luego y e y'. Por otro lado sabemos que $t + t' = 1$ e $y + y' = 1$. Con todo ello resulta que:

$$
\begin{aligned}
f\left(x,y,z,t\right) &= xyzt + xy'zt + xyzt' + xy'zt' + x'y'z't' + x'yz't' + x'y'z't + x'yz't = \\
&= (xyz + xy'z)t + (xyz + xy'z)t' + (x'yz' + x'y'z')t' + (x'yz' + x'y'z')t = \\
&= x(y + y')zt + x(y + y')zt' + x'(y + y')z't' + x'(y + y')t = \\
&= xzt + xzt' + x'z't' + x'z't = xz + x'z'.
\end{aligned}
$$

Mapas de Karnaugh

Definición

- Un mapa de Karnaugh es una representación gráfica de una tabla de verdad, y por lo tanto, de una función booleana.
- Para una función booleana de n variables el mapa consta de 2^n cuadrados, y cada cuadrado representa un producto elemental, es decir, un elemento $x \in \mathcal{B}^n$.
- Los productos elementales son adyacentes en el mapa si y sólo si difieren tan sólo en una variable. Los lados opuestos de la cuadrícula se consideran adyacentes.
- Sobre dicha cuadrícula se identifican los cuadrados correspondientes a los productos que aparecen en la expresión de la función en forma de suma de productos elementales.

Mapas de Karnaugh

Ejemplos

Mapas de Karnaugh de 2, 3 y 4 variables, indicando en cada cuadrado el elemento de $\mathcal{B}^n$ al que corresponde.

	y	y'
x	11	10
x'	01	00

	y	y	y'	y'
x	110	111	101	100
x'	010	011	001	000
	z'	z	z	z'

	y	y	y'	y'	
x	1100	1110	1010	1000	t'
x	1101	1111	1011	1001	t
x'	0101	0111	0011	0001	t
x'	0100	0110	0010	0000	t'
	z'	z	z	z'	

1. Construimos el mapa de Karnaugh.
2. Utilizamos rectángulos simples de dimensiones $2^n \times 2^m$ $(n, m = 0, 1, 2)$ para recubrir la expresión de la función en forma de suma de productos elementales. Empleamos los rectángulos simples de mayor tamaño posible.
3. Eliminamos todos los rectángulos totalmente contenidos en otros, empezando por los de menor tamaño.
4. La expresión simplificada es la suma de expresiones correspondientes a los rectángulos no eliminados.

Mapas de Karnaugh

Simplificación

	y	y	y'	y'	
x	1100	1110	1010	1000	t'
x	1101	1111	1011	1001	t
x'	0101	0111	0011	0001	t
x'	0100	0110	0010	0000	t'
	z'	z	z	z'	

	y	y	y'	y'	
x	0	0	1	0	t'
x	0	0	1	0	t
x'	0	0	0	0	t
x'	0	0	0	0	t'
	z'	z	z	z'	

$$f(x,y,z,t) = xy'zt' + xy'zt = xy'z(t+t') = zy'z$$

Mapas de Karnaugh

Simplificación

	y	y	y'	y'	
x	1100	1110	1010	1000	t'
x	1101	1111	1011	1001	t
x'	0101	0111	0011	0001	t
x'	0100	0110	0010	0000	t'
	z'	z	z	z'	

	y	y	y'	y'	
x	1	1	0	0	t'
x	1	1	0	0	t
x'	0	0	0	0	t
x'	0	0	0	0	t'
	z'	z	z	z'	

$$f(x,y,z,t) = xyz't' + xyz't + xyzt' + xyzt =$$

$$= xyz'(t+t') + xyz(t+t') = xyz' + xyz = xy(z+z') = xy$$

Mapas de Karnaugh

Simplificación

A efectos de adyacencia, los lados opuestos del mapa son adyacentes.

	y	y	y'	y'	
x	1100	1110	1010	1000	t'
x	1101	1111	1011	1001	t
x'	0101	0111	0011	0001	t
x'	0100	0110	0010	0000	t'
	z'	z	z	z'	

	y	y	y'	y'	
x	0	0	0	0	t'
x	1	0	0	1	t
x'	1	0	0	1	t
x'	0	0	0	0	t'
	z'	z	z	z'	

$$f(x,y,z,t) = xyz't + x'yz't + xy'z't + x'y'z't =$$

$$= (x+x')yz't + (x+x')y'z't = yz't + y'z't = (y+y')z't = z't$$

Mapas de Karnaugh

Simplificación

	y	y	y'	y'	
x	1	0	0	1	t'
x	0	0	0	0	t
x'	0	0	0	0	t
x'	1	0	0	1	t'
	z'	z	z	z'	

$$f(x, y, z, t) = z't'$$

	y	y	y'	y'	
x	1	1	0	0	t'
x	1	1	0	0	t
x'	1	1	0	0	t
x'	1	1	0	0	t'
	z'	z	z	z'	

$$f(x, y, z, t) = y$$

Mapas de Karnaugh

Simplificación

	y	y	y'	y'	
x	0	0	1	1	t'
x	0	0	1	1	t
x'	1	0	1	1	t
x'	0	0	1	0	t'
	z'	z	z	z'	

$$f(x,y,z,t) = xy' + y't + y'z + x'y't$$

Método de Quine-McCluskey

El método de Quine-McCluskey para simplificar expresiones booleanas funciona agrupando sistematicamente productos que difieren en una variable, pero en vez de utilizar productos elementales, utiliza los elementos de $S(f)$.
El desarrollo del método es el siguiente:

1. Se ordenan los elementos de $S(f)$ por bloques en orden decreciente según el número de unos.
2. Se compara cada elemento de cada bloque con los del bloque inmediatamente inferior de la forma siguiente: Si dos elementos difieren en un solo término, se marcan ambos elementos, y se pone en una nueva lista el elemento obtenido al sustituir el término repetido por un guión.
3. Se repite el paso 2) con la nueva lista y se continua este proceso, hasta que no se pueda continuar.

Método de Quine-McCluskey

4. Cuando ya no se pueda continuar:
   a) Se consideran todos los elementos no marcados de todas las listas,
   b) para cada $b \in \mathcal{B}^n$ con $f(b) = 1$ se elige uno de estos elementos no marcados con el siguiente criterio:
      - Primero elegimos aquellos para los que existe una única posibilidad,
      - Para los restantes se elige la menor cantidad posible de entre aquellos con mayor cantidad de guiones.

La expresión booleana formada por la disyunción de las expresiones correspondientes a estos elementos es una expresión simplificada. Ésta dependerá de las elecciones hechas en el proceso.

Ejemplo

Obtenemos una expresión booleana en forma de "mínima suma de productos" para la función booleana cuyo conjunto de verdad es $S(f) = \{1100, 1110, 0100, 1111, 0111, 1011, 1000, 0000\}$ utilizando el método de Quine-McCluskey.

P1

$$\begin{array}{r}
0000 \\ \hline
0100 \\
1000 \\ \hline
1100 \\ \hline
1110 \\
0111 \\
1011 \\ \hline
1111
\end{array}$$

Ejemplo

Obtenemos una expresión booleana en forma de "mínima suma de productos" para la función booleana cuyo conjunto de verdad es $S(f) = \{1100, 1110, 0100, 1111, 0111, 1011, 1000, 0000\}$ utilizando el método de Quine-McCluskey.

$$
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{l}{\text{P1}} \\
* & 0000 \\ \hline
* & 0100 \\
* & 1000 \\ \hline
* & 1100 \\ \hline
* & 1110 \\
* & 0111 \\
* & 1011 \\ \hline
* & 1111
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{r}
\text{P2} \\
\text{0-00} \\
\text{-000} \\ \hline
\text{-100} \\
\text{1-00} \\ \hline
\text{11-0} \\ \hline
\text{111-} \\
\text{-111} \\
\text{1-11}
\end{array}
$$

Quine-McCluskey

Simplificación

Ejemplo

Obtenemos una expresión booleana en forma de "mínima suma de productos" para la función booleana cuyo conjunto de verdad es $S(f) = \{1100, 1110, 0100, 1111, 0111, 1011, 1000, 0000\}$ utilizando el método de Quine-McCluskey.

$$
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{l}{\text{P1}} \\
* & 0000 \\ \hline
* & 0100 \\
* & 1000 \\ \hline
* & 1100 \\ \hline
* & 1110 \\
* & 0111 \\
* & 1011 \\ \hline
* & 1111
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{l}{\text{P2}} \\
* & 0\text{-}00 \\
* & \text{-}000 \\ \hline
* & \text{-}100 \\
* & 1\text{-}00 \\ \hline
 & 11\text{-}0 \\ \hline
 & 111\text{-} \\
 & \text{-}111 \\
 & 1\text{-}11
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{c}
\text{P3} \\
\text{--}00 \\
\cancel{\text{--}00}
\end{array}
$$

Quine-McCluskey

Simplificación

Paso 4.

	1100	1110	0100	1111	0111	1011	1000	0000
11-0	X	X						
111-		X		X				
-111				X	X			
1-11				X		X		
--00	X		X				X	X

$$\begin{aligned} f(x,y,z,t) &= z't' + yzt + xzt + xyt' \\ &= z't' + yzt + xzt + xyz \end{aligned}$$

Ejercicios

Algebras de Boole. Ejercicio 13a

Simplifica la siguiente expresión booleana por el algoritmo de Quine-McCluskey:

$E(x,\ y,\ z,\ t) = xyzt + xyz't + xy'zt + xy'z't + x'yzt + x'y'zt + xyzt' + x'yzt' + x'yz't'$

$$\begin{array}{c} 1111* \\ \hline 1011* \\ 1101* \\ 1110* \\ 0111* \\ \hline 1001* \\ 0011* \\ 0110* \\ \hline 0100* \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} 1-11* \\ 11-1* \\ 111-* \\ -111* \\ \hline 10-1* \\ -011* \\ 1-01* \\ -110* \\ 0-11* \\ 011-* \\ \hline {\color{red}01-0} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} {\color{red}1--1} \\ {\color{red}--11} \\ {\color{red}-11-} \end{array}$$

Ejercicios

	1111	1101	1011	1001	0111	0011	1110	0110	0100
$01-0$								$\boxed{\text{X}}$	$\boxed{\text{X}}$
$1--1$	$\boxed{\text{X}}$	$\boxed{\text{X}}$	$\boxed{\text{X}}$	$\boxed{\text{X}}$					
$--11$	$\boxed{\text{X}}$		$\boxed{\text{X}}$		$\boxed{\text{X}}$	$\boxed{\text{X}}$			
$-11-$	X				X		$\boxed{\text{X}}$	X	

$$E(x,y,z,t) = x'yt' + xt + zt + yz$$