ALGORITMICA NUMÉRICA **1er Examen Parcial**

Ejercicio 1: Una representación en coma flotante (en base 2) dedica 6 bits a la mantisa (m=$1.m_1m_2m_3m_4m_5m_6$). La representación no usa números desnormalizados y el rango de los exponentes posibles es entre -8 y 8.

a) Número mínimo de la representación:
xmin = (mantisa mínima)·2^exp_minimo = 1.000000·2^-8 = 1/256 ~ 0.0039
Separación entre el 1 y el siguiente número máquina:
Espaciado entre 1.00000 y 1.000001 = 0.000001 = 2^-6 = 1/64 = 0.0156
Error relativo de la representación: Erel <= eps/2 = 1/128 ~ 0.0078
Máxima separación entre números máquina: se dará en los números con exponente máximo => (espaciado mantisa)·2^max_exp= (2^-6) ·(2^8) = 4

b) Sea el x=3.2. Expresarlo como m·2^e dando su exponente e y su mantisa m. Error absoluto y relativo entre el número real original y su representación máquina.

x = 3.2 = 1.6 ·2 --> exponente = 1, mantisa (decimal) m = 1.6

	resto	
1.6 -->	0.6	m = 1. 1001 1001 1001 ...
1.2 -->	0.2	
0.4 -->	0.4	guardado con 6 "decimales" binarios: m = 1.100110
0.8 -->	0.8	
1.6 -->	...	y a partir de aquí se repite 1001

El número máquina es 2·(1 + 1/2 + 1/16 + 1/32) = 2 + 1 + 1/8 +1/16 = 3.1875

Error absoluto = |3.2-3.1875| = 0.0125. Erelativo = 0.0125/3.2 ~ 0.0039

c) Sea a=1/256 (un número válido en esta representación). Si la representación redondea, indicad (justificando) el resultado de las siguientes operaciones:

(1+a) 1+(a+a+a) (1+a+a+a+a)

Fijaros que a = 1/256 = mínimo número representable = eps/4 (eps = 1/64).

- (1+a) = 1 (1+eps/4 no llega a 1+eps/2 para "saltar" al siguiente nº)
- 1+(a+a+a) = 1+eps (3a=3eps/4, 1+0.75eps "salta" al siguiente nº = 1+eps)
- (1+a+a+a+a)= 1. Ante esta expresión el ordenador hace la primera operación (1+a) y el resultado se queda en 1 como en el primer caso. Luego añade el siguiente a pero vuelve a pasar lo mismo, etc.

En este último caso sería mucho mejor hacer 1+(a+a+a+a), sumando primero los términos pequeños entre si (4a) antes de añadirlos a la unidad, evitando en lo posible sumar números de magnitudes muy distintas.

Ejercicio 2:

a) Dar la expresión mediante la fórmula de Newton generalizada de un polinomio p(x) de grado dos tal que p(1)=1, p'(1)=0 y p(2)=p_2, con p_2 dado.

Se construye la tabla de diferencias divididas generalizadas con los datos dados:

xk	p[•]	p[• ,•]	p[•, •, •]
1	1	p[1,1]=p'(1)=0	p[1,1,2]=p_2-1
1	1	p[1,2]=(p_2-1)	
2	p_2		

Atendiendo a los datos de la tabla anterior, la expresión de Newton generalizada del polinomio pedido es:

$$p(x) = 1 + 0(x-1) + (p_2 - 1)(x-1)^2 = 1 + (p_2 - 1)(x-1)^2$$

b) Se considera la función a trozos s(x) = $\begin{cases} a + b(x-1) + c(x-1)^2 & x \in [0,1) \\ 1 + C(x-1)^2 & x \in [1,2] \end{cases}$

Determinar qué condiciones deben verificar los parámetros a, b, c y C en la expresión anterior para que s(x) sea una función spline cuadrático. Justificar la respuesta y dar la expresión general de dicha función spline.

Para que la función s(x) sea una función spline de grado 2, se debe verificar:

- s(x) tienen que ser un polinomio de grado dos en cada uno de los tramos de definición, lo cual se verifica para cualesquiera valores de los parámetros.
- s(x) y s'(x) deben ser continuas en el intervalo (0,2), para lo que basta imponer que lo sean en el punto x=1:

s(1-)= a = 1= s(1+) --> a=1
s'(1-)=b = 0 = s'(1+) --> b=0

Por tanto la expresión general de la familia de splines cuadrados considerada es:

$$s(x) = \begin{cases} 1 + c(x-1)^2 & x \in [0,1) \\ 1 + C(x-1)^2 & x \in [1,2] \end{cases}$$

c) Determinar la función spline de la familia resultante en el apartado anterior que interpola los datos de la tabla:

xi	0	2
yi	3	5

Imponemos que la función spline s(x) del apartado anterior verifique:

s(0)= 1+c=3 -> c=2 s(2)= 1+C=5 -> C=4.

Por tanto, la función spline pedida tiene la expresión: $s(x) = \begin{cases} 1 + 2(x-1)^2 & x \in [0,1) \\ 1 + 4(x-1)^2 & x \in [1,2] \end{cases}$

Ejercicio 3: Se considera el problema de ajustar por mínimos cuadrados los puntos de la tabla:

xi	$-\pi$	$-\pi/2$	0
yi	2	-1	1

con una función del tipo $\Phi(x) = \dfrac{a + sen(x)}{b + \cos(x)}$, verificando la condición previa $\Phi'(\pi/2)=0$.

Imponer la condición previa, linealizar el problema y resolver las ecuaciones normales correspondientes.

Nota: $\Phi'(x) = \dfrac{\cos(x)\cdot\left(b+\cos(x)\right) + sen(x)\cdot\left(a + sen(x)\right)}{\left(b+\cos(x)\right)^2}$

Imponemos la condición previa: $\Phi'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{(a+1)}{(b)^2} = 0 \quad \Rightarrow a = -1, b \neq 0$

La función de ajuste queda como $\Phi(x) = \dfrac{-1 + sen(x)}{b + \cos(x)}$, y con ella debemos aproximar los datos dados en la tabla:

$$\Phi(x_i) \approx y_i \Rightarrow \frac{-1 + sen(x_i)}{b + \cos(x_i)} \approx y_i, i = 1,2,3$$

Multiplicando por el denominador: $-1 + sen(x_i) \approx y_i \cdot b + y_i \cdot \cos(x_i)$

Agrupando términos: $y_i \cdot b \approx -1 + sen(x_i) - y_i \cdot \cos(x_i)$

Obteniéndose el sistema sobredeterminado: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} b \approx \begin{pmatrix} -1 + sen(-\pi) - 2\cdot\cos(-\pi) \\ -1 + sen(-\pi/2) + 1\cdot\cos(-\pi/2) \\ -1 + sen(0) - 1\cdot\cos(0) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} b \approx \begin{pmatrix} -1+0+2 \\ -1-1+0 \\ -1+0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Si llamamos: $H = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{c} = b$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, la solución del sistema anterior en el sentido de los mínimos cuadrados (minimización de la norma $\left\| H\cdot\bar{c} - \bar{v} \right\|_2^2$ del vector residuo $\left(H\cdot\bar{c} - \bar{v}\right)$ se obtiene resolviendo las ecuaciones normales: $H^T H \cdot \bar{c} = H^T \bar{v}$

Sustituyendo los valores de H y v en las ecuaciones normales:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} b \approx \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow 6b = 2 \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

Y la función de ajuste pedida queda como: $\Phi(x) = \dfrac{-1 + sen(x)}{\frac{1}{3} + \cos(x)}$