0.1. Lección 4.

0.1.1. El valor absoluto.

El valor absoluto de un número real a se define de la siguiente forma:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } \quad a < 0. \end{cases}$$

El valor absoluto tiene una interpretación geométrica sobre la recta real como la longitud del intervalo que tiene por extremos 0 y a o lo que es lo mismo la distancia entre los números reales 0 y a. Esto permite definir la distancia entre dos puntos de la recta real como

$$d(a, b) = |b - a|.$$

Proposición 1. *Las propiedades del valor absoluto son:*

1. $|a| \geq 0$. *Además,* $|a| = 0$ *si y sólo si* $a = 0$.
2. $|ab| = |a||b|$
3. *(Desigualdad triangular)* $|a + b| \leq |a| + |b|$

A partir de esta definición se obtienen muchas de las propiedades del valor absoluto. Destacamos alguna de ellas:

Proposición 2. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$

1. $|-a| = |a|$.
2. $|a|^2 = a^2$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$.
3. $\sqrt{a^2} = |a|$.
4. $|a - b| \geq ||a| - |b||$

Vemos la prueba de la última desigualdad. Nótese que puesto que los dos lados de la desigualdad son positivos, es decir, $|a - b| \geq 0$ y $||a| - |b|| \geq 0$ se tiene que

$$|a - b| \geq ||a| - |b|| \Leftrightarrow |a - b|^2 \geq ||a| - |b||^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b| \Leftrightarrow -2ab \geq -2|a||b| \Leftrightarrow ab \leq |ab| \qquad \checkmark$$

Interpretación del valor absoluto como distancia: Si consideramos la representación de los números reales sobre la recta real, dado $a \in \mathbb{R}$ el valor de $|a|$ representa la distancia del punto a al 0 o lo que es lo mismo la longitud del segmento de extremos 0 a. De la misma forma, para dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$, $|a - b|$ representa la distancia entre los puntos a y b, o lo que es lo mismo, la longitud del segmento de extremos a y b. Esta interpretación de valor absoluto será de gran utilidad a lo largo del curso.

Vemos a continuación otras propiedades del valor absoluto que son muy útiles en la resolución de ecuaciones o inecuaciones en las que interviene el valor absoluto:

Proposición 3. *Sea* $r > 0$*,*

1. *Si* $r > 0$*,*
$$|x| < r \Longleftrightarrow -r < x < r$$
.

2. *Si* $r > 0$*,*
$$|x| > r \Longleftrightarrow x > r \quad o \quad x < -r$$
.

A partir de lo anterior podemos calcular el conjunto de puntos cuya distancia a uno fijo a es menor que r lo cual da lugar a los intervalos o entornos centrados en un punto y de radio $r > 0$:

1. Si $r > 0$, $|x - a| < r \Longleftrightarrow a - r < x < a + r \Longleftrightarrow x \in (a - r, a + r)$. Llamaremos a $(a - r, a + r)$ intervalo abierto de centro a y radio r.
2. Si $r > 0$, $|x - a| \leq r \Longleftrightarrow a - r \leq x \leq a + r \Longleftrightarrow x \in [a - r, a + r]$. Llamaremos a $[a - r, a + r]$ intervalo cerrado de centro a y radio r.

Por otra parte

$$|x - a| > r \Longleftrightarrow x > a + r \text{ o } x < a - r \Longleftrightarrow x \in (-\infty, a - r) \cup (a + r, \infty).$$

Algunos ejercicios:

☒ Resuelve las siguientes desigualdades

i) $|x| < 1$

ii) $|3x + 1| \geq 1$

iii) $|x^2 - x| > 2$

$|x^2 - x| > 2 \Leftrightarrow x^2 - x > 2$ o $x^2 - x < -2$

iv) $|x + 4| < 2$

v) $\boxed{|x + 1| < |x - 3|}$

$|x + 1| < |x - 3| \Leftrightarrow (x + 1)^2 < (x - 3)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 < x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow 8x \leq 8 \Leftrightarrow x \leq 1$

vi) $|x - 1|\,|x + 2| \leq 4$

0.1.2. Cotas superiores e inferiores. Máximo y mínimo. Supremo e ínfimo.

Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $A \neq \emptyset$.

Definición 4. *Sea* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$.

1. *Diremos que* $R \in \mathbb{R}$ *es una cota superior del conjunto* A *si para todo* $x \in A$ *se tiene que* $x \leq R$. A *está acotado superiormente si hay alguna cota superior de* A.

2. *Diremos que* $r \in \mathbb{R}$ *es una cota inferior del conjunto* A *si para todo* $x \in A$ *se tiene que* $x \geq r$. A *está acotado inferiormente si hay alguna cota inferior de* A.

Definición 5. *Sea* $A \subset \mathbb{R}$ *y* $A \neq \emptyset$. *Diremos que el conjunto* A *está acotado si está acotado superior e inferiormente.*

Un conjunto acotado tiene infinitas cotas superiores e inferiores. Cuando alguna de dichas cotas pertenece al conjunto hablamos de máximos y mínimos.

Definición 6. *Sea* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$.

1. *Diremos que* $R \in \mathbb{R}$ *es el elemento máximo del conjunto* A *(o el máximo de* A*) si* R *es cota superior del conjunto y pertenece al conjunto, es decir,* $R \in A$ *y* $x \leq R$ *para todo* $x \in A$.

2. *Diremos que* $r \in \mathbb{R}$ *es el elemento mínimo del conjunto* A *(o el mínimo de* A*) si* r *es cota inferior del conjunto y pertenece al conjunto* A, *es decir* $r \in A$ *y para todo* $x \in A$ *se tiene que* $x \geq r$.

Todo conjunto finito de números reales tiene máximo y mínimo

Es importante señalar que todo conjunto finito de elementos en $\mathbb{R}$ tiene máximo y mínimo. En efecto, en el caso de dos números $a, b \in \mathbb{R}$ se puede comprobar que

$$max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}, \qquad min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$$

Por lo tanto, si tenemos tres números $a, b, c \in \mathbb{R}$ se define $max\{a,b,c\} = max\{max\{a,b\}, c\}$ y $min\{a,b,c\} = min\{min\{a,b\}, c\}$. De hecho, se puede probar por inducción el siguiente resultado:

Proposición 7. *Todo conjunto finito de números reales no vacío tiene máximo y mínimo.*

Los conjuntos infinitos pueden tener o no máximo y mínimo:
Indica si los siguientes conjuntos tienen máximo y mínimo.

1. $A = \mathbb{N}$.

   Existencia de máximo y mínimo ¿ Hay algún número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq n$ para todo $k \in \mathbb{N}$? Por qué????

   1: Existe $n \in \mathbb{N}$ **tal que:** $\boxed{\textbf{para todo } k \in \mathbb{N} \textbf{ se tiene que } k \leq n\textbf{.}}$ ....**V**....**F**

   No es lo mismo que:

   para todo ($\equiv$ para cada) $k \in \mathbb{N}$ Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que se tiene que $k \leq n$

   NO 1: Para todo $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{\textbf{existe } k \in \mathbb{N} \textbf{ tal que } k > n\textbf{.}}$ .....**V**...**F**

2. $A = \{\frac{1}{n} : \quad n \in \mathbb{N}\}$

   ¿Es $A = (0, 1]$??

Ejercicios:

☒ Calcula y representa los siguientes conjuntos e indica si tiene máximo y mínimo.

$$B = \{x \in \mathbb{R} : 6x^2 < x\} \cup \{\frac{1}{k} : k = 1, \ldots, 5\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{2x-1} < x\} \cup \{\frac{1}{k^2} : k \in \mathbb{N} \text{ y } k \geq 3\}$$

El supremo y el ínfimo de un conjunto:

Definición 8. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $A \neq \emptyset$.*

1. *Diremos que $\alpha \in \mathbb{R}$ es el supremo de A si es la menor de todas las cotas superiores de A. Es decir, α es el supremo de A si*

   i) *α es cota superior de A.*

   ii) *Para toda α^* cota superior de A se tiene que $\alpha \leq \alpha^*$.*

2. *Diremos que $\beta \in \mathbb{R}$ es el ínfimo de A si es la mayor de todas las cotas inferiores de A. Es decir, β es el ínfimo de A si*

   i) *β es cota inferior de A.*

   ii) *Para toda β^* cota inferior de A se tiene que $\beta \geq \beta^*$.*

Es sencillo probar el siguiente resultado que muestra la relación entre supremos y máximos.

Proposición 9. *El máximo de un conjunto (si existe) es el supremo del conjunto y el mínimo del conjunto (si existe) es el ínfimo del conjunto.*

Observación: Sin embargo, el supremo en general no es el máximo. Por ejemplo, el conjunto $I = (0, 1)$ tiene supremo que es 1 y sin embargo no tiene máximo.

0.2. Propiedad de completitud en $\mathbb{R}$.

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ tiene la siguiente importante propiedad del supremo o de la completitud:

P13 Propiedad del supremo en $\mathbb{R}$. Todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente tiene supremo. De la misma forma, todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente tiene ínfimo.

Observación: Es importante señalar que la propiedad del supremo caracteriza al conjunto de los números reales. De hecho, $\mathbb{R}$ es el único cuerpo totalmente ordenado con la propiedad del supremo, a veces llamada propiedad de completitud. Esta propiedad nos permite probar la existencia de $\sqrt{2}$. Efectivamente, si consideramos el conjunto

$$A = \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : \frac{p}{q} > 0 \text{ y } \frac{p^2}{q^2} < 2\}$$

Es claro que $A \neq \emptyset$ puesto que $1 \in A$. Además, dicho conjunto está acotado superiormente por 2, ya que si $\frac{p^2}{q^2} < 2$ se tiene que $\frac{p}{q} < 2$ (en otro caso, si $\frac{p}{q} \geq 2$ se tendría $\frac{p^2}{q^2} \geq 4$!!!) Por lo tanto, este conjunto tiene supremo y se puede probar que dicho supremo α verifica $\alpha = \sqrt{2}$. Este ejemplo muestra que el cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$ no verifica la propiedad del supremo. En efecto, A es un conjunto en $\mathbb{Q}$ no vacío y acotado superiormente y que no tiene supremo en $\mathbb{Q}$ puesto que, como vimos, $\sqrt{2}$ no es un número racional.

0.2.1. Propiedad Arquimediana. Propiedades de densidad de los números racionales y reales.

Enunciamos a continuación una formulación de la propiedad Arquimediana de los números reales. Esta propiedad se puede demostar utilizando la propiedad del supremo y significa que el conjunto $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.

Propiedad Arquimediana en $\mathbb{R}$: Si $x \in \mathbb{R}$, entonces existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.

Demostración. Razonamos por red. al absurdo. Si fuese falso, existiría $x \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leq x$. Por tanto, el conjunto, $\mathbb{N}$ estaría acotado superiormente y es obviamente no vacío. Utilizando la propiedad del supremo en $\mathbb{R}$ existiría $\alpha = sup(A)$. Se sigue entonces que

$$n \leq \alpha \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Y por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$n + 1 \leq \alpha \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Por tanto,

$$n \leq \alpha - 1 \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Esto significa que $\alpha - 1$ es cota superior de $\mathbb{N}$ pero $\alpha - 1 < \alpha$!!! esto no es posible puesto que α era el supremo de A y por tanto la menor cota superior de $\mathbb{N}$.

$\square$

La propiedad Arquimediana tiene distintas formulaciones equivalentes que vemos a continuación:

Formulaciones de la propiedad Arquimediana:

- Dado $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$.
- Dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0, y > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.
- El conjunto $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.

La propiedad Arquimediana de los números reales justifica la existencia de la parte entera de un número real que definimos a continuación:

Definición 10. *Sea $x \in \mathbb{R}$, el único número entero n tal que $n \leq x < n + 1$ se llama parte entera de x y se denota por $[x]$.*

Propiedades de densidad de los números reales Los números reales verifican las siquientes propiedades, conocidas como propiedades de densidad:

Proposición 11. *(***Propiedades de densidad***)) Sean* $a, b \in \mathbb{R}$*,*

1. *Si* $a < b$ *existe algún número racional* $\dfrac{p}{q}$ *tal que* $a < \dfrac{p}{q} < b$*.*
2. *Si* $a < b$ *existe algún número irracional* α *tal que* $a < \alpha < b$*.*

A partir de esta propiedad se puede probar que cada intervalo de números reales (a, b) contiene infinitos números racionales e irracionales y que no hay *huecos* o *agujeros* en la recta real.

0.2.2. Propiedad de los intervalos encajados.

Sea $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de intervalos. Se define la unión y la intersección infinita de intervalos de la siguiente forma:

$$\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x \in \mathbb{R} | x \in I_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

$$\cup_{n=1}^{\infty} I_n = \{x \in \mathbb{R} | x \in I_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

La propiedad de los intervalos encajados es la siguiente:

Propiedad de los intervalos encajados en $\mathbb{R}$:
Sea $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de intervalos tales que:
• Para todo $n \in \mathbb{N}$ el intervalo I_n es cerrado y acotado, es decir, $I_n = [a_n, b_n]$.
• Los intervalos están encajados, es decir, $I_{n+1} \subset I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Entonces $\cap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. Además, si $\text{ínf}\{|b_n - a_n|, \quad n \in \mathbb{N}\} = 0$ entonces $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ es un único punto.

Observación: La propiedad de los intervalos encajados en $\mathbb{R}$ es equivalente a la propiedad del supremo en $\mathbb{R}$. Estas propiedades son esenciales en las demostraciones de los principales teoremas del curso. Puesto que la propiedad del supremo no es cierta en $\mathbb{Q}$ tampoco lo es la de los intervalos encajados.

Observación: Nótese que en la propiedad de los intervalos encajados es esencial que los intervalos sean cerrados. Por ejermplo, si $I_n = (0, \dfrac{1}{n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión de intervalos $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ está encajada y sin embargo $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$. En efecto, si existiese $x \in [\cap_{n=1}^{\infty} I_n$, se tendría que $x > 0$ y $x < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ lo cual no es posible por la propiedad Arquimediana de los números reales.

0.2.3. Breves nociones sobre Numerabilidad

Definimos conjuntos finitos e infinitos.

Definición 12. *Diremos que un conjunto $A \neq \emptyset$ es finito si existe $n \in \mathbb{N}$ y una aplicación biyectiva $\varphi : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$; A dicho número n se le llama el cardinal de A. Si un conjunto no es finito diremos que es infinito.*

Definición 13. *Diremos que un conjunto es numerable si es finito o existe una aplicación biyectiva $\varphi : \mathbb{N} \to A$.*

En el caso de conjuntos finitos de cardinal N podemos denotar el conjunto de la siguiente forma $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$. Por otra parte, es importante observar que en el caso de conjuntos finitos si $A \subset B$ y ambos tienen el mismo cardinal entonces coinciden. Esto no es cierto en el caso de conjuntos infnitos. Por ejemplo, si consideramos $\mathbb{P}$ el conjunto de los números naturales pares, es claro que se trata de un conjunto infinito numerable. Efectivamente, basta establecer la función biyectiva $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ dada por $\varphi(n) = 2n$, sin embargo, claramenente los conjuntos no coinciden y de hecho $\mathbb{P} \subsetneqq \mathbb{N}$.
Aunque no veremos la demostración rigurosa ilustraremos la idea para probar la numerabilidad del conjunto de los números racionales: si el conjunto de los racionales fuese numerable podríamos elaborar una lista con los racionales de la siguiente forma, en cada nivel k elegiríamos los números raciones de la forma $\frac{n}{m}$ que son fracciones irreducibles tales que $n + m = k$ y los opuestos:

$$\begin{aligned}
&1 \to 0 \\
&2 \to 1, -1 \\
&3 \to 2, \tfrac{1}{2}, -2, -\tfrac{1}{2} \\
&4 \to 3, \tfrac{1}{3}, -3, -\tfrac{1}{3} \\
&5 \to 4, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{4}, -4, -\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{4} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

De esta forma, una fracción cualquiera $\dfrac{20}{11}$ estaría en el nivel 31 de una lista infinita.

Veamos ahora la prueba de que el conjunto de los números racionales es numerable. Es importante destacar la propiedad siguiente:
Propiedad: Si tenemos una colección $A_1, A_2, A_3, \ldots$ de conjuntos finitos (o incluso numerables) la unión infinita $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ sigue siendo un conjunto numerable.
Como consecuencia de este hecho, se puede probar que el conjunto de los números racionales es numerable.

Proposición: El conjunto de los números racionales es numerable.

Prueba: Consideremos la colección de conjuntos $A_1 = \{0\} = A_2$ y si $n \geq 3$

$$A_n = \{\frac{p}{q}, -\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{N}, p + q = n\}$$

Es claro que cada conjunto A_n es finito, de hecho, $A_3 = \{2, \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}\}$,
$A_4 = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, 3, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{2}, -3$, y así de forma más general,

$$A_{n+1} = \{\frac{1}{n}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1}\}$$

Por otra parte, veamos que $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{Q}$. La inclusión $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \mathbb{Q}$ es evidente; ahora si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ y $p \in \mathbb{Z}$,y $q \in \mathbb{N}$, es claro que $\frac{p}{q} \in A_{|p|+q}$.

Por otra parte, hay conjuntos que no son numerables. En efecto, el conjunto de los númros reales no es numerable.

Proposición: El conjunto de los números reales no es numerable.

La idea de la prueba de que el conjunto de los números reales no es numerable es la siguiente: si pudiésemos elaborar una lista con los números reales entre 0 y 1 con su expansión infinita formada por ceros y unos tendríamos algo de este tipo:

$$\begin{array}{l}
1 \rightarrow 0, \boxed{1} 01001010101010101010101010101010 \\
2 \rightarrow 0, 0\boxed{1} 010101010101010101010101000010101010 \\
3 \rightarrow 0, 01\boxed{1} 1010101010101000000010010101010101010 \\
4, \rightarrow, 010\boxed{1} 0101010101000101010101010001010100010 \\
5 \rightarrow 0, 0101\boxed{1} 101010101010100010100101010101001 \\
\vdots
\end{array}$$

y ahora consideramos el número real tal que en el dígito n tiene un 1 si en el número n de la lista el dígito n era un 0 y un 0 si el número n en la lista el dígito n era un 1. Este número no estaría en la lista. Esta es la idea del *método de la diagonal de Cantor* para probar que el conjunto $\mathbb{Q}$ no es numerable.