Grupos y Anillos. Grado en Matemáticas. 2012-13. Hoja de problemas 3.

1. Construir la tabla de multiplicación de los siguientes grupos.
   a) Los grupos de unidades de $\mathbb{Z}_7$ y $\mathbb{Z}_{16}$.
   b) El subgrupo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ generado por las matrices $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Este grupo se llama grupo de cuaterniones y se denota Q_8.
   c) El subgrupo del grupo de la permutaciones de $A = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$ generado por f y g, donde $f(x) = 2 - x$ y $g(x) = \frac{2}{x}$.
2. Construir el diagrama de los subgrupos de los grupos del ejercicio 1, indicando cuáles de ellos son normales.
3. Sean G un grupo y X un subconjunto de G. Se llama centralizador de X en G al conjunto $C_G(X) = \{g \in G : gx = xg, \text{ para todo } x \in X\}$. El centro de G es $Z(G) = C_G(G)$. Demostrar que $C_G(X)$ es un subgrupo de G y $Z(G)$ es un subgrupo normal de G.
   Calcular el centro de los grupos del ejercicio 1 y de $\mathrm{GL}_n(K)$ para K un cuerpo.
4. Demostrar que la intersección de una familia de subgrupos normales de un grupo también es un subgrupo normal.
5. Sea H un subgrupo de un grupo G. Demostrar que $\cap_{g \in G} g^{-1}Hg$ es el mayor subgrupo normal de G contenido en H y el subgrupo generado por $\cup_{g \in G} g^{-1}Hg$ es el menor subgrupo normal de G que contiene a H.
6. Probar que todo grupo G de orden menor o igual a cinco es abeliano.
7. Sea G un grupo. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   a) G es abeliano.
   b) $(ab)^2 = a^2b^2$ para cualesquiera $a, b \in G$.
   c) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ para cualesquiera $a, b \in G$.
   d) $(ab)^n = a^nb^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera $a, b \in G$.
8. Para $n = 2, \ldots, 10$, determinar cuáles de los grupos $\mathbb{Z}_n^*$ son cíclicos.
9. Sea G un grupo arbitrario. Mostrar que si K y L son subgrupos de G de índice finito y $K \subseteq L$ entonces $[G : K] = [G : L] \cdot [L : K]$.
10. Calcular el orden de cada elemento del grupo diedrico D_n, el centro de D_n y todos los subgrupos normales de D_n.
11. ¿Es cíclico el producto directo de dos grupos cíclicos infinitos?
12. Sea K un cuerpo. Demostrar que:
    a) El subconjunto G de $\mathrm{GL}_2(K)$ formado por las matrices invertibles de la forma $\begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ 0 & \mathrm{d} \end{pmatrix}$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}_2(K)$.
    b) El conjunto N de las matrices en G con unos en la diagonal es un subgrupo normal de G.
    c) El cociente G/N es abeliano.
13. Demostrar que la propiedad de "ser normal"no es transitiva. Es decir, dar un ejemplo de un grupo G con subgrupos H y K tales que H sea normal en K, K sea normal en G, y H no sea normal en G.
14. Demostrar que si H y K son dos subgrupos de un grupo G entonces HK es un subgrupo de G si y sólo si $HK = KH$. Demostrar que esta propiedad se verifica si H ó K es normal es normal en G.
15. Sean N y M subgrupos normales de un grupo G tales que $N \cap M = \{1\}$. Probar que $nm = mn$ para todo $n \in N$ y $m \in M$.
16. Sea N un subgrupo normal de índice n de un grupo G. Demostrar que $g^n \in N$ para todo $g \in G$, y dar un ejemplo que muestre que esta propiedad falla si N no es normal en G.
17. Si N es un subgrupo normal en un grupo G y $a \in G$ tiene orden n, probar que el orden de Na en G/N es un divisor de n.

18. Demostrar que, si el grupo G no es abeliano, entonces existe un subgrupo abeliano de G que contiene estrictamente al centro $Z(G)$.
19. Demostrar que si H es un subgrupo de G y $g \in G$, entonces $H^g = \{h^g : h \in H\}$ es un subgrupo de H con $|H| = |H^g|$. Demostrar además que H es normal en G si y sólo si lo es cualquier H^g.
20. Si G y H son grupos, $\mathrm{Hom}(G, H)$ denota el conjunto de los homomorfismos de G a H.
    a) Demostrar que si H es abeliano, entonces $\mathrm{Hom}(G, H)$ es un grupo con la operación natural: $(\varphi\phi)(g) = \varphi(g)\phi(g)$, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G) \cong G$ y $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, G) \cong \{g \in G : g^n = e\}$.
    b) Calcular $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_8)$ y $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_{21})$.
    c) Probar que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_n^*$ y describir $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$.
    d) Mostrar que, aun cuando G sea cíclico, $\mathrm{Aut}(G)$ no tiene por qué ser cíclico.
21. Un subgrupo H del grupo G es característico si, para cualquier automorfismo f de G, se verifica $f(H) \subseteq H$. Se pide:
    a) Demostrar que todo subgrupo característico de G es un subgrupo normal de G.
    b) Dar un ejemplo de un grupo con un subgrupo normal que no sea característico.
    c) Demostrar que si H es un subgrupo normal de G y K es un subgrupo característico de H entonces K es un subgrupo normal de G.
    d) Demostrar que el centro de un grupo es un subgrupo característico.
22. Supongamos que H es el único subgrupo de un grupo G con un cierto cardinal. Demostrar que H es un subgrupo característico (y por tanto normal) de G.
23. Sea G un grupo finito con un subgrupo normal H tal que $|H|$ y $[G : H]$ son coprimos. Si $|H| = n$, probar que H es el único subgrupo de G de orden n.
24. Sean N_1 y N_2 dos subgrupos normales de dos grupos G_1 y G_2. Demostrar que $N_1 \times N_2$ es un subgrupo normal de $G_1 \times G_2$ y que $(G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \cong G_1/N_1 \times G_2/N_2$.
25. Sean H y N subgrupos de G. Supongamos que H tiene orden finito, que N tiene índice finito en G y que $|H|$ y $[G : N]$ son coprimos. Se pide:
    a) Mostrar que si N es normal en G, entonces $H \subseteq N$.
    b) Mostrar que si H es normal en G, entonces $[NH : N] = [H : N \cap H]$.
    c) Deducir que si H es normal en G, entonces $H \subseteq N$.
26. Sea p un entero primo. Probar que $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \{a/b + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} : a, b \in \mathbb{Z}, b = p^n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$ es un subgrupo infinito de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ en el que el orden de cada elemento es una potencia de p.
27. Demostrar que, si G es el grupo diédrico D_4 o el de cuaterniones Q_8, entonces $Z(G) \cong \mathbb{Z}_2$ y $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, y sin embargo $D_4 \not\cong Q_8$.
28. Probar que, salvo isomorfismos, sólo hay dos grupos no abelianos de orden 8. ¿Cuáles son? Probar que todo grupo no abeliano de orden 6 es isomorfo a S_3.
29. Probar las siguientes afirmaciones sobre el grupo abeliano $\mathbb{Q}$ de los números racionales.
    a) Si un subgrupo H de $\mathbb{Q}$ es finitamente generado, entonces H es cíclico.
    b) $\mathbb{Q}$ no es cíclico; ni siquiera es finitamente generado.
30. Demostrar que si H es un subgrupo abeliano de un grupo G tal que $HZ(G) = G$, entonces G es abeliano. Deducir que si $G/Z(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano.
31. Demostrar que si H es un subgrupo cíclico normal de G entonces todo subgrupo de H es normal en G.
32. (Teorema Chino de los Restos). Demostrar que si a y b son dos elementos de órdenes finitos n y m entonces $\langle a, b\rangle$ es cíclico de orden nm si y sólo si $ab = ba$ y $\mathrm{mcd}(n, m) = 1$.
33. Calcular las clases de conjugación de D_3, D_4 y Q_8.
34. Sea G un grupo. Demostrar que el conjunto $\mathrm{Inn}(G)$ de los automorfismos internos de G es un subgrupo normal del grupo de los automorfismos de G isomorfo a $G/Z(G)$.
35. Sea p un número primo. Demostrar que, para cualquier grupo no abeliano de orden p^3, su centro tiene orden p.
36. Probar que todo grupo de orden par posee un elemento de orden 2.