Solución Ejercicio 1:

Se trata de un **contraste unilateral de la media donde la desviación típica poblacional es desconocida**. Se formula la hipótesis nula H_0 y la hipótesis alternativa H_1.

Hipótesis nula : H_0 : $\mu \leq 14$
Hipótesis alternativa : H_1 : $\mu > 14$

Si la hipótesis nula es cierta, la media de la población de partida será 14.

Para este contraste tenemos que la medida de discrepancia y su distribución es

$$d = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n\text{-}1} \text{ si } H_0 \text{ es cierta}$$

La muestra sigue una distribución cuya media es 17 y desviación típica 7. El tamaño de la muestra es n= 30, por lo tanto:

$$d = \frac{17-14}{7/\sqrt{30}} = 2.347$$

y la **región de no rechazo** (para un nivel de significación α =0.05) es:

$$\left(-\infty,\ t_{n-1,\alpha}\right) = \left(-\infty,\ t_{29,0.05}\right) = (-\infty, 1.6991)$$

Como la medida de discrepancia no pertenece a la región de no rechazo, rechazamos la hipótesis nula con un nivel de significación del 5% o un nivel de confianza del 95%.

Solución Ejercicio 2:

Se trata de un **contraste unilateral de una proporción**. Se formula la hipótesis nula H_0 y la hipótesis alternativa H_1.

Hipótesis nula : H_0: $p \leq 0.06$
Hipótesis alternativa : H_1: $p > 0.06$

Si la hipótesis nula es cierta (expresada como una inecuación), la proporción de nueces vacías será menor o igual que el 6%.

Para este contraste tenemos que la medida de discrepancia y su distribución es

$$d = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \sim N(0,1) \text{ si } H_0 \text{ es cierta}$$

La muestra sigue tiene una proporción de 21/300=0.07 nueces vacías, siendo el tamaño de la muestra n= 300, por lo tanto:

$$d = \frac{0.07-0.06}{\sqrt{\frac{0.06\times 0.94}{300}}} = \frac{0.01}{0.013711} = 0.7293$$

y la **región de no rechazo** (para un nivel de significación α =0.01) es:

$$(-\infty, z_\alpha) = \ (-\infty, z_{0.01}) = (-\infty, 2.33)$$

Como la medida de discrepancia pertenece a la región de no rechazo, aceptamos la hipótesis nula con un nivel de significación de 0.01.

En el apartado *b*) tenemos ahora un nivel de significación α = 0.05 y la longitud del intervalo de confianza es 1%, y tomamos como referencia el contraste bilateral. Entonces,

$$0.01 = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\times(1-\hat{p})}{n}} = 1.96\sqrt{\frac{0.07\times 0.93}{n}}$$

De donde se obtiene que $n > 2501$.

Solución Ejercicio 3:

Se trata de un **contraste bilateral de una media con varianza poblacional conocida** (5.1). Se formula la hipótesis nula H_0 y la hipótesis alternativa H_1.

Hipótesis nula : H_0: $\mu = 20$
Hipótesis alternativa : H_1: $\mu \neq 20$

Para este contraste tenemos que la medida de discrepancia y su distribución es

$$d = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \text{ si } H_0 \text{ es cierta}$$

La muestra sigue tiene una media de 22.40 euros, siendo el tamaño de la muestra *n*= 16, por lo tanto:

$$d = \frac{22.4-20}{5.1/\sqrt{16}} = \frac{2.4}{5.1/4} = 1.8823$$

y la **región de no rechazo** (para un nivel de significación α =0.05) es:

$$\left(-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2}\right) = \ \left(-z_{0.025}, z_{0.025}\right) = (-1.96, 1.96)$$

Como la medida de discrepancia pertenece a la región de no rechazo, aceptamos la hipótesis nula con un nivel de significación del 0.05 o un nivel de confianza del 95%.

Solución Ejercicio 4:

Se trata de un **contraste bilateral de una proporción**. Se formula la hipótesis nula H_0 y la hipótesis alternativa H_1.

Hipótesis nula : H_0: $p = 0.2$
Hipótesis alternativa : H_1: $p \neq 0.2$

Para este contraste tenemos que la medida de discrepancia y su distribución es

$$d = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \sim N(0,1) \text{ si } H_0 \text{ es cierta}$$

La muestra sigue tiene una proporción de 22/120=0.1833 nueces vacías, siendo el tamaño de la muestra *n*= 120, por lo tanto:

$$d = \frac{0.1833-0.2}{\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{120}}} = \frac{0.016666}{0.036514} = 0.45644$$

y la **región de no rechazo** (para un nivel de significación α =0.1) es:

$$\left(-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2}\right) = \left(-z_{0.05}, z_{0.05}\right) = (-1.645, 1.645)$$

Como la medida de discrepancia pertenece a la región de no rechazo, aceptamos la hipótesis nula con un nivel de significación del 0.1.

Solución Ejercicio 5:

El error que consiste en aceptar H_0 siendo falsa se llama *error de tipo II*. Cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, menor es la probabilidad de cometer este tipo de error.

Solución Ejercicio 6:

Se trata de un **contraste unilateral de la varianza con media poblacional desconocida**. Se formula la hipótesis nula H_0 y la hipótesis alternativa H_1.

Hipótesis nula : H_0: $\sigma^2 \geq 1.5$
Hipótesis alternativa : H_1: $\sigma^2 < 1.5$

Para este contraste tenemos que la medida de discrepancia y su distribución es

$$d = \frac{n-1}{\sigma_0^2} s^2 \sim \chi^2_{n-1} \text{ si } H_0 \text{ es cierta}$$

La muestra sigue tiene una media de 19.5536 y varianza s^2 = 1.4826, siendo el tamaño de la muestra *n*= 11, por lo tanto:

$$\hat{d} = \frac{10}{1.5} \times 1.4826 = 9.884$$

Como no nos proporcionan un nivel de significación, tomaremos como referencia el *p*-valor para tomar una decisión:

$$p = P(d \leq 9.884 \mid d \sim \ \chi^2_{10})$$

Mirando en la tabla de la χ^2, para calcular el *p*-valor debemos interpolar entre los valores 9.342 y 11.781, que en la χ^2_{10} dejan a la izquierda una probabilidad de 0.3 y 0.5. Dado que el *p*-valor es mayor que 0.2, no podemos rechazar la hipótesis de partida.

Solución Ejercicio 7:

Se trata de un **contraste de comparación de medias con varianzas desconocidas**. Se formula la hipótesis nula H_0 y la hipótesis alternativa H_1.

Hipótesis nula : H_0: $\mu_1 = \mu_2$
Hipótesis alternativa : H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

Para este contraste tenemos que la medida de discrepancia y su distribución es

$$d = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2-\Delta} \ \text{ si } H_0 \text{ es cierta}$$

Las muestras para hombre y mujeres tienen como medias $\bar{X}$=7.42 e $\bar{Y}$=5.34, respectivamente, mientras que las desviaciones típicas son s_1=9.08 y s_2=7.24, siendo el tamaño de la muestra n_1= 75 y n_2=50, por lo tanto:

$$d = \frac{7.42-5.34}{\sqrt{\frac{9.08^2}{75}+\frac{7.24^2}{50}}} = \frac{2.08}{\sqrt{1.09928+1.048352}} = \frac{2.08}{1.46648} = 1.4183$$

Para identificar la **región de no rechazo** (para un nivel de significación α =0.05), el número de grados de libertad de la *t*-student es de $n_1 + n_2 - 2 - \Delta = 75 + 50 - 2 - \Delta$, siendo

$$\Delta = \text{Entero más próximo a } \frac{\left((n_2-1)A-(n_1-1)B\right)^2}{(n_2-1)A^2+(n_1-1)B^2}, \text{con } A = \frac{s_1^2}{n_1} \ y \ B = \frac{s_2^2}{n_2}.$$

quedando

$$A = \frac{9.08^2}{75} = 1.09928 \text{ y } B = \frac{7.24^2}{50} = 1.048352,$$

$$\frac{(49A-74B)^2}{49A^2+74B^2} = \frac{(53.86472-77,57)^2}{59.2124+81.329} = \frac{561.94}{140.5415} = 3.998,$$

Siendo $\triangle = 4$ y el número de grado de libertad de la t-student es 119, quedando la región de no rechazo

$$\left(-\,t_{n_1+n_2-2-\triangle,\alpha/2}, t_{n_1+n_2-2-\triangle,\alpha/2}\right) = \left(-\,t_{119,0.025}, t_{119,0.025}\right) = (-1.9799, 1.9799)$$

Como la medida de discrepancia pertenece a la región de no rechazo, aceptamos la hipótesis nula con un nivel de significación del 0.05.