Estructuras Algebraicas Segundo examen parcial	1^{er} Apellido: ________________ 2^{o} Apellido: ________________ Nombre: ________________ Número de matrícula:	22 de mayo de 2020 Tiempo 2 h **Calificación:**
Dpt. Matemática Aplicada a las T.I.C. E.T.S. de Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid		

Declaro que he realizado la prueba de evaluación conforme a las indicaciones facilitadas, y sin haber hecho uso de ningún recurso externo que no haya sido autorizado expresamente. Asumo toda la responsabilidad administrativa y disciplinaria que pudiera derivarse de la utilización de medios fraudulentos.

- Asignatura
- Titulación
- Fecha
- Nombre y apellidos
- Número DNI
- Firma
- Carné estudiante / DNI físico

1. (3 puntos) Sea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \ : \ a, b \in \mathbb{Z}_7 \right\}$.
   Estudiar si $(M, +, \cdot)$ es un anillo, y en caso afirmativo determinar si es dominio de integridad y estudiar si es cuerpo. Obtener el número de elementos de M y su característica.

2. (2 puntos) Estudiar si la siguiente aplicación es homomorfismo de anillos, en caso afirmativo determinar su núcleo e imagen. Estudiar si es cierto que un polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ es irreducible $\Leftrightarrow \varphi(f)$ es irreducible.

$$\varphi : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x], \qquad \varphi\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x+1)^k$$

3. (3 puntos)

   a) Sea $\alpha = \sqrt{10} - \sqrt{5}$. Obtener una base y el grado de extensión de $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$. Encontrar un elemento $\beta \in \mathbb{R}$, tal que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\beta) \subset \mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{R}$, siendo estrictos todos los contenidos.

   b) Obtener el polinomio mínimo de $\alpha = \sqrt{10} - \sqrt{5}$ sobre $\mathbb{Q}$ (hay que justificar que es irreducible).

   c) Sea $f = x^5 - 2x + 4 \in \mathbb{Q}[x]$. Estudiar si el ideal de $\mathbb{Q}[x]$: $\mathtt{I} = (f)$ es ideal maximal.

4. (2 puntos) Estudiar si el anillo $\mathbb{Z}_5[x]/\left(2x^3 + 3x^2 + 1\right)$ es cuerpo. Obtener, si es posible, el resultado de la siguiente operación en dicho anillo.

$$(x^4 + 2x^2 + 2)^{-1} + x^3(x^2 + 1) + (3x^2 + 1)^{-1}$$

Para que sean consideradas como válidas, todas las respuestas deben estar adecuadamente justificadas.
No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.

Soluciones

1. M es subanillo de $(\mathbb{Z}_7^{2\times 2}, +_7, \cdot_7)$:

   $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M \Rightarrow M \neq \emptyset. \qquad \forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c+d \end{pmatrix} \in M$

   $A - B = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ b-d & (a-c)+(b-d) \end{pmatrix} \in M, \ A\cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc+bd \\ ad+bc+bd & ac+ad+bc+2bd \end{pmatrix} \in M$

   $\Rightarrow M$ es anillo conmutativo con identidad, y $\quad \forall\, a, b \in \mathbb{Z}_7,\ a^2+ab-b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 4b\left(-1 \pm \sqrt{5}\right) \mod 7$

   $\Leftrightarrow a = b = 0$ por tanto $\forall\, A \in M$ con $A \neq O, \exists\, A^{-1} = [a^2+ab-b^2]_7^{-1} \begin{pmatrix} a+b & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M$

   Luego $(M, +, \cdot)$ es cuerpo $\Rightarrow M$ es D.I. $\quad \operatorname{char}(R) = |I| = 7, \qquad |M| = 49$

2. $f = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $g = \sum_{k=0}^n b_k x^k \in \mathbb{Q}[x]$

   $\varphi(f+g) = \sum_{k=0}^{\text{máx}(n,m)} (a_k + b_k)(x+1)^k = \varphi(f) + \varphi(g)$
   $\varphi(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right)(x+1)^k = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$
   $\ker(\varphi) = 0_{\mathbb{Q}[x]}$, $\operatorname{im}(\varphi) = \mathbb{Q}[x]$.
   $f = g \cdot h \Leftrightarrow \varphi(f) = \varphi(g) \cdot \varphi(h)$, por tanto: f irreducible $\Leftrightarrow \varphi(f)$ irreducible

3. *a)* $B = \left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}\right\}$, $\quad [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$. $\beta = \sqrt{2}$ (por ejemplo)

   b) $x^4 - 30x^2 + 25 \in \mathbb{Q}[x]$

   c) $\mathtt{I} = (f)$ ideal maximal de $\mathbb{Q}[x] \Leftrightarrow f$ irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.
   f no tiene raíces en $\mathbb{Q}$, por tanto f es reducible en $\mathbb{Q}[x] \Leftrightarrow \exists\ a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$ tales que:

   $$x^5 - 2x + 4 = (x^2+ax+b)(x^3+cx^2+dx+e) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cl} a+c & = 0 \\ ac+b+d & = 0 \\ ad+bc+e & = 0 \\ ae+bd & = -2 \\ be & = 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cl} c & = -a \\ d & = a^2 - b \\ ad+e & = ab \\ ae+bd & = -2 \\ be & = 4 \end{array} \right.$$

   $$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \\ b & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - b \\ ab \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - b \\ 2ab - a^3 \\ a^4 + b^2 - 3a^2 b - 2 \\ a^3 b - 2ab^2 + 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cl} a^4 + b^2 - 3a^2 b & = 2 \\ ab(2b - a^2) & = 4 \end{array} \right.$$

   $\Rightarrow a, b \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. $\quad$ Si $a = \pm 1 \Rightarrow 2b^2 - b \pm 4 = 0$, sin soluciones enteras. $\quad$ Si $a = \pm 4 \Rightarrow 2b^2 - 16b \pm 1 = 0$, sin soluciones enteras. $\quad$ Si $a = 2 \Rightarrow b^2 - 2b - 1 = 0$, sin soluciones enteras. Si $a = -2 \Rightarrow b^2 - 2b + 1 = 0$ con solución entera $b = 1$, pero $(a, b) = (-2, 1)$ no es solución de $a^4 + b^2 - 3a^2 b = 2 \Rightarrow f$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x] \Rightarrow \mathtt{I} = (f)$ maximal de $\mathbb{Q}[x]$

4. $(2x^2 + 4) + (4x^2 + 2x + 4) + (2x^2 + 3x + 1) = 3x^2 + 4$