<table>
<tr><td>Estructuras Algebraicas
Examen de suficiencia. Primer parcial</td><td rowspan="2">1$^{\text{er}}$ Apellido: ____________________
2$^{\text{o}}$ Apellido: ____________________
Nombre: ____________________
Número de matrícula: | | | | | | | |</td><td rowspan="2">3 de junio de 2021
Tiempo 1 hora

Calificación:</td></tr>
<tr><td>Dpt. Matemática Aplicada a las T.I.C.
E.T.S. de Ingenieros Informáticos
Universidad Politécnica de Madrid</td></tr>
</table>

Para que sean consideradas como válidas, todas las respuestas deben estar adecuadamente justificadas.
No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.

Ejercicio 1. (3 puntos)

Sea $(G, *)$ grupo, $a \in G$ con $|a| = n$ y $k \in \mathbb{N}$. Demostrar:

a) $a^k = e_G \Leftrightarrow n$ divide a k.

b) $|a^k| = \frac{n}{\text{mcd}(n,k)}$.

Ejercicio 2. (2 puntos)

Estudiar si $(A_5, \circ)$ es grupo cíclico.

Ejercicio 3. (2 punto)

Probar que $(D_4, \circ)$ no puede ser producto directo interno de dos subgrupos propios.

Ejercicio 4. (3 puntos)

Sea $(G, *)$ grupo y sea $H = \langle a * b * a^{-1} * b^{-1} \ : \ a, b \in G \rangle$.

1. Demostrar que H es subgrupo normal de G. Estudiar si G/H es grupo abeliano.
2. Suponiendo que $(G, *) = (Q_8, \cdot)$, siendo $Q_8 = \langle a, b : |a| = 4, |b| = 4, ba = a^{-1}b, a^2 = b^2 \rangle$, obtener la tabla de Q_8/H.

Soluciones

1. Consultar apuntes.

2. $(A_5, \circ)$ no es abeliano, por tanto no puede ser un grupo cíclico.

3. Si existe H y K, subgrupos propios de D_4 tales que $D_4 \approx H \times K$, entonces $|H| = 4$ y $|K| = 2$, por tanto H y K son abelianos, lo que implicaría que $H \times K$ es abeliano $\Rightarrow D_4$ abeliano, lo que es contradicción.

4. *a*) Revisar los problemas resueltos en clase.

   b) $H = \{1, -1\}$, $Q_8/H = \{[e], [a], [b], [ab]\}$

$*$	$[e]$	$[a]$	$[b]$	$[ab]$
$[e]$	$[e]$	$[a]$	$[b]$	$[ab]$
$[a]$	$[a]$	$[e]$	$[ab]$	$[b]$
$[b]$	$[b]$	$[ab]$	$[e]$	$[a]$
$[ab]$	$[ab]$	$[b]$	$[a]$	$[e]$