TEMA 4: ECUACIONES NO LINEALES

SIMULACRO JULIO 2020

La siguiente sucesión converge a s= $\sqrt{2}$.

a) Implementar un script, con un bucle for, que calcule las 20 primeras iteraciones y las almacene en un vector x, de la siguiente sucesión:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{2+x_n}{1+x_n} \end{cases}$$

¿Cuánto difiere la última iteración de s?. ¿Podemos decir que la sucesión converge a s?.

b) Modificar el script anterior. En cada paso del bucle usar el comando fprintf() para volcar por pantalla:

- Número de iteración (%2d).
- Estimación de $\sqrt{2}$ en dicha iteración con 15 decimales (%.15f): x_n .
- Error relativo (%.2e): $E\_rel = |s - x_n| / |s|$ con *s=sqrt(2)*.

c) A partir del vector x, calcular el vector Erel de los errores relativos de x respecto del valor s, y dibujar la gráfica con los ejes adecuados.

- ¿Cuántas iteraciones son necesarias para alcanzar la precisión de la máquina?
- ¿En cada iteración cuantas cifras significativas más de precisión obtenemos?

DICIEMBRE 2018

Problema 2. *(3 puntos)*

Aplicar el método de Newton-Raphson para resolver la ecuación $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$ *realizando cinco iteraciones, comenzado primero en* $x_0 = -2.5$ *y, luego, comenzado en* $x_0 = 4$

Explicar detalladamente qué clase de convergencia tiene en cada caso y porqué ocurre.

JULIO 2013

1. Implementar un script que realice la siguiente iteración:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{(x_n)^3 - 3x_n + 2}{3(x_n)^2 - 3} \\ x_0 = -2.5 \end{cases}$$

hasta calcular x_{10}. Asignar a una variable $s1$ este valor. Guardar los valores x_n en un vector llamado *aprox_x*.

Nota: Para realizar el script utilizar el comando *for* (o bien el comando *while*) de Matlab. No utilizar ningún otro código.

- ¿Cómo se llama el método iterativo?. ¿El método converge o diverge?. En su caso, ¿a qué valor converge?. ¿Qué estamos calculando con este método?.
- A partir del vector *aprox_x* calcular los errores relativos de x_n con respecto a $s1$. Hacer un plot de los errores relativos. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para que x_n alcance 15 cifras significativas de precisión?. ¿Cuál es la velocidad de convergencia (lineal, cuadrática,…) del método?.

2. Repetir el apartado anterior con un nuevo valor de arranque $x_0 = 1.5$, hasta calcular x_{50}.
Asignar a una variable $s2$ este valor.

- Realizar todas las cuestiones, y contestar a todas las preguntas, del apartado anterior para estos nuevos datos.

- Hacer un *plot* de la función que estamos resolviendo en el intervalo $[-2.5, 1.5]$. ¿A qué se debe el diferente comportamiento del método dependiendo del valor de arranque ($x_0 = -2.5$, $x_0 = 1.5$)?.

ENERO 2012

Ejercicio 1

1. Dibujar una gráfica para comprobar que la función f(x)=x^3+4x^2-10 tiene una única raíz real s. Buscar un intervalo [a, b] en el que se encuentre la raíz s.
   Aplicando el método de Newton para calcular las raíces de f(x) obtenemos la siguiente iteración:
   $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_n)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{(x_k)^3 + 4(x_k)^2 - 10}{3(x_k)^2 + 8x_k} = \frac{2(x_k)^3 + 4(x_k)^2 + 10}{3(x_k)^2 + 8x_k}$$
   Escribir un script que implemente 10 iteraciones de la fórmula:
   $$x_{k+1} = \frac{2(x_k)^3 + 4(x_k)^2 + 10}{3(x_k)^2 + 8x_k}$$
   con x_0=a. En cada iteración volcar por pantalla una información similar a la siguiente:

   Iteración: 1 valor x_k: 1.4545454545454546 valor f(x_k): 1.540e+000
   Iteración: 2 valor x_k:

   ¿Cuál es el valor de la raíz s?.
   ¿Cuántas iteraciones, n_iter, han sido necesarias para alcanzar la precisión de la máquina?.
   ¿Cuántas cifras significativas se han obtenido en la iteración 1?, ¿y en la iteración 2?, …. ¿y en la iteración n_iter?.
   ¿Cuál es la velocidad de convergencia (lineal, cuadrática,…)?. Justificar.

2. Dibujar una gráfica para comprobar que la función g(x)=e^x-2x^2 tiene 3 raíces reales (s_1 negativa, s_2 y s_3 positivas).
   Utilizar un procedimiento similar al del ejercicio anterior para obtener la iteración resultante de aplicar el método de Newton para calcular las raíces de g(x).
   Escribir un script que implemente la iteración obtenida, arrancando en x_0=0, volcando por pantalla la misma información del apartado anterior.
   Repetir la ejecución arrancando en x_0=1 y en x_0=3.
   ¿Cuáles son las 3 raíces de g(x): s_1, s_2, s_3?.
   ¿Cuántas iteraciones son necesarias para alcanzar la precisión de la máquina?.
   ¿Cuál es la velocidad de convergencia del método?.
   A partir de la gráfica de g(x), justificar porqué cuando arrancamos en x_0=0 el método aproxima la raíz s_1, mientras que cuando arrancamos en x_0=1 el método aproxima la raíz s_2. ¿Dar una aproximación del intervalo de convergencia de la raíz s_2?

ENERO 2012

Ejercicio 2: Sea la función

$$R(x) = \frac{r}{1 + xK}$$

Aplicamos la iteración de punto fijo $x_{k+1} = R(x_k) \quad k = 0,1,2,...$ y obtenemos la sucesión

$$x_{k+1} = \frac{r}{1 + x_k K}$$

a) Escribir un script para calcular las 10 primeras iteraciones de la fórmula anterior, para los valores de $r = 3, K = 1$ y arrancando a partir de $x_0 = 1$.

```
2.a % Escribir aquí el código.
    % Volcar los resultados.
    % ¿Converge la sucesión?. En su caso, ¿a que valor?.
```

b) Dibujar una gráfica de la función $R(x)$ en el intervalo [0,3] (línea azul 'b'), en cada iteración dibujar el punto $(x_k, R(x_k))$ (cuadrados rojos 'rs'). En la última iteración dibujar el punto de color verde ('gs').

```
2.b  Escribir aquí el código.
     Insertar la gráfica.
```

c) Repetir el apartado a) iterando 70 veces. Consideramos como valor exacto de la raíz el valor de la última iteración, esto es, $s = x_{70}$. Calcular el número de cifras significativas de precisión obtenidas en cada iteración. Dibujar en una gráfica el número de iteración y el número de cifras significativas de precisión obtenidas en esa iteración. ¿Cuál es la velocidad de convergencia (lineal, cuadrática, …)?

```
2.c % Insertar el código y volcar los resultados.
    % Insertar la gráfica.
    % ¿Cuántas iteraciones son necesarias para alcanzar la precisión de la
      máquina en doble precisión?.
    % Velocidad de convergencia (lineal, cuadrática,…).
```

d) Repetir el apartado anterior para la función

$$S(x) = \frac{r}{1 + (x / K)^2}$$

para los valores de $r = 3, K = 1$ y arrancando a partir de $x_0 = 1$.

```
2.d % Insertar el código, los resultados y la gráfica.
```

JULIO 2012

Dada la función $y = \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$,

a) Construye una función en Matlab que tome como argumento de entrada x y devuelva como argumento de salida el valor de la función anterior.

```
a) Código de la función usada
```

b) Dibujar la función en el intervalo [2,10] y localiza (aproximadamente) las raíces de la función en dicho intervalo.

```
b) Código empleado y gráfica resultante
   ¿Intervalos de raíces?
```

c) Construye una función en Matlab que tome como argumentos de entrada: los extremos de un intervalo (a y b) un valor para la tolerancia de la solución (tol), y un valor para el número máximo de iteraciones permitidas (maxiter). La función deberá calcular la raíz de la función dada en el intervalo (a,b), y devolver como variables de salida: el valor de la raíz, el valor que toma la función en la raíz calculada y el número de iteraciones empleado en obtenerla. La función deberá terminar tanto si el valor de la función en la raíz está por debajo de la tolerancia como si se ha alcanzado el número máximo de iteraciones permitidas.

Para el cálculo de la raíz se empleará el método de la bisección modificando la regla de aproximación, se empleará $c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$ en vez de $c = \frac{a+b}{2}$ como se hace en el método de la bisección.

```
c) Código de la función
```

d) Emplea la función construida en el apartado anterior, para obtener todas las raíces de la función f(x) en el intervalo [2,10], empleando una tolerancia de 0.001 y número máximo de iteraciones de 100. Escribir los 3 argumentos de salida de la función. Nota: elegir intervalos (a,b) adecuados para cada raíz.

```
d) Código empleado y listado de resultados para todas las raíces.
```

ENERO 2011

Ejercicio 2: Podemos calcular una raíz de la función regular $f(x)$, a partir de un valor inicial x_0, utilizando el siguiente algoritmo (método de Halley):

for k=1,2,3, …

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\left(1 - \frac{f(x_k)f''(x_k)}{2(f'(x_k))^2}\right)^{-1}$$

end

1. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$, codificar el método de Halley en una función *halley* para calcular s_1, una raíz de f(x), a partir del valor inicial $x_0 = -2.5$, y calculando las 4 primeras iteraciones. Calcular el valor de $f(s_1)$.

2. Modificar la función *halley* para mostrar por pantalla en cada iteración: el número de iteración, el valor x_k y el valor $|x_k - x_{k-1}|$.
   Ejecutar de nuevo la función a partir de $x_0 = -2.5$ realizando 4 iteraciones.
   Determinar la velocidad de convergencia del método de Halley en el cálculo de la raíz s_1 (lineal, cuadrática, cúbica, etc.). Justificar la respuesta, a partir de los resultados obtenidos.

3. Ejecutar de nuevo la función *halley* para calcular s_2, otra raíz de $f(x)$, a partir del valor inicial $x_0 = 2.5$, iterando 20 veces. Calcular el valor de $f(s_2)$.

4. Sea s_2 el valor de la raíz obtenido en el apartado anterior. Modificar la función *halley* para mostrar el error relativo (respecto del "valor exacto" s_2) dado por $E_{rel} = |x_k - s_2| / |s_2|$, y el número de cifras significativas obtenidas en cada iteración.

   Ejecutar la función *halley* a partir del valor inicial $x_0 = 2.5$ e iterando 20 veces. Determinar la velocidad de convergencia del método de Halley en el cálculo de la raíz s_2 (lineal, cuadrática, cúbica, etc.). Justificar la respuesta, a partir de los resultados obtenidos.

5. ¿Cuál es el motivo que justifique la diferencia en la velocidad de convergencia del método de Halley a las raíces s_1 y s_2 de la función $f(x)$?

Nota: Si no conseguís codificar correctamente la función *halley* en el apartado 1, indicarlo y realizar el ejercicio utilizando el método de Newton.

ENERO 2010

Ejercicio 3: Deseamos hallar la solución de la ecuación $x - \log(x) = 2$. Implementar cinco iteraciones del método de Newton para estimarla partiendo de x0 inicial. En cada iteración volcar el número de iteración y la estimación correspondiente. El código usado debe ser autocontenido y no usar más allá de unas 6/7 sentencias de MATLAB.

```
% Insertad vuestro código
```

```
% Volcar aquí la salida de vuestro algoritmo con un x0 de vuestra elección
```

JULIO 2011

Ejercicio 2. Sea la ecuación

$$x^4 - 3x - 1 = 0$$

Se quiere calcular sus raíces utilizando el método de Newton. En la Hoja de respuestas tenéis el código *newton* que implementa dicho método.

Se pide:

- Comprobar gráficamente que tiene una raíz s_1 en el intervalo $[a\ ,b] = [-1/2\ ,0]$.
- Definir una función [fx,dfx]=fun(x) que tenga como argumento de entrada un valor x y como argumentos de salida el valor de la función $f(x) = x^4 - 3x - 1$ y el valor de su derivada en x.
- Ejecutar la función *newton* para calcular la raiz $s_1 < 0$ de la ecuación, a partir del valor inicial $x_0 = 0$ y un número máximo de iteraciones de 30. ¿El método ha convergido?, ¿cuánto vale la raíz calculada s_1?, ¿cuánto vale $f(s_1)$?, ¿cuántas iteraciones ha necesitado?.
- Comprobar gráficamente que la ecuación tiene otra raíz $s_2 > 0$ en el intervalo $[0\ ,2]$. Calcular el valor aproximado de esta raíz a partir de $x_0 = 1$. ¿Cuánto vale la raíz calculada s_2?, ¿cuántas iteraciones ha necesitado?.
- Modificar la función *newton* para mostrar por pantalla una información similar a la siguiente:

```
>> s=newton1('fun',0,30)
Iteración 1 valor -0.3333333333333333
Iteración 2 valor -0.3294117647058823
Iteración 3 valor -0.3294085281947207
Iteración 4 valor -0.3294085281925508
Iteración 1 Número de cifras significativas de precisión 0
Iteración 2 Número de cifras significativas de precisión 1
Iteración 3 Número de cifras significativas de precisión 5
Iteración 4 Número de cifras significativas de precisión 11
Warning: Log of zero.
> In log10 at 20
  In newton1 at 24
Iteración 5 Número de cifras significativas de precisión Inf
```

  Para ello, una vez finalizado el proceso iterativo del método, añadir un bucle para mostrar en cada iteración el número de cifras significativas de precisión obtenidas en esa iteración, a partir de la expresión del error relativo

$$E\_rel = \frac{|x_n - s|}{|s|}$$

  Volver a calcular las dos raíces s_1 y s_2 con la función newton modificada.

- Con los resultados numéricos obtenidos, cual es la velocidad de convergencia del método de Newton (lineal, cuadrática, etc.). Justificar la respuesta.