TEMA 4: ESPACIOS PROYECTIVOS

Problema 1. Da un ejemplo de referencia proyectiva en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ y comprueba que las coordenadas homogéneas no se conservan al reordenar los puntos de la referencia, dando un ejemplo explícito de ello.

Problema 2. Muestra que los puntos $P_0 = [1 : 0 : 1]$, $P_1 = [0 : 1 : 2]$, $P_2 = [1 : -1 : 0]$, $P_3 = [3 : -2 : 0]$ forman una referencia proyectiva en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2; P_3\}$, con P_3 como punto unidad. Calcula una base asociada.

Problema 3. Estudia si los puntos $P_0 = [0 : 1 : 0 : 1]$, $P_1 = [2 : -1 : -1 : 0]$, $P_2 = [0 : 1 : -1 : 2]$, $P_3 = [0 : -1 : 0 : 2]$, $P_4 = [2 : 2 : -4 : 3]$ forman una referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2, P_3; P_4\}$ en $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, con P_4 como punto unidad. Calcula una base asociada.

Problema 4. Prueba que si dos subespacios proyectivos verifican $X_1 \subseteq X_2$ con $\dim X_1 = \dim X_2$, entonces $X_1 = X_2$.

Problema 5. Prueba que un hiperplano $H \subset \mathbb{P}(V)$ y un punto $P \notin H$ generan todo el espacio proyectivo:

$$\{P\} + H = V(\{P\}, H) = \mathbb{P}(V).$$

Problema 6. Sea el punto $P = [1 : -2 : 3] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ y sea la recta $L \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ generada por los puntos $[-1 : -1 : 2]$ y $[3 : 0 : -1]$. Calcula ecuaciones implícitas de la suma $P + L$.

Problema 7. Se consideran en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ los puntos $P = [1 : 0 : 1]$, $Q = [-1 : 1 : 0]$ y $R = [1 : -2 : 3]$ y las rectas $L = V\{P, Q\}$ y $M = V\{P, R\}$. Calcula su suma $L + M$ y su intersección $L \cap M$, obteniendo ecuaciones implícitas de ambas.

Problema 8. Obtén la intersección de la recta $L \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ generada por $P = [1 : 0 : -1]$ y $Q = [2 : 1 : 0]$ y la recta M de ecuación implícita $M : \{x_0 - 3x_1 + x_2 = 0\}$.

Problema 9. Obtén unas ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio proyectivo obtenido al intersecar los planos $B, C \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ de ecuaciones

$$B : \{x_0 - x_1 + x_2 - x_3 = 0\}, \ \text{ y } \ C : \{2x_0 + x_2 - 2x_2 = 0\}.$$

Problema 10. Calcula la ecuación de la recta que pasa por los siguientes pares de puntos de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$:

a) $[-1 : 1 : 1]$ y $[1 : 3 : 2i]$.

b) $[1 : -1 : i]$ y $[i : 1 : -1]$.

c) $[1 : 1 : 2i]$ y $[1 - 2 : 2i]$.

Problema 11. Calcula la suma de la recta $L \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ de ecuaciones

$$L : \left\{ \begin{array}{ccccc} x_0 & -2x_1 & +2x_2 & & = 0 \\ x_0 & +x_1 & & -x_3 & = 0 \end{array} \right.$$

con la recta M generada por los puntos $[1 : 0 : -1 : -1]$ y $[-1 : 1 : 2 : 2]$. Estudia si se cortan las rectas.

Problema 12. Considera la referencia cartesiana en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$

$$\mathcal{R}_c = \{(1,2); \{(-1,1),(1,1)\}\}$$

donde $\mathcal{B} = \{(-1,1),(1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

a) Calcula su completación proyectiva.

b) Relaciona las coordenadas cartesianas del punto $Q = [-2,-1] \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ con sus coordenadas homogéneas en la completación proyectiva.

Problema 13. Considera el plano $B : \{x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2\} \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

a) Calcula su completación proyectiva $\overline{B}$ obteniendo unas ecuaciones implícitas respecto de la referencia proyectiva estándar (completación proyectiva de la referencia cartesiana estándar en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$).

b) Obtén sus puntos del infinito.

Problema 14. Considera las rectas en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

$$L : \{x_0 + x_1 - 3x_2 = 0\},$$

$$M : \{2x_0 + x_1 - 3x_2 = 0\}.$$

a) Calcula el punto donde intersecan.

b) Deshomogeneiza las ecuaciones para obtener las variedades afines asociadas $L \cap \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ y $M \cap \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

c) Comprueba que las variedades afines son paralelas, precisamente porque L y M se cortan en un punto del infinito.

Problema 15. Sea el plano $B : \{2x_1 + x_2 - x_3 = -2\} \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

a) Calcula todos los planos afines paralelos a él.

b) Obtén la completación proyectiva para cada uno de ellos y observa el patrón de sus ecuaciones implícitas en coordenadas homogéneas.

Problema 16. Describe la completación proyectiva del espacio vectorial de las matrices 2×2 con coeficientes reales, $M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (visto como espacio afín con su estructura afín estándar) y del subespacio de matrices de traza igual a 3

$$B = \{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \operatorname{tr}(M) = 3\},$$

dando ecuaciones homogéneas de $\overline{B}$.

Problema 17. Describe la completación proyectiva del espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3, $\mathcal{P}_3[X]$ (visto como espacio afín con su estructura afín estándar), y del subespacio afín

$$C = \{p(X) \in \mathcal{P}_3[X] : p(1) = 3\},$$

dando ecuaciones homogéneas de $\overline{C}$.