2.3. Homomorfismos de grupos

Una aplicación $\varphi : G \to G'$ entre los grupos $(G, *)$ y $(G', \cdot)$ es un **homomorfismo de grupos** si para todos $x, y \in G$ se verifica que

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

Si $\varphi : G \to G'$ es un homomorfismo de grupos, se llama **núcleo** de φ al conjunto

$$\ker(\varphi) = \{a \in G : \varphi(a) = e_{G'}\} = \varphi^{-1}(\{e_{G'}\})$$

Y se llama **imagen de** φ al conjunto

$$\varphi(G) = \{\varphi(a) : a \in G\}$$

Propiedades

Sean $(G, *)$ y $(G', \cdot)$ grupos y $\varphi : G \to G'$ homomorfismo. Se tiene que:

1. $\varphi(e_G) = e_{G'}$ siendo $e_G \in G$ y $e_{G'} \in G'$ los elementos neutros de $(G, *)$ y $(G', \cdot)$ respectivamente
2. $\varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1})$ para todo $a \in G$
3. φ es inyectivo $\Leftrightarrow \ker(\varphi) = \{e_G\}$
4. φ es suprayectivo $\Leftrightarrow \varphi(G) = G'$

Subgrupo núcleo y subgrupo imagen

Si $\varphi : G \to G'$ es un homomorfismo de grupos entonces:

1. $\ker(\varphi) \trianglelefteq G$
2. $\varphi(G) \leq G'$

Primer teorema de Isomorfía

Sea $\varphi : G \to G'$ un homomorfismo de grupos, entonces

$$G/\ker(\varphi) \approx \varphi(G)$$

Corolario 1

Si $(G, *)$ y $(G', \cdot)$ son dos grupos finitos y $\varphi : G \to G'$ es un homomorfismo de grupos entonces:

$$|\varphi(G)| \quad \text{divide a} \quad |G'| \quad \text{y también divide a} \quad |G|$$

Corolario 2

La aplicación $\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ es un homomorfismo entre los grupos $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ y $(\mathbb{Z}_m, +_m)$ si y sólo si

$$\varphi([a]_n) = [ak]_m \qquad \text{siendo} \qquad nk \equiv 0 \pmod{m}$$

2.3.14. Problemas

1. Estudiar si son homomorfismos de grupos y en caso afirmativo encontrar el núcleo, la imagen y establecer el isomorfismo dado por el primer teorema de isomorfía.

   a) $\varphi : \mathbb{R}^* \to GL_2(\mathbb{R})$, $\varphi(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

   b) $\varphi : \mathbb{R} \to GL_2(\mathbb{R})$, $\varphi(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$

   c) $\varphi : GL_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\varphi(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = a + d$

   d) $\varphi : GL_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $\varphi(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad - bc$

   e) $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\varphi(n) = 7n$

2. Sea $\varphi : \mathbb{Z}_{30} \to \mathbb{Z}_{30}$ un homomorfismo cuyo núcleo es $\ker(\varphi) = \{[0]_{30}, [10]_{30}, [20]_{30}\}$.
   Si $\varphi([23]_{30}) = [9]_{30}$ determinar todos los elementos que se transforman en $[9]_{30}$

3. Sea $\varphi : \mathbb{Z}_{30} \to G$ un homomorfismo suprayectivo de grupos. Sabiendo que $|G| = 5$, calcular $\ker(\varphi)$

4. Sea $\varphi : \mathbb{Z}_{17} \to G$ un homomorfismo de grupos que no es inyectivo. Determinar φ

5. ¿Cuántos homomorfismo existen de $(\mathbb{Z}_{20}, +_{20})$ en $(\mathbb{Z}_8, +_8)$?, ¿cuántos de ellos son suprayectivos?

6. Sean $(G, *)$ y $(G', \cdot)$ dos grupos de órdenes 24 y 7 respectivamente. Estudiar si existe un homomorfismo suprayectivo de G en G' y si existe un homomorfismo inyectivo de G' en G.

7. Estudiar si existe algún homomorfismo inyectivo $\varphi : D_4 \to \mathbb{Z}_{16}$

8. Describir los homomorfismos $\varphi : \mathbb{Z}_{24} \to \mathbb{Z}_{18}$

9. Construir un homomorfismo de grupos cuyo núcleo sea isomorfo a $\mathbb{Z}_3$, otro con núcleo isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ y otro con núcleo isomorfo a $\mathbb{Z}_6$.