TEMA 3: ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

Problema 1. Demuestra que tres puntos P_1, P_2 y P_3 están alineados con razón simple $[P_1, P_2, P_3] \geq 1$, si y solo si la distancia entre ellos verifica

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$$

Problema 2. En $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sea L la recta que pasa por los puntos $P_1 = (3, 0, -1)$ y $P_2 = (2, 1, 0)$. Calcula su perpendicular por P_2.

Problema 3. Calcula la distancia entre la recta $L_1 \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ que pasa por $(-1, 0, -1)$ con dirección $\mathcal{L}\{(-2, 1, 1)\}$ y la recta de ecuaciones

$$L_2 : \left\{ \begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & -2 \\ & -y & +2z & = & 1 \end{array} \right.$$

Problema 4. Calcula la distancia en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ del punto $P = (1, 1, 4)$ a la recta

$$L : \left\{ \begin{array}{rrrcr} -3x & & +z & = & 2 \\ & y & -z & = & -1 \end{array} \right.$$

Problema 5. Calcula la distancia entre los dos planos paralelos $B_1 : \{x + y - 2z = -1\}$ y $B_2 : \{x + y - 2z = 1\}$.

Problema 6. Prueba que la aplicación asociada a un movimiento $f : A \longrightarrow A$ en un espacio afín euclídeo es lineal. Para ello prueba que, dados $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\|\overrightarrow{f}(\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) - \lambda\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) - \mu\overrightarrow{f}(\overrightarrow{w})\|^2 = 0.$$

Problema 7. Muestra que, al igual que sucede en las isometrías lineales, el determinante de un movimiento

$$\det(f) := \det(M(\overrightarrow{f})_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}_c})$$

no depende de la referencia ortonormal escogida $\mathcal{R}_c$, por lo tanto el determinante es un invariante de f, igual a ± 1.

Problema 8. Estudia la simetría en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ respecto de la recta $L : \{x+3y = -2\}$, encontrando una representación matricial respecto de una referencia cartesiana apropiada. Calcula sus subespacios invariantes y la imagen de la recta $B : \{3x - y = 5\}$.

Problema 9. Estudia el giro en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ de centro $Q = (-1, -2)$ y ángulo $\frac{\pi}{6}$, encontrando una representación matricial respecto de una referencia cartesiana apropiada. Calcula la imagen del punto $P = (3, 3)$.

Problema 10. Estudia el movimiento composición de una simetría en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ respecto de la recta $L : \{x+y = 2\}$, y una traslación de vector $\overrightarrow{v} = (3, -3)$, encontrando una representación matricial respecto de una referencia cartesiana apropiada. Calcula la imagen del origen de coordenadas.

Problema 11. Estudia el movimiento composición de una simetría en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ respecto del plano $H : \{x+y-2z = -1\}$, y una traslación de vector $\overrightarrow{v} = (-1, 1, 0)$, encontrando una representación matricial respecto de una referencia cartesiana apropiada. Calcula la imagen de la recta que une los puntos $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, -2)$.

Problema 12. Estudia el giro en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ respecto de la recta $L = (0, 1, 2) + \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$ y ángulo $\frac{3\pi}{4}$, encontrando una representación matricial respecto de una referencia cartesiana apropiada. Calcula sus puntos fijos y la imagen del punto $P = (-2, -2, 1)$.