Ejercicio 1 (40%)

a) Hallar polinomio de grado mínimo verificando p(0)=1, p(1)=1,p'(1)=0, p(2)=3

¿De qué grado será el polinomio? Justificar. 4 condiciones = 4 coefs --> grado 3

Usando una tabla de diferencia divididas, calcular los coeficientes de p(x):

0	1				
		0			
1	1		0		
		p'=0		1	Diferencias divididas: 1, 0, 0, 1
1	1		2		
		2			
2	3				

$$p(x) = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x(x-1) + 1 \cdot x(x-1)^2 \quad => \quad p(x) = 1 + x(x-1)^2$$

b) Sea la tabla:

x_k	0	1	2	3
f_k	0	0	1	4

Queremos ajustar sus datos con un polinomio de grado 2: $p(x) = a + bx + cx^2$

1. Plantear el sistema sobredeterminado a resolver para hallar el polinomio p(x) que mejor ajuste los datos de la tabla.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. Ahora queremos que p(x) VERIFIQUE de forma exacta las dos primeras condiciones y pase lo más cerca posible de las 2 restantes. Plantear el nuevo sistema sobredeterminado, resolverlo a través de las ecuaciones normales y dar la solución del p(x) correspondiente.

1ª condición: p(0)=0 --> a = 0

2ª condición: p(1) = a + b + c = b + c = 0 --> b = -c

Luego la expresión de p(x) queda $p(x) = a + bx + cx^2 = -cx + cx^2 = c(x^2 - x)$

El sistema sobredeterminado (condiciones 3 y 4) se plantea únicamente sobre el coeficiente c. Tras resolver se calculan los coeficientes a (a=0) y b (b=-c) para que cumplan las 2 primeras condiciones:

$$\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}c \approx \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}c = \begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 40c = 26 \Rightarrow c = \frac{13}{20}$$

El polinomio buscado es por tanto: $p(x) = \frac{13}{20}\left(x^2 - x\right)$

3. ¿Cuál de los polinomios anteriores minimiza $E = \sum_k \left(f_k - p(x_k)\right)^2$?

El primero, porque es por definición el mejor ajuste (sin restricciones previas).

Ejercicio 2 (30%) Dada la ecuación $e^{-x} = x + 2$:

a) Demostrar que la ecuación tiene una raíz s en el intervalo [-1,0].
b) Queremos aplicar el método de Newton para hallar la raíz del intervalo [-1,0]. ¿Qué error inicial $e_0 = |x_0 - s|$ máximo garantiza que el método converge?

c) Si tomamos $x_0 = -0.8$ como valor inicial, justificar si el método de Newton converge. Calcular la primera iteración x_1 del método partiendo de $x_0 = -0.8$.

d) Sin conocer la raíz s, a partir del valor x_1 del apartado anterior y sabiendo que $x_2 = -0.4433$, $x_3 = -0.4429$ estimar el error cometido (e_1, e_2, e_3) en las 3 iteraciones.

Solución:

a) La ecuación $e^{-x} = x + 2$ se puede escribir como $f(x) = 0;\ f(x) = e^{-x} - x - 2$. Al ser f(x) una función continua en el intervalo [-1,0], f(-1)=1.7183 >0, f(0)=-1< 0 (cambia de signo en los extremos del intervalo) por el teorema de Bolzano podemos asegurar que existe al menos una raíz en el intervalo [-1,0].

b) El método de Newton converge si $|Me_0| < 1$ siendo $M = \dfrac{\max|f''(x)|}{2\min|f'(x)|}$.

En nuestro caso $f'(x) = -e^{-x} - 1$ y $f''(x) = e^{-x}$

$$\max |f''(x)|_{x\in[-1,0]} = e \qquad (x=-1)$$

$$\min |f'(x)|_{x\in[-1,0]} = 2 \qquad (x=0)$$

$$M = \frac{e}{2\cdot 2} = \frac{e}{4}$$

El método de Newton converge si $|\frac{e}{4}e_0| < 1$ luego $e_0 < 1\frac{4}{e} \approx 1.4715$. En el caso del intervalo el error máximo inicial es 1 < 1.4715. Luego el método converge

c). La expresión del método de Newton es $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{-x_n} - x_n - 2}{-e^{-x_n} - 1}$ que nos da los siguientes resultados

$x_1 =$ -0.4821
$x_2 =$ -0.4433
$x_3 =$ -0.4429

d) El error en las dos primeras iteraciones se puede aproximar de la siguiente manera:

$$|e_1| \approx |x_2 - x_1| = 3.8800\text{e-}002$$
$$|e_2| \approx |x_3 - x_2| = 4.0000\text{e-}004$$

Para la tercera iteración no tenemos x_4, pero sabemos que si el método de Newton converge se verifica que:

$$e_{n+1} \approx k \cdot e_n^2$$

Por lo tanto: $e_2 \approx k \cdot e_1^2$ y podemos estimar k como $k \approx \frac{e_2}{e_1^2} \approx 0.2657$

Usando la misma relación tenemos que $e_3 \approx k \cdot e_2^2 \approx 0.266 \cdot (4 \cdot 10^{-4})^2 \approx 4.25 \cdot 10^{-8}$

Ejercicio 3 (3 ptos) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1+a & -1 \end{pmatrix}$ con a>0

1. Si a = 0.5, calcular la factorización LU de la matriz A y aplicarla para calcular el determinante de A.

2. Sabiendo que $\|A^{-1}\|_1 = 1+2/a$, calcular el condicionamiento de la matriz A usando la norma 1 para cualquier valor de a. Si $a=10^{-5}$ ¿está bien condicionada la matriz A?

3. Sea x la solución exacta del sistema A·x=b con b=[1 0]' y x_p la solución del sistema perturbado A· $x_p = b_p$, siendo b_p = [1.001 0]'.
   Para el caso $a=10^{-5}$ (sin calcular x ni x_p) dar una cota del error relativo de la solución x en función del error relativo del término independiente usando la norma 1. ¿Garantiza la cota calculada que el error introducido en el término b repercute en un error del mismo orden en la solución x? Justificar la respuesta.

SOLUCIÓN:

1. Se calcula la factorización LU de la matriz A=LU, resultando las matrices triangulares:

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{U}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Utilizamos la factorización anterior para calcular el determinante de A:

det(A)=det(LU)=det(L)det(U)=1·0.5=0.5.

2. Se calcula

$$\|A\|_1 = \max\{2, 2+a\} = 2+a$$

$$cond(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = (2+a)\left(1+\frac{2}{a}\right) = \frac{4}{a}+4+a.$$

Por tanto para a=10^{-5}: $cond(A) = 4\cdot 10^5 + 4 + 10^{-5} >>> 1$

El nº de condición de A es mucho mayor que 1 y por tanto la matriz A está mal condicionada.

3. Sabemos por teoría que el error relativo en el término independiente y el error relativo en la solución están relacionados por la expresión:

$$\frac{\|b-b_p\|_1}{\|b\|_1}\frac{1}{\|A\|_1\|A^{-1}\|_1}\le\frac{\|x-x_p\|_1}{\|x\|_1}\le\|A\|_1\|A^{-1}\|_1\frac{\|b-b_p\|_1}{\|b\|_1}$$

En nuestro caso: $\frac{\|b-b_p\|_1}{\|b\|_1}<10^{-3}.$

Por tanto, el error relativo de la solución estará acotado por:

$$\frac{\|x-x_p\|_1}{\|x\|_1}\le(4\cdot10^5+4+10^{-5})10^{-3}\approx 4\cdot10^2.$$

Esta cota es del orden de 10^2 y no garantiza que el error introducido en el término b repercuta en un error del mismo orden en la solución, por estar la matriz A mal condicionada.

ALGORÍTMICA NUMERICA EXAMEN JULIO 2018

La duración del examen será de 75 minutos.

Se deben incluir todos los códigos usados, todas las gráficas pedidas y contestar a las preguntas.

Problema 1. *Interpolar la siguiente tabla mediante un polinomio $p(x)$ de menor grado:*

xi	*-0.5*	*-0.3*	*0.1*	*0.5*
yi	*2.5*	*2.3*	*1.9*	*1.4*

Dibujar la gráfica del polinomio de interpolación en el intervalo [-0.7 0.7] junto con la tabla.

```
xi = [-0.5 -0.3 0.1 0.5]'
yi = [2.5 2.3 1.9 1.4]'
% El polimonio hay que buscarlo de grado 3 por tener 4 condiciones
H = [ones(size(xi)) xi xi.^2 xi.^3]
c = H\yi
xx=-0.7:0.01:0.7;
yy = c(1)+c(2)*xx+c(3)*xx.^2+c(4)*xx.^3;
figure(1); plot(xi,yi,'ro',xx,yy,'b')
```

Ajustar la tabla en sentido mínimos cuadrados por medio de una función $u(x)$ combinación lineal de las funciones $\{1, tan(x)\}$

Dibujar la gráfica de la función aproximadora en el intervalo [-0.7 0.7] junto con la tabla

Calcular los residuos.

```
H = [ones(size(xi)) tan(xi)]
c = H\yi
yy = c(1)+c(2)*tan(xx);
figure(2); plot(xi,yi,'ro',xx,yy,'b')
zi = c(1)+c(2)*tan(xi);
residuos = zi-yi
```

Calcular el polinomio $p(x)$ de menor grado que cumpla la condición $p'(1) = 2$ y que interpole la tabla. Calcularlo usando matlab (dar los coeficientes).

```
% El polimonio hay que buscarlo de grado 4 por tener 5 condiciones
H = [ones(size(xi)) xi xi.^2 xi.^3 xi.^4]
b=[yi;2]
H=[H;0 1 2 3 4]
c = H\b
%el polinomio es c(1)+c(2)x+c(3)x^2+c(4)x^3+c(5)x^4
```

Problema 2 Se considera el siguiente método iterativo

$$x_{k+1} = x_k + \left(33 \times 2^{-x_k} - 1\right) \Big/ \log(2)$$

Arrancar con $x_0 = 1$ y almacenar en un vector *x* las 20 primeras iteraciones. En cada iteración calcular la estimación del error $e_k \approx \left| x_{k+1} - x_k \right|$ y mostrar el resultado de la siguiente forma:

Valor iteración 23.3617731337789320 Valor del error 2.2362e+01

Sea *s=x(end)*. ¿Es convergente la sucesión? ¿A qué valor converge?.

Dibujar la gráfica de x.

A partir del vector x y del valor de s, calcular el vector Erel de los errores relativos. Dibujar la gráfica de Erel con el formato adecuado.

A partir del vector Erel, calcular el vector Ncifras del número de cifras de precisión. Dibujar la gráfica de Ncifras con el formato adecuado.

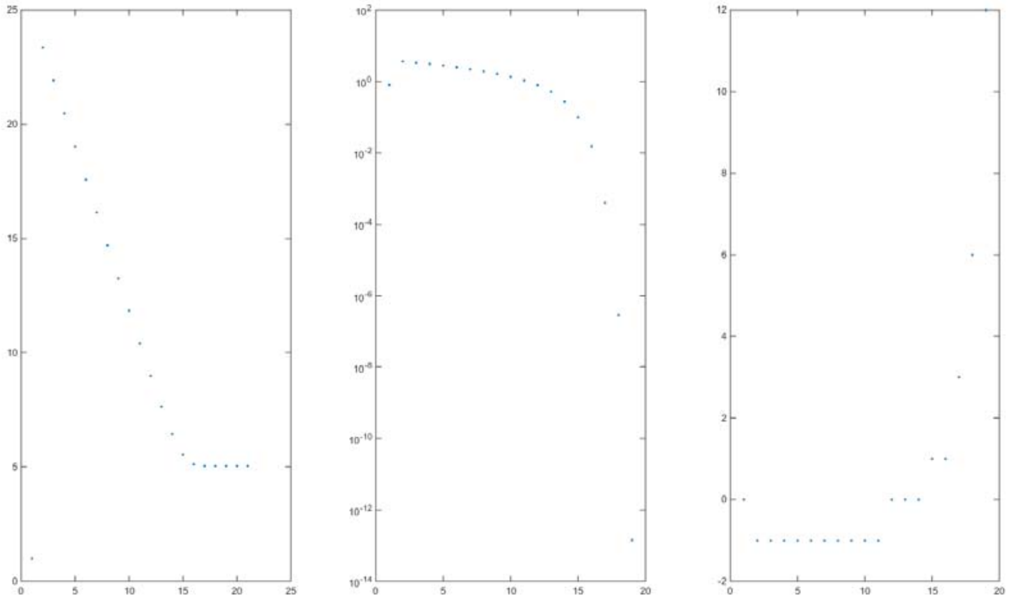
¿Cuántas cifras de precisión se obtienen?. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para alcanzar esa precisión?. ¿Qué clase de convergencia (lineal, cuadrática,…) se ha producido?. Justificar.

Comprobar que s, es la solución de la ecuación $2^{-x} - 33 = 0$. Despejar x de la ecuación y compararla con el valor de s.

Modificar el script anterior para calcular la solución de la ecuación $2^{-x} - 35 = 0$. ¿Cuál es la solución de esta ecuación?.

Solucion

```
clear
    x=zeros(1,21);
    x(1)=1;
    for k=1:20,
        x(k+1)=x(k)+(33*(2^(-x(k)))-1)/log(2);
        e=abs(x(k+1)-x(k));
        fprintf('Valor iteración %2.16f Valor del error
    %1.4e\n',x(k+1),e);
    end
    subplot(131);plot(x,'.');
    s=x(end)
    Erel=abs(x-s)/abs(s);
    subplot(132);semilogy(Erel,'.');hold on
    Ncifras=floor(-log10(Erel));
    subplot(133);plot(Ncifras,'.');

    2^s

    log(33)/log(2)-s

    Valor iteración 1.0000000000000000 Valor del error 2.2362e+01
    Valor iteración 23.3617731337789320 Valor del error 1.4427e+00
    Valor iteración 21.9190825095504320 Valor del error 1.4427e+00
    Valor iteración 20.4763994743525970 Valor del error 1.4427e+00
    Valor iteración 19.0337370680440900 Valor del error 1.4426e+00
    Valor iteración 17.5911307351355110 Valor del error 1.4425e+00
    Valor iteración 16.1486768127113930 Valor del error 1.4420e+00
    Valor iteración 14.7066370902310230 Valor del error 1.4409e+00
    Valor iteración 13.2657225805058590 Valor del error 1.4379e+00
    Valor iteración 11.8278615554433450 Valor del error 1.4296e+00
    Valor iteración 10.3982627768928410 Valor del error 1.4074e+00
    Valor iteración 8.9908453724418411 Valor del error 1.3491e+00
    Valor iteración 7.6417284557450174 Valor del error 1.2043e+00
    Valor iteración 6.4374294317342464 Valor del error 8.9337e-01
    Valor iteración 5.5440590879402816 Valor del error 4.2232e-01
    Valor iteración 5.1217404241454636 Valor del error 7.5310e-02
    Valor iteración 5.0464309176005697 Valor del error 2.0354e-03
    Valor iteración 5.0443955564589293 Valor del error 1.4371e-06
    Valor iteración 5.0443941193591693 Valor del error 7.1587e-13
    Valor iteración 5.0443941193584534 Valor del error 0.0000e+00

    s =
        5.0444

    ans =
        33

    ans =
         0
```



¿Es convergente la sucesión? ¿A qué valor converge?.

Es convergente y converge a `s = 5.0444.`

¿Cuántas cifras de precisión se obtienen?. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para alcanzar esa precisión?. ¿Qué clase de convergencia (lineal, cuadrática,…) se ha producido?. Justificar.

Se obtienen 12 cifras de precisión en 19 iteraciones. La convergencia es cuadrática. Las últimas iteraciones (17, 18 y 19) obtienen 3, 6 y 12 cifras de precisión. En cada iteración se duplican las cifras.

Comprobar que s, es la solución de la ecuación $2^{-x} - 33 = 0$. Despejar x de la ecuación y compararla con el valor de s.

```
s = 5.0444
2^s-33
ans =
    0
```

La expression matemática es x=log(33)/log(2).

```
log(33)/log(2)-s
ans =
    0
```

Modificar el script anterior para calcular la solución de la ecuación $2^{-x} - 35 = 0$. ¿Cuál es la solución de esta ecuación?.

```
clear
x=zeros(1,21);
x(1)=1;
for k=1:20,
    x(k+1)=x(k)+(35*(2^(-x(k)))-1)/log(2);
end
s=x(end)
2^s-35
log(35)/log(2)-s
s =
```

```
   5.1293
ans =
     0
ans =
     0
```

La solución de la ecuación es s = 5.1293