SOLUCIONES COMENTADAS

Las observaciones del final se debían leer una o dos veces si era necesario.

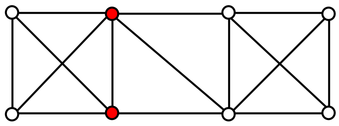
1. Lo que necesites "pintar" para los ejercicios 3 y 4, hazlo en esta hoja.
2. Lee atentamente todos los enunciados. Cuando termines tu respuesta a un ejercicio vuelve a leer el enunciado y comprueba que has respondido a lo que se pregunta.

Esta segunda frase se dirige a los alumnos que en el ejercicio 4 se pusieron a colorear aristas en el grafo de la figura. En el enunciado de ese ejercicio, ¿se pedía algo sobre índice cromático?

1. **(1,5 puntos)**
   (a) Dibuja un grafo simple con al menos 9 vértices que sea 3-aristoconexo pero no sea 3-conexo. Justifica que el grafo dibujado cumple las condiciones pedidas.
   (b) Demuestra que un grafo simple G es 2-conexo si y sólo si para cada vértice ***u*** y para cada arista *e* de G existe un ciclo que contiene a ***u*** y a *e*.

Apartado a)
En el enunciado se dice bien claro que hay que justificar que el grafo dibujado cumple las condiciones.
¿Por qué algunos alumnos "sueltan" el dibujo en el papel y no escriben nada?

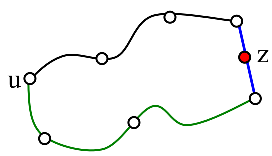
En la figura aparece un grafo de 8 vértices que es 2-conexo (hay que eliminar al menos 2 vértices para desconectar el grafo), NO es 3-conexo (porque eliminando los vértices rojos desconectamos el grafo) y SÍ 3-aristoconexo porque la eliminación de dos aristas no desconecta el grafo (hace falta eliminar al menos 3)



Ahora dibujad un ejemplo con 9 vértices.

Apartado b)
Hay que demostrar dos implicaciones:

Primera implicación)
Si G es un grafo simple 2-conexo entonces para cada vértice ***u*** y para cada arista *e* de G existe un ciclo que contiene a ***u*** y a *e*.
Dem.:
Construimos un grafo G* a partir de G insertando un vértice z en la arista *e*. Este grafo G* sigue siendo 2-conexo (porque no tiene vértices-corte). Por el teorema de Whitney existen dos caminos independientes en G* entre los vértices ***u*** y **z.** La concatenación de los dos caminos forma un ciclo en G que contiene al vértice **u** y a la arista *e*



Segunda implicación)
Si para cada vértice ***u*** y para cada arista *e* de un grafo G existe un ciclo que contiene a ***u*** y a *e* entonces el grafo G es 2-conexo.
Dem.:
Por reducción al absurdo. Supongamos que G no es 2-conexo, es decir, G tiene un vértice corte x. Si elegimos un vértice u y una arista e en distintas componentes de G – x entonces no existe el ciclo que se garantiza en la hipótesis. Contradicción. Luego G es 2-conexo.

2. **(2 puntos)**

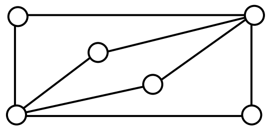
¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Demuéstralas o encuentra un contraejemplo.

(a) No existen grafos planares y 6-conexos.
(b) Todo grafo 2-conexo y euleriano es hamiltoniano.
(c) Si G es un grafo conexo cuyo complementario G' es conexo, regular y no euleriano, entonces se cumple que G sí es euleriano.
(d) No existen grafos planos, conexos, con 27 aristas, 10 regiones y grado mínimo 3.

Apartado a) CIERTO
En un grafo planar existe al menos un vértice v de grado $d(v) \leq 5$, pero si un grafo es 6-conexo todos sus vértices deben tener grado ≥ 6

Observación: Algún alumno ha respondido a esta cuestión diciendo que si un grafo G es 6-conexo entonces G contiene a K_6 (y, por tanto, no es planar). La afirmación es FALSA.
Por ejemplo, el grafo de Petersen es 3-conexo pero NO contiene a ningún triángulo. Y se pueden construir ejemplos para todo s>2 de grafos s-conexos que no contienen a K_s

Apartado b) FALSO
El grafo de la figura es 2-conexo (no tiene vértices-corte), es euleriano (vértices pares) pero NO es hamiltoniano (la supresión de los 2 vértices de grado 4 crea 4 componentes conexas)



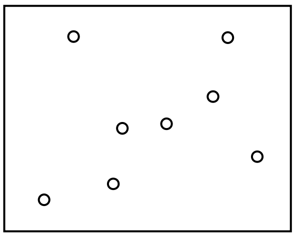
Apartado c) CIERTO
El grafo complementario G' no es euleriano por lo que debe tener vértices impares. Al ser regular tendrá todos sus vértices impares de grado k. Como todos los vértices de G' son impares, el orden n de G' (y el de G) debe ser par. El grado de cada vértice en G es $n - 1 - k$, que es par, luego G es euleriano.

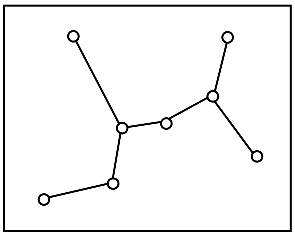
Apartado d) CIERTO
En un grafo plano con n vértices, q aristas y r regiones se verifica que $n - q + r = 2$, luego en un grafo G con los datos del enunciado se tiene que $n = 2 + 27 - 10 = 19$
Por otra parte, si $d(v) \geq 3$ para todo vértice v, entonces $2q \geq 3n$, luego $n \leq 18$ y no puede haber grafos cumpliendo todas las condiciones. .

3. **(1,5 puntos)**

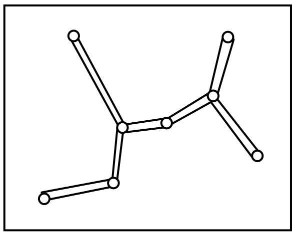
(a) ¿Qué significa que un algoritmo garantice una solución 2-aproximada para un problema de optimización? Describe una aproximación con ese factor para el “Problema del Viajante” utilizando las siguientes viñetas. Los vértices del grafo G aparecen en la primera viñeta, las aristas de G son todos los segmentos que unen cada par de vértices y el peso de cada arista es la distancia euclídea entre sus extremos. En la segunda viñeta aparece el …¿? Dibuja los pasos siguientes en las viñetas sucesivas y descríbelos brevemente.

(b) Demuestra que el algoritmo descrito es una 2-aproximación.

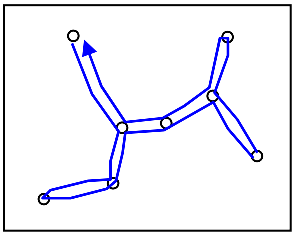




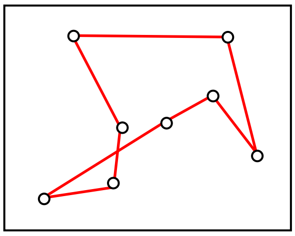
MST



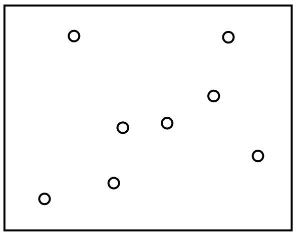
Grafo euleriano H formado al duplicar las aristas del MST



Recorrido euleriano en H



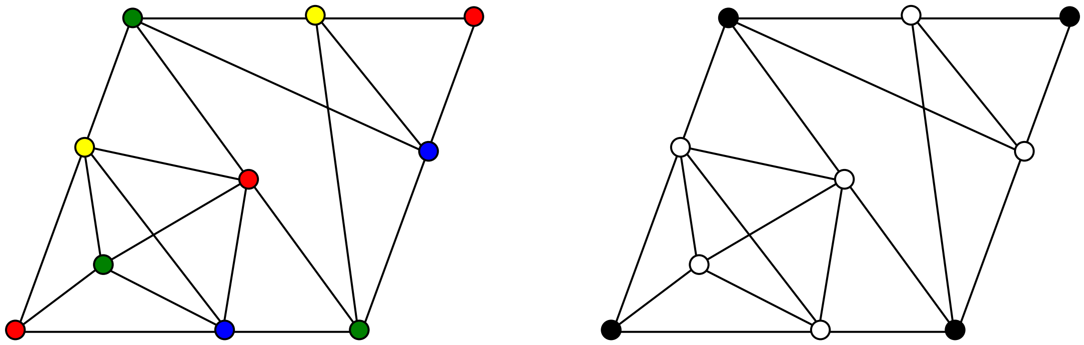
Ciclo hamiltoniano en G visitando los vértices en el **mismo orden** que en el recorrido euleriano pero sin repetir ninguno



Las respuestas a las preguntas teóricas las miráis en los apuntes, las transparencias, los libros, …..

Observación: En algunas respuestas habéis dibujado aristas no rectilíneas (curvas). Leed el enunciado de nuevo con atención y decidme cuáles son las aristas del grafo, ¡que son las únicas que podéis utilizar en el ciclo hamiltoniano final!

4. **(1 punto)**
Indica las relaciones que existen entre número cromático, grado máximo y número de independencia. Comprueba razonadamente que se verifican en el grafo de la figura.



χ = número cromático, Δ = grado máximo, β = número de independencia

Tres observaciones sobre este ejercicio (que también son válidas para el ejercicio 7):

Primera: He dicho unas cuantas veces en clase que decir que el número cromático de un grafo es k significa dos cosas: una que existe una coloración en los vértices con k colores, y otra, que debemos justificar que el grafo **NO** se puede colorear correctamente con menos de k colores.

Segunda: Ningún algoritmo, repito **NINGUNO**, de los que hemos descrito en clase para colorear vértices garantiza que el número de colores utilizado sea el mínimo posible (es decir, el número cromático). Por tanto, afirmar que al utilizar uno de esos algoritmos el número de colores utilizado es el número cromático del grafo es INCORRECTO.

Tercera: Recuerdo que el número de independencia de un grafo es el cardinal **MÁXIMO** de un conjunto independiente. Si coloreamos los vértices de un grafo, los vértices de cada color forman conjuntos independientes, pero no se garantiza que así se obtenga un conjunto independiente de cardinal máximo.

Y respondamos al ejercicio.

En cualquier grafo simple $\chi \leq \Delta + 1$
Si G es un grafo simple que no es ni completo ni un ciclo impar entonces $\chi \leq \Delta$
En el grafo $\chi=4$ (porque en la figura hay una 4-coloración y el grafo contiene un K_4 en la esquina inferior izquierda) y $\Delta=5$

En cuanto a independencia, $\chi \geq n/\beta$ $\beta=4$
Porque los vértices negros son independientes y no puede existir un conjunto independiente con 5 elementos. El K_4 de abajo a la izquierda contribuye sólo con un elemento a cualquier conjunto independiente. Si se añade el vértice central sólo se puede agregar otro más del triángulo superior derecho. Y agregando los dos negros marcados de la diagonal central sólo se puede añadir uno del triángulo. En definitiva, el máximo es 4.

5. **(1 punto)**
Demuestra el "*Teorema de los seis colores*" para grafos planos.

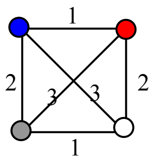
Mirad las transparencias, los libros, …..

6. **(1 punto)**
El grafo G es 3-regular y hamiltoniano. Calcula su número cromático y su índice cromático.

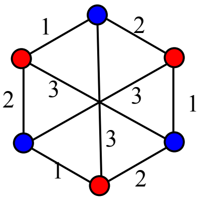
Antes de colorear vértices y aristas una observación. Si G es 3-regular todos sus vértices son impares luego el orden del grafo es par (porque no puede haber un número impar de vértices impares)

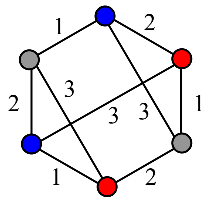
Analicemos algunos ejemplos con orden pequeño. El color de las aristas se indica con 1, 2, 3, …

$n = 4$

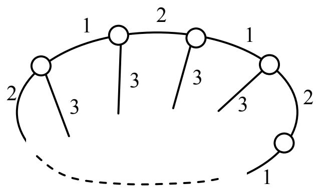


$n = 6$





Empecemos con el índice cromático. En todos los ejemplos tenemos que $\chi' = 3$
¿Será cierto para todo grafo cúbico y hamiltoniano? SÍ



Las aristas del ciclo hamiltoniano se colorean con los colores 1 y 2, alternadamente. Y el resto de aristas, que son disjuntas, con el color 3.

Luego $\chi'(G) = 3$

Ahora el número cromático.
Para $n = 4$ observamos que el único grafo cúbico y hamiltoniano es K_4 y sabemos que $\chi(K_4) = 4$.

Por otra parte, en el ejercicio 4 ya recordamos que:
Si G es un grafo simple que no es ni completo ni un ciclo impar entonces $\chi \leq \Delta$

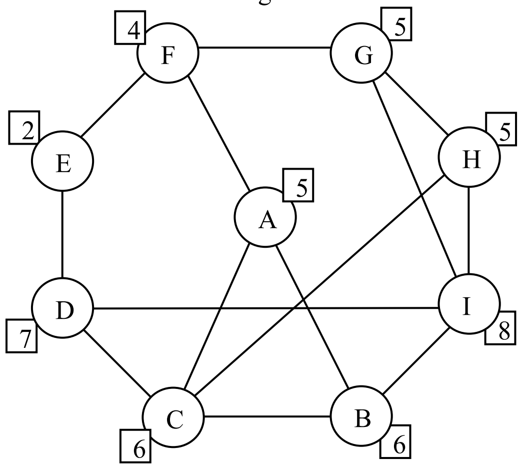
Luego para todo grafo G 3-regular y hamiltoniano con $n>4$ vértices se cumple que $2 \leq \chi(G) \leq 3$
El número cromático será 2 cuando G sea bipartido y 3 si G contiene algún ciclo impar.

Observación: Un razonamiento erróneo pero frecuente en este ejercicio ha sido el siguiente.
"Como todo vértice es de grado 3 para colorear los vértices serán necesarios tres colores".
En el dibujo superior (parte central) tenéis un contraejemplo a dicha afirmación.

7. **(2 + 0,5 puntos)**
Los enanos esconden su tesoro en el Laberinto de Moria, conjunto de cuevas excavadas en la montaña y conectadas por pasadizos. El plano del laberinto se muestra en la figura.

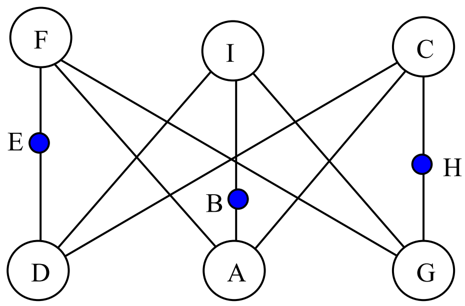
a) ¿Se puede dibujar el plano sin que se corten dos pasadizos?

Cada una de las cuevas dispone de un nivel diferente de seguridad indicado por la etiqueta correspondiente en el dibujo. Los enanos quieren concentrar su tesoro en algunas de las cuevas con dos condiciones: (1) que el nivel total de seguridad sea máximo, y (2) que entre dos cualesquiera de las cuevas elegidas no puede haber conexión directa. Debes ayudar a los enanos a elegir adecuadamente las cuevas. Para ello debes responder a las siguientes cuestiones:

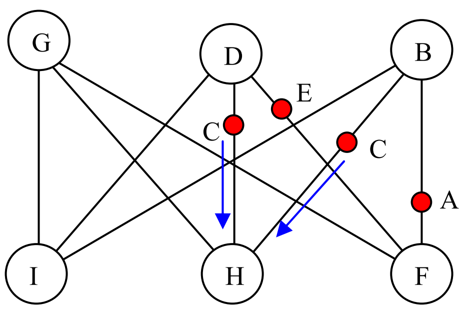


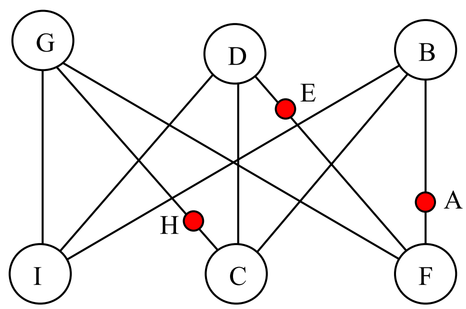
b) Interpreta el problema en término de grafos.
c) Diseña un algoritmo para resolver el problema en un grafo cualquiera con etiquetas de seguridad en los vértices.
d) Aplica tu algoritmo al Laberinto de Moria.
e) (*) Analiza la complejidad de tu algoritmo.

Apartado a) El grafo no es planar porque contiene un subgrafo homeomorfo a (una subdivisión de) $K_{3,3}$



Observaciones:
1. La estrategia de obtener la no planaridad de un grafo buscando contracciones de aristas que nos lleven a $K_{3,3}$ o a K_5 no es recomendable. Es muy fácil equivocarse.
2. Para buscar $K_{3,3}$ ¿por qué vértice se debe empezar? En el laberinto NO es adecuado empezar por A porque tiene vecinos adyacentes, ni tampoco por G por la misma razón. Pensad que queréis obtener $K_{3,3}$
3. En la subdivisión NO se puede utilizar un vértice DOS veces. La situación de la figura siguiente (izquierda) es del examen de un alumno. Utiliza el vértice C dos veces. ¿Cómo se arregla correctamente? Cambiando en el nivel inferior el vértice H por C y colocando C como vértice "rojo" subdividiendo la arista CG (figura derecha)





Apartado b)

El objetivo es construir un conjunto **independiente de nivel total máximo**. Si las cuevas elegidas NO deben tener conexión directa, el conjunto elegido será un conjunto independiente de vértices.

Apartado c)

Primera idea: Utilizar una estrategia voraz. Elegir en cada paso el vértice disponible de mayor nivel con lo que se deben eliminar todos los vértices adyacentes a él para que el conjunto construido sea independiente. Aplicando esta estrategia al grafo se obtiene el conjunto {I, C, F} con nivel 18.

En la estrategia voraz se construye de forma secuencial un conjunto independiente. En cada paso se añade un vértice al conjunto independiente y se borran del grafo el propio vértice y todos sus vecinos. Esta eliminación de vértices no se tiene en cuenta para valorar la elección efectuada.

Segunda idea: Valorar cada vértice por lo que realmente aporta su incorporación al conjunto independiente contando con las eliminaciones que produciría. Asignamos a cada vértice x una etiqueta T(x)

$$T(x) = val(x) - \sum_{z \in N(x)} val(z)$$

Se aplica ahora la estrategia voraz, pero eligiendo en cada paso el vértice u con mayor etiqueta T(u). Se añade u al conjunto S que se construye. Se elimina tras la elección el vértice y sus vecinos y se actualizan las etiquetas de los vértices restantes. Se continúa hasta que no queden vértices en el grafo.

Apartado d)

Aplicamos esta segunda estrategia al Laberinto de Moria.

Las etiquetas iniciales en el Laberinto son:

T(A) = – 11, T(B) = – 13, T(C) = – 17, T(D) = – 9, T(E) = – 9, T(F) = – 8, T(G) = – 12, T(H) = – 14, T(I) = – 15

Por tanto, se elige F, S={F}, y se eliminan sus vecinos A, G y E. Las etiquetas actualizadas son:

T(B)= – 8, T(C)= – 12, T(D)= – 7, T(H)= – 9, T(I)= – 10

Se elige D, S={F, D}, se eliminan sus vecinos C, I. Las nuevas etiquetas son:

T(B)= 2, T(H)= – 2

Se elige B, S={F, D, B}. Ahora sólo queda el vértice H que se agrega al conjunto S. Y el proceso termina porque no hay más vértices.

Por tanto, las cuevas elegidas son las del conjunto independiente S ={F, D, B, H}

Apartado e)

Complejidad del algoritmo.

Primer paso: Cálculo de las etiquetas iniciales.

Hay que efectuar las sumas correspondientes al valor de cada vértice. El número total de sumandos es 2q, por tanto la complejidad es O(q)

Segundo paso: Elegir el vértice de mayor valor x, incluir x en el conjunto independiente formado, borrar del grafo el vértice x y sus vecinos y actualizar el valor de los vértices restantes. Este paso se repite hasta que no quedan vértices en el grafo.

Detectar el vértice de mayor valor cuesta O(n), como podemos tener que realizarlo O(n) veces el coste total será $O(n^2)$

La actualización de todas las etiquetas es O(q) porque cada arista sólo se elimina una vez y, por tanto, sólo interviene en una actualización de etiqueta.

La complejidad total es $O(n^2)$

Si se pudiera controlar el tamaño del conjunto independiente buscado, por ejemplo limitando el número de cuevas a un valor k, entonces la complejidad de la detección de todos los máximos sería O(kn) y la complejidad total O(kn+q).