0.1. Lección 5.

0.2. Propiedad de completitud en $\mathbb{R}$.

Recordamos la nociones de supremo e ínfimo:

Definición 1. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $A \neq \emptyset$.*

1. *Diremos que $\alpha \in \mathbb{R}$ es el supremo de A si es la menor de todas las cotas superiores de A. Es decir, α es el supremo de A si*

   i) α es cota superior de A.

   ii) Para toda α^* cota superior de A se tiene que $\alpha \leq \alpha^*$.

2. *Diremos que $\beta \in \mathbb{R}$ es el ínfimo de A si es la mayor de todas las cotas inferiores de A. Es decir, β es el ínfimo de A si*

   i) β es cota inferior de A.

   ii) Para toda β^* cota inferior de A se tiene que $\beta \geq \beta^*$.

Es sencillo probar el siguiente resultado que muestra la relación entre supremos y máximos.

Proposición 2. *El máximo de un conjunto (si existe) es el supremo del conjunto y el mínimo del conjunto (si existe) es el ínfimo del conjunto.*

Es decir, si A es un conjunto de $\mathbb{R}$ que tiene máximo α

$$\alpha = \max A \Rightarrow \alpha = \sup A$$

Observación: Sin embargo, el supremo en general no es el máximo.
Por ejemplo, si $I = (0, 1)$
$\triangleright$ El supremo de I es 1 y sin embargo NO EXISTE el máximo de I.
$\triangleright$ El ínfimo de I es 0 y sin embargo NO EXISTE el mínimo de I.

0.2.1. Propiedad de completitud en $\mathbb{R}$.

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ tiene la siguiente importante propiedad del supremo o de la completitud:

> **P13 Propiedad del supremo en $\mathbb{R}$.** Todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente tiene supremo. De la misma forma, todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente tiene ínfimo.

El conjunto de los números reales con las propiedades **P1** *...,* **P13** *es un cuerpo totalmete ordenado con la propiedad del supremo o completo. Además es el único cuerpo ordenado completo.*

$\triangleright$ El cuerpo $\mathbb{Q}$ tiene las propiedades **P1** ..., **P12** pero **no tiene** tiene la propiedad del supremo o propiedad de completitud. Consideremos el conjunto

$$A = \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : \frac{p}{q} > 0 \text{ y } \frac{p^2}{q^2} < 2\}$$

A es un conjunto en $\mathbb{Q}$ no vacío y acotado superiormente y que no tiene supremo en $\mathbb{Q}$

puesto que, como vimos, $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Observación: Es importante señalar que la propiedad del supremo caracteriza al conjunto de los números reales. Esta propiedad nos permite probar la existencia de $\sqrt{2}$. Efectivamente, si consideramos el conjunto

$$A = \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : \frac{p}{q} > 0 \text{ y } \frac{p^2}{q^2} < 2\}$$

Es claro que:

$\triangleright\triangleright$ $A \neq \emptyset$

$\triangleright\triangleright$ A está acotado superiormente por 2: En efecto, si $\frac{p^2}{q^2} < 2$ y $\frac{p}{q} > 0$ se tiene que $\frac{p}{q} < 2$ (en otro caso, si $\frac{p}{q} \geq 2$ se tendría $\frac{p^2}{q^2} \geq 4$!!!).

Por lo tanto, este conjunto tiene supremo y se puede probar que dicho supremo α verifica $\alpha = \sqrt{2}$.

Calcula y representa los siguientes conjuntos y completa el cuadro.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-3| \leq |x|\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : 6x^2 < x\} \cup \{\frac{1}{k} : k = 1, \ldots, 5\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{2x-1} < x\} \cup \{\frac{1}{k^2} : k \in \mathbb{N} \text{ y } k \geq 3\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2(x-3) \leq 0\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| < |x|\} \cup \{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N} \text{ y } 1 \leq k \leq 3\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} : |x(x-5)| \leq |x|\}$$

	representación	cota sup	cota inf	Máx	mín	Sup	Inf
A							
B							
C							
D							
E							
F							

Resolución:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-3| \leq |x|\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{2x-1} < x\} \cup \{\frac{1}{k^2} : k \in \mathbb{N} \text{ y } k \geq 3\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2(x-3) \leq 0\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| < |x|\} \cup \{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N} \text{ y } 1 \leq k \leq 3\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} : |x(x-5)| \leq |x|\}$$

0.2.2. Propiedad Arquimediana. Propiedades de densidad de los números racionales y reales.

Enunciamos a continuación una formulación de la propiedad Arquimediana de los números reales. Esta propiedad se puede demostar utilizando la propiedad del supremo y significa que el conjunto $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.

Propiedad Arquimediana en $\mathbb{R}$: Si $x \in \mathbb{R}$, entonces existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.

Demostración. Razonamos por red. al absurdo. Si fuese falso, existiría $x \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leq x$. Por tanto, el conjunto, $\mathbb{N}$ estaría acotado superiormente y es obviamente no vacío. Utilizando la propiedad del supremo en $\mathbb{R}$ existiría $\alpha = sup(A)$. Se sigue entonces que

$$n \leq \alpha \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Y por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$n + 1 \leq \alpha \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Por tanto,

$$n \leq \alpha - 1 \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Esto significa que $\alpha - 1$ es cota superior de $\mathbb{N}$ pero $\alpha - 1 < \alpha$!!! esto no es posible puesto que α era el supremo de A y por tanto la menor cota superior de $\mathbb{N}$.

$\square$

La propiedad Arquimediana tiene distintas formulaciones equivalentes que vemos a continuación:

Formulaciones de la propiedad Arquimediana:

- Dado $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$.
- Dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0, y > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.
- El conjunto $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.

La propiedad Arquimediana de los números reales justifica la existencia de la parte entera de un número real que definimos a continuación:

Definición 3. *Sea $x \in \mathbb{R}$, el único número entero n tal que $n \leq x < n+1$ se llama parte entera de x y se denota por $[x]$.*

$[3,7] =$ $\quad$ $[0,3] =$ $\quad$ $[-2,1] =$ $\quad$ $[-0,7] =$

Si $x \in \mathbb{R}$, $x = [x] + \alpha$ con $0 \leq \alpha < 1$.

0.2.3. Propiedades de densidad de los números reales

Los números reales verifican las siquientes propiedades, conocidas como propiedades de densidad:

Proposición 4. *(***Propiedades de densidad)***) Sean $a, b \in \mathbb{R}$,*

1. *Si $a < b$ existe algún número racional $\dfrac{p}{q}$ tal que $a < \dfrac{p}{q} < b$.*
2. *Si $a < b$ existe algún número irracional α tal que $a < \alpha < b$.*

A partir de esta propiedad se puede probar que cada intervalo de números reales (a, b) contiene infinitos números racionales e irracionales y que no hay *huecos* o *agujeros* en la recta real.

0.2.4. Propiedad de los intervalos encajados.

Sea $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de intervalos. Se define la unión y la intersección infinita de intervalos de la siguiente forma:

$$\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x \in \mathbb{R} | x \in I_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

$$\cup_{n=1}^{\infty} I_n = \{x \in \mathbb{R} | x \in I_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

La propiedad de los intervalos encajados es la siguiente:

Propiedad de los intervalos encajados en $\mathbb{R}$:
Sea $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de intervalos tales que:
- Para todo $n \in \mathbb{N}$ el intervalo I_n es cerrado y acotado, es decir, $I_n = [a_n, b_n]$.
- Los intervalos están encajados, es decir, $I_{n+1} \subset I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces $\cap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. Además, si $\inf\{|b_n - a_n|, \quad n \in \mathbb{N}\} = 0$ entonces $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ es un único punto.

☒ En cada una de las siguientes intersecciones infinitas, halla el conjunto y razona si se puede aplicar o no el "Principio de los intervalos encajados".

$$i) \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{5^n}{9^n}, \frac{1}{3^n}\right] \qquad ii) \bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{2^n}) \qquad iii) \bigcap_{n=1}^{\infty} [0, 1 + \frac{1}{2^n}]$$

Observación: La propiedad de los intervalos encajados en $\mathbb{R}$ es equivalente a la propiedad del supremo en $\mathbb{R}$. Estas propiedades son esenciales en las demostraciones de los principales teoremas del curso. Puesto que la propiedad del supremo no es cierta en $\mathbb{Q}$ tampoco lo es la de los intervalos encajados.

Observación: Nótese que en la propiedad de los intervalos encajados es esencial que los intervalos sean cerrados. Por ejemplo, si $I_n = (0, \dfrac{1}{n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión de intervalos $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ está encajada y sin embargo

$$\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$$

Justificación: Por reducción al absurdo: suponemos que

$$\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$$

Esto significa que EXISTE $x \in [\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ para todo $\in \mathbb{N}$. Por lo tanto,
Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$0 < x\frac{1}{n}$$

¿Puede ocurrir esto?? NO; puesto que por la propiedad arquimediana, existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < x$.

0.2.5. Breves nociones sobre Numerabilidad

Definimos conjuntos finitos e infinitos.

Definición 5. *Diremos que un conjunto* $A \neq \emptyset$ *es finito si existe* $n \in \mathbb{N}$ *y una aplicación biyectiva* $\varphi : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$*; A dicho número* n *se le llama el cardinal de* A*. Si un conjunto no es finito diremos que es infinito.*

$\varphi : A \to B$ es *inyectiva* si para todo $x, y \in A$ con $x \neq y$ se tiene que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.
$\varphi : A \to B$ es *sobreyectiva* si para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $\varphi(a) = b$.

Definición 6. *Diremos que un conjunto es numerable si es finito o existe una aplicación biyectiva* $\varphi : \mathbb{N} \to A$*.*

En el caso de conjuntos finitos de cardinal N podemos denotar el conjunto de la siguiente forma $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$. Por otra parte, es importante observar que en el caso de conjuntos finitos si $A \subset B$ y ambos tienen el mismo cardinal entonces coinciden. Esto no es cierto en el caso de conjuntos infnitos. Por ejemplo, si consideramos $\mathbb{P}$ el conjunto de los números naturales pares, es claro que se trata de un conjunto infinito numerable. Efectivamente, basta establecer la función biyectiva $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ dada por $\varphi(n) = 2n$, sin embargo, claramenente los conjuntos no coinciden y de hecho $\mathbb{P} \subsetneqq \mathbb{N}$.

El conjunto de los números racionales es numerable

Aunque no veremos la demostración rigurosa ilustraremos la idea para probar la numerabilidad del conjunto de los números racionales: si el conjunto de los racionales fuese numerable podríamos elaborar una lista con los racionales de la siguiente forma, en cada nivel k elegiríamos los números raciones de la forma $\frac{n}{m}$ que son fracciones irreducibles tales que $n+m=k$ y los opuestos:

$$\begin{aligned}
&1 \to 0\\
&2 \to 1, -1\\
&3 \to 2, \tfrac{1}{2}, -2, -\tfrac{1}{2}\\
&4 \to 3, \tfrac{1}{3}, -3, -\tfrac{1}{3}\\
&5 \to 4, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{4}, -4, -\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{4}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

De esta forma, una fracción cualquiera, por ejemplo, $\dfrac{20}{11}$ estaría en el nivel .... de una lista infinita.

Veamos ahora la prueba de que el conjunto de los números racionales es numerable. Es importante destacar la propiedad siguiente:

Propiedad: Si tenemos una colección $A_1, A_2, A_3, \ldots$ de conjuntos finitos (o incluso numerables) la unión infinita $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ sigue siendo un conjunto numerable.

Como consecuencia de este hecho, se puede probar que el conjunto de los números racionales es numerable.

Proposición: El conjunto de los números racionales es numerable. **Prueba:** Conside-

remos la colección de conjuntos $A_1 = \{0\} = A_2$ y si $n \geq 3$

$$A_n = \{\frac{p}{q}, -\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{N}, p+q=n\}$$

Es claro que cada conjunto A_n es finito, de hecho, $A_3 = \{2, \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}\}$,

$A_4 = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, 3, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{2}, -3,$ y así de forma más general,

$$A_{n+1} = \{\frac{1}{n}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1}\}$$

Por otra parte, veamos que $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{Q}$. La inclusión $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \mathbb{Q}$ es evidente; ahora si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ y $p \in \mathbb{Z}$,y $q \in \mathbb{N}$, es claro que $\frac{p}{q} \in A_{|p|+q}$.

0.2.6. El conjunto de los números reales no es numerable

Proposición: El conjunto de los números reales no es numerable.

La idea de la prueba de que el conjunto de los números reales no es numerable es la siguiente: si pudiésemos elaborar una lista con los números reales entre 0 y 1 con su expansión infinita formada por ceros y unos tendríamos algo de este tipo:

$$
\begin{array}{l}
1 \to 0,\boxed{1}0100101010101010101010101010101010 \\
2 \to 0,0\boxed{1}010101010101010101010101000010101010 \\
3 \to 0,01\boxed{1}1010101010101000000010010101010101010 \\
4, \to, 010\boxed{1}0101010101000101010101010001010100010 \\
5 \to 0,0101\boxed{1}10101010101010001010010101010101001 \\
\vdots
\end{array}
$$

y ahora consideramos el número real tal que en el dígito n tiene un 1 si en el número n de la lista el dígito n era un 0 y un 0 si el número n en la lista el dígito n era un 1. Este número no estaría en la lista. Esta es la idea del *método de la diagonal de Cantor* para probar que el conjunto $\mathbb{Q}$ no es numerable.

Si $a < b$ entonces $ar < b^2$ ......**V** .... **F**

Si $a^2 < b^2$ entonces $a < b$...........**V** .... **F**

Si $|a| < |b|$ entonces $a^2 < b^2$ ....**V** .... **F**

Si $a^2 < b^2$ entonces $|a| < |b|$.....**V** .... **F**

Si $a < b$ entonces $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$. ....**V** .... **F**

Si $0 < a^2 < b^2$ entonces $\dfrac{1}{a^2} > \dfrac{1}{b^2}$. ....**V** .... **F**

$(x-2)^2 > 0 \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}$. ....**V** .... **F**

$\dfrac{1}{1+x} \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$......**V** .... **F**

$\dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}} \leq \dfrac{1}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ......**V** .... **F**

$\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} \leq \dfrac{1}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ......**V** .... **F**

$\dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}} \geq \dfrac{1}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ......**V** .... **F**