1.2. Generadores. Grupos cíclicos, diédricos y cuaterniones

Generadores

Sean $(G,*)$ grupo y $R \subseteq G$ un subconjunto no vacío de G. Se denomina **subgrupo de G generado por R** al menos subgrupo de $(G,*)$ que contiene a R. Se nota por $\langle R\rangle$:

$$\langle R\rangle = \{a_1^{r_1} * \cdots * a_n^{r_n} : \text{ donde } a_i \in R, r_i \in \mathbb{Z}, \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$$

- Un conjunto $R \subseteq G$ es un **conjunto generador** del grupo $(G,*)$ si verifica que $G = \langle R\rangle$.
- El grupo $(G,*)$ es **cíclico** si tiene un conjunto generador con un único elemento:

  $\exists\, a \in G$ tal que $G = \langle a\rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$, En notación aditiva: $G = \langle a\rangle = \{n\,a : n \in \mathbb{Z}\}$

  En tal caso se dice que a **es generador** del grupo.

Orden de un elemento

Sean $(G,*)$ grupo y $a \in G$. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = e_G$, se llama **orden de a** al menor entero positivo $r \in \mathbb{N}$ tal que $a^r = e_G$, y se escribe $|a| = r$. Si para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $a^n \neq e_G$, se dice que el orden de a es infinito y se escribe $|a| = \infty$.

Relación entre el orden de un elementos y el subgrupo que genera

Sean $(G,*)$ grupo y $a \in G$. Si $|a| = n$ entonces: $\langle a\rangle = \left\{e, a, \cdots, a^{n-1}\right\}$ y $|\langle a\rangle| = n$.
Si $|a| = \infty$ entonces: $\langle a\rangle = \left\{\cdots, a^{-n}, \cdots, a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, \cdots, a^n, \cdots\right\}$ y $|\langle a\rangle| = \infty$.

Propiedades de grupos cíclicos

1. Todo grupo cíclico es abeliano.
2. Todo subgrupo de un grupo cíclico es cíclico.

Orden de elementos de un grupo cíclico

Sean $(G,*)$ grupo y $a \in G$ con $|a| = n$

1. Para todo $k \in \mathbb{Z}$, se verifica que $a^k = e_G \Leftrightarrow n$ divide a k.
2. El orden de $a^k \in G$ es: $|a^k| = \frac{n}{\mathrm{mcd}(k,n)}$.

Grupo grupos diédricos y cuaterniones

- Se llama **grupo cuatro de Klein** al grupo $D_2 = \langle g, s : |g| = 2, |s| = 2, sg = gs\rangle$.
- Para todo $n > 2$, se llama **grupo diédrico** D_n al grupo:

  $$D_n = \langle g, s : |g| = n, |s| = 2, sg = g^{-1}s\rangle$$

  El grupo de las simetrías de un polígono regular de n lados, es grupo diédrico D_n.
- Se llama **grupo de cuaterniones** Q_8 al grupo:

  $$Q_8 = \langle a, b : |a| = 4, |b| = 4, ba = a^{-1}b, b^2 = a^2\rangle$$

Grupo cuatro de Klein $D_2 = \langle g, s : |g| = 2, |s| = 2, sg = gs \rangle$

$\cdot$	e	g	s	gs
e	e	g	s	gs
g	g	e	gs	s
s	s	gs	e	g
gs	gs	s	g	e

$$\langle g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Grupo $D_3 = \langle g, s : |g| = 3, |s| = 2, sg = g^2 s \rangle$

$*$	e	g	g^2	s	gs	g^2s
e	e	g	g^2	s	gs	g^2s
g	g	g^2	e	gs	g^2s	s
g^2	g^2	e	g	g^2s	s	gs
s	s	g^2s	gs	e	g^2	g
gs	gs	s	g^2s	g	e	g^2
g^2s	g^2s	gs	s	g^2	g	e

$$\langle g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Grupo $D_4 = \langle g, s : |g| = 4, |s| = 2, sg = g^3 s \rangle$

$\cdot$	e	g	g^2	g^3	s	gs	g^2s	g^3s
e	e	a	a^2	a^3	s	gs	g^2s	g^3s
g	g	g^2	g^3	e	gs	g^2s	g^3s	s
g^2	g^2	g^3	e	g	g^2s	g^3s	s	gs
g^3	g^3	e	g	g^2	g^3s	s	gs	g^2s
s	s	g^3s	g^2s	gs	e	g^3	g^2	g
gs	gs	s	g^3s	g^2s	g	e	g^3	g^2
g^2s	g^2s	gs	s	g^3s	g^2	g	e	g^3
g^3s	g^3s	g^2s	gs	s	g^3	g^2	g	e

$$\langle g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Grupo $Q_8 = \langle a, b : |a| = 4, |b| = 4, ba = a^{-1}b, a^2 = b^2 \rangle$

$*$	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
e								
a								
a^2								
a^3								
b								
ab								
a^2b								
a^3b								

$$\langle a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Diagrama de Cayley de un grupo

Sea $(G, *)$ un grupo finito con elementos $G = \{a_1, \cdots, a_n\}$ y sea $R \subset G$ un conjunto generador del grupo. El digrafo $\mathrm{Cay}(G, R)$ con conjunto de vértices $\{a_1, \cdots, a_n\}$ y conjunto de aristas $\{(a, a * r) \in G \times G : a \in G, r \in R\}$, se denomina digrafo de Cayley del grupo.

1.2.17. Problemas

1. Dado un grupo $(G, *)$, demostrar que para todos $a, b, g \in G$ se verifica:
   a) $|a| = |a^{-1}|$
   b) $|a| = |g^{-1}ag|$
   c) $|ab| = |ba|$
2. Qué orden puede tener el elemento $a \in G$ si $a^{24} = e$.
3. Sea $(G, *)$ un grupo y sean $a, b \in G$ tales que $b \neq e$. Si $|a| = 2$ y $b^2 = aba$ ¿qué puede decirse sobre el orden de b?
4. Sea $(G, *)$ un grupo y sean $a, b \in G$ tales que $b \neq e$
   a) Demostrar que si $aba^{-1} = b^k$ entonces $a^r ba^{-r} = b^{k^r}$
   b) Si $|a| = 5$ y $b^2 = aba^{-1}$ ¿qué puede decirse sobre el orden de b?
5. Escribir al menos 5 elementos de cada uno de los siguientes subgrupos cíclicos:
   a) $\langle 25 \rangle \ \leq (\mathbb{Z}, +)$
   b) $\langle \frac{1}{2} \rangle \ \leq (\mathbb{Q}^*, \cdot)$
   c) $\langle \pi \rangle \ \leq (\mathbb{R}^*, \cdot)$
6. Indicar cuáles de los siguientes grupos son cíclicos y obtener sus generadores.
   $(H_1, *_1) = (\mathbb{Z}, +)$ $(H_2, *_2) = (\mathbb{Q}, +)$ $(H_3, *_3) = (\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ $(H_4, *_4) = (6\mathbb{Z}, +)$
   $(H_5, *_5) = (\{6^n : n \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$
7. Encontrar un generador de cada uno de los siguientes subgrupos de $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$:
   a) $\langle 2, 3 \rangle$ *b*) $\langle 4, 6 \rangle$ *c*) $\langle 6, 8, 10 \rangle$
8. Se considera el grupo $G = \langle g \rangle = \{e = g^6, a_1 = g, a_2 = g^2, a_3 = g^3, a_4 = g^4, a_5 = g^5\}$. Calcular los subgrupos $\langle a_2 \rangle$, $\langle a_3 \rangle$, $\langle a_4 \rangle$, $\langle a_5 \rangle$. ¿Cuáles son los generadores de G?
9. Obtener el orden de cada uno de los elementos del grupo $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, +)$ y encontrar un generador en caso de que fuera cíclico o un conjunto generador en caso de no ser cíclico.
10. Encontrar el número de generadores de los grupos cíclicos de órdenes 6, 8, 12 y 60.
11. Demostrar que si $(G, *)$ es un grupo que no tiene subgrupos propios no triviales, entonces es cíclico.
12. Demostrar que si $(G, *)$ es un grupo que no tiene subgrupos propios no triviales, entonces su orden es primo.

13. Encontrar el número de elementos de cada uno de los subgrupos cíclicos indicados:

    a) $H_a = \langle 25 \rangle \leq \mathbb{Z}_{30}$

    b) $H_b = \langle 30 \rangle \leq \mathbb{Z}_{42}$

    c) $H_c = \langle i \rangle \leq \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$

    d) $H_d = \langle \frac{1+i}{\sqrt{2}} \rangle \leq \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$

    e) $H_e = \langle i+1 \rangle \leq \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$

14. Sea $n \in \mathbb{N}$, demostrar que para todo k divisor n, el grupo $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ tiene un único subgrupo de orden k, que es $H_k = \langle \frac{n}{k} \rangle$.

15. Sea H un subgrupo propio de $(\mathbb{Z}, +)$. Estudiar si puede determinarse el subgrupo H en cada uno de los siguientes casos:

    a) Si $18, 30, 40 \in H$

    b) Si $12, 30, 54 \in H$

16. Dibujar el diagrama de Cayley del grupo de cuaterniones y del producto directo: $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$.

17. Se considera el grupo de matrices $(G, \cdot)$, siendo: $G = \left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \right.$
    $\left. K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, -Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, -J = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, -K = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\}.$
    Calcular el orden de cada elemento y un conjunto, con cardinal mínimo, generador del grupo.

18. Describir el grupo de simetrías de un rectángulo y encontrar un conjunto generador.

19. Describir el grupo de simetrías de un rombo y encontrar un conjunto generador.

20. Se considera el grupo diédrico $(D_n, \circ)$, $D_n = \langle a, b : |a| = n, b^2 = e, ba = a^{-1}b \rangle$.

    a) Demostrar que $ba^r = a^{-r}b$ para todo $0 \leq r < n$

    b) Demostrar que todo elemento de la forma $a^r b$ tiene orden 2

    c) Encontrar el centro de D_n

21. Encontrar en cada caso, un grupo con las condiciones requeridas:

    a) G contiene elementos a y b tales que $|a| = |b| = 2$ y $|ab| = 3$

    b) G contiene elementos a y b tales que $|a| = |b| = 2$ y $|ab| = 4$

    c) G contiene elementos a y b tales que $|a| = |b| = 2$ y $|ab| = 5$

22. Demostrar que D_6 tiene un subgrupo de orden 4

23. Demostrar que D_3 no tiene un subgrupo de orden 4