Estructuras Algebraicas Segundo examen parcial	1$^{\text{er}}$ Apellido: __________	3 de junio de 2022
	2$^{\text{o}}$ Apellido: __________	Tiempo 2 h
Dpt. Matemática Aplicada a las T.I.C. E.T.S. de Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: __________ Número de matrícula:	**Calificación:**

Para que sean consideradas como válidas, todas las respuestas deben estar adecuadamente justificadas.
No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.

Ejercicio 1. (2 puntos)

$a)$ Definición de polinomio irreducible en el anillo de polinomios con coeficientes en un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Ideales maximales en $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ (enunciado y demostración).

$b)$ Estructura del grupo de unidades de un cuerpo finito (enunciado y demostración).

Ejercicio 2. (2 puntos)

$a)$ Sea $(R, +, \cdot)$ anillo. Demostrar que si para todo $x \in R$ se verifica que $x \cdot x = x$ entonces para todo $x \in R$ se verifica que $x + x = 0$.

$b)$ Determinar la característica del anillo $(\mathbb{Z}[i]/I, +_I, \cdot_I)$, siendo I el siguiente ideal: $I = (4 - i)$.

Ejercicio 3. (3 puntos)

Dados los anillos $(\mathbb{Q}[x], +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, se considera $\alpha = \sqrt{2 - \sqrt[3]{2}} \in \mathbb{R}$ y la aplicación $f : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$ definida:

$$f(h) = h(\alpha)$$

$a)$ Demostrar que f es homomorfismo de anillos.

$b)$ Obtener el polinomio mónico $q \in \mathbb{Q}[x]$ generador del ideal $\ker(f)$

$c)$ Estudiar si el subanillo imagen de f es ideal de $\mathbb{R}$ y si $\text{im}(f)$ es cuerpo. En caso de ser cuerpo, dar una base de su extensión sobre $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 4. (3 puntos)

$a)$ Estudiar si el polinomio $h = x^5 + x^4 + 3x^2 + x + 5 \in \mathbb{Q}[x]$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$. Describir los elementos del mínimo cuerpo $\mathbb{K}$, extensión de $\mathbb{Q}$, en el cual $h = x^5 + x^4 + 3x^2 + x + 5 \in \mathbb{Q}[x]$ tiene una raíz $\beta \in \mathbb{K}$.

$b)$ En el cuerpo $\mathbb{K}$, obtenido en el apartado anterior, calcular el resultado de la siguiente operación:

$$7(\beta + 1)^{-1}(2\beta + 1)$$

$c)$ Sea $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $[\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}] = 5$. Calcular el valor de $[\mathbb{Q}(\gamma^2) : \mathbb{Q}]$

Soluciones

1. Consultar apuntes.
2. *a)* $2x = (2x)^2 = 4x^2 = 4x \Rightarrow 2x = 0$

   b) char $(\mathbb{Z}[i]/I) = 17$.
3. *a)* La aplicación definida es el homomorfismo de evaluación en $\alpha = \sqrt{2 - \sqrt[3]{2}}$.

   b) $\ker(f) = (q)$ siendo $q = x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 6$, irreducible por el criterio de Eisenstein para $p = 2$

   c) $\operatorname{im}(f) \approx \mathbb{Q}[x]/(q) \approx \mathbb{Q}[\alpha] \approx \mathbb{Q}(\alpha)$. No es ideal de $\mathbb{R}$.
   $\operatorname{im}(f)$ sí es cuerpo. Una base de la extensión sobre $\mathbb{Q}$ es: $B = \left\{1, \alpha, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\alpha, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4}\alpha\right\}$.
4. *a)* $x^5 + x^4 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ es irreducible $\Rightarrow h \in \mathbb{Q}[x]$ es irreducible.
   $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\beta) \approx \mathbb{Q}[x]/(h) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 : a_i \in \mathbb{Q}\}$.

   b) $\beta^4 + 3\beta + 12$

   c) $\gamma^2 \in \mathbb{Q}(\gamma) \Rightarrow [\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}(\gamma^2)] \cdot [\mathbb{Q}(\gamma^2) : \mathbb{Q}] \Rightarrow [\mathbb{Q}(\gamma^2) : \mathbb{Q}] = 5$