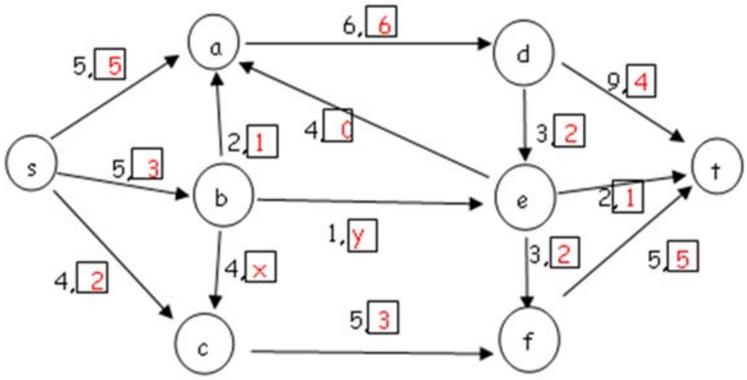
MATEMÁTICA DISCRETA II
SOLUCIONES

Ejercicio 1

a) **(1 pto.)** Define los siguientes conceptos: red de transporte, flujo, corte y capacidad de un corte en una red de transporte. Enuncia el Teorema de Ford-Fulkerson.

En la red N definida por la figura circula un flujo f. Las etiquetas de cada arista indican su capacidad (en negro y en primer lugar) y el valor actual del flujo (en segundo lugar y en recuadro rojo).



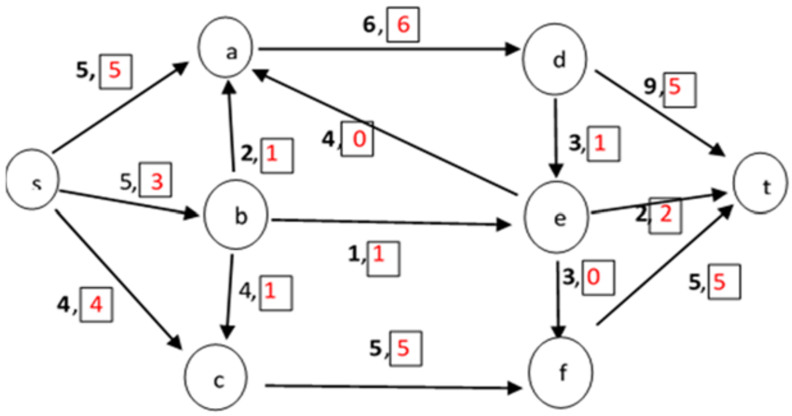
b) **(1 pto.)** Halla los valores de x e y. Indica los caminos de f-aumento en la red N aplicando el algoritmo correspondiente. Verifica el Teorema de Ford-Fulkerson en N.

Solución

b) Por la ley de conservación del flujo en los vértices resulta x = 1, y = 1.

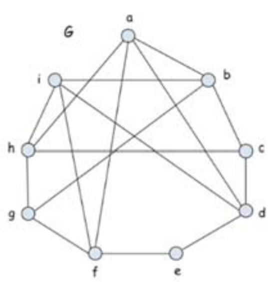
{s, c, f, e, t} camino de aumento con residuo k =1, {s, c, f, e, d, t} camino de aumento con residuo k =1.

val(f) = 12 máximo, S = {s, a, b, c}, T = {d, e, f, t}, cap (S, T) = 12 mínimo.



Ejercicio 2

Sea G el grafo definido por la siguiente figura



a) **(1,5 ptos.)** Halla un conjunto I independiente maximal en G aplicando el algoritmo correspondiente. Encuentra un emparejamiento máximo M y un recubrimiento K mínimo en G.

MATEMÁTICA DISCRETA II
SOLUCIONES

b) **(1 pto.)** Utilizando los algoritmos correspondientes, halla un recorrido cerrado en el grafo G desde el vértice **a** que contenga todas las aristas de G al menos una vez y que sea de peso mínimo.

c) **(1 pto.)** Enuncia el teorema de Kuratowski y aplícalo para demostrar que el grafo G de la figura no es planar.

Solución

a) I = [e, c, a, g, i] es un conjunto independiente maximal.

K = {b, d, f, h} es un recubrimiento minimal, M = {{a, b}, {c, d}, {e, f}, {g, h}} es un emparejamiento máximo porque n = 9 es impar. Entonces K es mínimo (T. de König) e I es máximo.

b) G tiene dos vértices con grado impar {c, g}, duplicando las aristas {ch, hg} del camino mínimo entre c y g se obtiene un grafo G* euleriano. R = [a, b, c, h, a, f, i, b, g, h, c, d, e, f, g, h, i, d, a]

c) G contiene un subgrafo H_1 inducido por los vértices {a, b, f, g, h, i} isomorfo a $K_{3,3}$, entonces G no es planar.

Ejercicio 3

¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Demuéstralas o encuentra un contraejemplo.

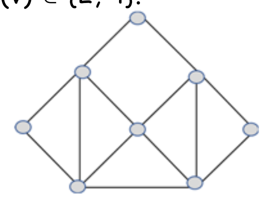
a) **(0,5 ptos.)** Si G es un grafo simple euleriano con un número par de vértices tiene un número par de aristas.

b) **(0,5 ptos.)** Si G es un grafo bipartido y tiene un número par de vértices entonces G es hamiltoniano.

c) **(0,5 ptos.)** Si G es un grafo 6-conexo entonces G no es planar.

Solución

a) FALSO. Contraejemplo: n = 8, q = 13, d(v) $\in$ {2, 4}.



b) FALSO. Contraejemplo: Movimientos del caballo de ajedrez en un tablero 4x4.

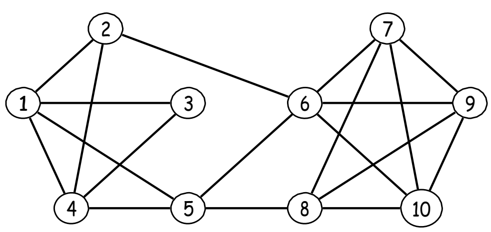
c) VERDADERO. Si G es 6–conexo entonces

$$6 = \kappa(G) \leq \delta(G) \leq d(v), \forall v \in V$$

$$6n \leq \sum_{v \in V} d(v) = 2q \Rightarrow q \geq 3n > 3(n-2) \Rightarrow G \text{ no es planar}$$

Ejercicio 4

Los 10 ordenadores de los empleados de un departamento de una empresa están conectados en una red local de comunicación cuyas líneas de conexión están esquematizadas en el grafo G definido por la figura siguiente:



MATEMÁTICA DISCRETA II
SOLUCIONES

a) **(0,5 ptos.)** ¿Satisface el grafo *G* las condiciones suficientes del Teorema de Ore para grafos hamiltonianos?

b) **(1 pto.)** En la red se producen fallos y se han contratado los servicios de un técnico para localizarlos. En primer lugar, el técnico debe revisar los ordenadores para lo cual intenta establecer una ruta en la que revise todos los ordenadores sin pasar dos veces por el mismo cable u ordenador. ¿Es posible esto empezando y terminando por el ordenador 1? En caso afirmativo decide cuál sería el camino.

c) **(1,5 ptos.)** Utilizando el algoritmo correspondiente, averigua cuál es el mínimo número de turnos de vacaciones de verano que hay que establecer, si no pueden tomar vacaciones simultáneamente personas que tengan sus ordenadores directamente conectados.

Solución

a) El grafo *G* no satisface las condiciones suficientes del teorema de Ore para grafos hamiltonianos puesto que no se cumple que para cada par de vértices u y v no adyacentes se tenga que

$d(u) + d(v) \geq n$, por ejemplo, $d(2) + d(3) = 5 \ngeq 10$.

b) El grafo *G* sí es hamiltoniano. Un ciclo hamiltoniano es: *C* = [1, 2, 6, 7, 9, 10, 8, 5, 4, 3, 1].

c) El algoritmo de Brelaz nos proporciona una 4–coloración del grafo *G* por lo que $\chi(G) \leq 4$.

La siguiente tabla refleja el orden de coloración de los vértices y el color asignado:

Vértices	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
grado-color/grado	0/4	0/3	0/2	0/4	0/4	0/5	0/4	0/4	0/4	0/4
grado-color/grado	0/4	1/2	0/2	0/4	1/3		1/3	0/4	1/3	1/3
grado-color/grado	1/3	1/2	0/	1/3			1/3	1/3	1/3	1/3
grado-color/grado		1/1	1/1	2/2			1/3	1/3	1/3	1/3
grado-color/grado		2/0	2/0				1/3	1/3	1/3	1/3
grado-color/grado			2/0				1/3	1/3	1/3	1/3
grado-color/grado							1/3	1/3	1/3	1/3
grado-color/grado								1/2	2/2	2/2
grado-color/grado								2/1		3/1
grado-color/grado								3/0		
Orden	3º	5º	6º	4º	2º	1º	7º	10º	8º	9º
Color	A	B	B	C	B	A	B	A	C	D

El algoritmo secuencial nos proporciona una 4–coloración del grafo *G* por lo que $\chi(G) \leq 4$.

La siguiente tabla refleja el orden de coloración de los vértices y el color asignado:

Vértices	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Grados	4	3	2	4	4	5	4	4	4	4
Orden	2º	9º	10º	3º	4º	1º	5º	6º	7º	8º
Color	A	C	C	B	C	A	B	A	C	D

El grafo *G* contiene a K_4, subgrafo inducido por los vértices {6, 7, 9, 10}, por lo tanto, $\chi(G) \geq 4$.

Por consiguiente, $\chi(G) = 4$.