ALGORÍTMICA NUMÉRICA: Examen Computacional 2 3S2T/3S2TB 16 Diciembre 2021 ***DURACIÓN: 75 Minutos***

EJERCICIO 1 (50 puntos)

Dada la tabla de datos:

xi	-4	-2	0	2	4
yi	3	0	-1	1	2

a) Ajustar en el sentido de mínimos cuadrados los datos de la tabla con una función del tipo $p(x) = a(x^2 - 1) + b(3x^3 - 5x) + c(x-4)^2$. Determinar los coeficientes a,b y c. Realizar una gráfica en el intervalo [-4:0.01:4] que represente los datos de la tabla ('r*') y la función aproximante p(x) ('b'). Calcular el vector residuos del ajuste. ¿En qué punto se produce el máximo error y cuánto vale?

b) Ahora queremos obligar a que la función aproximante p(x) pase obligatoriamente por el punto (0,-1). Determinar los nuevos coeficientes a, b y c. Realizar una gráfica en el intervalo [-4:0.01:4] que represente los datos de la tabla ('r*'), la función aproximante del apartado a) ('b') y la nueva función aproximante p(x) ('g').

c) Calcular el error total de los ajustes (suma de los residuos al cuadrado) del apartado a y b. ¿Cuál de los ajustes es mejor? ¿Por qué?

EJERCICIO 2 (50 puntos)

Dada la función $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ y el método iterativo $x_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x_n^3}$

a) Realizar una gráfica de la función f(x) en el intervalo [1, 2]. ¿Cuántas raíces tiene f(x) en ese intervalo? Demostrar que la función tiene al menos una raíz en el intervalo [1, 2].

b) Aplicar el método iterativo para calcular la raíz s tal que f(s)=0, iterando 20 veces y tomando como valor inicial x_0=1.5. Se debe volcar la siguiente información por cada iteración: *'Iteración %d Raíz %.16f \n'.* En la hoja de respuesta solo incluir el volcado de las últimas 5 iteraciones.

c) Volver a aplicar el método iterativo empezando en x_0=1.5 pero sin limitar el número de iteraciones. Se debe parar de iterar cuando el error estimado $e_k \approx |x_{k+1} - x_k|$ sea menor que 1.e-12. Almacenar en un vector las raíces (x_k) que va generando el método y en otro vector la estimación del error en cada iteración (e_k) para los siguientes apartados. Se debe volcar la siguiente información por cada iteración: *'Iteración %d Raíz %.16f Error estimado %e\n'.* En la hoja de respuesta solo incluir el volcado de las últimas 5 iteraciones. Representar en una gráfica (semilogy) el error estimado en cada iteración. Observando la gráfica si necesitaras una solución con 10 decimales correctos ¿cuántas veces tendrías que iterar aproximadamente? ¿Qué velocidad de convergencia tiene el método? Justificar.

d) A partir de los errores estimados, dar una estimación del valor k tal que verifica la expresión $|e_{k+1}| \approx k|e_n|$. A partir del valor k obtenido ¿Cuántas iteraciones aproximadamente se necesitan para obtener una cifra correcta?

e) Suponiendo que la raíz s es el valor obtenido por el método en el apartado c en la última iteración, calcular el error real $er_k \approx |x_k - s|$ que se comete en cada iteración. Representar en una misma gráfica el error estimado del apartado c) y el error real de este apartado respecto al número de iteración (k). ¿Qué tal es la estimación del error que se hizo? Justificar.