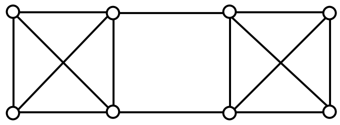
SOLUCIONES

1. **(1,5 puntos)**

   (a) Define grafo 3-conexo y grafo 2-aristo-conexo. Dibuja un grafo simple con al menos 8 vértices que sea 2-aristoconexo pero no sea 3-conexo. Justifica que el grafo dibujado cumple las condiciones pedidas.

   (b) Demuestra que un grafo simple G es 2-conexo si y sólo si para cada terna de vértices u, v y z de G existe un camino de u hasta v que pasa por z.

SOLUCIÓN



(b) Por doble reducción al absurdo

- Si existe una terna {u,v,z} tal que ningún camino de u a v pasa por z, entonces, o bien el grafo no es conexo o bien existe un vértice w común a todos los caminos de u a z y de v a z. Este vértice w es un vértice-corte, luego G no es 2-conexo.
- Si G no es 2-conexo, existe al menos un vértice-corte x. Elegimos dos vértices s,t de diferentes componentes conexas de G – x. Es claro que no existe ningún camino de x a s pasando por t.

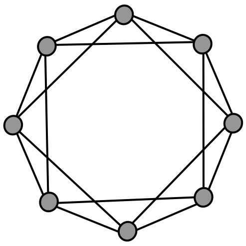
2. **(1,5 puntos)**

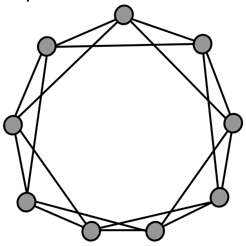
   ¿Cuál es el número mínimo de aristas que que puede tener un grafo k-conexo de n vértices? Justifícalo. Construye los grafos de Harary H(4,8) y H(4,9). Calcula el número cromático y el número de independencia del grafo H(4,8). Demuestra la relación existente entre número cromático y número de independencia.

   SOLUCIÓN

   Un grafo k-conexo de n vértices tiene al menos $\left\lceil \frac{kn}{2} \right\rceil$ aristas

H(4,8)

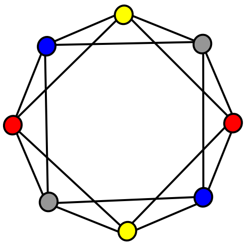




H(4,9)

La relación entre número cromático y número de independencia es $\chi \geq n/\alpha$

Coloreamos el grafo con 4 colores
¿No se puede con 3 colores?
Calculemos el número de independencia y apliquemos la acotación anterior.



El número de independencia es 2. El triángulo superior sólo puede tener un elemento en cualquier conjunto I independiente. Cualquiera que sea el elegido dejará sólo 3 vértices libres para añadir a I formando a su vez un triángulo. Por tanto cualquier I independiente cumple que $|I| \leq 2$. y existen conjuntos independientes de cardinal 2 (vértices azules)

Con esto $\chi \geq 8/2 = 4$. Luego el número cromático es 4

3. **(1,5 puntos)** El análisis de la complejidad de un algoritmo nos lleva a la relación de recurrencia

$$f(n) = 2f(n/2) + n^2 - 1$$

¿De qué orden es la complejidad del algoritmo?

SOLUCIÓN

Resolvemos la recurrencia para valores de n potencia de 2, es decir $n = 2^k$

Resolvamos cuando $n = 2^k$

$f(2^k) = 2f(2^{k-1}) + 2^{2k} - 1$		$f(2^k) = 2f(2^{k-1}) + 2^{2k} - 1$
$f(2^{k-1}) = 2f(2^{k-2}) + 2^{2k-2} - 1$	mult. por 2	$2f(2^{k-1}) = 2^2 f(2^{k-2}) + 2^{2k-1} - 2$
$f(2^{k-2}) = 2f(2^{k-3}) + 2^{2k-4} - 1$	mult. por 2^2	$2^2 f(2^{k-2}) = 2^3 f(2^{k-3}) + 2^{2k-2} - 2^2$
--------------------------------		--------------------------------
$f(2) = 2f(1) + 2^2 - 1$	mult. por 2^{k-1}	$2^{k-1} f(2) = 2^k f(2^0) + 2^{k+1} - 2^{k-1}$

Sumando las igualdades de la derecha resulta:

$f(2^k) = 2^k \cdot f(1) + 2^{2k} + 2^{2k-1} + 2^{2k-2} + \ldots + 2^{k+1} - (1 + 2 + 2^2 + 2^{k-1}) =$

$= 2^k \cdot f(1) + (2^{2k} + 2^{2k-1} + 2^{2k-2} + \ldots + 2^{k+1} + 2^k + 2^{k-1} + \ldots + 1) - (2^k + 2^{k-1} + \ldots + 1) - (1 + 2 + 2^2 + 2^{k-1}) = 2^k \cdot f(1) + (2^{2k+1} - 1) - (2^{k+1} - 1) - (2^k - 1) =$

$= 2^k \cdot f(1) + 2^{2k+1} - 2^{k+1} - 2^k - 1 = n\, f(1) + 2n^2 - 2n - n - 1$

Es decir, $f(n) \in O(n^2)$

4. **(1,5 puntos)** ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Demuéstralas o encuentra un contraejemplo.

   (a) Si G es un grafo planar entonces $\kappa(G) \leq 5$.
   (b) Si un grafo es planar y euleriano entonces es hamiltoniano.
   (c) Todo grafo bipartido euleriano tiene un número par de aristas.

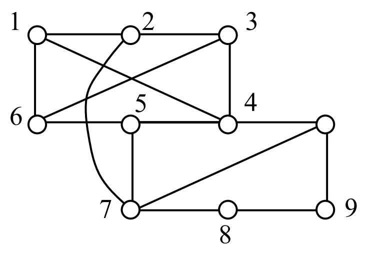
SOLUCIÓN

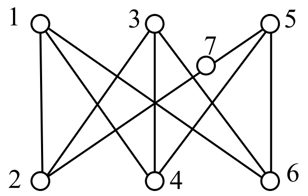
(a) Es cierta. Basta observar que si G es 6-conexo entonces el número de aristas es $q \geq 6n/2 = 3n$
Y si G es planar entonces $q \leq 3n - 6$

(b) Es falsa. El grafo de la "pajarita" es planar y euleriano pero no hamiltoniano.
(c) Es cierta. En un grafo euleriano todo vértice es par. Por ser bipartido podemos contar las aristas sumando los grados de los vértices de un nivel. Por tanto, el número de aristas es par.

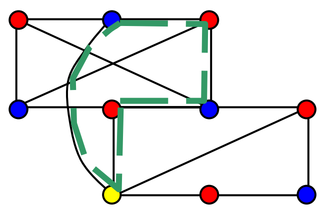
5. **(1 punto)** Describe el algoritmo de Fleury y analiza su complejidad.

6. **(1 punto)** Averigua si el grafo de la figura es planar y calcula su número cromático.





El grafo contiene una subdivisión de $K_{3,3}$ por lo que NO es un grafo planar.

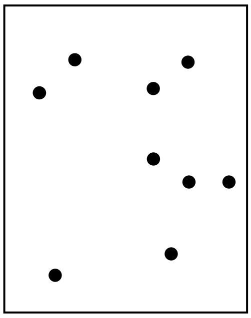


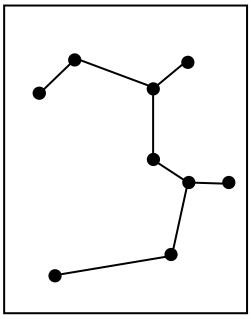
En la figura se presenta una 3-coloración y el grafo contiene un ciclo impar (en verde). Por tanto $\chi(G) = 3$

7. **(1 punto)** Enuncia las Fórmulas de Euler para grafos planos (conexos o no conexos). Demuestra que si G es un grafo plano y conexo con n vértices, q aristas y r regiones, entonces $q \le 3n - 6$ y $r \le 2n - 4$. ¿Cuál es la primera de las cotas para grafos planos con dos componentes conexas?

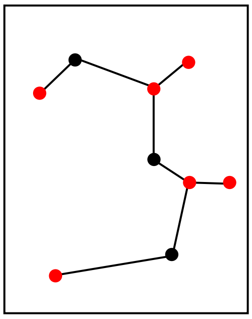
8. **(1 punto)**

¿Qué significa que un algoritmo garantice una solución (3/2)-aproximada para un problema de optimización? Describe una aproximación con ese factor para el "Problema del Viajante" utilizando las siguientes viñetas. Los vértices del grafo G aparecen en la primera viñeta, las aristas de G son todos los segmentos que unen cada par de vértices y el peso de cada arista es la distancia euclídea entre sus extremos. En la segunda viñeta aparece el árbol generador mínimo. Dibuja los pasos siguientes en las viñetas sucesivas y descríbelos brevemente.

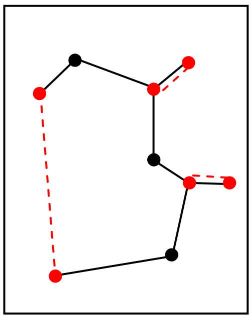




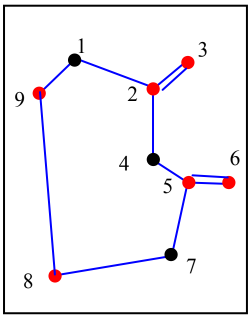
MST



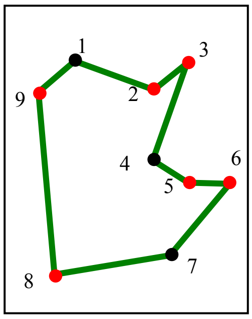
Marcamos los vértices impares



Emparejamiento M de peso mínimo de los vértices impares



Recorrido euleriano cerrado en el grafo MST + M



Ciclo hamiltoniano construido siguiendo el mismo orden de aparición de los vértices en el recorrido euleriano.