EJERCICIOS RESUELTOS TEMA 1

Números reales

Ejercicio 1. Prueba que si α es irracional y $\dfrac{p}{q}$ es racional entonces $\alpha + \dfrac{p}{q}$ es irracional.

Solución: Suponemos por red. al absurdo que siendo α irracional y $\dfrac{p}{q}$ es racional, sin embargo $\alpha + \dfrac{p}{q}$ es racional, digamos $\alpha + \dfrac{p}{q} = \dfrac{m}{n}$; entonces

$$\alpha = \frac{m}{n} - \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}!!!!$$

llegamos a una contradicción. Luego el resultado queda probado.

Ejercicio 2. Decide si las siguientes afirmaciones son ciertas, razonando la respuesta.

1. Para todo α, β números irracionales se tiene que $\alpha + \beta$ es irracional.

   Solución: No es cierto puesto que eligiendo, por ejemplo, $x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ y $y = -\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ sin embargo la suma es $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$.

2. Sean $x, y \in \mathbb{R}$, si $x^2 = y^2$ entonces $x = y$.

   Solución: El resultado no es cierto. Por ejemplo, eligiendo $x = 1$, $y = -1$ es claro que $1^2 = (-1)^2$ y sin embargo $1 \neq -1$.

Ejercicio 3. Encuentra el error en la siguiente demostración: Sea $a = b$, entonces

$$a^2 = ab,$$

restando b^2 en los dos lados de la igualdad tenemos que

$$a^2 - b^2 = ab - b^2,$$

luego

$$(a-b)(a+b) = b(a-b)$$

y simplificando tenemos que $a + b = b$, y como $a = b$, se tiene que $2b = b$ y simplificando de nuevo se obtiene que $2 = 1$.!!!

Solución: La demostración contiene varios errores:
$\triangleright$ No es cierto que $(a-b)(a+b) = b(a-b) \Longrightarrow a+b = b$ puesto que no podemos dividir entre $a - b$ por ser cero.
$\triangleright$ No es cierto que $2b = b \Longrightarrow 2 = 1$ puesto que si $b = 0$ se tiene que $2b = b$ pero $2 \neq 1$.

Ejercicio 4. Resuelve la ecuación $x^2 - 1 = x - 1$ y encuentra el error en las siguientes resoluciones de la ecuación:

1. Puesto que $x^2 - 1 = x - 1$ se tiene que

   $$(x+1)(x-1) = x - 1,$$

   entonces, simplificando se obtiene $x + 1 = 1$ y, por tanto , $x = 0$ es la solución !!!.

   Solución: La implicación $(x+1)(x-1) = x - 1 \Longrightarrow x + 1 = 1$ no es cierta; sólo lo sería si $x - 1 \neq 0$.

2. Puesto que $x^2 - 1 = x - 1$ se tiene que

$$x^2 = x,$$

entonces, simplificando se obtiene que $x = 1$ es la solución !!!. **Solución:** La implicación $x^2 = x \Longrightarrow x = 1$ no es cierta; sólo lo sería si $x \neq 0$.

Ejercicio 5. Resuelve las siguientes ecuaciones

$\mathbf{x^3 - 3x = 0}$

$x(x-3) = 0$

$\boxed{\text{x=0, x=3}}$

$\mathbf{x^4 - 81 = 0}$

$\boxed{\text{x=3, x=-3}}$

$\mathbf{x(x-1) = (x-1)^2}$

$\boxed{\text{x=1}}$

$x \neq 1, \Rightarrow x = x - 1!!$

$\mathbf{3x = 2x(x-5)}$

$x = 0$ o

$x \neq 0 \Rightarrow 3 = 2(x-5), \boxed{\text{x=6,5, x=0}}$

$\mathbf{(x-1)^2(x^2+1) = 0}$

$x^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{x=1}}$

$$\mathbf{\frac{1}{8-x} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{4}}$$

$$\frac{x-2-8+x}{(8-x)(x-2)} = \frac{1}{4}$$

$$8x - 40 = -16 - x^2 + 10x$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\text{x=6, x=-4}}$$

Resolvemos $\mathbf{\sqrt{x} + \sqrt{x+2} = \frac{6}{\sqrt{x}}}$

Puesto que $x > 0$ la ecuación es equivalente a $x + \sqrt{x(x+2)} = 6, x > 0 \iff \sqrt{x(x+2)} = 6 - x, x > 0$.

$$\sqrt{x(x+2)} = 6 - x \Longrightarrow x(x+2) = 36 + x^2 - 12x \iff x = \frac{36}{14} = \frac{18}{7}$$

Comprobación: $0 < \frac{18}{7} < 6$ por lo que verifica la ecuación $\sqrt{x(x+2)} = 6 - x$.

Resolvemos $\mathbf{\sqrt{x+1} = \sqrt{x-1}}$. Esta ecuación tiene sentido si $x \geq -1, x \geq 1$. En ese caso, no hay solución puesto que:

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{x-1} \iff x + 1 = x - 1!!$$

Resolvemos $\mathbf{\sqrt{x-5} = \sqrt{x(x-5)}}$. En primer lugar $x \geq 5$ por lo que o bien $x = 5$ que verifica la ecuación o $x > 5$ en cuyo caso, simplificando se tiene que $1 = \sqrt{x-5}$, por lo que $x = 6$. Luego $x = 5$ y $x = 6$ son las soluciones.

Ejercicio 6. Resuelve las siguientes ecuaciones

i) $(2x-3)^2 - 9 = 8x$ ii) $\frac{9}{x} - \frac{x}{3} = 2$ iii) $\frac{7}{x-2} + \frac{8}{x-5} = 3$

iv) $\sqrt{x^2+1} = x - 10$ v) $\sqrt{x^2+1} = x^2 - 5$ vi) $\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7$

Ejercicio 7. Responde si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando la respuesta :

1. Para todos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ se tiene que $a^2 < b^2$.....V....$\boxed{\mathbf{F}}$

   Es falso, ya que si $a = -2 < -1 = b$ se tiene que $a^2 = 4 > 1 = b^2$.

2. Para todos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ se tiene que $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.......V...$\boxed{\mathbf{F}}$

   Es falso, ya que si $a = -2 < 1 = b$ se tiene que $\frac{1}{a} = -1/2 < 1 = \frac{1}{b}$.

3. $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ....$\boxed{\mathbf{V}}$....F.

   Verdadero; puesto que $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $1 + x^2 \geq 1$ y por tanto puesto que son $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$

4. $\dfrac{1}{1+x} \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$...V....$\boxed{\mathbf{F}}$.

Falso, ya que si $x = -1 + \frac{1}{10}$ se tiene que $\dfrac{1}{1+(-1+\frac{1}{10})} = 10 > 1$.

5. $\dfrac{x^2}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{2}$ para todo $0 \leq x \leq 1$..**V**....$\boxed{\text{F}}$.

Falso; puesto que son positivos

$$\frac{x^2}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 2x^2 \leq 1 + x^2 \Longleftrightarrow x^2 \leq 1 \Longleftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Ejercicio 8. Resuelve la inecuación $\dfrac{x+1}{x-1} \geq 1$ y encuentra el error en las siguiente resolución:

Para resolver $\dfrac{x+1}{x-1} \geq 1$:

$$\frac{x+1}{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow x+1 \geq x-1 \Leftrightarrow 1 \geq -1,$$

como esto es cierto para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que todo número real es solución de la ecuación anterior. En particular $x = -1$ será una solución y se tiene:

$$0 = \frac{-1+1}{-1-1} \geq 1 \quad \textbf{(!!!)}$$

Ejercicio 9. Resuelve las siguientes ecuaciones:

i) $(2x-3)^2 - 9 = 8x$ ii) $\dfrac{9}{x} - \dfrac{x}{3} = 2$ iii) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 1$

iv) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$ v) $\sqrt{3+\sqrt{x}} + \sqrt{4-\sqrt{x}} = \sqrt{7+2\sqrt{x}}$ vi) $\sqrt{x^2+9} = 21 - x^2$

iii) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 1$ Puesto que $x \geq 0$ se tiene que, o bien, $x = 0$ o bien $x > 0$ y por tanto $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} > 1$ con lo cual no es solución. Por tanto, la única solución es $x = 0$.

i) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$.

$$\sqrt{2+\sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x} \Longrightarrow 2+\sqrt{x-5} = 13-x \Longrightarrow \sqrt{x-5} = 11-x \Longrightarrow x-5 = 121+x^2-22x \Longleftrightarrow$$

$$x^2 - 23x + 126 = 0 \Longleftrightarrow x = 14, x = -1$$

Compobación:

$\triangleright$ $x = 14$ no es solución de $\sqrt{2+\sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$.

$\triangleright$ $x = -1$ no es solución de $\sqrt{2+\sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$.

v) $\boldsymbol{\sqrt{3+\sqrt{x}} + \sqrt{4-\sqrt{x}} = \sqrt{7+2\sqrt{x}}}$. Por comodidad hacemos el cambio $t = \sqrt{x}$ obteniendo la ecuación $\sqrt{3+t} + \sqrt{4-t} = \sqrt{7+2t}$.

Luego si $0 \leq t \leq 4$ se tiene que:

$$\sqrt{3+t}+\sqrt{4-t} = \sqrt{7+2t}(\text{positivos}) \Longleftrightarrow 3+t+4-t+2\sqrt{3+t}\sqrt{4-t} = 7+2t \Longleftrightarrow \sqrt{3+t}\sqrt{4-t} = t$$

$$\Longrightarrow (3+t)(4-t) = t^2 \Longleftrightarrow 2t^2 - t - 12 = 0 \Longleftrightarrow$$

Puesto que $t > \sqrt{x} > 0$ la única solución es $\sqrt{x} = \frac{11}{4}$, es decir, $x = \frac{1+\sqrt{97}}{4}$ y es solución puesto que $0 < \frac{1+\sqrt{97}}{4} < 4$.

Ejercicio 10. Resuelve las siguientes desigualdades

i) $-5(2-x) \leq 15 \Longleftrightarrow 10+5x \leq 15 \Longleftrightarrow 5x \leq 5 \Longleftrightarrow x \leq 1$

ii) $x^2-1<0 \Longleftrightarrow x^2<1(\text{ positivos}) \Longleftrightarrow |x|=\sqrt{x^2}<1 \Longleftrightarrow -1<x<1$

iii) $(x-2)^2>0 \Leftrightarrow x \neq 2$

iv) $x^3(x-2)(x+3)^2>0 \Longleftrightarrow x \neq -3, \text{ y } x^3(x-2)>0$

$$\Longleftrightarrow x \neq -3, \text{ y } x \in (-\infty,0) \cup (2,\infty) \Longleftrightarrow x \in (-\infty,-3) \cup (-3,0) \cup (0,2)$$

v) $\dfrac{1}{x-3}<2 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{x-3}-2<0 \Longleftrightarrow \dfrac{7-2x}{x-3}<0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty,3) \cup (\dfrac{7}{2},\infty)$

vi) $\dfrac{1}{1+x^2}<1(\text{positivos}) \Leftrightarrow 1+x^2>1 \Leftrightarrow x^2>0 \Leftrightarrow x \neq 0$

Ejercicio 11. Resuelve las siguientes desigualdades

i)	$\lvert x\rvert<1$	ii)	$\lvert 3x+1\rvert \geq 1$	iii)	$\lvert x^2-x\rvert>2$
iv)	$\lvert x+4\rvert<2$	v)	$\lvert x+1\rvert<\lvert x-3\rvert$	vi)	$\lvert x-1\rvert\,\lvert x+2\rvert \leq 4$

Ejercicio 12. Representa los siguientes conjuntos y estudia si están acotados inferior o superiormente, encuentra cotas y el supremo y el ínfimo, en el caso de que existan.

$$A = (-\infty, 3) \qquad B = (2, 8] \qquad C = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$$

$$D = [3, 10] \qquad E = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} \qquad F = \{1 + \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$$

	representación	cota sup	cota inf	Máx	mín	Sup	Inf
A							
B							
C							
D							
E							
F							

Ejercicio 13. Resuelve las siguientes desigualdades, representa gráficamente el conjunto de soluciones e indica si es acotado y si tiene máximo, mínimo, supremo, ínfimo.

1. $-3 \leq -6x$

$$-3 \leq -6x \Longleftrightarrow 3 \geq 6x \Longleftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

2. ii) $|x + 1| \leq 5$

$$|x + 1| \leq 5 \Longleftrightarrow -5 \leq x + 1 \leq 5 \Longleftrightarrow -6 \leq x \leq 5$$

3. iii) $x > \dfrac{1}{x}$

$$x > \frac{1}{x} \Longleftrightarrow x - \frac{1}{x} > 0 \Longleftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x} > 0 \Longleftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x} > 0$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x} > 0 \Longleftrightarrow x > 0 \text{ y } (x-1)(x+1) > 0 \text{ o } x < 0 \text{ y} (x-1)(x+1) < 0 \Longleftrightarrow x \in (1, \infty) \cup (-1, 0)$$

4. $|\dfrac{x+1}{x-1}| \leq 1$

   - Una forma de resolverlo:

$$-1 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} -1 \leq \dfrac{x+1}{x-1} \Longleftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} + 1 \geq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{2x}{x-1} \geq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \text{ y} x > 1 \Longleftrightarrow x \in (1, \infty) \\ \text{o} \\ x \leq 0 \text{ y } x < 1 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 0] \end{cases} \\ \text{y} \\ \dfrac{x+1}{x-1} \leq 1 \Longleftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} - 1 \leq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{2}{x-1} \leq 0 \Longleftrightarrow x < 1 \end{cases}$$

Luego la solución es $(-\infty, 0)$.

• Otra forma de resolverlo: Si $x \neq 1$

$$|\frac{x+1}{x-1}| \leq 1 \iff |x+1| \leq |x-1| \iff (x+1)^2 \leq (x-1)^2 \iff x \leq 0$$

	Conjunto	cota sup	cota inf	Máx	mín	Sup	Inf
i)	$(-\infty, \frac{3}{2})$	2, 3, . . . ,	No hay	No hay	No hay	$\frac{3}{2}$	No hay
ii)	$(-6, 5)$	9	-7	No hay	No hay	5	-6
iii)	$(-1, 0) \cup (1, \infty)$	No hay	-1,0,. . .	No hay	No hay	No hay	-1
iv)	$(-\infty, 0)$	1,2,. . .	No hay	No hay	No hay	0	No hay

Ejercicio 14. Sea A el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 16\} \cup \{x \in \mathbb{R} : |x-3| \leq 1\}$$

Representa el conjunto A , y calcula su mínimo, ínfimo, máximo y supremo, si existen.

Ejercicio 15. Calcula y representa los siguientes conjuntos y completa el cuadro.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-3| \leq |x|\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} : 6x^2 < x\} \cup \{\frac{1}{k} : k = 1, \ldots, 5\}$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{2x-1} < x\} \cup \{\frac{1}{k^2} : k \in \mathbb{N} \text{ y } k \geq 3\}$$
$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2(x-3) \leq 0\}$$
$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| < |x|\} \cup \{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N} \text{ y } 1 \leq k \leq 3\}$$
$$F = \{x \in \mathbb{R} : |x(x-5)| \leq |x|\}$$

	representación	cota sup	cota inf	Máx	mín	Sup	Inf
A							
B							
C							
D							
E							
F							

Ejercicio 16. Representa los conjuntos

$$F = \{x \in \mathbb{R} : |x(x-5)| \leq |x|\} \qquad B = \{7 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{\frac{-1}{n} : n \in \mathbb{N}\},$$

y estudia si están acotados inferior o superiormente, encuentra cotas y el supremo y el ínfimo, en el caso de que existan, completando el cuadro siguiente.

Ejercicio 17. En cada una de las siguientes intersecciones infinitas, halla el conjunto y razona si se puede aplicar o no el "Principio de los intervalos encajados".

$$i)\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{5^n}{9^n},\frac{1}{3^n}\right] \qquad ii)\bigcap_{n=1}^{\infty}(0,\frac{1}{2^n}) \qquad iii)\bigcap_{n=1}^{\infty}[0,1+\frac{1}{2^n}]$$

Solución:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{5^n}{9^n},\frac{1}{3^n}\right]=\{0\}$$

Se puede aplicar el principio de los intervalos encajados y puesto todos los intervalos son cerrados y acotados y están encajados puesto que $\left[-\frac{5^{n+1}}{9^{n+1}},\frac{1}{3^{n+1}}\right]\subset\left[-\frac{5^n}{9^n},\frac{1}{3^n}\right]$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Además puesto que $\inf\{(\frac{1}{3^n}-(-\frac{5^n}{9^n}),n\in\mathbb{N}\}=\inf\{\frac{1}{3^n}+\frac{5^n}{9^n},n\in\mathbb{N}\}=0$ la intersección se reduce a un punto y $0\in\left[-\frac{5^n}{9^n},\frac{1}{3^n}\right]$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(0,\frac{1}{2^n})=\emptyset$$

No se puede aplicar puesto que se trata de intervalos abiertos. Nótese que si $x\in(0,\frac{1}{2^n})$ para todo $n\in\mathbb{N}$ se tendría que $x>0$ y que:

$$x<\frac{1}{2^n}\qquad \text{para todo} n\in\mathbb{N}\Rightarrow x<\frac{1}{n}\text{ para todo} n\in\mathbb{N}$$

lo cual contradice la propiedad arquimediana!!

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[0,1+\frac{1}{2^n}]=[-1,1]$$

Se puede aplicar la propiedad de los intervalos encajados puesto que todos los intervalos son cerrados y acotados y están encajados $[0,1+\frac{1}{2^{n+1}}]\subset[0,1+\frac{1}{2^n}]$ para todo $n\in\mathbb{N}$