Geometría Afín y Proyectiva **PARCIAL 1** **22 Octubre 2018**
Tiempo: 2 horas

NOMBRE:

1. (2.5 p). En el espacio afín $\mathbf{A}^4$ se dan los subespacios $S:\begin{cases} x=\lambda+\mu \\ y=1-\lambda+\mu \\ z=-1+\lambda+\mu \\ t=-\lambda \end{cases}$ y $T:\begin{cases} x=1 \\ y-2t-2z=0 \end{cases}$

a) Calcular ecuaciones implícitas de S y paramétricas de T.

b) Posición relativa de $\vec{S}$ y de $\vec{T}$. Posición relativa de S y T.

2. (2.5 p). a) Escoger una referencia cartesiana del subespacio generado por los puntos de $\mathbf{A}^4$ $\{(1,0,1,0),(0,-1,1,0),(0,1,0,1),(1,0,2,-1)\}$ y completarla a una referencia de $\mathbf{A}^4$ (***R***).

b) Calcular la referencia baricéntrica asociada a ***R*** y las coordenadas baricéntricas del punto $\mathrm{P}=(1,1,1,1)$ respecto de ella.

3. (2.5 p). a) Dar una referencia de $\mathbf{A}^3$ ortonormal y positivamente orientada, ***R***, en la que la recta $L=(3,5,0)+\mathcal{L}\{(1,1,0)\}$ sea el nuevo eje z.

b) Calcular la matriz del cambio de ***R*** a $\boldsymbol{R_2}=\{(1,2,3);(1,2,3),(4,5,6),(7,8,0)\}$

(Si no has sabido calcular ***R*** hazlo con letras)

4. (2.5 p). Clasificar y determinar los elementos del movimiento en A^3 dado por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Implícitas de S (eliminando parámetros)

$$\left(\begin{array}{c|cc} x & 1 & 1 \\ y-1 & -1 & 1 \\ z+1 & 1 & 1 \\ t & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|cc} x & 1 & 1 \\ y-1+x & 0 & 2 \\ z+1-x & 0 & 0 \\ t+x & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} 2t+2x-y+1-x=0 \\ x-y+2t+1=0 \end{array}$$

$$S: \begin{cases} x-z=1 \\ x-y+2t=-1 \end{cases} \qquad \dim S = 2$$

Paramétricas de T (resolviendo el sistema)

$$\begin{cases} x=1 \\ y-2t-2z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1 \\ y=2\lambda+2\mu \\ z=\lambda \\ t=\mu \end{cases} \qquad \dim T = 2$$

b) Posición relativa de $\vec{S}$ y $\vec{T}$:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \vec{S} \cap \vec{T} \text{ es}$$

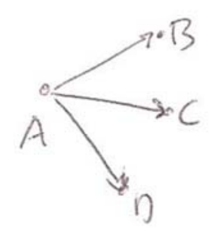
una recta

Posición relativa de S y T: $\quad Q=(1,0,0,0) \in T, \; P=(0,1,-1,0) \in S$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 4 \Rightarrow$$

$\vec{PQ}$

$\Rightarrow$ S y T se cruzan.

a) 

$$\text{rango}\begin{pmatrix} \vec{AB} \\ \vec{AC} \\ \vec{AD} \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \text{rango}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

$$R = \{ \underset{\vec{A}}{\underset{\shortparallel}{(1,0,1,0)}} ; \underset{\vec{AB}}{\underset{\shortparallel}{(-1,-1,0,0)}}, \underset{\vec{AC}}{\underset{\shortparallel}{(-1,1,-1,1)}}, \underset{\vec{AD}}{\underset{\shortparallel}{(0,0,1,-1)}}, \underset{\vec{v}}{\underset{\shortparallel}{(0,0,0,1)}} \}$$

b) $$R_a = \{ A, B, C, D, \underset{(1,0,1,1)}{\underset{\shortparallel}{A+\vec{v}}} \}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{P\,en\,R_c} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C(R, R_c)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ 1 \end{pmatrix}}_{P\,en\,R}$$

$$\begin{cases} \cancel{1} = -a - b + \cancel{1} \Rightarrow a = -b \\ 1 = -a + b \Rightarrow 1 = 2b \Rightarrow b = \frac{1}{2}, \ a = -\frac{1}{2} \\ \cancel{1} = -b + c + \cancel{1} \Rightarrow b = c \\ 1 = \cancel{b} - \cancel{c} + d \Rightarrow d = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{P = \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1\right)}$$

a) $R = \{ P_0 ; \ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \}$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ base ortonormal $\Longleftrightarrow$ $\vec{v}_i \perp \vec{v}_j$, $\|\vec{v}_i\| = 1$

$$\begin{cases} \vec{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\ \vec{v}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1/\sqrt{2}, 0\right) \\ \vec{v}_2 = (0, 0, 1) \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1+1 > 0$$

$$R = \left\{ (3,5,0) ; \ \left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\right), (0,0,1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \right\}$$

b) $= C(R, R_2) = C(R_c, R_2) \cdot C(R, R_c) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 3 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Clasificación</u>

1º) $\left| M_{\tilde{f}}(B_c) \right| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0$ (movimiento directo)

2º) Puntos fijos: $f(P)=P$ $\quad \begin{cases} -z+1=x \\ x-1=y \\ -y+1=z \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \cancel{1}-x=-y+\cancel{1} \\ x=y \end{array}$

no tiene

<u>MOV. HELICOIDAL</u>

$T_{\vec{v}} \circ G_{L,\alpha} \;,\; \vec{v} \in \vec{L}$

<u>Elementos</u> $\quad L: P+\lambda\vec{v}$ (eje de giro) y ángulo . vector.

1º) $\tilde{f}(\vec{v}) = \vec{v} \iff \begin{cases} -z=x \\ x=y \\ -y=z \end{cases} \qquad \vec{v}=(\lambda,\lambda,-\lambda)$

2º) $P \in L \iff \overrightarrow{P f(P)} = \vec{v} \iff (-x-z+1 \;,\; x-y-1 \;,\; -y-z+1) = (\lambda,\lambda,-\lambda)$

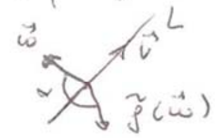
$\overrightarrow{P f(P)} = f(P)-P$

$L: \begin{cases} -x-z+1 = x-y-1 \\ x-y-\cancel{1} = y+z-\cancel{1} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-y+z-2=0 \\ x-2y-z=0 \end{cases} \qquad \boxed{L: \begin{cases} x=\frac{4}{3}-\lambda \\ y=\frac{2}{3}-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$

3º) <u>VECTOR</u> $\quad \vec{v}=\overrightarrow{P f(P)} \;,\; P=(4/3, 2/3, 0)$

$\vec{v} = f(P)-P = \left(-\frac{4}{3}+1,\; \frac{4}{3}-\frac{2}{3}-1,\; -\frac{2}{3}+1\right) = \boxed{\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}$

4º) <u>ÁNGULO</u>



$\vec{v}=(-1,-1,1) \in L \;;\; \vec{w}=(1,-1,0) \perp L \;;\; \tilde{f}(\vec{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\cos\alpha = \dfrac{\langle \vec{w}, \tilde{f}(\vec{w}) \rangle}{\|\vec{w}\| \cdot \|\tilde{f}(\vec{w})\|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2} \qquad \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$

$\boxed{\alpha = 120^\circ}$