<table>
<tr><td>Estructuras Algebraicas
Segundo examen parcial</td><td rowspan="2">1^{er} Apellido: ____________
2º Apellido: ____________
Nombre: ____________
Número de matrícula: | | | | | | | |</td><td rowspan="2">24 de mayo de 2019
Tiempo 2 h
Calificación:</td></tr>
<tr><td>Depto. Matemática Aplicada T.I.C.
E.T.S. de Ingenieros Informáticos
Universidad Politécnica de Madrid</td></tr>
</table>

Para que sean consideradas como válidas, todas las respuestas deben estar adecuadamente justificadas.

1. (2 puntos)

   a) Estudiar si el conjunto $S = \{ \begin{pmatrix} x & 2y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{Z}\}$, es un subanillo de $(\mathbb{Z}^{2\times 2}, +, \cdot)$.

   b) Obtener las unidades, los divisores de cero y la característica del siguiente anillo: $(R, +_{20}, \cdot_{20})$, siendo $R = \{0, 5, 10, 15\}$.

2. (2 puntos)

   a) Estudiar si $15\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ tiene estructura de anillo compatible con la del anillo $(15\mathbb{Z}, +, \cdot)$. En caso afirmativo obtener las tablas de las operaciones y determinar si es un cuerpo.

   b) Obtener los ideales maximales de $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$

3. (2 puntos) Estudiar si la aplicación $\varphi : \mathbb{Z}_{40} \to \mathbb{Z}_{24}$ definida por $\varphi(x) = 9x$, es un homomorfismo de anillos. En caso afirmativo obtener la imagen y el núcleo. Calcular el cociente $\mathbb{Z}_{40}/\ker(\varphi)$ e indicar si $\ker(\varphi)$ es un ideal maximal.

4. (2 puntos)

   a) Obtener el polinomio $d \in \mathbb{Q}[x]$, que es máximo común divisor de los polinomios $f = x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ y $g = x^4 + x^3 - x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.
   Expresar d como combinación lineal de f y g.

   b) Calcular el polinomio mínimo de $\alpha = \sqrt[4]{5 + \sqrt{5}}$ sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$.

5. (2 puntos)

   a) Obtener una base y el grado de extensión de $\alpha = \sqrt[6]{7}$ sobre $\mathbb{Q}$.

   b) Sea $h = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$. Justificar que $\mathbb{Z}_5[x]/(h)$ es un cuerpo e indicar sus elementos.

   c) Obtener en $\mathbb{Z}_5[x]/(h)$ el resultado de la siguiente operación: $x^3(x^2 + 1)$

   d) Obtener en $\mathbb{Z}_5[x]/(h)$ el elemento: $(x + 2)^{-1}$

No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.

Soluciones

1. *a)* $\begin{pmatrix} x & 2y \\ -y & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' & 2y' \\ -y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-x' & 2(y-y') \\ -(y-y') & x-x' \end{pmatrix} \in S,$
   $\begin{pmatrix} x & 2y \\ -y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' & 2y' \\ -y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx'-2yy' & 2(xy'+x'y) \\ -(xy'+x'y) & xx'-2yy' \end{pmatrix} \in S$ $\Rightarrow$ Sí es subanillo

   b) $U_R = \{5, 15\}, \quad divC_R = \{10\}, \quad \text{char}(R) = 4$

2. *a)* $I = 30\mathbb{Z} = (30)$ es ideal de $15\mathbb{Z}$, por tanto $15\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} = \{[0], [15]\}$ tiene estructura de anillo compatible con la de $(15\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Además es un ideal maximal y por tanto es cuerpo.

   $\begin{array}{c|cc} + & [0] & [15] \\ \hline [0] & [0] & [15] \\ [15] & [15] & [0] \end{array}, \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & [0] & [15] \\ \hline [0] & [0] & [0] \\ [15] & [0] & [15] \end{array}.$

   b) $([2]_4) \times \mathbb{Z}_6, \quad \mathbb{Z}_4 \times ([2]_6), \quad \mathbb{Z}_4 \times ([3]_6)$

3. Sí es homomorfismo de anillos: $40 \cdot 9 \equiv 0 \mod 24$, $9^2 \equiv 9 \mod 24$,
   $\text{im}(\varphi) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\} = ([3]_{24})$
   $\ker(\varphi) = \{0, 8, 16, 24, 32\} = ([8]_{40})$
   $\mathbb{Z}_{40}/([8]_{40}) \approx ([3]_{24})$, que no es cuerpo porque tiene divisores de cero ($[6]_{24} \cdot_{24} [12]_{24} = [0]_{24}$), por tanto $\ker(\varphi)$ no es maximal.

4. *a)* $d = x^2 + x + 1. \quad d = \frac{1}{3}(-x+2)f + \frac{1}{3}(x^2 - 2x + 1)g$

   b) El polinomio mínimo es $x^8 - 10x^4 + 20$. (Irreducible por Eisenstein para el número primo $p = 5 \in \mathbb{N}$)

5. *a)* $B = \{1, \sqrt[6]{7}, \sqrt[3]{7}, \sqrt{7}, \sqrt[3]{7^2}, \sqrt[6]{7^5}\}. \quad [\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) : \mathbb{Q}] = 6$

   b) El polinomio es irreducible porque no tiene raíces en $\mathbb{Z}_5$ y tiene grado 2.

   c) $4x$

   d) $(x+2)^{-1} = 3x + 2$