DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
ETSI Inf.
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

# CALCULO I.
# SUCESIONES DE NUMEROS REALES

Raquel Gonzalo

## 0.1. Sucesiones de números reales. El límite de una sucesión.

Una sucesión es una ley o correspondencia que hace corresponder a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ un número real, es decir, es una función $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(n) = a_n \in \mathbb{R}$. Al número $a_n$ se le llama término $n$-ésimo de la sucesión. Puesto que todas las sucesiones tienen por dominio $\mathbb{N}$, podemos asegurar que una sucesión queda determinada cuando conocemos sus valores $a_n$ para todo $n$; por eso denotaremos las sucesiones como $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ o $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, o simplemente $(a_n)$.

Si enumeramos los términos de la sucesión, podría ser representada como una lista o secuencia infinita:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

• Formas de definir una sucesión:

1. *De forma explícita mediante su término general:* expresando el valor de $a_n$ en función de $n$. Por ejemplo la sucesión $a_n = 1/n$ es la sucesión
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$
2. *Mediante una recurrencia:* . Este será el caso de las *sucesones recurrentes*. Por ejemplo la sucesión $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$ es la sucesión
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Es importante destacar que dos sucesiones $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ coinciden si y sólo si todos los términos de la sucesión coinciden, es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = b_n.$$

Es importante distinguir entre la sucesión y el conjunto de los términos de una sucesión o rango de la sucesión. Dada $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión:

• La sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ aporta un movimiento y una disposición de los términos en una secuencia infinita con un orden concreto de aparición:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

• El rango de una sucesión o conjunto de los términos de la sucesión es un conjunto cuyos elementos son los números $a_n$, es decir,

$$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\};$$

este conjunto de números reales puede ser finito (como en el caso de la sucesión $a_n = (-1)^n$) e incluso un único punto (como en el caso de una sucesión constante $a_n = 1$). En la interpretación de la sucesión como movimiento el rango es el conjunto de puntos en la recta que se ocupan en el movimiento, sin tener en cuenta en qué posición ni cuantas veces.

### 0.1.1. Tipos de sucesiones: Sucesiones acotadas, monótonas

**Sucesiones acotadas.**

**Definición 1.** *Diremos que una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada superiormente si existe $R \in \mathbb{R}$ tal que*

$$a_n \leq R \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}$$

*Esto es equivalente a afirmar que el conjunto $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ es acotado superiormente.*
*Diremos que una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada inferiormente si existe $r \in \mathbb{R}$ tal que*

$$a_n \geq R \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}$$

*Esto es equivalente a que el conjunto $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es acotado inferiormente.*
*Diremos que la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ está acotada si está acotada superior e inferiormente.*

**Sucesiones Monótonas.**

**Definición 2.** *La sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente si para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:*

$$a_{n+1} \leq a_n.$$

*La sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente si para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:*

$$a_n \leq a_{n+1}.$$

**Ejemplo 3.** *La sucesión $a_n = n$ es claramente monótona creciente puesto que para todo $n \in \mathbb{N}$ :*

$$a_n = n \leq n + 1 = a_{n+1}$$

*Por otra parte, la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$ es monótona decreciente ya que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:*

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = a_n$$

**Observación 4.** *Hay sucesiones que no son monótonas, por ejemplo $a_n = (-1)^n$ ya que $a_1 < a_2$ y sin embargo $a_2 > a_3$.*

Si $r > 0$ ¿es la sucesión $r^n$ monótona creciente o decreciente ? ¿Para qué valores es monótona creciente? ¿Para qué valores es monótona decreciente? ¿Y si $r < 0$?

### 0.1.2. El límite de una sucesión. Sucesiones convergentes

**Definición 5.** *Diremos que una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge al número real $a$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que:*

$$|a_n - a| < \epsilon$$

*Interpretación gráfica sobre la recta real:* dado $\epsilon > 0$ y el intervalo $(a-\epsilon, a+\epsilon)$, entonces podemos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que a partir del término $a_{n_0}$ de la sucesión, es decir, si $n \geq n_0$, $a_n$ dista de $a$ menos que $\epsilon$, es decir,

$$a_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon).$$

**Ejemplo 6.** *Ejemplos de sucesión convergente:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

*Lo probamos: dado $\epsilon > 0$ tenemos que encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tiene que:*

$$|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}$$

*Por lo tanto basta elegir $n_0 = [1/\epsilon] + 1$ y si $n \geq n_0$ es claro que*

$$\frac{1}{n} < \epsilon.$$

**Definición 7.** *Diremos que una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente si hay un número real $a$ tal que la sucesión converge a $a$, es decir, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.*

**Proposición 8.** *(Unicidad del límite.) Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente de números reales. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ entonces $a = b$.*

**Demostración:** Procedemos por red. al absurdo. Supongamos que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \neq b$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ siendo $a < b$. Consideramos $\epsilon = \dfrac{b-a}{2} > 0$ y aplicamos la definición de límite para $a$ y $b$ con dicho $\epsilon$.

• Como $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ para $\epsilon = \dfrac{b-a}{2} > 0$ existe un número natural que llamamos $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$ se tiene que:

$$a - \frac{b-a}{2} < a_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

• Como $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ para $\epsilon = \dfrac{b-a}{2} > 0$ existe un número natural que llamamos $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$ se tiene que:

$$\frac{a+b}{2} = b - \frac{b-a}{2} < a_n < b - \frac{b-a}{2}$$

Pero esto no es posible ya que tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$ se tendría que:

$$a_N < \frac{a+b}{2} < a_N!!$$

esto no es posible. Hemos llegado a algo absurdo. Luego el enunciado es correcto.

### 0.1.3. Límites arítméticos.

Propiedades aritméticas de los límites.

**Proposición 9.** *Supongamos que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *con* $a, b \in \mathbb{R}$ *entonces:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.
3. *Si* $b \neq 0$ *se tiene que:* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

**Proposición 10.** *Sea* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión. Se tiene que:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

*Además, si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

**Observación 11.** *Nótese que no es cierto que si* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. *Por ejemplo, la sucesión* $a_n = (-1)^n$ *no tiene límite y sin embargo* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 1$.

**Ejemplo 12.** *Aplicando el resultado anterior obtenermos con facilidad que la sucesión* $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ *converge a cero. En efecto, como* $\lim\limits_{n\to\infty} |(-1)^n \dfrac{1}{n}| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n} = 0$.

### 0.1.4. Límites $\infty$ y $-\infty$. Definición y ejemplos

**Definición 13.** *Diremos que* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *si para todo* $R > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq n_0$ *se tiene que* $a_n > R$.

De la misma forma, se define $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ como $\lim_{n\to\infty} -a_n = \infty$.

**Proposición 14.** *Sea* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión tal que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *y* $a_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces,* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$.

Otro resultado de gran utilidad es el siguiente:

**Proposición 15.** *Sea* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

## 0.2. Límites en el infinito de funciones: aplicación al límite de sucesiones.

Al realizar los límites aritméticos nos encontramos con las siguientes indeterminaciones

$$\boxed{\infty - \infty, 0.\infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, \infty^0, 1^\infty}$$

En algunos límites del tipo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ se tiene que hay una función $f$ elemental, o composición de elementales, definida en $\mathbb{R}$, o algún intervalo de tipo $(a, \infty)$, de modo que $a_n = f(n)$. En este caso podemos pasar a estudiar el $\lim_{x\to\infty} f(x)$ con las técnicas conocidas y utilizar el siguiente resultado:

La relación de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} f(n)$$

es la siguiente:

**Proposición 16.** *Sea* $f$ *una función:*
*Si* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ *donde* $L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = L$.

**Observación 17.** *El recíproco de este resultado no es cierto. En efecto, consideremos la sucesión* $a_n = \operatorname{sen} \pi n$, *es claro que* $a_n = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *por lo que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*; sin embargo, si consideramos la función* $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ *no existe* $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(\pi x)$.

**Observación 18.** *Hay ejemplos de sucesiones* $a_n$ *para las que no es posible encontrar una función en términos de funciones elementales de modo que* $f(n) = a_n$. *Este es el caso de* $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$ *la función* $f(x) = (-1)^x \dfrac{1}{x}$ *no está definida. De la misma forma el factorial de un número* $x!$ *no tiene sentido excepto para los números naturales.*

### 0.2.1. Agunos límites importantes:

Estudiamos en primer lugar los límites del tipo $r^n$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \text{No existe } \; si \; r \leq 1 \\ 0 \; si \; -1 < r < 1 \\ 1 \; si \; r = 1 \\ \infty \; si \; r > 1 \end{cases}$$

Se tiene que:

En primer lugar, si $r > 0$ podemos pasar al $\lim_{x\to\infty} r^x = e^{\lim_{x\to\infty} x\log(r)}$. Si $r = 0$ es claro que $\lim_{n\to\infty} 0^n = 0$.

Teniendo en cuenta el signo de $log(r)$ tenemos que:

1. si $0 < r < 1$, se tiene que $log(r) < 0$ y por tanto $\lim_{x\to\infty} r^x = 0$. Entonces $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.
2. si $r > 1$ se tiene que $log(r) > 0$ y por tanto $\lim_{x\to\infty} r^x = \infty$. Entonces $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$.

Ahora, si $|r| < 1$, como $\lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. En los casos $r \leq -1$ se puede probar que el límite no existe.

**Ejemplo 19.** *Vemos algunos ejemplos con límites de potencias.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 6^n}{(-7)^n + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{9}\right)^n + \left(\frac{6}{9}\right)^n}{\left(\frac{-7}{9}\right)^n + \left(\frac{3}{9}\right)^n} = 0$$

*ya que* $|\frac{3}{9}| < 1, |\frac{6}{9}| < 1, |\frac{-7}{9}| < 1.$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 6^n} = \lim_{n\to\infty} 6\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = 6$$

*puesto que* $|\frac{1}{2}| < 1.$

Otro ejemplos de límites de sucesiones son:

1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} = 0$ para todo $r \in \mathbb{R}$

## 0.3. Sucesiones equivalentes. Aplicaciones

Diremos que dos sucesiones $(a_n)$ y $(b_n)$ son equivalentes, y lo denotaremos como $a_n \sim b_n$, si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Por ejemplo, en el caso de $a_n = n^2$ y $b_n = n^2 + 3n + 1$ es claro que $n^2 \sim n^2 + 3n + 1$. Las equivalencias más importantes son:

1. Polinomios: $a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_0 \sim a_k n^k$ si $n \to \infty$ siendo $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.
2. $\operatorname{sen}(a_n) \sim a_n$ si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
3. $\log(1 + a_n) \sim a_n$ si $\lim_{n\to\infty}$ si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Uso de equivalencias en el cálculo de límites: en algunos límites podemos intercambiar una sucesión por su equivalente en productos y cocientes, no es posible intercambiarlos en sumas o potencias infinitas.

**Proposición 20.** *Sean $(a_n)$ y $(b_n)$ dos sucesiones equivalentes, es decir, $a_n \sim b_n$ y $(c_n)$ otra sucesión entonces,*

1. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} b_n c_n$.
2. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{b_n}$.

## 0.4. Subsucesiones. Técnicas con subsucesiones.

**Definición 21.** *Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. Dada una sucesión estrictamente creciente de números naturales, $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, se dice que la nueva sucesión $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Por ejemplo, si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión, las sucesiones $(a_{2n})_{n=1}^{\infty}$ o $(a_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ son subsucesiones de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Un resultado fundamental del límite en relación con las subsucesiones es el que afirma que si una sucesión converge a $L \in \mathbb{R}$ (o tiene límite $\infty$ o $-\infty$) entonces todas sus subsucesiones convergen a $L$ (o tiene límite $\infty$ o $-\infty$), es decir,

**Proposición 22.** *Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ donde $L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ entonces $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = L$ para cualquier subsucesión $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Lo más interesante del resultado anterior es su aplicación para justificar la no existencia de límite de una sucesión encontrando dos subsucesiones que tengan distintos límites.

**Corolario 23.** *Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, si podemos encontrar dos subsucesiones $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ y $(a_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ tales que*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \neq \lim_{k\to\infty} a_{m_k}$$

*(o alguno de los límites anteriores no existe) entonces la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ no tiene límite.*

Por ejemplo, la sucesión $a_n = (-1)^n$ no es convergente, ya que podemos encontrar dos subsucesiones $a_{2n} = 1$ y $a_{2n-1} = -1$ tales que $1 = \lim_{n\to\infty} a_{2n} \neq \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1$. Por lo tanto no puede ser convergente.
Otro resultado de interés basado en que la unión de pares e impares es el conjunto $\mathbb{N}$ es:

**Proposición 24.** *Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, si $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1}$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.*

El resultado no es cierto en general si elegimos dos subsucesiones cualesquiera que no sean las de los pares y las de las impares ¿Por qué?

## 0.5. Criterio de convergencia mediante la integral.

A partir de los resultados de la integral de Riemann se puede obtener el siguiente criterio:

**Proposición 25.** *Sea $f$ una función contina en $[a,b]$ entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+\frac{k(b-a)}{n}) = \int_a^b f(x)dx$$

**Observación:** Nótese que si consideramos la partición del intervalo $[a,b]$ dada por $P_n = \{x_0,\ldots,x_n\}$ con $x_k = a+\frac{k(b-a)}{n}$, las sumas anteriores quedan encajadas entre las correspondientes sumas inferiores y superiores de Riemann de la función, es decir,

$$s(f,P_n) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+\frac{k(b-a)}{n}) \leq S(f,P_n).$$

con lo cual, se puede probar que la integral, que existe por ser $f$ continua, coincide con el límite que aparece en la proposición.

**Ejemplo 26.** *Vamos a probar que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+2} + \cdots + \frac{n}{n+n} = \ln 2$$

*Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:*

$$\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+2}+\cdots+\frac{n}{n+n}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=$$
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$$

*para la función* $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$. *Por lo tanto,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+2}+\cdots+\frac{n}{n+n}=\int_0^1\frac{1}{1+t}dt=[\ln(1+t)]_{t=0}^{t=1}=\ln 2$$

## 0.6. Criterio del sandwich. Aplicaciones.

**Proposición 27.** *Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ tres sucesiones de números reales tales que para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$b_n \leq a_n \leq c_n$$

*Si $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen a $a$ entonces $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $a$.*

*Demostración.* Sea $\epsilon > 0$ hay que encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tiene que

$$a-\epsilon < a_n < a+\epsilon$$

Puesto que sabemos que $\lim_{n\to\infty} b_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} c_n = a$, aplicando la definición para dicho $\epsilon > 0$:

• podemos encontrar $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\boxed{a-\epsilon < b_n} < a+\epsilon$ para todo $n \geq n_1$.

• podemos encontrar $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $a-\epsilon < \boxed{c_n < a+\epsilon}$ para todo $n \geq n_2$.

Por lo tanto, si consideramos $n_0 = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}$ se tiene que si $n \geq n_0$

$$a-\epsilon < b_n \leq a_n < c_n < a+\epsilon.$$

□

Vamos a ver un ejemplo de la aplicación del criterio del sandwich.

**Ejemplo 28.** *Estudiemos el límite de la siguiente sucesión:*

$$b_n=\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n}{\sqrt{n^4+2}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$$

*La suma en* $b_n$ *tiene* $n$ *sumandos, y puesto que el mayor de ellos es* $\dfrac{n}{\sqrt{n^4+1}}$ *y el menor es* $\dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}}$

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$$

*Puesto que* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt{n^4+1}} = 1$, *utilizando el criterio del Sandwich tenemos que:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} = 1.$$

El siguiente resultado es muy útil:

**Corolario 29.** *Sea* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión convergente a cero y* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión acotada. Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0.$$

**Ejemplo 30.** *Estudiemos el siguiente límite* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$. *Aunque* $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen} n$ *no existe ( este resultado no es sencillo de probar) sin embargo, puesto que la sucesión* $(\operatorname{sen} n)_{n=1}^{\infty}$ *está acotada, ya que* $|\operatorname{sen} n| \leq 1$, *y* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ *utilizando el resultado anterior se tiene que:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n} = 0.$$

**Proposición 31.** *(Casos extremos del criterio del sandwich) Sean* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dos sucesiones tales que* $a_n \leq b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$,

1. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.
2. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

### 0.6.1. Propiedades de conservación del signo

**Proposición 32.** *Sea* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$.

1. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, *existe un cierto* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geq n_0$ *se tiene que* $a_n > 0$.

2. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0$, *existe un cierto* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geq n_0$ *se tiene que* $a_n < 0$.

De la misma forma se prueba el resultado cuando el límite es negativo.

Como consecuencia de este resultado tenemos:

**Proposición 33.** *Sea* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión tal que existe* $\lim_{n\to\infty} a_n$*,*

1. *Si* $a_n \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$*.*

2. *Si* $a_n \leq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n \leq 0$*.*

**Observación 34.** *En el resultado anterior no podemos cambiar* $\geq$ *por* $>$*, es decir, si* $a_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y existe* $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ *no podemos concluir que* $a > 0$*; basta considerar la sucesión dada por* $a_n = \frac{1}{n}$ *cuyo límite es* $0$*.*

**Observación 35.** *En el caso de que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *no se puede afirmar que el signo de los términos de la sucesión sea positivo o negativo. Por ejemplo, si consideramos la sucesión* $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$ *dicha sucesión converge a* $0$ *y sin embargo* $a_n > 0$ *para todo* $n$ *par y* $a_n < 0$ *para todo* $n$ *impar.*

### 0.6.2. Sucesiones acotadas. Aplicación a las sucesiones recurrentes.

Recordemos que una sucesión está acotada si y sólo si existe $R > 0$ tal que $|a_n| \leq R$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

**Proposición 36.** *Toda sucesión convergente es acotada.*

**Demostración:** Supongamos que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $a$. Para $\epsilon = 1$, por ejemplo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tiene que

$$a - 1 \leq a_n \leq a + 1.$$

Por tanto, basta elegir $R = \max\{a + 1, a_1, \ldots, a_{n_0}\}$ y $r = \min\{a - 1, a_1, \ldots, a_{n_0}\}$ y tendremos que:

1. si $n = 1, \ldots, n_0$ se tiene que $r \leq a_n \leq R$.

2. si $n \geq n_0$, se tiene que $r \leq a - 1 \leq a_n \leq a + 1 \leq R$.

con lo cual queda probado que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $r \leq a_n \leq R$ c.q.d.

**Observación 37.** *No es cierto en general que toda sucesión acotada sea convergente. Por ejemplo,* $a_n = (-1)^n$ *es acotada y sin embargo no converge.*

### 0.6.3. Sucesiones monótonas y acotadas.

**Teorema 38.** *Toda sucesión monótona y acotada es convergente.*

**Prueba:** Supongamos que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente y acotada. Entonces el conjunto $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado ( y no vacío) de números reales), por lo tanto, por la propiedad del supremo en $\mathbb{R}$ existe el supremo del conjunto $A$ que llamaremos $a$.
Vamos a probar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. En primer lugar, puesto que $a$ es cota superior de $A$ podemos afirmar que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{a_n \leq a < a + \epsilon, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.}$$

Por otra parte, puesto que $a - \epsilon < a$ se tiene que $a - \epsilon$ no es cota superior, ya que $a$ es la menor cota superior de $A$, por tanto hay algún elemento del conjunto $A$, por ejemplo $a_{n_0}$ con $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$a - \epsilon < a_{n_0}.$$

Utilizando la monotonía de la sucesión,

$$\boxed{a - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n, \quad \text{si } n \geq n_0}$$

Combinando lo anterior obtenemos que si $n \geq n_0$,

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon.$$

y por lo tanto la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $a$.
En el caso de que las sucesiones sean monótonas no acotadas las sucesiones divergen a $\infty$ o $-\infty$.

**Proposición 39.** *Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión monótona:*

1. *Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente y no acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.*

2. *Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente y no acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.*

*Demostración.* Probaremos la primera parte. Suponemos que $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que no $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ no está acotada. Puesto que dicha sucesión siempre está acotada inferiormente (por $a_1$, no estará acotada superiormente. Probaremos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$: sea $R > 0$, hay que encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tiene que $a_n > R$. Puesto que $R$ no puede ser cota superior de la sucesión existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_0} > R$. Como es monótona creciente, si $n \geq n_0$ se tiene que $a_n \geq a_{n_0} > R$, como queríamos demostrar. $\square$

### 0.6.4. Técnica de estudio de límite de las sucesiones recurrentes.

En el estudio de las sucesiones recurrentes los resultados anteriores nos aseguran que, si podemos probar que están acotadas y que son monótonas, podemos concluir que existe el límite. Vemos un ejemplo de estudio del límite de una sucesión recurrente. Consideremos la siguiente sucesión recurrente:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{9a_n + 10} \end{cases}$$

Para estudiar la convergencia de dicha sucesión, procedemos de la siguiente forma:

1. Posible límite: En el caso de que la sucesión tuviese límite $a$, es decir si existiese $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, buscamos los *posibles* valores de $a$:

   $$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{9a_n + 10} = \sqrt{9a + 10}$$

   Puesto que $a \geq 0$,

   $$a = \sqrt{9a + 10} \Longleftrightarrow a^2 - 9a - 10 = 0,\ a \geq 0 \Longleftrightarrow a = 10.$$

   Luego el posible límite es 10.

2. Estudiamos la monotonía. Utilizamos inducción para probar que es creciente, es decir, que $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

   • Para $n = 1$ se tiene que $1 = a_1 \leq a_2 = \sqrt{19}$

   • Supuesto que es cierto para $n$ que $a_n \leq a_{n+1}$ probaremos que $a_{n+1} \leq a_{n+2}$. Puesto que la sucesión es de términos positivos se tiene que:

   $$a_{n+1} \leq a_{n+2} \Longleftrightarrow \sqrt{9a_n + 10} \leq \sqrt{9a_{n+1} + 10} \Longleftrightarrow 9a_n + 10 \leq 9a_{n+1} + 10 \Longleftrightarrow a_n \leq a_{n+1}.$$

   Por lo tanto $a_{n+1} \leq a_{n+2}$ y la propiedad es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Luego por el PIM se tiene que $a_n \leq a_{n+1}$

3. Estudiamos la acotación de la sucesió: Es claro que $a_n \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por ser monótona creciente. Por otra parte, probaremos que $a_n \leq 10$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

   Para $n = 1$ se tiene que $1 = a_1 \leq 10$

Supuesto que es cierto para $n$ que $a_n \leq 10$ probaremos que $a_{n+1} \leq 10$. Esto es cierto ya que:

$$a_{n+1} = \sqrt{9a_n + 10} \leq \sqrt{9{,}10 + 10} = 10$$

Luego por el PIM se tiene que $a_n \leq 10$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

**Conclusión:** Puesto que la sucesión es monótona y acotada entonces es convergente y su límite es 10. Un resultado esencial que relaciona límites de funciones y sucesiones es el siguiente: si una función tiene límite $L$ en $a$ entonces transforma sucesiones con límite $a$ (y distintas de $a$) en sucesiones con límite $L$, es decir,

### 0.6.5. Límites de sucesiones y funciones

**Proposición 40.** *Sea $f$ una función tal que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ donde $a, L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$. Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $a_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces,*

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = L$$

Este resultado permite probar un resultado que hemos usado en sucesiones:

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) \qquad \text{no existe}$$

En efecto, si existiese un límite $L \in \mathbb{R}$, considerando las sucesiones $a_n = \dfrac{1}{n\pi}$ y $b_n = \dfrac{1}{2n\pi + \pi/2}$, puesto que $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0$ se tendría que

$$L = \lim_{n \to \infty} f(a_n) = 0, \qquad L = \lim_{n \to \infty} f(b_n) = 1$$

lo cual no es posible !!!

## 0.7. Teorema de Bolzano Weirstrass

El importante teorema de Bolzano Weierstrass afirma que toda sucesión acotada tiene alguna subsucesión convergente. Para la prueba de este teorema es esencial el siguiente resultado que afirma que toda sucesión tiene una subsucesión que es monótona.

**Proposición 41.** *Toda sucesión tiene una subsucesión acotada.*

Utilizamos la prueba de los puntos cumbre. Sea $(a_n)$ una sucesión, diremos que un cierto $n$ es un *punto cumbre* de la sucesión si para todo $k \geq n$ se tiene que $a_k \leq a_n$. Consideremos el conjunto de los puntos cumbre de la sucesión $A = \{n : n \text{ es punto cumbre }\}$, que puede ser vacío, finito o infinito. Consideramos los casos :

1. El conjunto $A$ es finito o vacío. Esto significa que a partir de un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ (el máximo de $A$ si $A$ es finito o 1 si $A = \emptyset$) tal que $k$ $k$ no es punto cumbre si $k > n$. Consideremos $n_1 > n_0$, puesto que $n_1$ no es punto cumbre existe $n_2 > n_1$ tal que

$$a_{n_2} < a_{n_1}$$

   Ahora, puesto que $n_2$ no es punto cumbre existe algún $n_3 > n_2$ tal que

$$a_{n_3} < a_{n_2}$$

   y de esta forma obtenemos una subsucesión decreciente.

2. El conjunto de los puntos cumbres es infinito. Consideremos una sucesión de puntos cumbres:

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

   entonces es claro que

$$a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq a_{n_3} \geq \dots$$

   con lo cual obenemos una subsucesión creciente.

Como consecuencia de este resultado se obtiene de forma inmediata el teorema de Bolzano-Weierstrass:

**Teorema 42.** *Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.*