

GEOMETRÍA AFÍN Y PROYECTIVA

Alfonso Zamora y Héctor Barge

Departamento de Matemática Aplicada a las TIC
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos
Universidad Politécnica de Madrid

Índice general

Índice	I
1. Espacios Afines	1
1.1. El espacio afín	1
1.2. Referencias y coordenadas	5
1.2.1. Referencias y coordenadas cartesianas	5
1.2.2. Referencias afines	8
1.2.3. Coordenadas baricéntricas	12
1.3. Subespacios afines	19
1.3.1. Subespacios afines	19
1.3.2. Operaciones con subespacios afines	23
1.3.3. Ecuaciones de subespacios afines	29
1.4. Problemas	33
2. Aplicaciones Afines	36
2.1. Aplicaciones afines y representación matricial	36
2.1.1. Definición y propiedades de las aplicaciones afines	36
2.1.2. Representación matricial de aplicaciones afines	42
2.1.3. Puntos fijos y subespacios invariantes	49
2.2. Algunas aplicaciones afines	52
2.2.1. Traslaciones	52
2.2.2. Homotecias	54
2.2.3. Proyecciones	56
2.2.4. Simetrías	58
2.3. Razón simple	64
2.4. Problemas	66
3. Espacios Afines Euclídeos	70
3.1. El espacio afín euclídeo	70
3.2. Movimientos	79
3.2.1. Clasificación de movimientos en la recta $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$	82
3.2.2. Clasificación de movimientos en el plano $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$	83
3.2.3. Clasificación de movimientos en el espacio $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$	86

3.3. Problemas	94
4. Espacios Projectivos	96
4.1. El espacio proyectivo	98
4.2. Referencias proyectivas y coordenadas homogéneas	100
4.3. Subespacios proyectivos	106
4.3.1. Subespacios proyectivos	106
4.3.2. Operaciones con subespacios proyectivos	107
4.3.3. Ecuaciones de subespacios proyectivos	110
4.4. Completación proyectiva de espacios afines	112
4.4.1. Completación proyectiva de espacios afines	113
4.4.2. Completación proyectiva de referencias afines	115
4.4.3. Completación proyectiva de subespacios afines	118
4.5. Problemas	122
5. Aplicaciones Projectivas	125
5.1. Aplicaciones proyectivas y representación matricial	125
5.1.1. Definición y propiedades de las aplicaciones proyectivas	125
5.1.2. Representación matricial de aplicaciones proyectivas	131
5.1.3. Puntos fijos y subespacios invariantes	133
5.2. Completación proyectiva de aplicaciones afines	136
5.3. Algunas aplicaciones proyectivas	142
5.3.1. Elaciones y homologías	143
5.3.2. Proyecciones cónicas	147
5.3.3. Homografías involutivas	154
5.4. Razón doble	157
5.5. Problemas	162
6. Cónicas y cuádricas	166
6.1. Descripción métrica de las cónicas	166
6.1.1. Cónicas como lugares geométricos	166
6.1.2. Secciones cónicas	170
6.2. Clasificación de cuádricas afines	172
6.2.1. Cónicas del plano afín	180
6.2.2. Superficies cuádricas afines	182
6.3. Clasificación de cuádricas proyectivas	183
6.3.1. Cónicas del plano proyectivo	187
6.3.2. Superficies cuádricas proyectivas	188
6.4. Completación proyectiva de cónicas y cuádricas afines	190
6.4.1. Completación proyectiva de cónicas del plano afín	192
6.4.2. Completación proyectiva de superficies cuádricas afines	195
6.5. Problemas	195

Capítulo 1

Espacios Afines

En este primer capítulo definiremos los objetos con los que trabaja la geometría afín, los espacios afines. Entenderemos como referirnos a cada elemento de estos espacios, los puntos, respecto a diferentes sistemas de referencia, y estudiaremos sus subespacios y las ecuaciones que los definen.

1.1. El espacio afín

La motivación para definir el espacio afín es poder ver los elementos de un espacio vectorial V como puntos, y entender los vectores de V como vectores que unen estos puntos, sin que estén necesariamente anclados en el origen de coordenadas.

Sea $V := \mathbb{R}^2$ visto como espacio vectorial, cuyos elementos son vectores \vec{v} , que llamaremos *vectores libres*. Por otra parte, sea $A := \mathbb{R}^2$ visto como conjunto cuyos elementos son puntos (x, y) . Para cada par puntos $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2) \in A$, definimos el *vector fijo* que los une como el que vector cuyas componentes son las diferencias de las coordenadas de los puntos, es decir,

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Un vector libre es, por tanto, una clase de equivalencia de vectores fijos con las mismas componentes

$$\vec{v} = [\overrightarrow{PQ}].$$

Dado un punto $P = (x, y) \in A$ y un vector $\vec{v} = (a, b) \in V$, sea $Q \in A$ el único punto de \mathbb{R}^2 donde termina el trasladado del vector \vec{v} con origen en P . Esta operación define la aplicación

$$\begin{aligned} \psi : A \times V &\longrightarrow A \\ (P, \vec{v}) &\longmapsto \psi(P, \vec{v}) := P + \vec{v} = Q \end{aligned}$$

con las siguientes propiedades:

- i) Para cualesquiera $P, Q \in A$ existe $\vec{v} \in V$ tal que $P + \vec{v} = Q$.

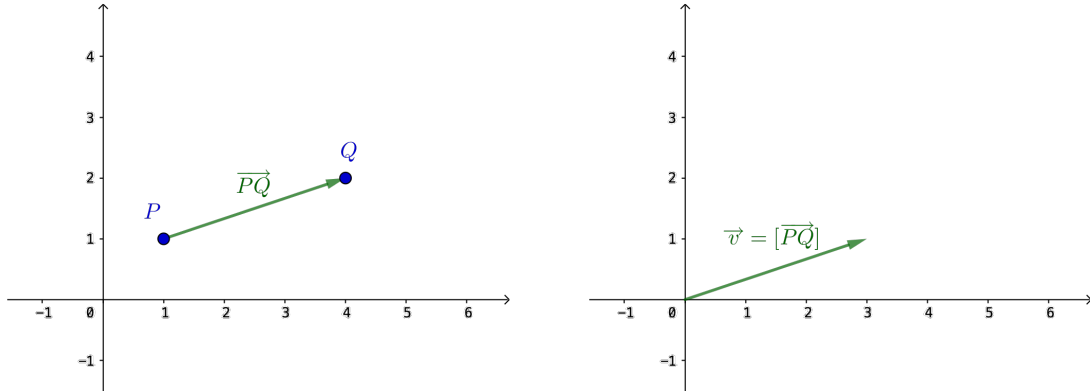


Figura 1.1: Vector fijo y su vector libre asociado.

ii) Para cada $P \in A$ y cada $\vec{u}, \vec{v} \in V$ se tiene que $(P + \vec{u}) + \vec{v} = P + (\vec{u} + \vec{v})$.

Este ejemplo en el plano motiva la definición general de espacio afín, como un espacio A modelado en un espacio vectorial V , donde los vectores de V unen puntos de A .

Definición 1.1.1. Sean A un conjunto y V un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{K} . Un *espacio afín* es una terna (A, V, φ) , donde

$$\begin{aligned} \varphi : A \times A &\longrightarrow V \\ (P, Q) &\longmapsto \varphi(P, Q) := [\overrightarrow{PQ}] = \vec{v} \end{aligned}$$

cumple las siguientes propiedades:

i) Para cada $P \in A$, la función

$$\begin{aligned} \varphi_P : A &\longrightarrow V \\ Q &\longmapsto \varphi_P(Q) := \varphi(P, Q) = [\overrightarrow{PQ}] \end{aligned}$$

es biyectiva.

ii) φ es asociativa en A , es decir, para cualesquiera $P, Q, R \in A$,

$$\varphi(P, Q) + \varphi(Q, R) = \varphi(P, R)$$

o, equivalentemente,

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$

Diremos que el espacio vectorial V es la *dirección* del espacio afín (A, V, φ) .

Observación 1.1.2. En general nos referiremos al espacio afín (A, V, φ) simplemente por A , sobreentendiendo el resto de la estructura dada por V y φ , o haciendo mención a ellas cuando sea necesario.

Observación 1.1.3. Es equivalente definir la aplicación de un espacio afín en la Definición 1.1.1 como

$$\begin{aligned} \psi : A \times V &\longrightarrow A \\ (P, \vec{v}) &\longmapsto \psi(P, \vec{v}) := P + \vec{v} \end{aligned}$$

verificando las dos propiedades anteriormente mencionadas en \mathbb{R}^2 .

Proposición 1.1.4. La aplicación φ de la Definición 1.1.1 de espacio afín verifica las siguientes propiedades:

1. $\overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$.
2. $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{0}$ si y solo si $P = Q$.
3. $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$.
4. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ si y solo si $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$ (Ley del paralelogramo).
5. $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \mathbf{0}$.

Demostración.

1. Por la propiedad ii), $\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP}$, por lo que $\overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$.
2. Por la propiedad i), dados P y $\vec{v} = \mathbf{0}$, existe un único Q tal que $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{0}$. Pero 1. garantiza que P también verifica $\overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$ y, por tanto, $P = Q$.
3. Aplicando la propiedad ii), $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$, por lo que $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$.
4. Si $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, entonces

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} - \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{QS}.$$

5. Inmediata a partir de ii) y 3.

□

Definición 1.1.5. Dado un espacio afín A con dirección V se define la *dimensión* de A como la dimensión de V .

Ejemplo 1.1.6. Podemos interpretar un espacio vectorial V como un espacio afín con su estructura afín estándar, (V, V, φ) . El primer elemento de la terna es V donde cada elemento es visto como un punto, y el segundo es V como espacio vectorial con sus elementos vistos como vectores. La aplicación φ viene dada por

$$\varphi(\vec{v}, \vec{w}) = \overrightarrow{\vec{v}\vec{w}} = \vec{w} - \vec{v}.$$

Nótese que, en general, no está definida la suma (ni la resta) de puntos en un espacio afín. Sin embargo, en una estructura de espacio afín estándar de un espacio vectorial, podemos entender la resta de puntos como la resta de los correspondientes vectores.

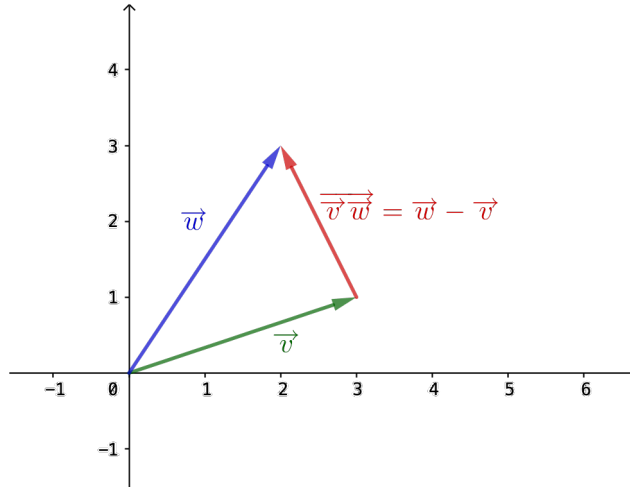


Figura 1.2: Suma de vectores en \mathbb{R}^2 con su estructura afín estándar inducida.

Notación 1.1.7. Dado un espacio vectorial V de dimensión n sobre \mathbb{K} , denotamos al espacio afín con la estructura de espacio afín inducida por V como $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$.

Ejemplo 1.1.8.

1. Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio de polinomios en una variable con coeficientes reales de grado ≤ 2 . Este espacio vectorial, como se conoce de álgebra lineal, es isomorfo a \mathbb{R}^3 . La aplicación

$$\varphi(a_2X^2 + a_1X + a_0, b_2X^2 + b_1X + b_0) = (b_2 - a_2, b_1 - a_1, b_0 - a_0) \in \mathbb{R}^3$$

define una estructura de espacio afín en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

2. Sea $A = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y \mathbb{R} el espacio vectorial real de dimensión 1. La aplicación

$$\varphi(x, y) = \tan(y) - \tan(x)$$

define una estructura de espacio afín en A . En efecto, dado un punto $x \in A$, hay una biyección entre los puntos $y \in A$ y los valores reales $\tan(y) - \tan(x)$, con inversa el arco tangente. Y es claro que

$$\varphi(x, y) + \varphi(y, z) = (\tan(y) - \tan(x)) + (\tan(z) - \tan(y)) = \tan(z) - \tan(x) = \varphi(x, z).$$

3. Sea la recta $L = \{(x, y) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 : x + y - 1 = 0\}$ de puntos de \mathbb{R}^2 . Sean $P = (x, 1 - x)$, $Q = (x', 1 - x')$, puntos de L . La aplicación

$$\varphi(P, Q) = \varphi((x, 1 - x), (x', 1 - x')) = x' - x$$

define una estructura de espacio afín en L , con espacio vectorial asociado \mathbb{R} .

1.2. Referencias y coordenadas

Cuando se estudian los espacios vectoriales abstractos de dimensión finita se utilizan bases y coordenadas respecto de esas bases para establecer isomorfismos entre dicho espacio y el correspondiente \mathbb{K}^n . Con los espacios afines ocurrirá lo mismo: definiremos referencias y coordenadas respecto de las mismas, que nos harán entender cada espacio afín en términos de un modelo estándar $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$.

1.2.1. Referencias y coordenadas cartesianas

Como hemos visto en la definición de espacio afín, cualquier punto Q de A se puede obtener a partir de otro punto $P \in A$ y la suma de un vector $\vec{v} \in V$. Este vector \vec{v} puede expresarse en coordenadas de una base de V , por lo que a partir de un punto y una base de V podemos describir todo el espacio afín A . Esto es lo que consiguen las referencias cartesianas.

Definición 1.2.1. Una *referencia cartesiana* de un espacio afín (A, V, φ) de dimensión n es $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$, donde $O \in A$ es un punto, y $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V .

Notación 1.2.2. En el espacio afín estándar $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, la referencia $\mathcal{R}_{c,e} = \{\bar{0} := (0, \dots, 0); \mathcal{B}_e\}$, donde $\bar{0} := (0, \dots, 0)$ es el origen (visto como punto), y \mathcal{B}_e es la base canónica de \mathbb{K}^n ,

$$\mathcal{B}_e = \{e_1, \dots, e_n\} = \{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$$

se denomina *referencia cartesiana canónica*.

Definición 1.2.3. Dado $P \in A$, sus *coordenadas cartesianas* con respecto a una referencia cartesiana $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ son las coordenadas $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ del vector \overrightarrow{OP} respecto a la base \mathcal{B} .

Ejemplo 1.2.4. Consideremos el espacio afín estándar real 2-dimensional, $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ y la referencia cartesiana

$$\mathcal{R} = \{(2, 1); \{(1, 1), (-1, 1)\}\}.$$

Obsérvese que $\mathcal{B} = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ es una base de \mathbb{R}^2 . El punto $P = (2, -1) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ tiene coordenadas cartesianas $(x_1, x_2) = (-1, -1)$ respecto de la referencia \mathcal{R} , ya que

$$\overrightarrow{OP} = (0, -2) = (-1) \cdot (1, 1) + (-1) \cdot (-1, 1).$$

Ejemplo 1.2.5. Si tomamos la referencia cartesiana canónica $\mathcal{R}_{c,e}$ del espacio afín estándar real 3-dimensional $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, las coordenadas de un punto $P = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ respecto de $\mathcal{R}_{c,e}$ son los mismos escalares (x_1, x_2, x_3) que definen el punto P .

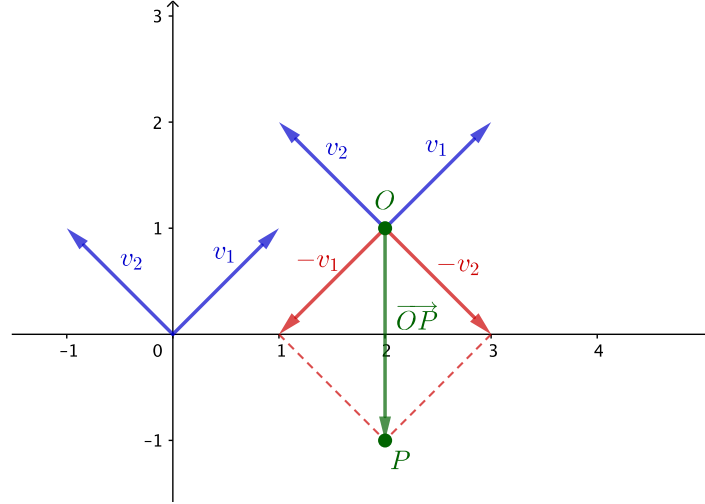


Figura 1.3: Coordenadas cartesianas del Ejemplo 1.2.4.

Proposición 1.2.6. Sean $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ y $\mathcal{R}'_c = \{O'; \mathcal{B}'\}$ dos referencias cartesianas en un espacio afín A . Sea $P \in A$ un punto con coordenadas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ respecto de \mathcal{R}_c y coordenadas $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ respecto de \mathcal{R}'_c . Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ son las coordenadas cartesianas de O respecto de \mathcal{R}'_c , el cambio de coordenadas entre \mathbf{x} e \mathbf{y} viene dado por

$$\mathbf{y}^t = \mathbf{a}^t + C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot \mathbf{x}^t,$$

donde $C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ es la matriz de cambio de la base \mathcal{B} a la base \mathcal{B}' en V .

Demostración. Se verifica que existen vectores $\vec{v}, \vec{v}' \in V$ tales que

$$P = O + \vec{v} = O' + \vec{v}'.$$

Por tanto, se tiene que

$$\vec{v}' = \vec{O'P} = \vec{O'O} + \vec{OP} = \vec{O'O} + \vec{v}.$$

Respecto de la base \mathcal{B}' , las coordenadas de \vec{v}' son \mathbf{y} , las de $\vec{O'O}$ son \mathbf{a} y las de \vec{v} vienen dadas por la traspuesta de $C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot \mathbf{x}^t$, de lo cual se sigue la expresión del cambio de coordenadas. La unicidad se sigue de la unicidad de las coordenadas de un vector respecto de una base. \square

El cambio de coordenadas cartesianas de la anterior proposición se puede expresar de forma más compacta como

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{y}^t \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \mathbf{a}^t & C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix}$$

donde la matriz que relaciona ambos vectores

$$C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \mathbf{a}^t & C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \end{array} \right)$$

es la *matriz de cambio de referencia cartesiana* de \mathcal{R}_c a \mathcal{R}'_c .

Observación 1.2.7. La matriz de cambio de referencia cartesiana verifica las siguientes propiedades:

1. Si $O = O'$, entonces $\mathbf{a} = (0, \dots, 0)$, y la matriz de cambio de referencia cartesiana recoge solo el cambio de base en V :

$$C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \end{array} \right).$$

2. Si $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, entonces $C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = I_n$, la matriz identidad, y la matriz de cambio de referencia cartesiana recoge solo la traslación de O a O' :

$$C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \mathbf{a}^t & I_n \end{array} \right).$$

3. La matriz de cambio de referencia cartesiana $C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c}$ es invertible, ya que su determinante es igual al determinante de $C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, que es distinto de cero.
4. La inversa de la matriz de cambio de referencia cartesiana $C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c}$ es

$$C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c}^{-1} = C_{\mathcal{R}'_c\mathcal{R}_c}$$

la matriz del cambio de referencia cartesiana inverso, al igual que sucede en el caso vectorial.

Ejemplo 1.2.8. Tomemos la referencia cartesiana del Ejemplo 1.2.4

$$\mathcal{R}_c = \{(2, 1); \{(1, 1), (-1, 1)\}\}$$

y el punto $P = (2, -1) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ con coordenadas cartesianas $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (-1, -1)$. Consideremos la referencia cartesiana canónica en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$

$$\mathcal{R}_{c,e} = \{(0, 0); \{(1, 0), (0, 1)\}\}.$$

La matriz de cambio de referencia de la referencia \mathcal{R}_c a la referencia canónica $\mathcal{R}_{c,e}$ viene dada por

$$C_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_{c,e}} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

donde observa que la matriz de cambio de base $C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_e}$ tiene por columnas los vectores de \mathcal{B} expresados en la base canónica. Por tanto, las coordenadas cartesianas \mathbf{y} de P en la referencia cartesiana canónica $\mathcal{R}_{c,e}$ vendrán dadas como

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{y}^t \end{pmatrix} = C_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_{c,e}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

con lo cual las coordenadas de P en la referencia canónica son $(2, -1)$, exactamente como esperábamos.

1.2.2. Referencias afines

Para introducir las coordenadas baricéntricas, tendremos que hablar de referencias afines. Las referencias afines son genuínas del espacio afín, ya que en ellas solo intervienen puntos, y no vectores. Al igual que una base en un espacio vectorial, un conjunto de puntos será una referencia afín si cualquier punto se puede expresar de forma única respecto de esos puntos referentes. El poderse expresar nos llevará a la existencia de una combinación afín y la idea de afinmente generador, mientras que la unicidad se corresponderá con la independencia afín.

Definición 1.2.9. Dados puntos $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$ y escalares $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, con $\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$, definimos *combinación afín* como la suma formal

$$P = \sum_{i=0}^r \lambda_i \cdot P_i := P_0 + \sum_{i=0}^r \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i} \in A.$$

Se dice que P es *combinación afín de los puntos* P_0, P_1, \dots, P_r .

Observación 1.2.10. Véase que la suma de puntos no está definida en A , por eso recurrimos en la definición a la suma de los vectores de V correspondientes. Sin embargo, desde ahora daremos sentido a la suma de puntos de un espacio afín como la suma formal, así como a la resta formal $Q - P := \overrightarrow{PQ}$.

Lemma 1.2.11. Una combinación afín está bien definida, es decir, la definición no depende del punto P_0 que tomemos.

Demostración. En efecto, tomando $P_i \neq P_j$, tenemos

$$P_i + \sum_{k=0}^r \lambda_k \overrightarrow{P_i P_k} = P_i + \sum_{k=0}^r \lambda_k (\overrightarrow{P_i P_j} + \overrightarrow{P_j P_k}) =$$

$$P_i + \left(\sum_{k=0}^r \lambda_k \right) \overrightarrow{P_i P_j} + \left(\sum_{k=0}^r \lambda_k \overrightarrow{P_j P_k} \right) = P_i + \overrightarrow{P_i P_j} + \sum_{k=0}^r \lambda_k \overrightarrow{P_j P_k} = P_j + \sum_{k=0}^r \lambda_k \overrightarrow{P_j P_k}$$

usando que $\sum_{k=0}^r \lambda_k = 1$. □

Definición 1.2.12. Los puntos $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$ son *afínmente dependientes* si existe algún P_i tal que es combinación afín de los restantes puntos. En caso contrario diremos que son *afínmente independientes*.

Proposición 1.2.13. Son equivalentes:

1. $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$ son *afínmente independientes*.
2. Para todo P_i , los vectores $\overrightarrow{P_i P_j}$, con $j \neq i$, son *linealmente independientes*.
3. Existe un punto P_i tal que los vectores $\overrightarrow{P_i P_j}$, con $j \neq i$, son *linealmente independientes*.

Demostración.

- 1. \Rightarrow 2. Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que los puntos P_0, P_1, \dots, P_r son afínmente dependientes y que existe un punto P_i tal que los vectores

$$\overrightarrow{P_i P_0}, \overrightarrow{P_i P_1}, \dots, \overrightarrow{P_i P_{i-1}}, \overrightarrow{P_i P_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{P_i P_r}$$

son linealmente dependientes y, por tanto, que existe $j \neq i$ tal que

$$\overrightarrow{P_i P_j} = \sum_{k \neq i, j} \lambda_k \overrightarrow{P_i P_k}$$

De esto se deduce

$$P_j = P_i + \overrightarrow{P_i P_j} = P_i + \sum_{k \neq i, j} \lambda_k \overrightarrow{P_i P_k} =$$

$$P_i - \sum_{k \neq i, j} \lambda_k P_i + \sum_{k \neq i, j} \lambda_k P_k = (1 - \sum_{k \neq i, j} \lambda_k) P_i + \sum_{k \neq i, j} \lambda_k P_k,$$

que es una combinación afín que expresa P_j en función de los restantes puntos, ya que los escalares suman 1. Por tanto los puntos P_0, P_i, \dots, P_r serían afínmente dependientes, lo cual contradice la hipótesis. Concluimos que los vectores del enunciado son linealmente independientes.

- 2. \Rightarrow 3. Inmediata.

- 3. \Rightarrow 1. Supongamos que los vectores $\overrightarrow{P_i P_j}$, con $j \neq i$, son linealmente independientes y, por reducción al absurdo, que los puntos $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$ son afínmente dependientes. Existe una combinación afín de la forma

$$P_k = \sum_{j \neq k} \lambda_j P_j$$

con $\sum_{j \neq k} \lambda_j = 1$. Entonces, por definición de combinación afín,

$$P_k = P_i + \sum_{j \neq k} \lambda_j \overrightarrow{P_i P_j}$$

y entonces

$$\overrightarrow{P_i P_k} = \sum_{j \neq k} \lambda_j \overrightarrow{P_i P_j}$$

que es una combinación lineal de vectores con escalares no todos nulos (ya que suman 1). Por tanto, $\overrightarrow{P_i P_k}$ depende linealmente del resto de vectores, en contradicción con la hipótesis. Por consiguiente, P_0, P_1, \dots, P_r son afínmente independientes. □

Definición 1.2.14. Los puntos $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$ son *afínmente generadores de A* si para todo $P \in A$, P es combinación afín de P_0, P_1, \dots, P_r .

Proposición 1.2.15. *Son equivalentes:*

1. $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$ son afínmente generadores de A .
2. Para todo P_i , los vectores $\overrightarrow{P_i P_j}$, con $j \neq i$, generan V como espacio vectorial.
3. Existe un punto P_i tal que los vectores $\overrightarrow{P_i P_j}$, con $j \neq i$, generan V como espacio vectorial.

Demostración.

- 1. \Rightarrow 2. Elegimos un punto P_i y un vector $\vec{v} \in A$. Sea $Q := P_i + \vec{v}$. Como los puntos $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$ son afínmente generadores de A , existen escalares $\lambda_0, \dots, \lambda_r$, con $\sum_{j=0}^r \lambda_j = 1$ tales que

$$Q = \sum_{j=0}^r \lambda_j P_j = P_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j \overrightarrow{P_i P_j}$$

por lo que se tiene

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_i Q} = \sum_{j \neq i} \lambda_j \overrightarrow{P_i P_j}$$

y la colección de vectores $\overrightarrow{P_i P_j}$, con $j \neq i$, es generadora de V .

- 2. \Rightarrow 3. Inmediata.
- 3. \Rightarrow 1. Sea P_i tal que los vectores $\overrightarrow{P_i P_j}$, con $j \neq i$, generan V , y sea un punto $Q \in A$. Por hipótesis, el vector $\vec{v} := \overrightarrow{P_i Q}$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{P_i P_j}$ y, por tanto,

$$\vec{v} := \overrightarrow{P_i Q} = \sum_{j \neq i} \lambda_j \overrightarrow{P_i P_j}.$$

Definiendo $\lambda_i := 1 - \sum_{j \neq i} \lambda_j$ tenemos que

$$Q = \sum_{j=0}^r \lambda_j P_j$$

y los puntos $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$ son afínmente generadores de A .

□

Definición 1.2.16. Los puntos $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$ son una *referencia afín* de A si son afínmente generadores de A y afínmente independientes.

Proposición 1.2.17. *Son equivalentes:*

1. $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$ son referencia afín de A .
2. Para todo P_i , los vectores $\overrightarrow{P_i P_j}$, con $j \neq i$, son base de V .
3. Existe un punto P_i tal que los vectores $\overrightarrow{P_i P_j}$, con $j \neq i$, son base de V .

Demostración. Combina las Proposiciones 1.2.13 y 1.2.15.

□

Corolario 1.2.18. Sea A un espacio afín de dimensión n y sean $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$.

1. Si $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$ son afínmente independientes $\Rightarrow r \leq n$.
2. Si $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$ son afínmente generadores de $A \Rightarrow r \geq n$.
3. Si $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$ son referencia afín de $A \Rightarrow r = n$.

Demostración. Inmediata a partir de las Proposiciones 1.2.13, 1.2.15 y 1.2.17, y el hecho de que, para un espacio vectorial de dimensión n , un conjunto generador tiene al menos n vectores, así como un conjunto linealmente independiente tiene como máximo n vectores, siendo n exactamente el número de vectores de una base.

□

Del corolario se deduce que para generar un espacio afín n -dimensional necesitamos al menos $n + 1$ puntos. Asimismo, $n + 1$ será el máximo número de puntos afínmente independientes. Cuando tengamos ambas propiedades hablaremos de referencias afines. Por ejemplo, las referencias afines de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ constan de 3 puntos y, las de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ de 4 puntos.

De este modo tenemos una correspondencia entre referencias cartesianas y afines, donde dada una referencia cartesiana

$$\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}\}$$

le asociamos la referencia afín

$$\mathcal{R}_a = \{P_0 = O, P_1 = O + v_1, \dots, P_n = O + \vec{v}_n\}.$$

Notación 1.2.19. Dado el espacio afín estándar $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, la referencia afín

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{a,e} = \{(\bar{0} := (0, \dots, 0), \bar{0} + e_1, \dots, \bar{0} + e_n) = \\ (0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}, \end{aligned}$$

donde e_i son los vectores de la base canónica de \mathbb{K}^n , se denomina *referencia afín estándar*.

1.2.3. Coordenadas baricéntricas

Dada una referencia afín $\mathcal{R}_a = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$, por la Proposición 1.2.17,

$$\mathcal{R}_c = \left\{ P_0; \{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\} \right\}$$

es una referencia cartesiana. Entonces, dado $P \in A$, existen únicos escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$P = P_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}.$$

Definiendo $\lambda_0 := 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i$, los escalares $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ son los únicos que expresan P como combinación afín de los puntos de la referencia afín \mathcal{R}_a

$$P = \sum_{i=0}^n \lambda_i P_i.$$

Definición 1.2.20. Dada una referencia afín $\mathcal{R}_a = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$, los únicos escalares $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $P = \sum_{i=0}^n \lambda_i \cdot P_i$ se llaman *coordenadas baricéntricas* de P respecto de la referencia \mathcal{R}_a .

Observación 1.2.21. El baricentro de los puntos $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ con pesos $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ representa el centro de gravedad de un sistema de masas de valor λ_i situadas en los puntos P_i . Se define analíticamente como el punto $B \in A$ tal que

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{BP_i} = 0.$$

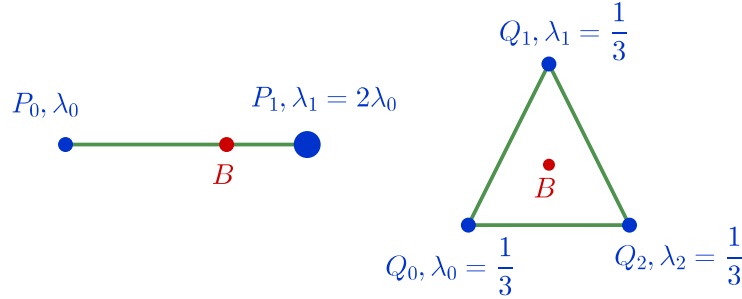


Figura 1.4: Ejemplos de baricentros de puntos con pesos.

Supongamos que $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$; si no, siempre podemos reescalar todos los pesos para que esto ocurra. Usando las propiedades de puntos y vectores:

$$0 = \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{BP_i} = \sum_{i=0}^n \lambda_i (\overrightarrow{P_0P_i} - \overrightarrow{P_0B}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i} - \overrightarrow{P_0B}$$

por tanto

$$\overrightarrow{P_0B} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}$$

que es equivalente a

$$B = P_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}.$$

Es decir, las coordenadas baricéntricas del baricentro B (y de ahí toman su nombre) son los valores de las masas que situamos en los puntos P_i , y de las que B es su centro de gravedad (véase Figura 1.4).

Lemma 1.2.22. *Dada una referencia afín $\mathcal{R}_a = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$, el baricentro B de los puntos de la referencia (con masas iguales en cada punto) es el único punto $B \in A$ con coordenadas baricéntricas $\lambda_i = \frac{1}{n+1}$ para todo i .*

Demostración. Es inmediato a partir de la observación anterior, simplemente reescalando los pesos para que verifiquen $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$. \square

Ejemplo 1.2.23. Las coordenadas baricéntricas expresan cómo de cerca está un punto de cada uno de los puntos de una referencia afín. Dicho de otro modo, cada λ_i se puede

entender como la fracción de la contribución de P_i al definir P en una combinación afín. De ello se desprenden las siguientes propiedades (véase Figura 1.5):

- Si $\lambda_i \geq 0$ para todo i , entonces P pertenece al interior de la envolvente convexa de los puntos P_i . En este caso se dice que P es combinación convexa de los puntos P_i .
- Si algún λ_i es negativo, entonces el punto P se sitúa más allá de la envolvente convexa de los puntos $P_j, j \neq i$, en la región opuesta al punto o puntos cuyos escalares λ_j son negativos.
- Si algún $\lambda_i = 0$, P se puede escribir como combinación afín de solo los restantes puntos $P_j, j \neq i$. Si todos los $\lambda_j \geq 0, j \neq i$, P pertenece a una de las caras de la envolvente convexa, la opuesta al punto P_i .

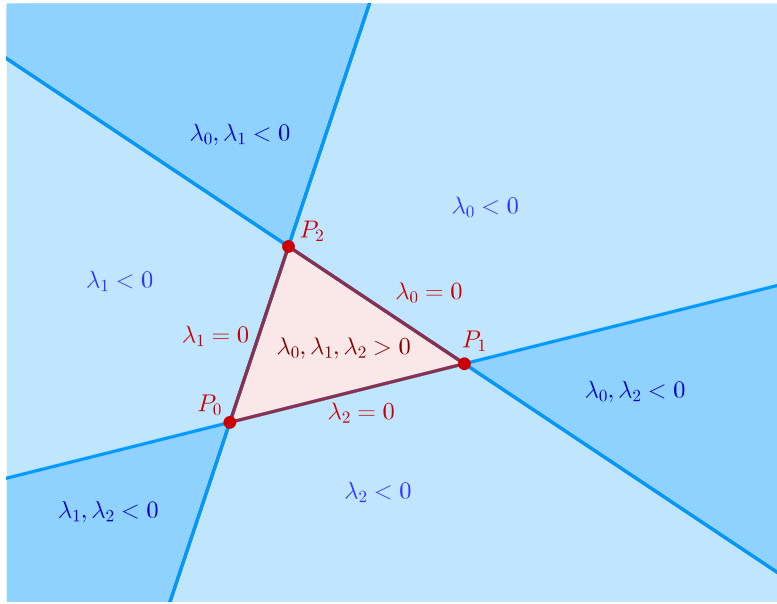


Figura 1.5: Coordenadas baricéntricas respecto a una referencia afín en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.

Dadas una referencia cartesiana \mathcal{R}_c y su referencia afín asociada \mathcal{R}_a , sean $\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sus coordenadas cartesianas respecto de \mathcal{R}_c y $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$, con $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i$, sus coordenadas baricéntricas respecto de \mathcal{R}_a . La relación entre

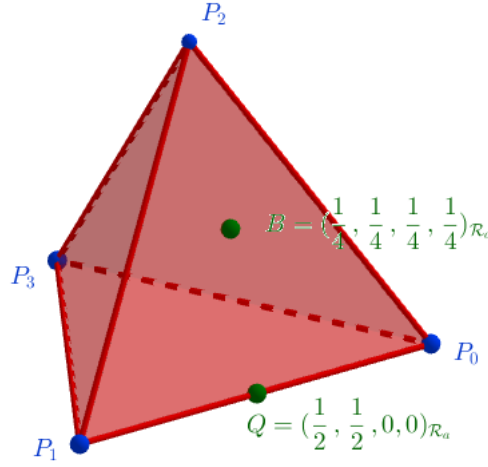


Figura 1.6: Referencia afín en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, coordenadas baricéntricas del baricentro B y de un punto Q situado en una arista del tetraedro.

ambos vectores viene dada por

$$\lambda^t = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & I_n & \\ 0 & & & \end{array} \right) \cdot \left(\frac{1}{\lambda^t} \right).$$

Denotamos a la matriz que relaciona ambos vectores por

$$M_n := \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & I_n & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

Sean dos referencias afines $\mathcal{R}_a = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ y $\mathcal{R}'_a = \{Q_0, Q_1, \dots, Q_n\}$, y un punto $P \in A$ con coordenadas $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ respecto de \mathcal{R}_a , y coordenadas $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)$ respecto de \mathcal{R}'_a . Cada uno de los puntos P_j de la referencia \mathcal{R}_a los podemos escribir de forma única como combinación afín de la referencia \mathcal{R}'_a :

$$P_j = \sum_{i=0}^n \alpha_{ij} Q_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^n \alpha_{ij} = 1.$$

La matriz

$$C_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a} := \left(\alpha_{ij} \right)_{\substack{i=0,\dots,n \\ j=0,\dots,n}}$$

es precisamente la matriz de cambio de referencia afín de \mathcal{R}_a a \mathcal{R}'_a con

$$\boldsymbol{\mu}^t = C_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a} \cdot \boldsymbol{\lambda}^t.$$

En efecto, dado $P \in A$, se tiene que

$$P = \sum_{j=0}^n \lambda_j P_j = \sum_{j=0}^n \mu_j Q_j \quad \text{con} \quad \sum_{j=0}^n \lambda_j = \sum_{i=0}^n \mu_i = 1.$$

Combinando con la expresión de cada P_j como combinación afín de los puntos de la referencia \mathcal{R}'_a , tenemos

$$\sum_{j=0}^n \mu_j Q_j = \sum_{j=0}^n \lambda_j P_j = \sum_{j=0}^n \lambda_j \left(\sum_{i=0}^n \alpha_{ij} Q_i \right) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \alpha_{ij} \lambda_j \right) Q_i.$$

con lo que $\mu_i = \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} \lambda_j$ y se tiene el resultado. La unicidad de la matriz se sigue de la unicidad de las coordenadas baricéntricas.

Observación 1.2.24. La matriz de cambio de referencia afín verifica las siguientes propiedades:

1. Las columnas de la matriz $C_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a}$ son las coordenadas baricéntricas de P_j en la referencia afín \mathcal{R}'_a , y suman 1.
2. La matriz $C_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a}$ es invertible, con inversa $C_{\mathcal{R}'_a \mathcal{R}_a}$. En efecto:

$$\boldsymbol{\mu}^t = C_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a} \boldsymbol{\lambda}^t = C_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a} \cdot C_{\mathcal{R}'_a \mathcal{R}_a} \boldsymbol{\mu}^t$$

por lo que

$$C_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a} \cdot C_{\mathcal{R}'_a \mathcal{R}_a} = I_n.$$

Para finalizar la sección, ponemos en común todos los cambios de coordenadas. Sean referencias afines \mathcal{R}_a y \mathcal{R}'_a , con referencias cartesianas asociadas \mathcal{R}_c y \mathcal{R}'_c , y sea $P \in A$ con coordenadas baricéntricas $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$ respecto de \mathcal{R}_a y \mathcal{R}'_a , y coordenadas cartesianas \boldsymbol{x} y \boldsymbol{y} respecto de \mathcal{R}_c y \mathcal{R}'_c . Tenemos el siguiente diagrama que relaciona los cuatro tipos:

	\mathcal{R}_c	\longleftrightarrow	\mathcal{R}'_c	
	\boldsymbol{x}	$(1 \mid \boldsymbol{y})^t = C_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c} \cdot (1 \mid \boldsymbol{x})^t$	\boldsymbol{y}	
$\boldsymbol{\lambda}^t = M_n \cdot (1 \mid \boldsymbol{x})^t$	\updownarrow		\updownarrow	$\boldsymbol{\mu}^t = M_n \cdot (1 \mid \boldsymbol{y})^t$
	\mathcal{R}_a	\longleftrightarrow	\mathcal{R}'_a	
	$\boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{\mu}^t = C_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a} \cdot \boldsymbol{\lambda}^t$	$\boldsymbol{\mu}$	

De la combinación de expresiones obtenemos

$$M_n \cdot C_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c} \cdot (1 \mid \mathbf{x})^t = M_n \cdot (1 \mid \mathbf{y})^t = \mu^t = C_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a} \cdot \boldsymbol{\lambda}^t = C_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a} \cdot M_n \cdot (1 \mid \mathbf{x})^t,$$

de lo cual extraemos las relaciones entre las matrices de cambio de referencia baricéntricas y cartesianas:

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a} &= M_n \cdot C_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c} \cdot M_n^{-1} \\ C_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c} &= M_n^{-1} \cdot C_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a} \cdot M_n. \end{aligned}$$

Nótese que la inversa de la matriz M_n , viene dada por

$$M_n^{-1} := \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & & & \\ \vdots & & I_n & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.2.25. Sean en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$

$$\mathcal{R}_{c,e} = \{\bar{0}; \{e_1, e_2, e_3\}\}$$

la referencia cartesiana canónica y su referencia afín asociada

$$\mathcal{R}_{a,e} = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Sea el punto P con coordenadas cartesianas $\mathbf{x} = (2, -1, 1)$ respecto de $\mathcal{R}_{c,e}$. Respecto de la referencia afín asociada $\mathcal{R}_{a,e}$ sus coordenadas baricéntricas son $\boldsymbol{\lambda} = (-1, 2, -1, 1)$.

Ahora sea otra referencia cartesiana

$$\mathcal{R}'_c = \{(1, 0, 1); \{(1, 2, -1), (-1, -1, 0), (0, 1, 1)\}\}.$$

Las coordenadas cartesianas del punto P respecto de \mathcal{R}'_c serán las coordenadas del vector $\overrightarrow{O'P}$ respecto de la base \mathcal{B}' , donde $O' = (1, 0, 1)$ y $\mathcal{B}' = \{(1, 2, -1), (-1, -1, 0), (0, 1, 1)\}$. Por tanto $\overrightarrow{O'P} = (1, -1, 0)$ y, para calcular sus coordenadas, resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 1 &= y_1 & -y_2 \\ -1 &= 2y_1 & -y_2 & +y_3 \\ 0 &= -y_1 & & +y_3 \end{cases}$$

cuya solución es $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) = (-1, -2, -1)$. Observamos que la matriz de cambio de referencia de $\mathcal{R}_{c,e}$ a \mathcal{R}'_c viene dada por

$$C_{\mathcal{R}'_c \mathcal{R}_{c,e}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

y que se verifica efectivamente

$$C_{\mathcal{R}'_c \mathcal{R}_{c,e}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, la referencia afín asociada a \mathcal{R}'_c es

$$\mathcal{R}'_a = \{(1, 0, 1), (2, 2, 0), (0, -1, 1), (1, 1, 2)\}$$

y las coordenadas baricéntricas de P respecto de \mathcal{R}'_a se obtienen a partir de las cartesianas respecto de \mathcal{R}'_c ajustando el primer escalar para que la suma sea 1,

$$\boldsymbol{\mu} = (5, -1, -2, -1).$$

Entonces, podemos obtener la matriz de cambio de referencia afín a partir de la de cambio de referencia cartesiana, tal que

$$C_{\mathcal{R}'_a \mathcal{R}_{a,e}} = M_n \cdot C_{\mathcal{R}'_c \mathcal{R}_{c,e}} \cdot M_n^{-1} =$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} -1 & -2 & 2 & -2 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Observamos que las columnas de la matriz $C_{\mathcal{R}'_a \mathcal{R}_{a,e}}$ son las coordenadas baricéntricas de los puntos de la referencia \mathcal{R}'_a , en la referencia $\mathcal{R}_{a,e}$. Y también vemos que se verifica

$$C_{\mathcal{R}'_a \mathcal{R}_{a,e}} \cdot \boldsymbol{\mu}^t = \boldsymbol{\lambda}^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.3. Subespacios afines

1.3.1. Subespacios afines

Como en cualquier área de matemáticas, un subobjeto del objeto que estamos estudiando, en este caso los espacios afines, será un subconjunto que reproduce la misma estructura y propiedades del conjunto inicial.

Definición 1.3.1. Sea (A, V, φ) un espacio afín. Un subconjunto $B \subset A$ es un *subespacio afín* si existe un subespacio vectorial $W \subset V$ tal que $(B, W, \varphi|_B)$ es un espacio afín que satisface que la restricción de φ a B ,

$$\varphi|_B : B \times B \longrightarrow V$$

verifica

- i) Para todo punto $P \in B$ y para todo vector $\vec{w} \in W$ existe un único punto $Q \in B$ con $\overrightarrow{PQ} = \vec{w}$.
- ii) Dados puntos cualesquiera $P, Q, R \in B$,

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$

El subespacio vectorial W se denomina *dirección* de B .

Observación 1.3.2. Obsérvese que la propiedad ii) se cumple inmediatamente por ser B un subconjunto de A . Para probar que B es un subespacio afín lo único que hay que demostrar es que dados $P \in B$ y $\vec{w} \in W$, el único Q que existe con $\overrightarrow{PQ} = \vec{w}$ está en B .

Proposición 1.3.3. Son equivalentes a la definición de subespacio afín las siguientes propiedades:

1. Dado $P \in B$, existe $W \subset V$ subespacio vectorial tal que $B = P + W$. Es decir, todos los puntos de B se pueden expresar como $P + \vec{w}$, con $\vec{w} \in W$. El subespacio vectorial W es único y no depende del punto P elegido.
2. Existe $P \in B$ tal que la imagen de la aplicación

$$\varphi_P|_B : B \rightarrow V, \varphi_P|_B(Q) := \overrightarrow{PQ}$$

es un subespacio vectorial de V .

Demostración.

1. Como la propiedad ii) de la Definición 1.3.1 se cumple automáticamente para un subconjunto $B \subset A$ como propiedad heredada de A (ver Observación 1.3.2), probaremos la equivalencia entre la propiedad i) y la Proposición 1.3.3, 1.

Sea $P \in B$ y supongamos que existe un subespacio vectorial $W \subset V$ tal que $B = P + W$. Entonces, dado un vector $\vec{w} \in W$, el punto $Q := P + \vec{w}$ pertenece a B y la propiedad se cumple por Definición 1.3.1, i).

Recíprocamente, supongamos que $B \subset A$ es un subespacio afín con dirección $W \subset V$, verificando la propiedad Definición 1.3.1, i), y probemos que, dado $P \in B$, se tiene $B = P + W$. En efecto, la Definición 1.1.1, i) garantiza que para cualquier $Q \in B \subset A$ existe un único vector $\vec{w} \in V$ con $\overrightarrow{PQ} = \vec{w}$. Por otro lado, por la Definición 1.3.1, la restricción a B , $\varphi|_B : B \times B \longrightarrow W$ tiene imagen en W . Por tanto, $\vec{w} \in W$ y se tiene que $Q = P + \vec{w} \in P + W$. Para el otro contenido, dados $P \in B$ y $\vec{w} \in W$, por la Definición 1.3.1, i), existe un único $Q \in B$ con $\overrightarrow{PQ} = \vec{w}$, por tanto $Q = P + \vec{w} \in B$.

2. La aplicación $\varphi_P|_B$ es la restricción a B de la aplicación que define un espacio afín (Definición 1.1.1 y Definición 1.3.1). Si se cumple la Definición 1.3.1, entonces es claro que la imagen de $\varphi_P|_B$ es la dirección $W \subset V$, que es un subespacio vectorial. Recíprocamente, si $\varphi_P(B) = W \subset V$, dado un vector $\vec{w} \in W \subset V$, existe (por la Definición 1.1.1 i)) un único punto $Q \in A$ tal que $\overrightarrow{PQ} = \vec{w}$. Pero, como $Q \in \varphi_P^{-1}(W) \subset B$, entonces $Q \in B$ y se tiene la propiedad i) de la Definición 1.3.1, con lo cual B es subespacio afín.

□

Definición 1.3.4. La *dimensión* de un subespacio afín B es la dimensión de su dirección W como subespacio vectorial de V .

Proposición 1.3.5. 1. Si tenemos subespacios afines $\emptyset \subsetneq B_1 \subseteq B_2 \subseteq A$, entonces $\dim B_1 \leq \dim B_2 \leq \dim A$. En particular la dimensión de un subespacio afín de un espacio afín de dimensión finita es también finita.

2. Si $\emptyset \subsetneq B_1 \subseteq B_2 \subseteq A$, entonces $B_1 = B_2$ si y solo si $\dim B_1 = \dim B_2$.

Demostración.

1. La Proposición 1.3.3 1. garantiza la existencia de un punto $P \in B_1 \subset B_2$ y subespacios vectoriales $W_1, W_2 \subset V$, tales que $B_1 = P + W_1$ y $B_2 = P + W_2$. Como cualquier $Q \in B_1$ es de la forma $Q = P + \overrightarrow{PQ}$ con $\overrightarrow{PQ} \in W_1$ y $Q \in B_1 \subset B_2 = P + W_2$ entonces $\overrightarrow{PQ} \in W_2$ y se tiene $W_1 \subset W_2$, por lo que $\dim W_1 \leq \dim W_2$. Como la dimensión de un subespacio afín coincide con la de su dirección, se tiene el resultado.

2. La implicación a la derecha es obvia. En sentido contrario, si $\dim B_1 = \dim B_2$ entonces sus direcciones tienen la misma dimensión, $\dim W_1 = \dim W_2$. Como $B_1 \subset B_2$ entonces $W_1 \subset W_2$ y se tiene necesariamente que $W_1 = W_2$, por tanto, $B_1 = P + W_1 = P + W_2 = B_2$.

□

Definición 1.3.6. 1. Llamamos *puntos* y *rectas* a los subespacios afines de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ de dimensiones 0 y 1, respectivamente.

2. Llamamos *puntos*, *rectas* y *planos* a los subespacios afines de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ de dimensiones 0, 1 y 2, respectivamente.
3. Llamamos *hiperplanos* a los subespacios afines de dimensión $n - 1$, de un espacio afín de dimensión n .

Uno de los ejemplos más importantes de subespacio afín es el dado por el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales (no necesariamente homogéneo), siempre que sea no vacío.

Proposición 1.3.7. Sea $M \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ una matriz $m \times n$ de rango r , y sea un vector $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$. El conjunto (si es no vacío)

$$B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n : M\mathbf{x}^t = \mathbf{b}^t\},$$

identificando puntos con sus coordenadas cartesianas respecto de la referencia cartesiana canónica de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, es un subespacio afín de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ de dimensión $n - r$, cuya dirección es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado

$$W = \{\vec{w} \in \mathbb{K}^n : M\vec{w}^t = \mathbf{0}\},$$

identificando vectores con sus coordenadas respecto de la base canónica de \mathbb{K}^n .

Demostración. Por el Teorema de Rouché-Frobenius se tiene que W es un subespacio vectorial de \mathbb{K}^n cuya dimensión $n - r$.

Sea $P \in B$ y sean $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ sus coordenadas respecto de la referencia cartesiana canónica en $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, que son las coordenadas del vector \vec{OP} respecto de la base canónica de \mathbb{K}^n . Para cada $Q \in B$ con coordenadas $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ se tiene que

$$M(\vec{PQ})^t = M\mathbf{y}^t - M\mathbf{x}^t = \mathbf{b}^t - \mathbf{b}^t = \mathbf{0},$$

por lo que $\vec{PQ} \in W$ y $Q = P + \vec{PQ}$. Por otra parte, para cada vector $\vec{w} \in W$, con coordenadas $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ respecto de la base canónica de \mathbb{K}^n ,

$$M(P + \vec{w})^t = M\mathbf{x}^t + M\mathbf{z}^t = \mathbf{b}^t + \mathbf{0} = \mathbf{b}^t,$$

por lo que $B = P + W$ y se concluye que B es subespacio afín de la dirección y dimensión indicadas. □

Ejemplo 1.3.8.

1. En $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, los puntos de la forma

$$\{(x, y) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 : (x, y) = (1, 2) + \lambda(-1, 1)\}$$

son un subespacio afín $B = P + W$, con $P = (1, 2)$ y $W = \mathcal{L}\{(-1, 1)\}$. Como la dirección W tiene dimensión 1 se sigue que B es una recta.

2. Sea el conjunto de soluciones $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 : M\mathbf{x}^t = \mathbf{b}^t\}$, donde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Puesto que M tiene rango 2, L es un subespacio afín de dimensión $3 - 2 = 1$, es decir, una recta en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$. Para poder expresar L como suma de un punto y una recta vectorial, extraemos una solución particular del sistema, por ejemplo $P = (-1, 0, 2) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, y observamos que $W = \mathcal{L}\{(2, -1, -1)\}$ es la recta de soluciones del sistema homogéneo asociado, por tanto

$$L = P + W = (-1, 0, 2) + \mathcal{L}\{(2, -1, -1)\}.$$

3. El conjunto de las matrices reales 2×2 , $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ con la suma de matrices y el producto por escalares es un espacio vectorial real de dimensión 4, que puede verse como su espacio afín asociado. Sea

$$B = \{M \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : \text{tr}(M) = 3\}.$$

el subconjunto de matrices de traza (suma de los elementos de la diagonal) igual a 3. B es un subespacio afín de dimensión 3, con dirección las matrices de traza nula (véase Problema 1.4.3).

4. El subconjunto de polinomios que toman un determinado valor en un punto es un subespacio afín (véase Problema 1.4.4). Por ejemplo

$$C = \{p(X) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p(1) = 5\}$$

es un subespacio afín con dirección

$$W = \{p(X) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}.$$

En efecto, la resta de dos polinomios $p(X)$, $q(X)$, tales que $p(1) = q(1) = 5$ es un polinomio $(p - q)(X)$ tal que

$$(p - q)(1) = p(1) - q(1) = 5 - 5 = 0$$

por lo que $(p - q)(X) \in W$ y C es subespacio afín de la dirección indicada.

1.3.2. Operaciones con subespacios afines

Comenzamos definiendo la intersección de subespacios afines.

Proposición 1.3.9. *Sea $\{B_i\}_{i \in I}$ una familia de subespacios afines de A , cada uno con dirección $W_i \subset V$. Si $\bigcap_{i \in I} B_i \neq \emptyset$, entonces $\bigcap_{i \in I} B_i$ es subespacio afín de A con dirección $\bigcap_{i \in I} W_i$.*

Demostración. Sea $P \in \bigcap_{i \in I} B_i$. Probaremos que $\bigcap_{i \in I} B_i = P + \bigcap_{i \in I} W_i$.

Para todo $Q \in \bigcap_{i \in I} B_i$ se tiene que $Q \in B_i$, para cada $i \in I$, por lo que $\overrightarrow{PQ} \in W_i$, para todo $i \in I$ y, por tanto $Q = P + \overrightarrow{PQ} \in P + \bigcap_{i \in I} W_i$.

Recíprocamente, cualquier $Q \in P + \bigcap_{i \in I} W_i$ es de la forma $Q = P + \overrightarrow{PQ}$, con $\overrightarrow{PQ} \in W_i$ para todo $i \in I$. Por tanto, $Q \in B_i = P + W_i$, para todo $i \in I$.

Como consecuencia, $\bigcap_{i \in I} B_i = P + \bigcap_{i \in I} W_i$ es un subespacio afín de la dirección indicada. \square

La unión de subespacios afines no es un subespacio afín, del mismo modo que la unión de subespacios vectoriales no es un subespacio vectorial. Por ejemplo, la unión de las líneas

$$L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 : x + y = 1\} \quad \text{y} \quad L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 : x - y = 1\}$$

no es un subespacio afín. En efecto, sean $P = (1, 0) \in L_1 \cap L_2$, $Q = (0, 1) \in L_1$ y $R = (0, -1) \in L_2$ y supongamos que existe un $W \subset \mathbb{R}^2$ tal que $L_1 \cup L_2 = P + W$. Por tanto, $\overrightarrow{PQ} = (-1, 1)$ y $\overrightarrow{PR} = (-1, -1)$ han de pertenecer a W , con lo cual $\mathcal{L}\{(-1, 1), (-1, -1)\} \subset W$, y entonces $W = \mathbb{R}^2$. Pero en tal caso, el vector $\vec{w} = (1, 0) \in W = \mathbb{R}^2$, mientras que el punto $P + \vec{w} = (2, 0) \notin L_1 \cup L_2$, lo cual es una contradicción. Véase Figura 1.3.2.

Definición 1.3.10. Sea $S \in A$ un conjunto no vacío. Definimos el *subespacio afín generado por S* , denotado por $V(S)$, como el menor subespacio afín de A que contiene a S .

El subespacio afín generado por un subconjunto S existe y es único, ya que se puede definir como la intersección

$$V(S) := \bigcap_{\substack{B_i \text{ subespacio afín} \\ S \subset B_i}} B_i$$

que es un subespacio afín y, por definición, cualquier otro subespacio afín que contiene a S debe contener necesariamente a esta intersección.

Un caso importante de subespacios generados aparece cuando S es un conjunto de puntos de A .

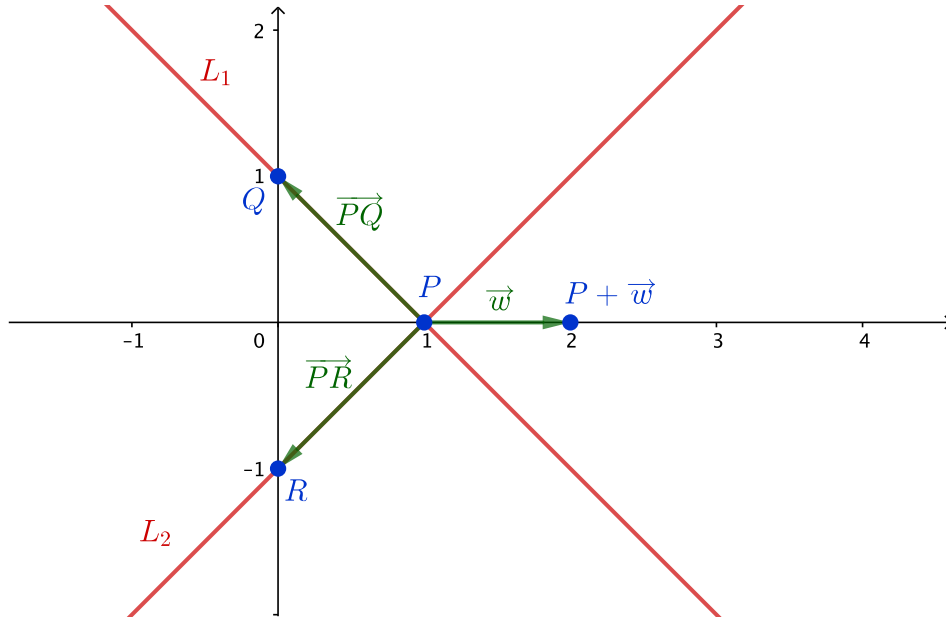


Figura 1.7: La unión de subespacios afines no es un subespacio afín.

Proposición 1.3.11. *Dados puntos $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$ el subespacio afín que generan viene dado por todas sus combinaciones afines,*

$$V(\{P_0, P_1, \dots, P_r\}) = \left\{ \sum_{i=0}^r \lambda_i P_i : \lambda_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=0}^r \lambda_i = 1 \right\},$$

y tiene dirección $\mathcal{L}\{\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_r}\}$.

Demostración. Demostraremos que $V(\{P_0, P_1, \dots, P_r\}) = P_0 + \mathcal{L}\{\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_r}\}$.

Sea W la dirección de $V(\{P_0, P_1, \dots, P_r\})$. Como $P_i \in V(\{P_0, P_1, \dots, P_r\})$, $i = 1, \dots, r$, necesariamente los vectores $\overrightarrow{P_0 P_i} \in W$ y $\mathcal{L}\{\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_r}\} \subset W$, por lo tanto

$$P_0 + \mathcal{L}\{\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_r}\} \subset V(\{P_0, P_1, \dots, P_r\}).$$

Por otra parte, todos los puntos P_i están en $P_0 + \mathcal{L}\{\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_r}\}$, que es un subespacio afín, por lo que el menor subespacio afín que los contiene debe estar contenido a su vez en él, de donde se sigue que

$$V(\{P_0, P_1, \dots, P_r\}) \subset P_0 + \mathcal{L}\{\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_r}\},$$

lo que completa la prueba. \square

La prueba del siguiente corolario es inmediata a partir de la Proposición 1.3.11 y las Proposiciones 1.2.13 y 1.2.15.

Corolario 1.3.12. *Los puntos $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$ son*

- *afínmente independientes si y solo si $\dim V(\{P_0, P_1, \dots, P_r\}) = r$.*
- *afínmente generadores de A si y solo si $\dim V(\{P_0, P_1, \dots, P_r\}) = \dim A$.*

Gracias a la noción de subespacio generado por un conjunto de puntos, podemos dar una nueva caracterización de los subespacios afines.

Proposición 1.3.13. *$B \subset A$ es un subespacio afín si y solo si es cerrado respecto a las combinaciones afines.*

Demostración. Una dirección es clara ya que si B es un subespacio afín y dados puntos $P_0, P_1, \dots, P_r \in B$, se tiene que $V(\{P_0, P_1, \dots, P_r\}) \subset B$, por lo que contiene las combinaciones afines.

Recíprocamente, supongamos que B contiene cualquier combinación afín. Definamos $W := \{\overrightarrow{PQ} : P, Q \in B\}$. Se tiene que W es un subespacio vectorial, ya que dados $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS} \in W$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, el punto

$$P + \lambda \overrightarrow{PQ} + \mu \overrightarrow{RS} = (1 - \lambda)P + \lambda Q - \mu R + \mu S \in B$$

porque es una combinación afín donde la suma de los coeficientes es uno. Por tanto la combinación lineal $\lambda \overrightarrow{PQ} + \mu \overrightarrow{RS} \in W$. Por otro lado, dado $P \in B$, podemos escribir $B = P + W$ ya que, para cualquier otro punto $Q \in B$, $\overrightarrow{PQ} \in W$ por definición de W . \square

Ejemplo 1.3.14. La idea de independencia afín se puede visualizar por medio de puntos que generan, mediante combinaciones afines, todo el subespacio afín donde están, siendo todos ellos necesarios. Por ejemplo:

- Un punto en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, solo genera el propio punto, que es un subespacio afín de dimensión 0.
- Dos puntos diferentes $P, Q \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ generan la recta de dimensión 1 que los une, con dirección $\mathcal{L}\{\overrightarrow{PQ}\}$, ya que cualquier punto de esta recta se puede expresar de forma única como

$$P + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} = P + \lambda(Q - P) = (1 - \lambda)P + \lambda Q$$

que es una combinación afín. Si $P = Q$, obviamente son puntos afínmente dependientes que general el propio punto únicamente.

- Tres puntos no alineados generan todo $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ y son afínmente independientes. En efecto, si los puntos $P, Q, R \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ no están alineados, entonces $\mathcal{L}\{\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\} = \mathbb{R}^2$ y cualquier punto $S \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ se puede expresar de forma única como

$$S = P + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} + \mu \cdot \overrightarrow{PR} = P + \lambda(Q - P) + \mu(R - P) = (1 - \lambda - \mu)P + \lambda Q + \mu R,$$

que es una combinación afín. Si los puntos estuviesen alineados, podemos prescindir de uno de ellos para generar únicamente una recta.

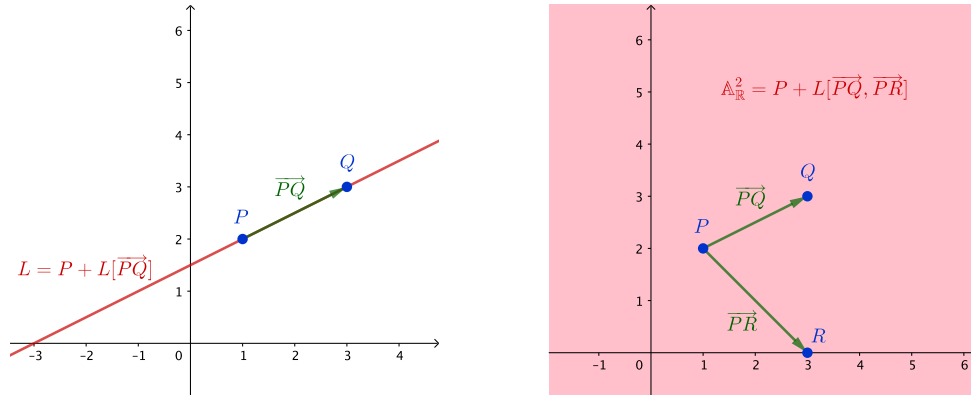


Figura 1.8: Recta generada por dos puntos y plano generado por tres puntos.

Dado que la unión de subespacios no es un subespacio, definimos la suma como el subespacio generado por la unión, que es el mínimo subespacio afín que contiene a todos los subespacios de la suma.

Definición 1.3.15. Dados subespacios afines $B_i \subset A$, $i \in I$, la *suma de subespacios afines* se define como

$$\sum_{i \in I} B_i := V \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right).$$

Proposición 1.3.16. Dados subespacios afines $B_i \subset A$, de la forma $B_i = P_i + W_i$, con $P_i \in B_i$, $W_i \subset V$, $i \in I$, su suma $\sum_{i \in I} B_i = V \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right)$ es un subespacio afín que tiene por dirección

$$\mathcal{L}\{\overrightarrow{P_i P_j} : i, j \in I\} + \sum_{i \in I} W_i.$$

En particular, la suma de dos subespacios afines $B_1 = P_1 + W_1$, $B_2 = P_2 + W_2$, está dada por

$$B_1 + B_2 = P_1 + (\mathcal{L}\{\overrightarrow{P_1 P_2}\} + W_1 + W_2).$$

Demostración. Daremos solo una prueba para la suma de dos subespacios B_1 y B_2 . La prueba para la suma de un número finito se sigue por inducción. La prueba para una suma arbitraria es técnicamente más complicada y puede encontrarse en [Fernando, Gamboa; Sección 1.a.3].

Sean $B_1 = P_1 + W_1$ y $B_2 = P_2 + W_2$, y sea W la dirección del subespacio afín $B_1 + B_2 = V(B_1 \cup B_2)$. Como

$$B_1 = P_1 + W_1 \subset P_1 + (\mathcal{L}\{\overrightarrow{P_1 P_2}\} + W_1 + W_2)$$

y

$$B_2 = P_2 + W_2 = P_1 + \overrightarrow{P_1 P_2} + W_2 \subset P_1 + (\mathcal{L}\{\overrightarrow{P_1 P_2}\} + W_1 + W_2),$$

se tiene que

$$B_1 + B_2 \subset P_1 + (\mathcal{L}\{\overrightarrow{P_1 P_2}\} + W_1 + W_2)$$

y, entonces

$$W \subset (\mathcal{L}\{\overrightarrow{P_1 P_2}\} + W_1 + W_2).$$

Recíprocamente, como $B_1 \subset B_1 + B_2$, el contenido se reproduce en sus direcciones, $W_1 \subset W$, $W_2 \subset W$. Además $\overrightarrow{P_1 P_2} \in W$, ya que ambos puntos están en $B_1 + B_2$. Por tanto

$$(\mathcal{L}\{\overrightarrow{P_1 P_2}\} + W_1 + W_2) \subset W$$

y, como consecuencia

$$P_1 + (\mathcal{L}\{\overrightarrow{P_1 P_2}\} + W_1 + W_2) \subset B_1 + B_2.$$

□

Teorema 1.3.17 (Fórmula de Grassmann afín). Sean $B_1, B_2 \subset A$ subespacios afines con direcciones $W_1, W_2 \subset V$. Se verifica

$$\dim(B_1 + B_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) + \varepsilon$$

donde $\varepsilon = 0$ si $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ y $\varepsilon = 1$ si $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Demostración. Sea W la dirección de la suma $B_1 + B_2$. Por la Proposición 1.3.16,

$$W = (\mathcal{L}\{\overrightarrow{P_1 P_2}\} + W_1 + W_2).$$

Supongamos que $\varepsilon = 0$, es decir existe $P \in B_1 \cap B_2$. Entonces $B_1 = P + W_1$ y $B_2 = P + W_2$ y se tiene que

$$\dim(B_1 + B_2) = \dim W = \dim (\mathcal{L}\{\overrightarrow{P P}\} + W_1 + W_2) =$$

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Por el contrario, si $\varepsilon = 1$ y tomamos $B_1 = P_1 + W_1$ y $B_2 = P_2 + W_2$ y se verifica que $\overrightarrow{P_1 P_2} \notin (W_1 + W_2)$. En efecto, en caso contrario, existen vectores $\vec{w}_1 \in W_1$, $\vec{w}_2 \in W_2$ tales que $\overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$. Si $Q \in B_1$ con $\vec{w}_1 = \overrightarrow{P_1 Q}$ se tiene que

$$\vec{w}_2 = \overrightarrow{P_1 P_2} - \overrightarrow{P_1 Q} = \overrightarrow{QP_2} \in W_2$$

luego $Q \in B_2$ y, entonces $Q \in B_1 \cap B_2$, lo que es una contradicción. Entonces se tiene que

$$\dim(B_1 + B_2) = \dim W = \dim (\mathcal{L}\{\overrightarrow{P_1 P_2}\} + W_1 + W_2) =$$

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1 + W_2) + 1 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) + 1.$$

□

Ejemplo 1.3.18. Dos rectas $L_1, L_2 \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ que se cortan en un punto P , verifican la fórmula de Grassmann, ya que

$$\begin{aligned}\dim(L_1 + L_2) &= \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) + \varepsilon \\ 2 &= 1 + 1 - 0 + 0\end{aligned}$$

ya que la suma de subespacios es todo el plano afín $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.

Dos rectas paralelas $L_1, L_2 \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ diferentes tienen la misma dirección W pero tienen intersección vacía, por tanto su suma es todo $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ ya que un vector de W y el vector $\overrightarrow{P_1 P_2}$, $P_1 \in L_1$, $P_2 \in L_2$, generan todo \mathbb{R}^2 . Por tanto

$$\begin{aligned}\dim(L_1 + L_2) &= \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) + \varepsilon \\ 2 &= 1 + 1 - 1 + 1\end{aligned}$$

y la fórmula de Grassmann también se cumple.

A partir de la relación entre dos subespacios afines $B_1, B_2 \subset A$ y sus direcciones vectoriales $W_1, W_2 \subset V$, podemos hablar de cuatro posibilidades para las *posiciones relativas* de B_1 y B_2 :

- Si $B_1 \subseteq B_2$ o $B_2 \subseteq B_1$, un subespacio está *incluido* en el otro.
- Si $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ pero $B_1 \not\subseteq B_2$ ni $B_2 \not\subseteq B_1$, B_1 y B_2 se *cortan*.
- Si $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ con $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$, B_1 y B_2 son *paralelos*, y lo denotaremos por $B_1 \parallel B_2$.
- Si $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ con $W_1 \not\subseteq W_2$ ni $W_2 \not\subseteq W_1$, B_1 y B_2 se *cruzan*.

Ejemplo 1.3.19. Vamos a listar las posibilidades para las posiciones relativas de subespacios en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ y $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$.

1. Sean $L_1 = P_1 + W_1$, $L_2 = P_2 + W_2$ dos rectas en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ con direcciones $W_1 = \mathcal{L}\{\overrightarrow{w_1}\}$, $W_2 = \mathcal{L}\{\overrightarrow{w_2}\}$.
 - a) Supongamos que $P_1 \in L_2$. Si $\overrightarrow{w_1} \in W_2$ (por tanto $W_1 = W_2$) entonces ambas rectas son iguales; si $\overrightarrow{w_1} \notin W_2$ entonces se cortan en el único punto P_1 .
 - b) Si $P_1 \notin L_2$ y $W_1 = W_2$ entonces las rectas son paralelas $L_1 \parallel L_2$ de la misma dirección pero pasando por puntos P_1 y P_2 diferentes.
 - c) Si tuviésemos $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ y $W_1 \neq W_2$, por la fórmula de Grassmann tendríamos

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(W_1 \cap W_2) + \varepsilon = 1 + 1 - 0 + 1 = 3$$

lo que es imposible ya que la suma debe estar contenida en un espacio afín de dimensión 2, por tanto dos rectas no se pueden cruzar en el plano.

2. Sean ahora L_1, L_2 dos rectas en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ con direcciones $W_1 = \mathcal{L}\{\vec{w}_1\}$, $W_2 = \mathcal{L}\{\vec{w}_2\}$.
 - a) Supongamos que existe $P \in L_1 \cap L_2$. Si $\vec{w}_1 \in W_2$ (por tanto $W_1 = W_2$) entonces ambas rectas son iguales; si $\vec{w}_1 \notin W_2$ entonces las rectas se cortan en el único punto P .
 - b) Si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ y $\vec{w}_1 \in W_2$, entonces $W_1 = W_2$ y las rectas son paralelas $L_1 \parallel L_2$.
 - c) Si $\vec{w}_1 \notin W_2$, las rectas se cruzan.
3. Sean ahora L una recta y H un plano en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ con direcciones $W = \mathcal{L}\{\vec{w}\}$, $U = \mathcal{L}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, respectivamente.
 - a) Supongamos que existe $P \in L \cap H$. Si $\vec{w} \in U$ (por tanto $W \subset U$) entonces la recta está contenida en el plano $L \subset H$; si $\vec{w} \notin U$ entonces la recta y el plano se cortan en el único punto P .
 - b) Si $L \cap H = \emptyset$, necesariamente $\vec{w} \in U$; entonces $W \subset U$ y la recta es paralela al plano $L \parallel H$.
 - c) Por razones de dimensión, según la fórmula de Grassmann, una recta y un plano no se pueden cruzar en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$.

El último resultado del ejemplo se puede generalizar a dimensión superior.

Proposición 1.3.20. *Dado $H \subset A$ hiperplano y otro subespacio $B \subset A$, con $B \cap H = \emptyset$, entonces B y H son paralelos.*

1.3.3. Ecuaciones de subespacios afines

Dado un subespacio afín $B \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, existen un punto $P \in B$ y un subespacio vectorial $W \subset V$ de dimensión $d < n$ tales que $B = P + W$. Entonces, si las coordenadas de un vector $\vec{w} \in W$ respecto de la base canónica de \mathbb{K}^n son \mathbf{z} , existe una matriz $M \in \mathcal{M}_{(n-d) \times n}(\mathbb{K})$ con

$$W = \{\mathbf{z} \in \mathbb{K}^n : M\mathbf{z}^t = \mathbf{0}\}$$

descrito como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. Sean \mathbf{y} las coordenadas cartesianas de P respecto de la referencia cartesiana canónica de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$. Definiendo

$$\mathbf{b} := \mathbf{y} \cdot M^t,$$

obtenemos que las coordenadas \mathbf{x} de los puntos de B (respecto de la referencia cartesiana canónica de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$) son el conjunto de soluciones del sistema

$$M\mathbf{x}^t = \mathbf{b}^t.$$

En efecto, sea $Q \in B$ con coordenadas \mathbf{x} de la forma $Q = P + \overrightarrow{PQ}$, con $\overrightarrow{PQ} \in W$ de coordenadas \mathbf{z} respecto de la base canónica de \mathbb{K}^n . Se tiene que

$$M\mathbf{x}^t = M(\mathbf{y} + \mathbf{z})^t = M\mathbf{y}^t + M\mathbf{z}^t = \mathbf{b}^t + \mathbf{0} = \mathbf{b}^t.$$

Imitaremos este proceso para definir unas ecuaciones tanto implícitas como paramétricas de un subespacio afín, en general.

Definición 1.3.21. Sea A un espacio afín de dimensión n y sea $B \subset A$ un subespacio afín de dimensión d , con dirección $W \subset V$, tal que $B = P + W$. Sea $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ una referencia cartesiana de A .

1. En coordenadas cartesianas respecto a \mathcal{R}_c , un *sistema de ecuaciones implícitas* viene dado por

$$M\mathbf{x}^t = \mathbf{b}^t,$$

donde $W = \{\mathbf{z} \in \mathbb{K}^n : M\mathbf{z}^t = \mathbf{0}\}$ es el conjunto de vectores de W expresados en coordenadas respecto de la base \mathcal{B} , con $M \in \mathcal{M}_{(n-d) \times n}(\mathbb{K})$, y $\mathbf{b} := \mathbf{y} \cdot M^t$, donde \mathbf{y} son las coordenadas cartesianas de P respecto de \mathcal{R}_c .

2. Si $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_d\}$ es una base de W , cualquier vector \vec{z} de W se escribe como $\vec{z} = \lambda_1 \vec{w}_1 + \dots + \lambda_d \vec{w}_d$. Si las coordenadas de \vec{z} respecto de \mathcal{B} son \mathbf{z} , se tiene que

$$\mathbf{z}^t = C \cdot \boldsymbol{\lambda}^t$$

son unas ecuaciones paramétricas de W , donde las columnas de C son las coordenadas de \vec{w}_i en la base \mathcal{B} , y $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$. Entonces, un *sistema de ecuaciones paramétricas* de $B = P + W$,

$$\mathbf{x}^t = \mathbf{y} + C \cdot \boldsymbol{\lambda}^t$$

donde \mathbf{x} son coordenadas cartesianas de cada punto $Q \in B$, en la referencia \mathcal{R}_c .

Observación 1.3.22. Si $\dim B = d$ y $\dim A = n$, se verifica que el (mínimo) número de parámetros λ_i para definir el subespacio afín B en ecuaciones paramétricas es igual a su dimensión, d , y que el número de ecuaciones implícitas (independientes) es igual a la diferencia de dimensiones, $n - d$.

El paso de ecuaciones implícitas a paramétricas y viceversa puede ser tedioso en términos de cálculos, pero se rige por los mismos principios que el caso vectorial. Para pasar de paramétricas a implícitas, sabiendo que la dimensión de B es d , eliminaremos los d parámetros hasta obtener $n - d$ ecuaciones implícitas independientes. Para pasar de implícitas a paramétricas, resolvemos el sistema homogéneo asociado para obtener una base de W , tomamos un punto de B , solución del sistema no homogéneo, y con ello construimos unas ecuaciones paramétricas.

Cálculo de ecuaciones de la suma e intersección de dos subespacios afines

Dados subespacios afines $B_1 = P_1 + W_1$, y $B_2 = P_2 + W_2$, para obtener ecuaciones de la suma $B_1 + B_2$:

1. Buscamos una base de $W_1 + W_2$ uniendo bases de cada subespacio y eliminando dependencias lineales.
2. Si $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, añadimos a la base el vector $\overrightarrow{P_1 P_2}$.
3. Formamos unas ecuaciones paramétricas de la suma

$$B_1 + B_2 = P_1 + \mathcal{L}\{\overrightarrow{P_1 P_2}\} + W_1 + W_2$$

4. Eliminamos parámetros para obtener unas ecuaciones implícitas.

Para obtener ecuaciones de la intersección $B_1 \cap B_2$:

1. Obtenemos ecuaciones implícitas de B_1 y de B_2 .
2. Concatenamos las ecuaciones implícitas y eliminamos, si hay dependencias.

Ejemplo 1.3.23. Sean dos rectas en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, L_1 que pasa por los puntos $P = (0, 1, 2)$ y $Q = (1, 0, 2)$, y L_2 que viene dada por sus ecuaciones implícitas:

$$L_2 : \begin{cases} x - 2y = -2 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

La recta L_1 se puede escribir como $L_1 = (0, 1, 2) + \mathcal{L}\{(1, -1, 0)\}$, y unas ecuaciones paramétricas de L_1 vienen dadas por

$$L_1 : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

Eliminando parámetros en estas ecuaciones paramétricas obtenemos unas ecuaciones implícitas de L_1 ,

$$L_1 : \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Concatenando las ecuaciones implícitas de L_1 y de L_2 , obtenemos unas ecuaciones de la intersección:

$$L_1 \cap L_2 : \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 2 \\ x - 2y = -2 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

cuyo sistema es compatible y tiene solución el punto $P = (0, 1, 2)$, por lo que $L_1 \cap L_2 = \{(0, 1, 2)\}$.

Para calcular la suma de las dos rectas, primero obtenemos la dirección de L_2 resolviendo su sistema de ecuaciones implícitas. Obtenemos $L_2 = (0, 1, 2) + \mathcal{L}\{(2, 1, -1)\}$. Como las dos rectas se cortan, la suma viene dada por

$$L_1 + L_2 = P + \mathcal{L}\{(1, -1, 0)\} + L(2, 1, -1) = (0, 1, 2) + \mathcal{L}\{(1, -1, 0), (2, 1, -1)\}.$$

Unas ecuaciones paramétricas de la suma son

$$L_1 + L_2 : \begin{cases} x = & \lambda & +2\mu \\ y = & 1 & -\lambda & +\mu \\ z = & 2 & & -\mu \end{cases}$$

Eliminando parámetros conseguimos una ecuación implícita para la suma, que es un plano

$$L_1 + L_2 : \{x - y + z = 1\}.$$

Definición 1.3.24. Dada \mathcal{R}_a referencia afín de A , sean $P_0, \dots, P_d \in A$ puntos afínmente independientes y sea $B = V\{P_0, \dots, P_d\}$ un subespacio afín de dimensión d . Sean $(\alpha_{0j}, \alpha_{1j}, \dots, \alpha_{nj})$ las coordenadas baricéntricas de cada P_j respecto de \mathcal{R}_a . Sean $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ las coordenadas de un punto $Q \in B$ y $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_d)$ parámetros. Unas *ecuaciones baricéntricas* (con respecto a P_0, \dots, P_d , en coordenadas baricéntricas de \mathcal{R}_a) de B son

$$\lambda = (\alpha_{ij})\mu$$

con la restricción $\sum_{i=0}^n \lambda_i = \sum_{j=0}^d \mu_j = 1$.

Ejemplo 1.3.25. Consideremos el espacio afín estándar $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ con la referencia afín estándar $\mathcal{R}_a = \{(0, 0); (1, 0), (0, 1)\}$. Sea la recta $L : \{x - y = 2\}$ y vamos a obtener unas ecuaciones baricéntricas de L . Podemos ver

$$L = V\{Q_0 = (0, -2), Q_1 = (2, 0)\},$$

y los puntos Q_0, Q_1 , en coordenadas baricéntricas respecto de \mathcal{R}_a son

$$Q_0 = (3, 0, -2)_{\mathcal{R}_a}, \quad Q_1 = (-1, 2, 0)_{\mathcal{R}_a}$$

(véase cómo obligamos a que la suma de coordenadas sea 1, multiplicando el punto $(0, 0)$ por el escalar correspondiente). Por tanto, sean $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ las coordenadas baricéntricas de $R \in L$, se tiene que

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \end{pmatrix}$$

por lo que las ecuaciones baricéntricas de L (respecto de Q_1, Q_2 , y en coordenadas baricéntricas estándar) son

$$\begin{cases} \lambda_0 = & 3\mu_0 & -1\mu_1 \\ \lambda_1 = & & 2\mu_1 \\ \lambda_2 = & -2\mu_0 & \\ 1 = & \mu_0 & +\mu_1 \end{cases}$$

donde hemos añadido la restricción de que la suma de coordenadas sea 1. Véase cómo el hecho de que la suma de cada columna de la matriz sea 1 implica que la última ecuación recoge ambas restricciones, $\sum_{i=0}^n \lambda_i = \sum_{j=0}^d \mu_j = 1$.

Dado el punto $R = (1, -1) = (1, 1, -1)_{\mathcal{R}_a} \in L$, si resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 1 &= 3\mu_0 & -1\mu_1 \\ 1 &= & 2\mu_1 \\ -1 &= -2\mu_0 \\ 1 &= \mu_0 & +\mu_1 \end{cases}$$

que es compatible, y obtenemos $\mu_0 = \mu_1 = \frac{1}{2}$, que son precisamente las coordenadas baricéntricas de $R = (1, -1)$ respecto de $Q_0 = (0, -2), Q_1 = (2, 0)$ (o, dicho de otro modo, R es el punto medio del segmento que une Q_0 con Q_1) (véase Figura 1.9).

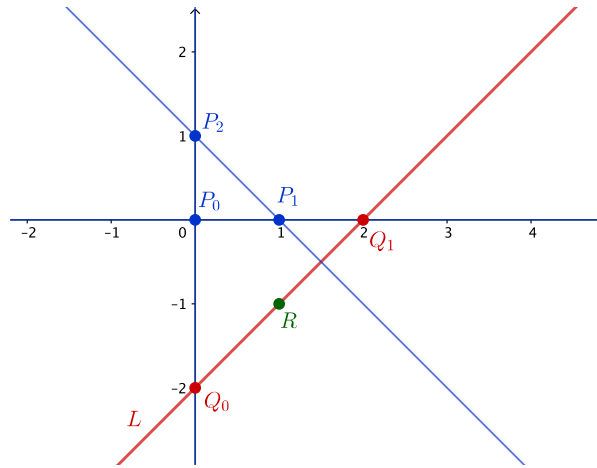


Figura 1.9: Figura del Ejemplo 1.3.25.

1.4. Problemas

Problema 1.4.1. Sean los puntos $(1, 0)$, $(3, 2)$ y $(2, -1)$ en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.

- Demuestra que forman una referencia afín.
- Calcula las coordenadas baricéntricas del origen de coordenadas respecto de esta referencia afín.

Problema 1.4.2. Sean los puntos $(1, 0, 0)$, $(-1, -1, 2)$ y $(3, 0, 1)$ en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$.

- Completa una referencia afín con un cuarto punto y calcula las coordenadas baricéntricas del origen de coordenadas respecto de la referencia afín.
- Calcula la matriz de cambio de referencia de esta referencia afín a la referencia afín estándar y comprueba que transforma las coordenadas baricéntricas del origen respecto de ambas referencias.

Problema 1.4.3. Prueba que el subconjunto de matrices de traza igual a 3

$$B = \{M \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : \text{tr}(M) = 3\}$$

es un subespacio afín de dimensión 3, con dirección las matrices de traza nula.

Problema 1.4.4. Demuestra que el subconjunto de polinomios con coeficientes reales, que toman un determinado valor b en un punto a es un subespacio afín. Por ejemplo, muestra que

$$C = \{p(X) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : p(a) = b\}$$

es un subespacio afín con dirección

$$W = \{p(X) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : p(a) = 0\}.$$

Calcula su dimensión y unas ecuaciones cartesianas que lo definan.

Problema 1.4.5. Prueba que si dos subespacios B_1, B_2 tienen intersección no vacía, se puede eliminar el término $\mathcal{L}\{\overrightarrow{P_1 P_2}\}$ de la definición de suma de subespacios, y tenemos

$$B_1 + B_2 = P_1 + (W_1 + W_2).$$

Problema 1.4.6. Prueba que dos planos distintos en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ que no son paralelos intersecan en una recta.

Problema 1.4.7. Dado un subespacio afín B de dimensión m y un punto $P \notin B$, demuestra que el subespacio afín $\{P\} + B$ tiene dimensión $m + 1$.

Problema 1.4.8. Dado un punto P y una recta L contenidos en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, $P \notin L$, demuestra que existe una única recta L' paralela a L que pasa por P .

Problema 1.4.9. Dado un punto P y un plano H contenidos en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, $P \notin H$, demuestra que existe un único plano H' paralelo a H que pasa por P .

Problema 1.4.10. Muestra, con ayuda de la fórmula de Grassmann, que una recta y un plano no se pueden cruzar en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$.

Problema 1.4.11. Demuestra que dado $H \subset A$ hiperplano y otro subespacio $B \subset A$, con $B \cap H = \emptyset$, entonces B y H son paralelos.

Problema 1.4.12. Calcula unas ecuaciones implícitas de la recta $L \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ que pasa por el punto $(0, 1, 0)$ y es paralela al vector $(2, -1, 1)$.

Problema 1.4.13. Calcula unas ecuaciones implícitas de la recta $L \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y es paralela a la intersección de los planos $\{x + y = 1\}$ y $\{y - z = -1\}$.

Problema 1.4.14. Calcula ecuaciones paramétricas e implícitas del plano $H \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ que pasa por $P = (0, 0, 1)$ y es paralelo a $\{x - 2y - 3z = 5\}$.

Problema 1.4.15. Dadas dos rectas en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, L_1 que pasa por los puntos $P = (-1, -1, -1)$ y $Q = (2, 0, 1)$, y L_2 dada en ecuaciones implícitas

$$L_2 : \begin{cases} 2x & -y & -z & = & -1 \\ x & +y & +3z & = & 1 \end{cases}$$

calcula su suma y su intersección, calculando ecuaciones de ambas.

Problema 1.4.16. Dadas dos rectas en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, L_1 que pasa por los puntos $P = (1, 1, 0)$ y $Q = (2, 0, 2)$, y L_2 dada en ecuaciones implícitas

$$L_2 : \begin{cases} x & -2y & & = & -1 \\ & 3y & +z & = & 3 \end{cases}$$

calcula su suma y su intersección, calculando ecuaciones de ambas.

Problema 1.4.17. Dadas los dos planos en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ de ecuaciones implícitas $H_1 : \{x - y + z = 2\}$ y $H_2 : \{2x + y - 2z = -1\}$. Calcula su suma y su intersección, calculando ecuaciones de ambas.

Capítulo 2

Aplicaciones Afines

2.1. Aplicaciones afines y representación matricial

Una vez hemos definido los espacios con los que vamos a trabajar, junto con sus elementos (puntos) y las formas de referirnos a ellos (coordenadas), sus subespacios y las formas de determinarlos (ecuaciones), el siguiente paso es definir las aplicaciones entre espacios que conservan la geometría a estudiar, las denominadas aplicaciones afines.

2.1.1. Definición y propiedades de las aplicaciones afines

Definición 2.1.1. Sean A y A' espacios afines. Una aplicación $f : A \longrightarrow A'$ es una *aplicación afín* si preserva las combinaciones afines, es decir,

$$f\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=0}^r \lambda_i f(P_i) \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^r \lambda_i = 1.$$

Como consecuencia inmediata de la definición de aplicación afín tenemos que las aplicaciones afines conservan el baricentro.

Corolario 2.1.2. Sean $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$ y sea $f : A \longrightarrow A'$ una aplicación afín. Si $B \in A$ es el baricentro de $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$, entonces $f(B)$ es el baricentro de $f(P_0), f(P_1), \dots, f(P_r)$.

Demostración. Por definición de baricentro (c.f. Lema 1.2.22), las coordenadas baricéntricas de B respecto de P_0, P_1, \dots, P_r son todas $\lambda_i = \frac{1}{r+1}$, $i = 0, 1, \dots, r$, por lo que B se puede expresar como la combinación afín

$$B = \sum_{i=0}^r \frac{1}{r+1} P_i.$$

Entonces

$$f(B) = \sum_{i=0}^r \frac{1}{r+1} f(P_i)$$

y, por tanto, $f(B)$ es el baricentro de los puntos imagen. \square

Proposición 2.1.3. *Sean A y A' espacios afines con direcciones V y V' . La definición de aplicación afín $f : A \rightarrow A'$ en términos de combinaciones afines es equivalente a cada una de las siguientes condiciones:*

1. Para todo $P \in A$ la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \vec{f} : & V & \longrightarrow \\ & \overrightarrow{PQ} & \longmapsto \overrightarrow{f(P)f(Q)} \end{array}$$

es lineal.

2. Existe $P \in A$ tal que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \vec{f} : & V & \longrightarrow \\ & \overrightarrow{PQ} & \longmapsto \overrightarrow{f(P)f(Q)} \end{array}$$

es lineal.

Demostración. ■ Primero probaremos que si f es una aplicación afín, entonces se verifica 1. Sea $P \in A$, y probemos que \vec{f} es lineal. Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Sean $Q_1, Q_2 \in A$ tales que $\vec{v}_1 = \overrightarrow{PQ_1}$ y $\vec{v}_2 = \overrightarrow{PQ_2}$. El punto

$$R := P + \lambda_1 \overrightarrow{PQ_1} + \lambda_2 \overrightarrow{PQ_2}$$

se puede expresar como combinación afín tal que

$$R = \lambda_0 P + \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$$

con $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$. Como f preserva las combinaciones afines, se tiene que

$$f(R) = \lambda_0 f(P) + \lambda_1 f(Q_1) + \lambda_2 f(Q_2) = f(P) + \lambda_1 \overrightarrow{f(P)f(Q_1)} + \lambda_2 \overrightarrow{f(P)f(Q_2)}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \vec{f}(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) &= \vec{f}(\lambda_1 \overrightarrow{PQ_1} + \lambda_2 \overrightarrow{PQ_2}) = \vec{f}(\overrightarrow{PR}) = \overrightarrow{f(P)f(R)} = \\ &= \lambda_1 \overrightarrow{f(P)f(Q_1)} + \lambda_2 \overrightarrow{f(P)f(Q_2)} = \lambda_1 \vec{f}(\overrightarrow{PQ_1}) + \lambda_2 \vec{f}(\overrightarrow{PQ_2}) = \lambda_1 \vec{f}(\vec{v}_1) + \lambda_2 \vec{f}(\vec{v}_2) \end{aligned}$$

y \vec{f} es lineal.

■ 1. implica 2. es inmediato.

- Probaremos que si se verifica 2., entonces f es una aplicación afín. Sean puntos $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$ y escalares $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, tales que $\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$. Observamos que $\sum_{i=0}^r \lambda_i P_i = P_0 + \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i}$ y, entonces,

$$\overrightarrow{P_0 \sum_{i=0}^r \lambda_i P_i} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i}.$$

Combinando esto con las propiedades de puntos y vectores con la linealidad de \overrightarrow{f} se tiene

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i P_i\right) &= f(P_0) + \overrightarrow{f(P_0) f\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i P_i\right)} = f(P_0) + \overrightarrow{f(P_0) f\left(P_0 + \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i}\right)} = \\ &= f(P_0) + \overrightarrow{f(P_0) f\left(P_0 + \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i}\right)} = f(P_0) + \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{f(P_0) f(P_i)} = \\ &= f(P_0) + \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{f(P_0) f(P_i)} = \sum_{i=0}^r \lambda_i f(P_i). \end{aligned}$$

luego f conserva las combinaciones afines y, por tanto, es una aplicación afín. \square

Observación 2.1.4. La aplicación lineal \overrightarrow{f} se denomina *aplicación lineal asociada a f* y no depende del punto P . Se cumple que, para cualesquiera $Q, R \in A$, $\overrightarrow{v} \in V$,

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{QR}) = \overrightarrow{f(Q) f(R)}$$

y

$$f(Q + \overrightarrow{v}) = f(Q) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}).$$

En efecto, si llamamos $S := Q + \overrightarrow{v}$, entonces $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{QS}) = \overrightarrow{f(Q) f(S)}$, por lo que

$$f(Q + \overrightarrow{v}) = f(S) = f(Q) + \overrightarrow{f(Q) f(S)} = f(Q) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}).$$

Ejemplo 2.1.5. Sea $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, tal que

$$f(x, y, z) = (3x - y + 2z - 1, 2x + z + 2).$$

Sea la aplicación lineal \overrightarrow{f} ,

$$\overrightarrow{f}(x, y, z) = (3x - y + 2z, 2x + z).$$

El punto $\overline{0} := (0, 0, 0) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ tiene por imagen $f(\overline{0}) = (-1, 2) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$. Sea otro $P \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, con coordenadas $P = (x, y, z)$, con lo que $\overline{0P} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Por tanto,

$$\overrightarrow{f}(\overline{0P}) = f(P) - f(\overline{0}) = \overrightarrow{f(\overline{0}) f(P)}$$

y f es afín con aplicación lineal asociada \overrightarrow{f} .

La siguiente proposición recoge las propiedades más importantes de las aplicaciones afines.

Proposición 2.1.6. 1. Sean $f : A \longrightarrow A'$, $g : A' \longrightarrow A''$ aplicaciones afines con aplicaciones lineales asociadas \overrightarrow{f} y \overrightarrow{g} . La composición $g \circ f$ es una aplicación afín, con aplicación lineal asociada $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.

2. Una aplicación afín $f : A \longrightarrow A'$ es inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva) si y solo si su aplicación lineal asociada \overrightarrow{f} es inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva)

3. Dadas $f_i : A \longrightarrow A'$ aplicaciones afines y escalares λ_i con $\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$. La combinación afín

$$\sum_{i=0}^r \lambda_i f_i$$

es una aplicación afín con aplicación lineal asociada dada por la correspondiente combinación afín de aplicaciones lineales, $\sum_{i=0}^r \lambda_i \overrightarrow{f_i}$.

Demostración. 1. Si tanto f como g preservan las combinaciones afines, su composición $g \circ f$ también, por lo tanto es afín. Además,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{g \circ f}(\overrightarrow{PQ}) &= \overrightarrow{(g \circ f)(P)(g \circ f)(Q)} = \overrightarrow{g(f(P))g(f(Q))} = \\ &= \overrightarrow{g}(\overrightarrow{f(P)f(Q)}) = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ})) = (\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f})(\overrightarrow{PQ}). \end{aligned}$$

2. Dados $P, Q \in A$ se tiene que $f(P) = f(Q)$ si y solo si $\mathbf{0} = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ})$, lo que garantiza la equivalencia entre la inyectividad de f y \overrightarrow{f} .

Si f es sobreyectiva y tomamos $P', Q' \in A'$ con $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{P'Q'}$, sean $P, Q \in A$ con $f(P) = P'$ y $f(Q) = Q'$, y tenemos que

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{P'Q'}.$$

Si \overrightarrow{f} es sobreyectiva y tomamos $P' \in A'$ y un punto $O \in A$, el vector $\overrightarrow{f(O)P'}$ tiene una preimagen \overrightarrow{v} tal que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f(O)P'}$. Entonces el punto $P := O + \overrightarrow{v}$ verifica

$$f(P) = f(O + \overrightarrow{v}) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = f(O) + \overrightarrow{f(O)P'} = P'.$$

La equivalencia para f y \overrightarrow{f} biyectivas es consecuencia de las dos anteriores.

3. Usaremos la Proposición 2.1.6 para probar que la aplicación $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$ es lineal e igual a la combinación afín de aplicaciones lineales. En efecto, dados $P, Q \in A$,

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{\sum_{i=0}^r \lambda_i f_i(P) \sum_{i=0}^r \lambda_i f_i(Q)}$$

Reorganizando los puntos, la expresión es igual a

$$\sum_{i=0}^r \lambda_i \overrightarrow{f_i(P)f_i(Q)} = \sum_{i=0}^r \lambda_i \overrightarrow{f_i(P)f_i(Q)},$$

que es una aplicación lineal que coincide con la combinación afín indicada. \square

Una propiedad deseable para aplicaciones entre espacios en matemáticas es que conserve la estructura de subespacio. Esto es lo que prueba la siguiente proposición.

Proposición 2.1.7. *Sea $f : A \rightarrow A'$ una aplicación afín y $B \subset A$ un subespacio afín tal que $B = P + W$, con $P \in B$ y $W \subset V$. Entonces se verifica que*

$$f(B) = f(P) + \overrightarrow{f}(W)$$

y, por tanto, $f(B)$ es subespacio afín de A' con dirección $\overrightarrow{f}(W)$.

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} f(B) &= \{f(Q) : Q \in B\} = \{f(P + \vec{w}) : \vec{w} \in W\} = \{f(P) + \overrightarrow{f}(\vec{w}) : \vec{w} \in W\} = \\ &= f(P) + \{\overrightarrow{f}(\vec{w}) : \vec{w} \in W\} = f(P) + \overrightarrow{f}(W). \end{aligned}$$

\square

Definición 2.1.8. Una aplicación afín biyectiva entre dos espacios afines A y A' denota *isomorfismo afín*. En caso de que $A = A'$ diremos que f es una *afinidad*.

Observación 2.1.9. Se puede demostrar que si f es una afinidad, su inversa $f^{-1} : A \rightarrow A$ es también una afinidad. Usando las propiedades de la Proposición 2.1.6 podemos concluir que las afinidades forman un grupo con la operación de la composición, que se denota por $GA(n, \mathbb{K})$. Este grupo es isomorfo al producto semidirecto $\mathbb{K} \ltimes GL(n, \mathbb{K}) \subset GL(n+1, \mathbb{K})$.

Una aplicación lineal sobre un espacio vectorial de dimensión n queda completamente determinada especificando las imágenes de los n vectores de cualquiera de sus bases, ya que el resto de los vectores quedan prescritos mediante las combinaciones lineales que son preservadas por una aplicación lineal. Siguiendo el paralelismo, una aplicación afín sobre un espacio afín de dimensión n quedará determinada por completo especificando la imagen de los $n+1$ puntos de una referencia afín.

Teorema 2.1.10. *Sea A un espacio afín de dimensión n y sea $\mathcal{R}_a = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ una referencia afín de A . Si A' es otro espacio afín y $Q_0, Q_1, \dots, Q_n \in A'$ existe una única aplicación afín $f : A \rightarrow A'$ tal que $f(P_i) = Q_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Además*

- Si los puntos Q_i son afínmente independientes entonces f es inyectiva.

- Si los puntos Q_i son afínmente generadores de A' entonces f es sobreyectiva.
- Si los puntos Q_i son una referencia afín de A' entonces f es biyectiva y, por tanto, un isomorfismo afín.

Demostración. Como \mathcal{R}_a es referencia afín de A , cualquier punto $P \in A$ se puede escribir de forma única como combinación afín de los puntos P_i , es decir, $P = \sum_{i=0}^n \lambda_i P_i$. Definimos la imagen de P por f como

$$f(P) := \sum_{i=0}^n \lambda_i Q_i$$

y obtenemos directamente que f es afín, ya que conserva las combinaciones afines:

$$f(P) = f\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i Q_i = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(P_i)$$

y además $f(P_i) = Q_i$. Cualquier otra aplicación afín $g : A \rightarrow A'$ que lleve $g(P_i) = Q_i$, necesariamente conservará las combinaciones afines $P = \sum_{i=0}^n \lambda_i P_i$, por lo que

$$g(P) = g\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i g(P_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i Q_i = f(P),$$

por tanto $g = f$ y obtenemos la unicidad.

- Supongamos que los puntos Q_i son afínmente independientes y sean los puntos $R_1 = \sum_{i=0}^n \lambda_i P_i$ y $R_2 = \sum_{i=0}^n \mu_i P_i \in A$ tales que $f(R_1) = f(R_2)$. Entonces

$$f\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i\right) = f\left(\sum_{i=0}^n \mu_i P_i\right) \text{ lo que equivale a } \sum_{i=0}^n \lambda_i Q_i = \sum_{i=0}^n \mu_i Q_i.$$

Los puntos Q_i son afínmente independientes, luego forman una referencia afín del subespacio afín $V(\{Q_0, \dots, Q_n\}) \subset A'$ y, puesto que las coordenadas baricéntricas de $f(R_1) = f(R_2)$ respecto de esta referencia afín son únicas se tiene que $\lambda_i = \mu_i$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$. Entonces $R_1 = R_2$ lo que garantiza la inyectividad de f .

- Si los puntos Q_i son afínmente generadores de A' y $R \in A'$ se tiene que $R = \sum_{i=0}^n \lambda_i Q_i$, una combinación afín que expresa R en función de los Q_i . Definiendo $P := \sum_{i=0}^n \lambda_i P_i$ la definición de aplicación afín garantiza que

$$f(P) = f\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(P_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i Q_i = R,$$

luego f es sobreyectiva.

- Como una referencia afín es un conjunto de puntos afínmente independientes y generadores, si los Q_i son referencia afín de A' la aplicación f es inyectiva y sobreyectiva, por tanto biyectiva.

□

El Teorema 2.1.10 nos permite estudiar qué tipo de transformaciones afines podemos tener en casos sencillos, como por ejemplo el plano afín.

Sean $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ afínmente independientes y sean $Q_0, Q_1, Q_2 \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$. Especificando que cada P_i se transforma por f en $f(P_i) = Q_i$ tenemos definida una única aplicación afín de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ en $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$. Si los puntos Q_0, Q_1, Q_2 son afínmente independientes (i.e. son otra referencia afín de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$), entonces f es biyectiva y, por tanto, una afinidad. Si los puntos Q_i son afínmente dependientes, entonces bien están alineados (en cuyo caso la imagen de f es la recta en $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ que los contiene), o son los tres iguales (en cuyo caso la imagen de f es el punto $Q_0 = Q_1 = Q_2$).

Obsérvese que la imagen de un cuarto punto $P_3 \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ queda totalmente especificada por f , ya que podemos escribir P_3 como combinación afín única de los P_0, P_1, P_2 . Dicho de otro modo, la libertad para escoger una aplicación afín de un espacio afín de dimensión n abarca solo $n + 1$ elecciones, quedando el resto prescritas. Véase la analogía con las aplicaciones lineales, donde la libertad para determinar una aplicación lineal de un espacio vectorial de dimensión n reside en elegir las imágenes de n vectores de una base, más la regla de que el cero vaya al cero, como en cualquier aplicación lineal, lo cual suman $n + 1$ prescripciones también.

2.1.2. Representación matricial de aplicaciones afines

Una vez introducidas las aplicaciones afines, el siguiente paso es dar una expresión matricial que permita calcular de una forma sencilla y efectiva las imágenes de puntos y subespacios.

Representación en coordenadas cartesianas

Sean A, A' espacios afines de dimensiones n y m respectivamente. Sea $f : A \rightarrow A'$ una aplicación afín con aplicación lineal asociada $\vec{f} : V \rightarrow V'$ y $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$, $\mathcal{R}'_c = \{O'; \mathcal{B}'\}$ referencias cartesianas de A y A' respectivamente. Sea $P \in A$, con coordenadas cartesianas $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ respecto de \mathcal{R}_c , y supongamos que $f(P) \in A'$ tiene coordenadas cartesianas $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ respecto de \mathcal{R}'_c . La relación entre \mathbf{x} e \mathbf{y} viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{y}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{b}^t & M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\vec{f}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$ son las coordenadas cartesianas de $f(O)$ respecto de la referencia \mathcal{R}'_c y $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\vec{f})$ es la matriz de la aplicación lineal asociada \vec{f} respecto de las bases \mathcal{B} y \mathcal{B}' .

La matriz que relaciona ambos vectores es la matriz de f respecto a las referencias cartesianas $\mathcal{R}_c, \mathcal{R}'_c$,

$$M_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \mathbf{b}^t & M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\vec{f}) \end{array} \right)$$

de tal modo que podemos escribir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\mathbf{y}^t} \end{pmatrix} = M_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c}(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \mathbf{y}^t = \mathbf{b}^t + M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\vec{f}) \cdot \mathbf{x}^t.$$

Demostración. Sea $P \in A$. Las coordenadas cartesianas de $f(P)$ con respecto a \mathcal{R}'_c son las coordenadas del vector $\overrightarrow{O'f(P)}$ con respecto a la base \mathcal{B}' de V' . Las propiedades de \vec{f} garantizan que

$$\overrightarrow{O'f(P)} = \overrightarrow{O'f(O)} + \overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{O'f(O)} + \vec{f}(\overrightarrow{OP})$$

que en coordenadas cartesianas respecto a \mathcal{R}'_c

$$\mathbf{y}^t = \mathbf{b}^t + M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\vec{f}) \cdot \mathbf{x}^t.$$

La unicidad se sigue de la unicidad de las coordenadas \mathbf{b}^t y de la matriz $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\vec{f})$. \square

Sean $\mathcal{R}_{c,1}$ y $\mathcal{R}_{c,2}$ dos referencias cartesianas de A y supongamos que \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 son las coordenadas cartesianas de un punto $P \in A$ respecto de $\mathcal{R}_{c,1}$ y $\mathcal{R}_{c,2}$. Del mismo modo sean $\mathcal{R}'_{c,1}$ y $\mathcal{R}'_{c,2}$ dos referencias cartesianas de A' y supongamos que \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 son las coordenadas cartesianas de $f(P) \in A'$ respecto de $\mathcal{R}'_{c,1}$ y $\mathcal{R}'_{c,2}$. Usando las relaciones de cambio de coordenadas cartesianas de la Proposición 1.2.6, tenemos

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{R}'_{c,1}\mathcal{R}'_{c,2}} \cdot M_{\mathcal{R}_{c,1}\mathcal{R}'_{c,1}}(f) \cdot C_{\mathcal{R}_{c,2}\mathcal{R}_{c,1}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}_2^t \end{pmatrix} &= C_{\mathcal{R}'_{c,1}\mathcal{R}'_{c,2}} \cdot M_{\mathcal{R}_{c,1}\mathcal{R}_{c,1}}(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}_1^t \end{pmatrix} = \\ C_{\mathcal{R}'_{c,1}\mathcal{R}'_{c,2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{y}_1^t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{y}_2^t \end{pmatrix} = M_{\mathcal{R}_{c,2}\mathcal{R}'_{c,2}}(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}_2^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por lo que la relación entre las matrices de f respecto de las distintas referencias viene dada por las matrices de cambio de referencia cartesiana:

$$C_{\mathcal{R}'_{c,1}\mathcal{R}'_{c,2}} \cdot M_{\mathcal{R}_{c,1}\mathcal{R}'_{c,1}}(f) \cdot C_{\mathcal{R}_{c,2}\mathcal{R}_{c,1}} = M_{\mathcal{R}_{c,2}\mathcal{R}'_{c,2}}(f).$$

Obsérvese la analogía con la expresión que relaciona dos matrices de la misma aplicación lineal entre espacios vectoriales, respecto de diferentes bases.

Siguiendo con la analogía, dadas aplicaciones afines $f : A \longrightarrow A'$ y $g : A' \longrightarrow A''$, y referencias cartesianas \mathcal{R}'_c , \mathcal{R}_c y \mathcal{R}_c , respectivamente, es un ejercicio sencillo con las matrices ver que

$$M_{\mathcal{R}_c, \mathcal{R}_c''}(g \circ f) = M_{\mathcal{R}'_c, \mathcal{R}_c''}(g) \cdot M_{\mathcal{R}_c, \mathcal{R}'_c}(f),$$

es decir, la matriz de la composición es el producto de matrices de cada aplicación.

Representación en coordenadas baricéntricas

Sea $f : A \longrightarrow A'$ una aplicación afín. Consideremos las referencias afines $\mathcal{R}_a = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$, $\mathcal{R}'_a = \{Q_0, Q_1, \dots, Q_m\}$ de A y A' respectivamente. Sea $P \in A$ cuyas coordenadas baricéntricas respecto de \mathcal{R}_a son $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)$, $\sum_{j=0}^n \lambda_j = 1$ y supongamos que $f(P) \in A'$ tiene coordenadas baricéntricas $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_m)$, $\sum_{i=0}^m \mu_i = 1$ respecto de \mathcal{R}'_a . De forma similar a como establecimos el cambio de coordenadas baricéntricas en la Sección 1.2.3, cada $f(P_j)$ se expresa en términos de la referencia \mathcal{R}'_a como

$$f(P_j) = \sum_{i=0}^m \alpha_{ij} Q_i,$$

con $\sum_{i=0}^m \alpha_{ij} = 1$, $j = 0, 1, \dots, n$. Entonces, se tiene que

$$\sum_{i=0}^m \mu_i Q_i = f(P) = f\left(\sum_{j=0}^n \lambda_j P_j\right) = \sum_{j=0}^n \lambda_j f(P_j) = \sum_{j=0}^n \lambda_j \left(\sum_{i=0}^m \alpha_{ij} Q_i\right) = \sum_{i=0}^m \left(\sum_{j=0}^n \alpha_{ij} \lambda_j\right) Q_i$$

por lo que la relación entre λ y μ viene dada por

$$\mu^t = \left(\alpha_{ij}\right)_{(m+1) \times (n+1)} \cdot \lambda^t$$

Denotaremos por

$$M_{\mathcal{R}_a, \mathcal{R}'_a}(f) = \left(\alpha_{ij}\right)_{(m+1) \times (n+1)}$$

la matriz de f respecto de las referencias afines indicadas, cuyas columnas vienen dadas por las coordenadas baricéntricas de $f(P_j)$ respecto de \mathcal{R}'_a .

De forma análoga al caso cartesiano, la relación entre las matrices de una aplicación afín respecto de diferentes referencias afines $\mathcal{R}_{a,1}$, $\mathcal{R}_{a,2}$ en A y $\mathcal{R}'_{a,1}$, $\mathcal{R}'_{a,2}$ en A' , viene dada por

$$C_{\mathcal{R}'_{a,1} \mathcal{R}'_{a,2}} \cdot M_{\mathcal{R}_{a,1} \mathcal{R}'_{a,1}}(f) \cdot C_{\mathcal{R}_{a,2} \mathcal{R}_{a,1}} = M_{\mathcal{R}_{a,2} \mathcal{R}'_{a,2}}(f).$$

Así como la matriz de la composición de dos aplicaciones afines $f : A \longrightarrow A'$ y $g : A' \longrightarrow A''$, respecto de referencias afines \mathcal{R}'_a , \mathcal{R}'_a y \mathcal{R}_a , es igual al producto de las matrices correspondientes

$$M_{\mathcal{R}_a, \mathcal{R}_a''}(g \circ f) = M_{\mathcal{R}'_a, \mathcal{R}_a''}(g) \cdot M_{\mathcal{R}_a, \mathcal{R}'_a}(f).$$

Si guiento el paralelismo con los cambios de coordenadas al final de la Sección 1.2, el siguiente diagrama y las posteriores expresiones relacionan las matrices de una aplicación afín respecto de referencias cartesianas y baricéntricas:

	A	\xrightarrow{f}	A'	
	P	\mapsto	$f(P)$	
	\mathcal{R}_c	\longrightarrow	\mathcal{R}'_c	
	\mathbf{x}	$(1 \mid \mathbf{y})^t = M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c}(f) \cdot (1 \mid \mathbf{x})^t$	\mathbf{y}	
$\boldsymbol{\lambda}^t = M_n \cdot (1 \mid \mathbf{x})^t$	\updownarrow		\updownarrow	$\boldsymbol{\mu}^t = M_m \cdot (1 \mid \mathbf{y})^t$
	\mathcal{R}_a	\longrightarrow	\mathcal{R}'_a	
	$\boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{\mu}^t = M_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a}(f) \cdot \boldsymbol{\lambda}^t$	$\boldsymbol{\mu}$	

$$M_m \cdot M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c}(f) \cdot (1 \mid \mathbf{x})^t = M_m \cdot (1 \mid \mathbf{y})^t = \boldsymbol{\mu}^t = M_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a}(f) \cdot \boldsymbol{\lambda}^t = M_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a}(f) \cdot M_n \cdot (1 \mid \mathbf{x})^t.$$

Por tanto

$$M_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a}(f) = M_m \cdot M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c}(f) \cdot M_n^{-1}$$

y

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c}(f) = M_m^{-1} \cdot M_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a}(f) \cdot M_n.$$

Ejemplo 2.1.11. Sean en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ los puntos

$$P_0 = (1, 0, 1), P_1 = (0, 0, 1), P_2 = (2, 1, 0), P_3 = (1, 0, 2)$$

y los puntos

$$Q_0 = (0, 1, 0), Q_1 = (0, 1, 1), Q_2 = (2, 1, -1), Q_3 = (-1, 1, 0).$$

Los puntos P_0, P_1, P_2, P_3 forman una referencia afín de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, ya que

$$\{\vec{v}_1 := \overrightarrow{P_0 P_1} = (-1, 0, 0), \vec{v}_2 := \overrightarrow{P_0 P_2} = (1, 1, -1), \vec{v}_3 := \overrightarrow{P_0 P_3} = (0, 0, 1)\}$$

es una base de \mathbb{R}^3 . Consideremos la referencia afín

$$\mathcal{R}_a = \{P_0 = (1, 0, 1), P_1 = (0, 0, 1), P_2 = (2, 1, 0), P_3 = (1, 0, 2)\}$$

y su referencia cartesiana asociada

$$\mathcal{R}_c = \{P_0 = (1, 0, 1); \vec{v}_1 = (-1, 0, 0), \vec{v}_2 = (1, 1, -1), \vec{v}_3 = (0, 0, 1)\}.$$

Por el Teorema 2.1.10, existe una única aplicación afín $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ tal que $f(P_i) = Q_i, i = 0, 1, 2, 3$. Sin embargo, los puntos Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 no forman una referencia afín de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, ya que

$$\{\vec{v}_1' := \overrightarrow{Q_0 Q_1} = (0, 0, 1), \vec{v}_2' := \overrightarrow{Q_0 Q_2} = (2, 0, -1), \vec{v}_3' := \overrightarrow{Q_0 Q_3} = (-1, 0, 0)\}$$

no es una base de \mathbb{R}^3 , sino que son generadores del plano vectorial $\{y = 0\}$. Escogemos $Q'_3 = (0, 2, 0)$. Se puede comprobar que

$$\mathcal{R}'_a = \{Q_0 = (0, 1, 0), Q_1 = (0, 1, 1), Q_2 = (2, 1, -1), Q'_3 = (0, 2, 0)\}$$

es una referencia afín con referencia cartesiana asociada

$$\mathcal{R}'_c = \{Q_0 = (0, 1, 0); \vec{v}'_1 = (0, 0, 1), \vec{v}'_2 = (2, 0, -1), \vec{w}' := \overrightarrow{Q_0 Q'_3} = (0, 1, 0)\}.$$

Para poder representar matricialmente la aplicación afín f respecto a las referencias afines \mathcal{R}_a y \mathcal{R}'_a , nos falta conocer las coordenadas de $f(P_3) = Q_3$ respecto de \mathcal{R}'_a . Expresamos Q_3 como combinación afín de los puntos de \mathcal{R}'_a :

$$(-1, 1, 0) = \lambda_0(0, 1, 0) + \lambda_1(0, 1, 1) + \lambda_2(2, 1, -1) + \lambda_3(0, 2, 0), \quad \text{con } \sum_{i=0}^3 \lambda_i = 1,$$

lo que da lugar al sistema

$$\begin{cases} -1 &= & & \lambda_2 \\ 1 &= & \lambda_0 & +\lambda_1 & +\lambda_2 & +2\lambda_3 \\ 0 &= & & \lambda_1 & -\lambda_2 \\ 1 &= & \lambda_0 & +\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 \end{cases}$$

con solución $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (2, -1/2, -1/2, 0)$, que son las coordenadas baricéntricas de Q_3 respecto de \mathcal{R}'_a . Por tanto,

$$M_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde en cada columna aparecen las coordenadas baricéntricas de Q_0, Q_1, Q_2 y Q_3 en la referencia afín \mathcal{R}'_a . Obsérvese que el rango de la matriz es 3, luego el rango de \vec{f} que coincide con la dimensión de su imagen es 2, lo que concuerda con el hecho de que los puntos Q_0, Q_1, Q_2 y Q_3 , generan un plano en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$.

Para obtener la expresión de f respecto de las referencias cartesianas asociadas a las referencias afines usamos

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c}(f) = M_3^{-1} \cdot M_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a}(f) \cdot M_3 =$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Para poder entender el comportamiento de f , vamos a transformar su matriz en la matriz respecto de la referencia cartesiana estándar en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$:

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{R}_e \mathcal{R}_e}(f) &= C_{\mathcal{R}'_c \mathcal{R}_e} \cdot M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c}(f) \cdot C_{\mathcal{R}_e \mathcal{R}_c} = \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)^{-1} = \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Observamos que $M_{\mathcal{R}_e \mathcal{R}_e}(f)$, obviamente, es una matriz del mismo rango que $M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c}(f)$.

Con esta representación obtenemos que la imagen por f del origen $\vec{0} = (0, 0, 0)$ es el punto $(1, 1, 1)$ y que la aplicación vectorial asociada viene dada por

$$\vec{f}(x, y, z) = (y - z, 0, -x)$$

con lo cual

$$f(x, y, z) = (y - z + 1, 1, -x + 1).$$

Es sencillo ver que

$$\ker(\vec{f}) = \left\{ \begin{array}{ccc} y & -z & = 0 \\ x & & = 0 \end{array} \right.$$

de dimensión 1.

Usando esta representación también podemos calcular imágenes de subespacios. Sea L la recta que pasa por el punto $R = (0, 0, 1)$ de dirección $\vec{u} = (1, 1, 0)$, es decir

$$L = R + \mathcal{L}\{\vec{u}\} = (0, 0, 1) + \mathcal{L}\{(1, 1, 0)\}.$$

Su imagen viene dada por

$$f(L) = f(R) + \vec{f}(\mathcal{L}\{\vec{u}\}) = f(R) + \mathcal{L}\{\vec{f}(\vec{u})\}.$$

Para calcular $f(R)$ hacemos

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y para calcular $\vec{f}(\vec{u})$ hacemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$f(L) = (0, 1, 1) + \mathcal{L}\{(1, 0, -1)\}.$$

Por otra parte, si queremos calcular la imagen de la recta M , definida por las ecuaciones implícitas

$$M : \begin{cases} x & = & -1 \\ y - z & = & 2 \end{cases}$$

observamos que la dirección de M es la del núcleo de \vec{f} , por lo tanto esperamos que la imagen de M por la aplicación afín f sea de dimensión 0, luego un punto. Podemos escribir $M = (-1, 2, 0) + \mathcal{L}\{(0, 1, 1)\}$, y comprobamos que

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y para calcular $\vec{f}(\vec{u})$ hacemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$f(M) = (3, 1, 2) + \mathcal{L}\{(0, 0, 0)\},$$

luego $f(M)$ es el punto $(3, 1, 2)$. Se puede comprobar como, escogiendo cualquier otro punto de M , la imagen por f es el mismo punto $(3, 1, 2)$.

En los ejemplos anteriores vemos que, análogamente al caso vectorial, podemos calcular la dimensión de la imagen de un subespacio a partir de la del subespacio de partida y las propiedades de la aplicación lineal asociada. Sea $f : A \rightarrow A'$ una aplicación afín y sea $B \subset A$ un subespacio afín de dirección $W \subset V$. La aplicación lineal asociada \vec{f} verifica

$$\dim A = \dim V = \dim \text{Ker } \vec{f} + \dim \text{im } \vec{f}.$$

De igual modo, para la dirección W se tiene que

$$\dim W = \dim(W \cap \text{Ker } \vec{f}) + \dim \vec{f}(W),$$

por tanto

$$\dim B = \dim W = \dim(W \cap \text{Ker } \vec{f}) + \dim \vec{f}(W) = \dim(W \cap \text{Ker } \vec{f}) + \dim f(B).$$

2.1.3. Puntos fijos y subespacios invariantes

En el estudio de las aplicaciones afines de un espacio afín en sí mismo, juega un papel esencial el cálculo de los puntos fijos y de los subespacios invariantes igual que los vectores propios (que dan lugar a direcciones y subespacios lineales invariantes) en los endomorfismos lineales.

Definición 2.1.12. El conjunto de *puntos fijos* de una aplicación afín $f : A \longrightarrow A$ es

$$\text{Fix}(f) = \{P \in A : f(P) = P\}.$$

Si $\text{Fix}(f)$ es no vacío, es un subespacio afín de dirección

$$\overrightarrow{\text{Fix}(f)} = \text{Ker}(\overrightarrow{f} - \text{Id}_V)$$

Supongamos que existe $P \in \text{Fix}(f)$. Para todo $Q \in \text{Fix}(f)$ se verifica

$$Q = P + \overrightarrow{PQ} = f(P + \overrightarrow{PQ}) = f(P) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) = P + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}).$$

Entonces se tiene que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ})$, y el vector \overrightarrow{PQ} es un punto fijo de la aplicación lineal asociada \overrightarrow{f} , por lo tanto

$$\overrightarrow{PQ} \in \text{Ker}(\overrightarrow{f} - \text{Id}_V).$$

Dada una referencia cartesiana $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ de A , un punto fijo P de coordenadas $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ respecto de \mathcal{R}_c , verifica

$$P = f(P) = f(O + \overrightarrow{OP}) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OP})$$

que, en coordenadas respecto de \mathcal{R}_c , equivale a

$$\mathbf{x}^t = \mathbf{b}^t + M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})\mathbf{x}^t$$

donde \mathbf{b} son las coordenadas de $f(O)$ respecto de \mathcal{R}_c . Entonces el conjunto de puntos fijos (en coordenadas cartesianas respecto de cualquier referencia elegida \mathcal{R}_c) se puede calcular resolviendo el sistema

$$\left(M_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}_c}(f) - I_{n+1}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.1)$$

Definición 2.1.13. Un subespacio afín $B \subset A$ es *invariante* por una aplicación afín $f : A \longrightarrow A$ si $f(B) \subset B$.

Observación 2.1.14. En particular, el conjunto de puntos fijos de f , si es no vacío, es un subespacio invariante.

La siguiente proposición caracteriza los subespacios invariantes de un espacio afín.

Proposición 2.1.15. *Un subespacio afín $B = P + W$ es invariante para f si y solo si W es invariante para \vec{f} y $\overrightarrow{Pf(P)} \in W$.*

Demostración. Si B es invariante entonces $f(P) \in B$. Como consecuencia el vector $\overrightarrow{Pf(P)}$ une dos puntos de B y, por tanto, $\overrightarrow{Pf(P)} \in W$. Por otro lado, como $f(B) = f(P) + \vec{f}(W) \subset B$, la dirección de $f(B)$, que es $\vec{f}(W)$, verifica que $\vec{f}(W) \subset W$, por lo que W es invariante para \vec{f} .

Recíprocamente, sea $Q = P + \overrightarrow{PQ} \in B$. Entonces

$$f(Q) = f(P) + \vec{f}(\overrightarrow{PQ}) = P + \overrightarrow{Pf(P)} + \vec{f}(\overrightarrow{PQ}) \in B,$$

y B es invariante. □

En particular, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.1.16. *Una recta afín $L = P + \mathcal{L}\{\vec{v}\}$ es invariante si y solo si $\mathcal{L}\{\vec{v}\}$ es invariante por \vec{f} (que equivale a que \vec{v} sea vector propio de \vec{f}) y $\overrightarrow{Pf(P)} \in \mathcal{L}\{\vec{v}\}$, es decir $\overrightarrow{Pf(P)}$ es múltiplo de \vec{v} .*

Proposición 2.1.17. *Sea \mathcal{R}_c una referencia cartesiana de un espacio afín A y sea $f : A \rightarrow A$ una aplicación afín, con matriz respecto de dicha referencia $M_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}_c}(f)$. Un hiperplano de A de ecuación*

$$b_0 + b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0$$

en coordenadas cartesianas respecto de \mathcal{R}_c es invariante si existe un $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que el vector $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ satisface el sistema de ecuaciones

$$\left(M_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}_c}(f)^t - \lambda \cdot I_{n+1} \right) \cdot \mathbf{b}^t = \mathbf{0}$$

Demostración. En coordenadas cartesianas respecto de \mathcal{R}_c , un hiperplano H de ecuación

$$\mathbf{b} \cdot (1 \mid \mathbf{x})^t = 0$$

es invariante por f si, para cada $P \in H$, con coordenadas \mathbf{x} , se cumple

$$\mathbf{b} \cdot M_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}_c}(f) \cdot (1 \mid \mathbf{x})^t = 0.$$

Como todas las ecuaciones de H son múltiplos unas de otras y la expresión anterior (si no es nula) define una ecuación de H , entonces

$$\mathbf{b} \cdot M_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}_c}(f) = \lambda \cdot \mathbf{b}$$

lo que, trasponiendo, nos da la expresión del enunciado. □

Los dos resultados anteriores permiten calcular todos los subespacios afines invariantes en aplicaciones afines de espacios A con dimensión menor o igual que tres. En efecto, los posibles subespacios invariantes serán puntos (fijos), rectas o planos (hiperplanos).

Ejemplo 2.1.18. Sea $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ la aplicación afín

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 1, x_2 - x_3 + 1, x_1 - x_3)$$

cuya matriz respecto de la referencia cartesiana canónica viene dada por

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

Para calcular sus puntos fijos resolvemos el sistema

$$\left(M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f) - I_4 \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

que viene a ser

$$\text{Fix}(f) : \begin{cases} 1 & +x_3 & = & 0 \\ 1 & -x_1 & & = & 0 \\ & & -x_2 & -2x_3 & = & 0 \end{cases}$$

cuya única solución es $\text{Fix}(f) = \{(1, 2, -1)\}$.

Para calcular los hiperplanos invariantes $b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$ resolvemos el sistema

$$\left(M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f)^t - \lambda \cdot I_4 \right) \cdot \mathbf{b}^t = \mathbf{0}$$

que equivale a

$$\begin{cases} (1 - \lambda)b_0 & +b_1 & +b_2 & & = & 0 \\ & (1 - \lambda)b_1 & -b_2 & & = & 0 \\ & & (1 - \lambda)b_2 & -b_3 & = & 0 \\ & b_1 & & +(-1 - \lambda)b_3 & = & 0 \end{cases}$$

Los valores λ son valores propios de la matriz $M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f)^t$, cuyo polinomio característico es

$$P(\lambda) = \lambda(1 - \lambda)(-\lambda^2 + \lambda + 1) = -\lambda(1 - \lambda)\left(\lambda - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

Sustituyendo por $\lambda = 1$ en el sistema no existen soluciones de hiperplanos no triviales. Si sustituimos por $\lambda = 0$ encontramos el hiperplano invariante

$$\{x_1 + x_2 + x_3 = 2\}.$$

Para las otras dos raíces del polinomio característico obtenemos los hiperplanos

$$\begin{aligned} \frac{3 + \sqrt{5}}{2}x_1 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x_2 + x_3 &= \frac{4}{1 - \sqrt{5}} \\ \frac{3 - \sqrt{5}}{2}x_1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x_2 + x_3 &= \frac{4}{1 + \sqrt{5}}. \end{aligned}$$

2.2. Algunas aplicaciones afines

Dar una clasificación exhaustiva de todas las aplicaciones afines de un espacio afín A en sí mismo es complicado. En esta sección vamos a estudiar distintos tipos particulares de aplicaciones afines, determinando sus puntos fijos y sus subespacios invariantes. En toda la sección, A será un espacio afín de dimensión n y dirección V , y las aplicaciones $f : A \rightarrow A$ serán afines.

2.2.1. Traslaciones

Dado $\vec{v} \in V$, definimos la *traslación* de vector \vec{v} , denotada por τ como

$$\begin{array}{ccc} \tau : A & \longrightarrow & A \\ P & \longmapsto & P + \vec{v} \end{array}$$

Se trata de una aplicación afín ya que, dados $P, Q \in A$,

$$\overrightarrow{\tau(PQ)} = \overline{\tau(P)\tau(Q)} = \overline{(P + \vec{v})(Q + \vec{v})} = \overline{PQ}$$

por lo que su aplicación lineal asociada es la identidad, $\overrightarrow{\tau} = \text{Id}_V$. Sea $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ una referencia cartesiana de A . Como $\tau(O) = O + \vec{v}$, las coordenadas cartesianas $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ de $\tau(O)$ respecto de \mathcal{R}_c son las coordenadas de \vec{v} respecto de la base \mathcal{B} . Por tanto, la matriz de τ respecto a la referencia cartesiana \mathcal{R}_c es

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(\tau) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \mathbf{a}^t & I_n \end{array} \right)$$

La inversa de una traslación de vector \vec{v} es la traslación de vector $-\vec{v}$, que tiene como matriz asociada respecto a \mathcal{R}_c

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(\tau) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline -\mathbf{a}^t & I_n \end{array} \right).$$

Si $\vec{v} \neq \mathbf{0}$, una traslación τ no tiene puntos fijos. Los subespacios invariantes serán de la forma $B = P + W$ con $W \subset V$ invariante (lo que se cumple siempre ya que $\overrightarrow{\tau} = \text{Id}_V$) y tales que $\overline{P\tau(P)} \in W$, lo que equivale a $\vec{v} \in W$. Por tanto B es un subespacio afín invariante de una traslación si el vector de traslación \vec{v} está contenido en su dirección W .

Una propiedad importante de las traslaciones es que llevan rectas en rectas paralelas a ellas. En efecto, si $L = P + \mathcal{L}\{\vec{w}\}$, su imagen trasladada es

$$\tau(P + L[\vec{w}]) = \tau(P) + \overrightarrow{\tau}(L[\vec{w}]) = P + \vec{v} + L[\vec{w}]$$

que es la recta paralela a L por el punto $Q := P + \vec{v}$.

Observación 2.2.1. Si consideramos un espacio vectorial V sobre \mathbb{K} con su estructura de espacio afín estándar $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ podemos entender una aplicación afín $f : \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ como la composición de una aplicación lineal y una traslación de vector $\vec{v} := f(\vec{0})$,

$$f = \tau \circ \vec{f}.$$

En efecto, dado $P \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$,

$$f(P) = f(\vec{0}) + \vec{f}(\vec{0}P) = f(\vec{0}) + \vec{f}(P - \vec{0}) = \vec{v} + \vec{f}(P)$$

interpretando al final P como vector de V .

Si $f(\vec{0}) = \vec{0}$, entonces $f = \vec{f}$ y podemos interpretar una aplicación lineal como una aplicación afín que lleva el origen en el origen.

Ejemplo 2.2.2. En $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, consideramos la traslación $\tau : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ de vector $\vec{v} = (3, 1)$. Como vemos en la Figura 2.2.2, la imagen por τ del punto $P = (2, 3)$ es $Q := P + \vec{v}$. Los subespacios invariantes por τ son aquellos cuya dirección contiene al vector \vec{v} como, por ejemplo, la recta $L := \{x - 3y = 3\}$, cuya dirección es la recta vectorial $\{x - 3y = 0\} + \mathcal{L}[\vec{v}]$. Respecto de la referencia cartesiana estándar, la matriz de τ viene dada por

$$M_{\mathcal{R}_{c,e}\mathcal{R}_{c,e}}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

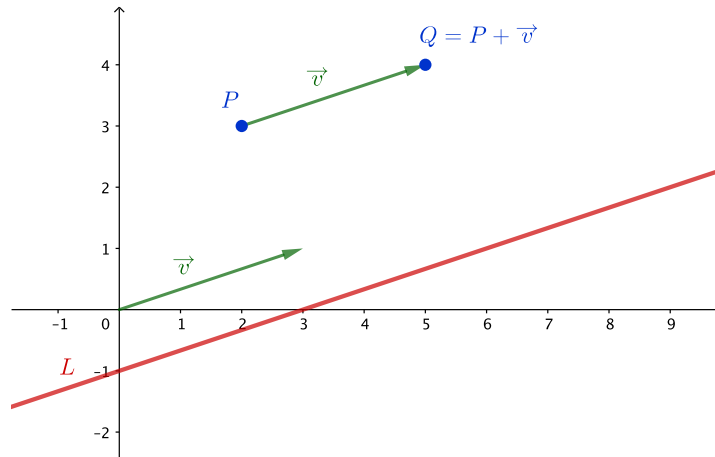


Figura 2.1: Traslación en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ de vector $\vec{v} = (3, 1)$ y recta $L : \{x - 3y = 3\}$ invariante.

2.2.2. Homotecias

Dado un punto $C \in B$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, tal que $\lambda \neq 0, 1$, definimos la *homotecia* de centro C y razón λ como la aplicación

$$\begin{aligned} \eta: A &\longrightarrow A \\ P &\longmapsto C + \lambda \overrightarrow{CP} \end{aligned}$$

Se trata de una aplicación afín ya que, dados $P, Q \in A$,

$$\overrightarrow{\eta(P)\eta(Q)} = \overrightarrow{\eta(P)\eta(Q)} = \overrightarrow{(C + \lambda \overrightarrow{CP})(C + \lambda \overrightarrow{CQ})} = \lambda \overrightarrow{PQ}$$

por lo que su aplicación lineal asociada es $\overrightarrow{\eta} = \lambda \text{Id}_V$. Respecto de la referencia cartesiana $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$, como

$$\eta(O) = C + \lambda \overrightarrow{CO} = O + \overrightarrow{OC} + \lambda \overrightarrow{CO} = O + (1 - \lambda) \overrightarrow{OC},$$

las coordenadas cartesianas de $\eta(O)$ respecto a \mathcal{R}_c son $(1 - \lambda)\mathbf{a}$, donde $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ son las coordenadas del centro C . La matriz de η respecto a la referencia cartesiana \mathcal{R}_c es

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(\eta) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline (1 - \lambda)\mathbf{a}^t & \lambda I_n \end{array} \right)$$

La inversa de una homotecia de centro C y razón λ es la homotecia de centro C y razón λ^{-1} con matriz, respecto a \mathcal{R}_c ,

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(\eta) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline (1 - \lambda^{-1})\mathbf{a}^t & \lambda^{-1} I_n \end{array} \right).$$

Es sencillo comprobar que el producto de ambas matrices es la identidad, por lo que las aplicaciones son una inversa de la otra.

Observación 2.2.3. La razón por la cual excluimos los valores 0 y 1 es porque, para $\lambda = 0$ obtenemos la aplicación constante que lleva cualquier punto a C . Para $\lambda = 1$ la aplicación es la identidad en el espacio afín A . Si $\lambda = -1$ obtenemos un caso especial de homotecia que es la *simetría central* respecto a C , que refleja cada punto de A respecto al centro C .

Para estudiar los puntos fijos de una homotecia resolvemos el sistema (2.1),

$$\left(M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(\eta) - I_{n+1} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline (1 - \lambda)\mathbf{a}^t & (\lambda - 1)I_n \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

que equivale a

$$(1 - \lambda)\mathbf{a}^t = (1 - \lambda)\mathbf{x}^t \quad \text{si y solo si} \quad \mathbf{a}^t = \mathbf{x}^t$$

y el único punto fijo es el centro C de coordenadas \mathbf{a} .

Por otra parte, los subespacios afines invariantes son aquellos que contienen al centro C . En efecto, supongamos que $B = P + W \subset A$ es invariante. Cualquier subespacio vectorial $W \subset V$ es invariante para $\overrightarrow{\eta} = \lambda \text{Id}_V$, por lo que la única condición será que $\overrightarrow{P\eta(P)} \in W$. Pero si se tiene que

$$\overrightarrow{P\eta(P)} = \overrightarrow{P(C + \lambda \overrightarrow{CP})} = (1 - \lambda) \overrightarrow{PC} \in W$$

entonces necesariamente $\overrightarrow{PC} \in W$ y, por tanto, $C \in B$. Que la pertenencia de C a B es suficiente para que B sea invariante es un ejercicio sencillo.

Las homotecias llevan subespacios afines en subespacios afines paralelos a ellos, ya que la aplicación lineal asociada es una homotecia vectorial donde todos los vectores son propios (de valor propio λ). En efecto, si $B = P + W$ es un subespacio afín, su imagen por una homotecia es

$$\eta(B) = \eta(P) + \overrightarrow{\eta}(W) = \eta(P) + \lambda \text{Id}_V(W) = \eta(P) + W$$

que es un subespacio paralelo a B , de la misma dimensión.

Observación 2.2.4. Las traslaciones y homotecias forman un subgrupo del grupo de aplicaciones afines $GA(n, \mathbb{K})$. En efecto, por la Proposición 2.1.6 1., las aplicaciones lineales asociadas resultantes de componer traslaciones con traslaciones son traslaciones (de vector la suma de vectores), de componer traslaciones con homotecias son homotecias (de centro trasladado), y de componer homotecias con homotecias son homotecias (de razón el producto de las razones).

Si componemos una homotecia η_1 de centro C_1 y razón λ_1 con otra homotecia η_2 de centro C_2 y razón λ_2 , con $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 1$, la aplicación afín $\eta_2 \circ \eta_1$ es una homotecia de centro

$$C_1 + \frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1 \lambda_2} \overrightarrow{C_1 C_2}$$

y razón $\lambda_1 \cdot \lambda_2$. En el caso de que $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$, la composición $\eta_2 \circ \eta_1$ es una traslación de vector $(\lambda_1 - 1) \overrightarrow{C_1 C_2}$.

Obsérvese que la composición de una traslación con una homotecia no conmuta, por tanto este subgrupo no es abeliano.

Ejemplo 2.2.5. Consideremos en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ la homotecia $\eta : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ de centro $C = (4, 3)$ y razón $\lambda = 2$. Como vemos en la Figura 2.2.5, la imagen por η del punto $P = (4, 4)$ es

$$\eta(P) := C + \lambda \cdot \overrightarrow{CP} = (4, 5).$$

Los subespacios invariantes por η son aquellos que contienen al centro, como por ejemplo la recta $B := \{3x - 4y = 0\}$.

Respecto de la referencia cartesiana estándar, la matriz de η viene dada por

$$M_{\mathcal{R}_{c,e}\mathcal{R}_{c,e}}(\eta) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

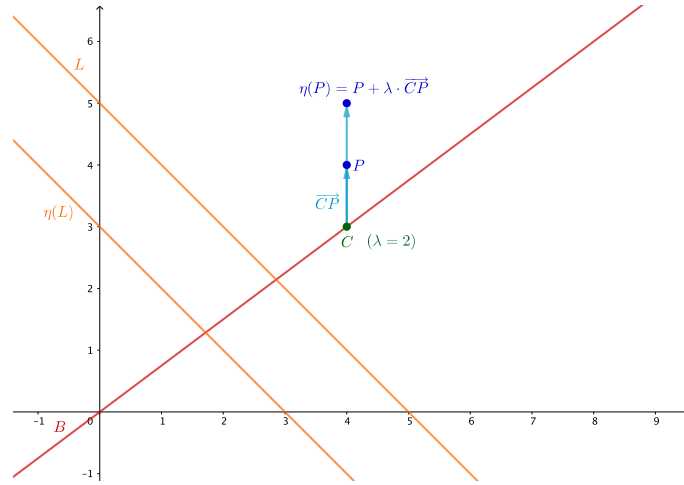


Figura 2.2: Homotecia en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ de centro $C = (4, 3)$ y razón $\lambda = 2$. La recta $B : \{3x - 4y = 0\}$ es un subespacio invariante porque contiene al centro de la homotecia. La imagen de la recta $L : \{x + y = 5\}$ es otra recta paralela $\eta(L) : \{x + y = 3\}$.

La homotecia conserva direcciones, por lo que la imagen de la recta $L : \{x + y = 5\}$ es otra recta paralela $\eta(L) : \{x + y = 3\}$, ambas con dirección $\mathcal{L}[(1, -1)]$.

Ejemplo 2.2.6. En la recta afín real $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$, la matriz (respecto de la referencia canónica estándar) de una afinidad es de la forma

$$M_{\mathcal{R}_{c,e}\mathcal{R}_{c,e}}(\eta) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ b & \lambda \end{array} \right).$$

con $\lambda \neq 0$. Si $\lambda = 1$ se trata de una traslación de vector $b \in \mathbb{R}$ (en el caso particular $b = 0$ se trata de la identidad). Si $\lambda \neq 1$ se trata de una homotecia de centro $c \in \mathbb{R}$ con $(1 - \lambda) \cdot c = b$, luego $c = \frac{b}{(1-\lambda)}$. Por tanto, las afinidades de la recta son siempre traslaciones u homotecias.

2.2.3. Proyecciones

Sean $B \subset A$ un subespacio afín con dirección $W \subset V$, y sea U una dirección complementaria en V , es decir, tal que $W \oplus U = V$. Definimos la *proyección* sobre B paralela a U como la aplicación

$$\begin{aligned} \pi : A &\longrightarrow A \\ P &\longmapsto B \cap (P + U) \end{aligned}$$

Esta aplicación está bien definida ya que $B \cap (P + U)$ es un único punto. Si fuese $B \cap (P + U) = \emptyset$, como W y U son complementarias verifican que $W \cap U = \{\mathbf{0}\}$, por lo que aplicando la fórmula de Grassmann tenemos

$$\dim B + \dim(P + U) = \dim B + \dim(P + U) - \dim(W \cap U) + 1 = \dim W + \dim U + 1 = \dim A + 1$$

y la dimensión de la suma de subespacios excedería la del espacio ambiente, lo que es imposible. Por tanto $B \cap (P + U) \neq \emptyset$ y, entonces, es una subvariedad afín con dirección la intersección de sus direcciones $W \cap U = \{\mathbf{0}\}$, luego tiene dimensión cero y, por consiguiente, es un punto $Q := \pi(P) = B \cap (P + U)$.

La proyección es una aplicación afín. En efecto, sean $P \in B$ y $Q \in A$. Como $P \in B \cap (P + U)$ se tiene que P es fijo por π , es decir, $\pi(P) = P$, y

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P\pi(Q)} + \overrightarrow{\pi(Q)Q},$$

donde el primer vector de la suma pertenece a W (ya que P y $\pi(Q)$ pertenecen a $P + W$) y el segundo pertenece a U (ya que tanto $\pi(Q)$ como Q pertenecen a $Q + U$). Como $W \oplus U = V$ la anterior descomposición es la descomposición en suma directa del vector \overrightarrow{PQ} y su imagen es

$$\overrightarrow{\pi}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\pi(P)\pi(Q)} = \overrightarrow{P\pi(Q)}.$$

Por tanto, π es una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada $\overrightarrow{\pi}$ es la proyección lineal sobre W con dirección U que a cada vector $\vec{v} \in V$ tal que $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$ únicos con $\vec{w} \in W$, $\vec{u} \in U$, le asigna

$$\overrightarrow{\pi}(\vec{v}) = \vec{w}.$$

Dada una referencia cartesiana

$$\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_d, u_1, \dots, u_{n-d}\}\},$$

donde $O \in B$, $\{w_1, \dots, w_d\}$ es una base de W y $\{u_1, \dots, u_{n-d}\}$ es una base de U , la matriz de π respecto de \mathcal{R}_c viene dada por

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(\pi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & & 0 \\ \hline & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Véase que una proyección no es una afinidad (su matriz no es invertible). Sin embargo, una propiedad de las proyecciones es que son *idempotentes* ya que $\pi \circ \pi = \pi$. Se puede demostrar el recíproco, al igual que en el caso vectorial, es decir, que una aplicación afín idempotente es necesariamente una proyección.

Los puntos fijos de una proyección son las soluciones del sistema (2.1)

$$\left(M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(\pi) - I_{n+1} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_{n-d} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

que equivale a

$$x_{d+1} = \cdots = x_n = 0$$

o, lo que es lo mismo, P es punto fijo si y solo si $\overrightarrow{OP} \in W$, lo que equivale a $P \in B$. Por consiguiente, los puntos fijos de una proyección sobre B son todos los puntos del subespacio afín B .

Usando la Proposición 2.1.15, los subespacios invariantes $C \subset A$ verifican que su dirección $Y \subset V$ es invariante para $\overrightarrow{\pi}$. Los subespacios $Y \subset V$ que verifican esta condición son aquellos que se pueden escribir como $Y = Y_W \oplus Y_U$, donde $Y_W \subset W$, $Y_U \subset U$. Como la imagen de un subespacio C está contenida en B , si C es invariante necesariamente $\pi(C) \subset C$ y $\pi(C) \subset B$ por lo que $C \cap B \neq \emptyset$. Entonces podemos suponer que $B = P + W$ y $C = P + Y$, $P \in C \cap B$, y la otra condición para que C sea invariante, $\overrightarrow{P\pi(P)} = \overrightarrow{PP} \in Y$, se verifica trivialmente. Por tanto los subespacios invariantes son de la forma $C = P + (Y_W \oplus Y_U)$, con $P \in B$, $Y_W \subset W$ e $Y_U \subset U$. Esto incluye subespacios $C \subset B$ (subespacios de puntos fijos, cuando $Y_U = \{0\}$), y subespacios de dirección paralela a U por un punto de B (cuando $Y_U = U$, entonces $U \subset Y$, o cuando $Y_W = \{0\}$, entonces $Y \subset U$), aunque existen más casos (cuando una base de Y combina vectores de W y U).

Ejemplo 2.2.7. Consideremos en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ la proyección $\pi : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ con base $B = \{-x + 2y = 2\}$ y dirección $U = \mathcal{L}\{(1, 2)\} : \{-2x + y = 0\}$. Como se aprecia en la Figura 2.2.7, la imagen por π del punto $P = (3, 4)$ es la intersección de $C = P + U$ con B , el punto $\pi(P) = (2, 2)$. La recta C es invariante por π ya que corta a B y lleva la misma dirección que la de la proyección U . En este ejemplo los únicos subespacios invariantes son todas las rectas paralelas a C (todas con la misma dirección U y que proyectan en el punto intersección con B) además de B (o cualquier punto contenido en B , obviamente).

Como el punto $(0, 1) \in B$, la dirección de B es $W = \mathcal{L}\{(2, 1)\}$ y $U = \mathcal{L}\{(1, 2)\}$, respecto de la referencia cartesiana

$$\mathcal{R}_c = \{(0, 1); (2, 1), (1, 2)\}$$

la matriz de π viene dada por

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(\pi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

2.2.4. Simetrías

Una vez hemos definido la proyección π respecto de $B \subset A$ paralela a U , podemos definir una simetría con los mismos elementos. Recordamos que la dirección de B es un

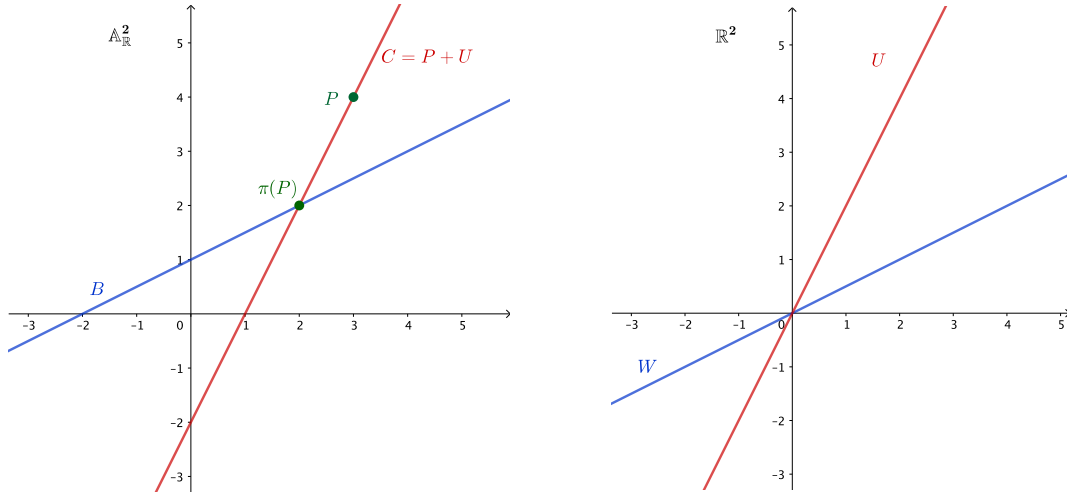


Figura 2.3: Izquierda, proyección en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ con base $B : \{-x + 2y = 2\}$ y dirección $U = L\{(1, 2)\} : \{-2x + y = 0\}$. La recta $C : \{-2x + y = -2\}$ es invariante así como cualquier recta paralela a ella. Derecha, subespacios vectoriales $W \oplus U = \mathbb{R}^2$.

subespacio vectorial $W \subset V$ tal que $W \oplus U = V$. Definimos la *simetría* sobre B paralela a U , denotada por σ como

$$\begin{aligned} \sigma : A &\longrightarrow A \\ P &\longmapsto \pi(P) + \overrightarrow{P\pi(P)}, \end{aligned}$$

que está bien definida por estarlo la proyección π .

La simetría también es una aplicación afín porque, dado un punto $P \in B$ y otro punto $Q \in A$, tenemos la descomposición

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P\pi(Q)} + \overrightarrow{\pi(Q)Q}$$

como veíamos en la proyección, en vectores de W y U con $W \oplus U = V$. Como el punto $P \in B$ es fijo por la simetría tenemos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\sigma(PQ)} &= \overrightarrow{\sigma(P)\sigma(Q)} = \overrightarrow{P\sigma(Q)} = \\ &= \overrightarrow{P(\pi(Q) + \overrightarrow{Q\pi(Q)})} = \overrightarrow{P\pi(Q)} + \overrightarrow{Q\pi(Q)} = \overrightarrow{P\pi(Q)} - \overrightarrow{\pi(Q)Q}. \end{aligned}$$

Por lo que σ es aplicación afín con con aplicación lineal asociada $\overrightarrow{\sigma}$, la simetría lineal respecto de W con dirección U , que a cada vector $\vec{v} \in V$ tal que $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$ únicos con $\vec{w} \in W$, $\vec{u} \in U$, le asigna

$$\overrightarrow{\sigma}(\vec{v}) = \vec{w} - \vec{u}.$$

Nótese además que $\sigma = 2\pi - \text{Id}_A$ y que $\vec{\sigma} = 2\vec{\pi} - \text{Id}_V$.

En la referencia cartesiana de la proyección

$$\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_d, u_1, \dots, u_{n-d}\}\},$$

donde $O \in B$, $\{w_1, \dots, w_d\}$ son base de W y $\{u_1, \dots, u_{n-d}\}$ son base de U , la matriz de σ respecto de \mathcal{R}_c viene dada por

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(\sigma) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & & 0 \\ \hline & I_d & 0 \\ 0 & 0 & -I_{n-d} \end{array} \right)$$

que es una matriz invertible con inversa ella misma. Por tanto las simetrías son afinidades cuya inversa es ella misma, $\sigma \circ \sigma = \text{Id}_A$, es decir, son *involuciones*. Como en el caso de las proyecciones se puede demostrar que, recíprocamente, cualquier involución afín es una simetría.

Con ayuda de la ecuación (2.1) obtenemos los puntos fijos de una simetría

$$\left(M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(\pi) - I_{n+1} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & & 0 \\ \hline & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \cdot I_{n-d} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

que equivale, como en la proyección, a

$$x_{d+1} = \dots = x_n = 0,$$

luego los puntos fijos de una simetría sobre B son también todos los puntos del subespacio afín B .

Para el cálculo de los subespacios invariantes se usa un tratamiento similar a las proyecciones. Dado un subespacio invariante $C \in B$ su dirección Y debe poderse escribir como $Y = Y_W \oplus Y_U$, donde $Y_W \subset W$, $Y_U \subset U$. La otra condición es que $\overrightarrow{Q\sigma(Q)} \in Y$, para todo $Q \in C$. Pero esta condición equivale a

$$\overrightarrow{Q\sigma(Q)} = \overrightarrow{Q(\pi(Q) + \overrightarrow{Q\pi(Q)})} = 2 \cdot \overrightarrow{Q\pi(Q)} \in Y,$$

que es la misma condición que para las proyecciones. Por tanto, los subespacios invariantes para una simetría respecto de B con dirección U son los mismos que los de una proyección sobre el mismo subespacio con la misma dirección, es decir, $C = P + (Y_W \oplus Y_U)$, con $P \in B$, $Y_W \subset W$ e $Y_U \subset U$.

Finalmente diremos que, dependiendo de la dimensión de B , una simetría es *central* si B es un punto, *axial* si B es una recta, o *especular* si B es un plano. Observa que una simetría central respecto a un punto B coincide una homotecia de centro B y razón $\lambda = -1$.

Ejemplo 2.2.8. Continuando con el Ejemplo 2.2.7, consideremos ahora la simetría $\sigma : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ respecto de $B : \{-x + 2y = 2\}$ con dirección $U = L[(1, 2)] : \{-2x + y = 0\}$. En la Figura 2.2.8 podemos ver que la imagen del punto $P = (3, 4)$ es la suma del punto P con el doble del vector $\overrightarrow{P\pi(P)}$, tal que $\sigma(P) = (1, 0)$. Se observa como $\sigma(P)$ es, efectivamente, el simétrico de P respecto de B , siguiendo la dirección U . La recta C también es invariante por σ como lo era por la proyección π , y cualquier otra recta paralela a C también lo es.

Tomando la misma referencia cartesiana con origen el punto $(0, 1) \in B$, y vectores $(2, 1) \in W$ $(1, 2) \in U$,

$$\mathcal{R}_c = \{(0, 1); (2, 1), (1, 2)\}$$

la matriz de σ viene dada por

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(\sigma) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

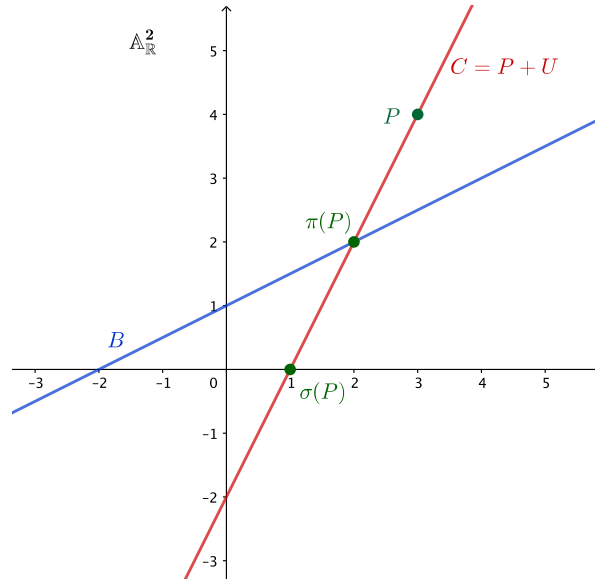


Figura 2.4: Simetría en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ respecto de $B : \{-x + 2y = 2\}$ y dirección $U = \mathcal{L}\{(1, 2)\} = \{-2x + y = 0\}$. La recta $C : \{-2x + y = -2\}$ es invariante así como cualquier recta paralela a ella.

Ejemplo 2.2.9. Sea $B \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ el plano de ecuación $B : \{x - y + z = 3\}$ y sea el subespacio vectorial $U = \mathcal{L}\{(0, 1, 0)\}$. Sea π la proyección sobre B con dirección U . La dirección de

B es $W := \{x - y + z = 0\} = \mathcal{L}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ (véase que $W \oplus U = \mathbb{R}^3$), y un punto de B es $P = (3, 0, 0)$. Por tanto, respecto de la referencia

$$\mathcal{R}_c = \{(3, 0, 0); \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0)\}\}$$

la matriz de la proyección viene dada por

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(\pi) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Si queremos construir la simetría respecto del mismo plano B con dirección U , respecto de la misma referencia \mathcal{R}_c , su matriz viene dada por

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(\pi) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Aplicación afín	f	Elementos	\vec{f}
Traslación	τ	Vector $\vec{v} \neq \mathbf{0}$	$\vec{\tau} = \text{Id}_V$
Homotecia	η	Centro C y razón $\lambda \neq 0, 1$	$\vec{\eta} = \lambda \cdot \text{Id}_V$
Proyección	π	Base $B = P + W$ y dirección U con $W \oplus U = V$	$\vec{\pi} _W = \text{Id}_W$ y $\vec{\pi} _U = \mathbf{0}$
Simetría	σ		$\vec{\sigma} _W = \text{Id}_W$ y $\vec{\sigma} _U = -\text{Id}_U$
Aplicación afín	Inversa	Puntos fijos	Subespacios invariantes
Traslación	$(\tau_{\vec{v}})^{-1} = \tau_{-\vec{v}}$	\emptyset	B con dirección W y $\vec{v} \in W$
Homotecia	$(\eta_{C,\lambda})^{-1} = \eta_{C,\lambda^{-1}}$	C	B con $C \in B$
Proyección	No tiene	B	$C = P + (Y_W \oplus Y_U)$ con $P \in B$ y $Y_W \subset W, Y_U \subset U$
Simetría	$\sigma^{-1} = \sigma$		

Cuadro 2.1: Resumen de propiedades de algunas aplicaciones afines distinguidas.

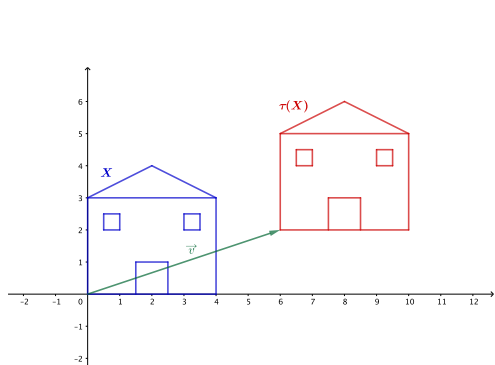
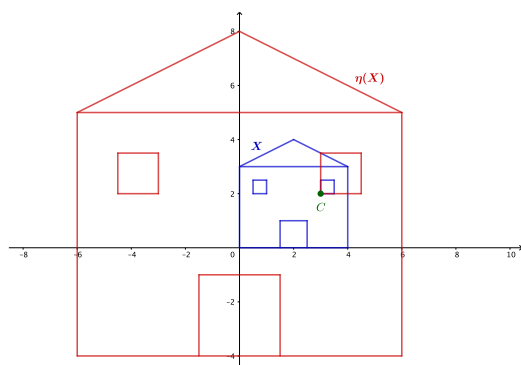
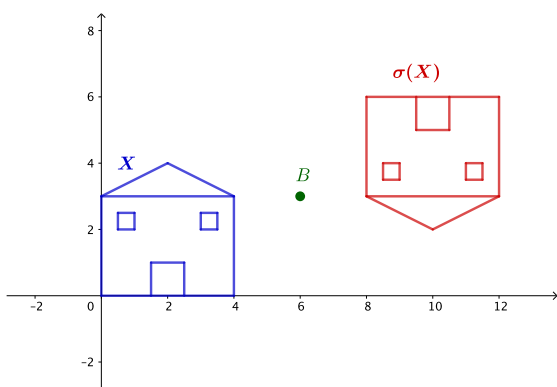
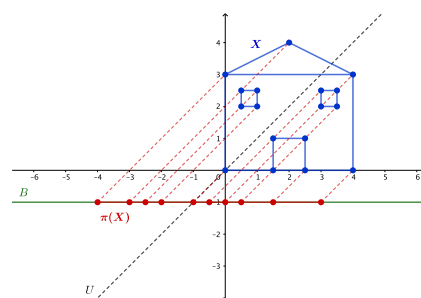
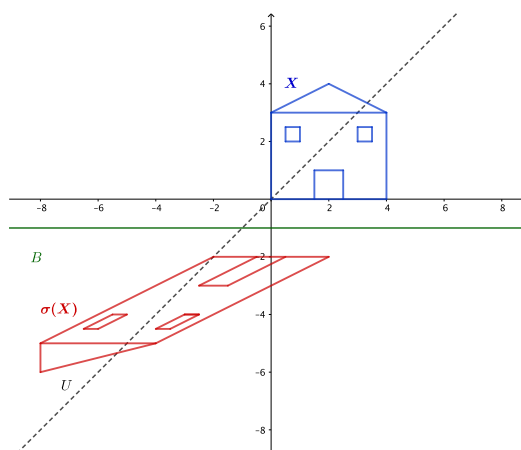
(a) Traslación de vector \vec{v} .(b) Homotecia de centro C y razón $\lambda = 3$.(c) Simetría central respecto de B .(d) Proyección sobre B con dirección U .(e) Simetría respecto de B con dirección U .

Figura 2.5: Transformaciones afines de una misma figura.

2.3. Razón simple

Finalizamos este capítulo con la exposición del concepto de razón simple de tres puntos alineados. Esta noción será el invariante que caracterizará las afinidades.

Definición 2.3.1. Dados puntos $P, Q, R \in A$ alineados, con $P \neq Q$, la *razón simple* de P, Q y R , denotada por $[P, Q, R] := \lambda$ es el único escalar λ tal que $\overrightarrow{PR} = \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}$.

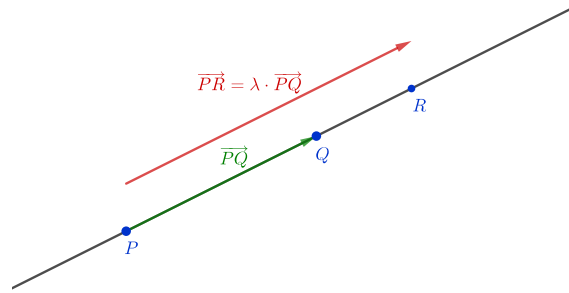


Figura 2.6: Razón simple $\lambda = [P, Q, R]$ de tres puntos alineados.

En la Figura 2.3 podemos observar cómo el valor de la razón simple varía dependiendo de la posición relativa de R respecto a los puntos P y Q . En particular, la razón simple es $\lambda = \frac{1}{2}$ cuando R es el punto medio del segmento que une P y Q .

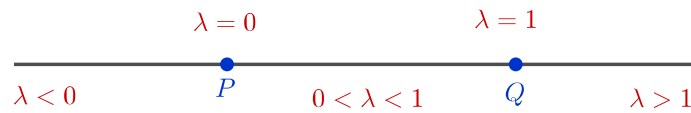


Figura 2.7: Razón simple $\lambda = [P, Q, R]$ dependiendo de la posición relativa de R respecto a P y Q .

Lemma 2.3.2. Dados P, Q, R pertenecientes a una recta L , $P \neq Q$, existe un único isomorfismo afín $f : L \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$ tal que $f(P) = 0$, $f(Q) = 1$ y $f(R) = \lambda = [P, Q, R]$.

Demostración. Como $P \neq Q$, $\mathcal{R}_a = \{P, Q\}$ es una referencia afín de la recta L . Como $\mathcal{R}_{a,e} = \{0, 1\}$ también es una referencia afín de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$, por el Teorema 2.1.10, existe un único isomorfismo afín f tal que $f(P) = 0$ y $f(Q) = 1$. Ahora,

$$f(R) = f(P) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PR}) = 0 + \overrightarrow{f}(\lambda \overrightarrow{PQ}) = 0 + \lambda \overrightarrow{f(P)f(Q)} = 0 + \lambda \overrightarrow{01} = \lambda.$$

□

Como muestra la siguiente proposición, las afinidades preservan la razón simple.

Proposición 2.3.3. *Sea $f : A \rightarrow A$ una aplicación afín tal que su restricción $f|_L : L \rightarrow L'$ a una recta L es un isomorfismo afín. Sean $P, Q, R \in L$, $f(P), f(Q), f(R) \in L'$, y supongamos que f respeta el orden de los puntos. Entonces, se conserva la razón simple*

$$[P, Q, R] = [f(P), f(Q), f(R)].$$

Demostración. Por el Lema 2.3.2, existen isomorfismos afines $g : L \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$, $h : L \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$ tales que $g(P) = 0$, $g(Q) = 1$, $g(R) = \lambda = [P, Q, R]$, y $h(f(P)) = 0$, $h(f(Q)) = 1$, $h(f(R)) = \lambda' = [f(P), f(Q), f(R)]$. Como la composición $h \circ f|_L$ lleva P a $0 \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$ y Q a $1 \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$ y $\{P, Q\}$ son referencia afín de L , $h \circ f|_L$ está completamente determinada por la imagen de estos dos puntos y, por tanto, $h \circ f|_L = g$. Entonces se tiene que

$$[P, Q, R] = \lambda = g(R) = (h \circ f|_L)(R) = h(f(R)) = \lambda' = [f(P), f(Q), f(R)].$$

□

Observación 2.3.4. El hecho de que las afinidades conserven la razón simple es consecuencia directa de la linealidad de la aplicación asociada. La razón simple de $P, Q, R \in L \subset A$ es, si $P \neq Q$, el único λ tal que $\overrightarrow{PQ} = \lambda \cdot \overrightarrow{PR}$. En términos de una referencia cartesiana $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$,

$$\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \lambda \cdot (\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP})$$

Ahora sea f una aplicación afín. Usando la linealidad de su aplicación asociada \overrightarrow{f} ,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(P)f(Q)} &= \overrightarrow{f(O)f(Q)} - \overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{f}(\lambda \cdot (\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP})) = \\ &= \lambda \cdot \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}) = \lambda \cdot (\overrightarrow{f(O)f(R)} - \overrightarrow{f(O)f(P)}) = \lambda \cdot \overrightarrow{f(P)f(R)} \end{aligned}$$

por lo que

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \lambda \cdot \overrightarrow{f(P)f(R)}$$

y λ es la razón simple de P, Q y R .

Por tanto, la misma linealidad con la que la aplicación lineal \overrightarrow{f} (si es isomorfismo) lleva vectores proporcionales en vectores proporcionales hace que la aplicación afín f lleve puntos alineados en puntos alineados con la misma razón simple.

El recíproco de esta proposición, junto con la propiedad de llevar rectas en rectas, caracteriza las afinidades. Lo enunciamos, sin demostración, en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.5 (Teorema fundamental de la geometría afín). *Una aplicación afín $f : A \rightarrow A$ es una afinidad si y solo si es biyectiva, lleva rectas en rectas y preserva la razón simple.*

Demostración. Puede consultarse en [FernandoGamboa, Teorema V.1.4] o [Xambo, Teorema 1.41]. \square

De hecho, algo más fuerte puede probarse en el caso real $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ya que para que f sea afinidad basta la condición de que f transforme rectas en rectas. A posteriori, por supuesto, ocurre que se conserva la razón simple. Una prueba de esto puede consultarse en [Xambo, Teorema 1.42 y Corolario 1.43].

2.4. Problemas

Problema 2.4.1. Dada $f : A \rightarrow A'$ aplicación afín, $P \in A$, y $\vec{f} : V \rightarrow V'$, $\overrightarrow{PQ} \mapsto \overrightarrow{f(P)f(Q)}$ su aplicación lineal asociada, demuestra que para todo $Q, R \in A$ se verifica que $\overrightarrow{f(Q)f(R)} = \vec{f}(\overrightarrow{PQ})$.

Problema 2.4.2. Probar que una aplicación afín transforma subespacios afines paralelos en subespacios afines paralelos.

Problema 2.4.3. Probar que una aplicación afín transforma (tres) puntos alineados en (tres) puntos alineados.

Problema 2.4.4. Demuestra que la inversa de la aplicación lineal asociada a una afinidad $f : A \rightarrow A$ es la aplicación lineal asociada a la afinidad inversa $f^{-1} : A \rightarrow A$, es decir

$$\vec{f}^{-1} = \overrightarrow{f^{-1}}.$$

Problema 2.4.5. Estudia si las siguientes aplicaciones son afines o no. En caso afirmativo, encuentra su aplicación lineal asociada y estudia si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

- $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3 - 1, x_2 + x_3 - 2, x_1 - x_3 + 1)$.
- $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2, x_1x_3 + 1)$.
- $f : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$, $f(z_1, z_2) = (z_1 - iz_2 + 1, (1 + i)z_1 + z_2 + i)$.
- $f : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$, $f(z_1, z_2) = (z_1 + 2i, z_2^2)$.
- $f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$, $f(M) = \text{tr}(M)$.
- $f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$, $f(M) = \det(M)$.
- $f : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$, $f(p(X)) = p(1)$.
- $f : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, $f(p(X)) = p'(X)$.

Problema 2.4.6. Sean $P_0 = (0, 1)$, $P_1 = (0, 3)$, $P_2 = (4, 2)$ los vértices de un triángulo en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$. Define la aplicación afín que lleva ese triángulo en el triángulo de vértices $Q_0 = (-1, -2)$, $Q_1 = (-3, 4)$, $Q_2 = (1, 5)$. Calcula su representación matricial en la referencia cartesiana canónica y en la referencia afín estándar de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.

Problema 2.4.7. Sea la afinidad en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ que transforma el origen de coordenadas en el punto $(2, 4)$ y cuya aplicación lineal asociada transforma los vectores de la base canónica en $(-1, 1)$ y $(1, 1)$ respectivamente.

- Calcula su matriz respecto de la referencia cartesiana canónica.
- Calcula la imagen del cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$.
- Calcula la matriz de su aplicación afín inversa respecto de la referencia cartesiana canónica.

Problema 2.4.8. En el plano afín, dado el cuadrado de vértices $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (1, 1)$ y $P_3 = (0, 1)$, demuestra que no existe ninguna afinidad f que lo transforme en el romboide de vértices $Q_0 = (2, 0)$, $Q_1 = (6, 0)$, $Q_2 = (3, 2)$, $Q_3 = (7, 2)$, preservando el orden de los vértices, es decir, $f(P_i) = Q_i$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Problema 2.4.9. Dados dos triángulos, ¿cuántas afinidades de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ transforman uno en otro? ¿y en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$?

Problema 2.4.10. Dadas aplicaciones afines $f : A \longrightarrow A'$ y $g : A' \longrightarrow A''$, y referencias cartesianas \mathcal{R}'_c , \mathcal{R}'_c y \mathcal{R}'_c , demuestra que

$$M_{\mathcal{R}_c, \mathcal{R}_c''}(g \circ f) = M_{\mathcal{R}'_c, \mathcal{R}_c''}(g) \cdot M_{\mathcal{R}_c, \mathcal{R}'_c}(f)$$

.

Problema 2.4.11. Dada la aplicación afín

$$f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3 + 1, x_2 - x_3 - 2, x_1 + x_3 - 1)$$

- Calcula su representación matricial respecto de la referencia cartesiana canónica de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$.
- Calcula el núcleo e imagen de su aplicación lineal asociada.
- Calcula la imagen de la recta que pasa por los puntos $(0, 1, 0)$ y $(1, 2, -1)$.
- Calcula la imagen del plano $\{x_3 = 0\}$.

Problema 2.4.12. Encuentra los puntos fijos y los subespacios invariantes de la aplicación afín

$$f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2, f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2 + 1, -x_1 + x_2 + 2).$$

Problema 2.4.13. Encuentra los puntos fijos y las rectas invariantes de la aplicación afín

$$f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3 + 1, x_2 - x_3 - 2, x_1 + x_3 - 1).$$

Problema 2.4.14. Dada la aplicación afín

$$f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3 - 1, x_1 - x_3 + 1)$$

- Calcula su representación matricial respecto de las referencias cartesianas canónicas de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ y $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.
- Calcula el núcleo e imagen de su aplicación lineal asociada.
- Encuentra una recta de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ cuya imagen sea un punto.
- Decide si existe algún plano de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ cuya imagen sea un punto y, en caso afirmativo, muestra uno.

Problema 2.4.15. Comprueba que la inversa de una homotecia de centro C y razón λ es la homotecia de centro C y razón λ^{-1} viendo que el producto de sus matrices, con respecto a una referencia cartesiana \mathcal{R}_c , es la identidad.

Problema 2.4.16. Prueba que si el centro C de una homotecia η pertenece a un subespacio afín $B \subset A$, entonces B es invariante por η .

Problema 2.4.17. Muestra que la composición $\eta_2 \circ \eta_1$ de una homotecia η_1 de centro C_1 y razón λ_1 con otra homotecia η_2 de centro C_2 y razón λ_2 es una homotecia de centro

$$C_1 + \frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1 \lambda_2} \overrightarrow{C_1 C_2}$$

y razón $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ salvo cuando $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$, y que en tal caso se trata de una traslación de vector $(1 - \lambda_2) \overrightarrow{C_1 C_2}$.

Problema 2.4.18. Muestra que el subgrupo de las traslaciones y las homotecias no es abeliano con un ejemplo de traslación y homotecia cuya composición no conmute.

Problema 2.4.19. Considera en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ el cuadrado C con vértices en los puntos $P_0 := (0, 0)$, $P_1 := (1, 0)$, $P_2 := (0, 1)$ y $P_3 := (1, 1)$ y el triángulo T de vértices P_0, P_1 y P_2 . Sea η la homotecia de centro el baricentro del triángulo y razón $\lambda = 3$.

- Calcula la matriz de η respecto de la referencia cartesiana canónica de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.
- Expresa la matriz de η también respecto a la referencia afín estándar de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.
- Calcula las imágenes de los puntos P_0, P_1, P_2 y P_3 por η y dibuja el triángulo $\eta(T)$ y cuadrado $\eta(C)$ resultantes.

- Repite los anteriores apartados para la simetría central, es decir la homotecia de razón $\lambda = -1$ y el mismo centro.

Problema 2.4.20. Demuestra que las rectas invariantes de una simetría son exactamente las que unen un punto no fijo con su imagen.

Problema 2.4.21. Calcula la proyección y la simetría respecto de la recta $B = P + W$, $P = (1, -1, 1)$ y $W = L[(3, -1, 0)]$, con dirección el plano vectorial de ecuación $U := \{2x - y = 0\}$, dando sus matrices respecto de una referencia cartesiana apropiada. Calcule los subespacios de puntos fijos y todos los subespacios invariantes.

Problema 2.4.22. Demuestra que la razón simple de tres puntos es $[P, Q, R] = -1$ si y solo si P es el punto medio de extremos Q y R .

Problema 2.4.23. Si la razón simple de tres puntos es $[P, Q, R] = \lambda$, estudia los valores de la razón simple de todas las posibles reordenaciones de los puntos.

Capítulo 3

Espacios Afines Euclídeos

3.1. El espacio afín euclídeo

Un espacio vectorial euclídeo se define como un espacio vectorial real provisto de un producto escalar, y un espacio afín se define sobre un espacio vectorial. Por tanto definiremos un espacio afín euclídeo como un espacio afín sobre un espacio vectorial euclídeo.

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} y una aplicación bilineal simétrica definida positiva

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}.$$

El par $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se llama *espacio vectorial euclídeo*.

En un espacio vectorial euclídeo se dice que dos vectores \vec{v} y \vec{w} son *ortogonales* si $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$. Se define la *norma* de un vector \vec{v} , denotada por $\|\vec{v}\|$, como

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}.$$

Se dice que un vector \vec{v} es *unitario* si $\|\vec{v}\| = 1$.

El producto escalar usual, que dados dos vectores $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n), \vec{w} = (w_1, \dots, w_n)$, toma el valor

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i,$$

dota a \mathbb{R}^n de una estructura de espacio euclídeo que llamaremos *espacio vectorial euclídeo estándar*.

Definición 3.1.1. Un *espacio afín euclídeo* es una cuaterna $(A, V, \varphi, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ donde (A, V, φ) es un espacio afín y $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio vectorial euclídeo.

Sea $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$ el espacio afín estándar, con la estructura afín inducida en \mathbb{R}^n . Dado el producto escalar usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathbb{R}^n , $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$ es un espacio afín euclídeo que llamaremos *espacio afín euclídeo estándar*. En las siguientes secciones nos centraremos en el estudio de este espacio y de sus afinidades que conserven el producto escalar.

Definición 3.1.2. En un espacio afín euclídeo A se define la aplicación *distancia* como

$$\begin{aligned} d : A \times A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\longmapsto d(P, Q) := \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle} . \end{aligned}$$

Proposición 3.1.3. La aplicación distancia en un espacio afín euclídeo verifica las siguientes propiedades

1. $d(P, P) = 0$.
2. $d(P, Q) = d(Q, P)$ (simetría).
3. $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$ (desigualdad triangular).

Demostración. 1. Se tiene que

$$d(P, P) = \|\overrightarrow{PP}\| = \|\mathbf{0}\| = 0.$$

2. Es inmediata a partir de la simetría del producto escalar.
3. Usando la desigualdad triangular que verifica la norma,

$$\begin{aligned} d(P, R) &= \|\overrightarrow{PR}\| = \|\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}\| \leq \\ &\|\overrightarrow{PQ}\| + \|\overrightarrow{QR}\| = d(P, Q) + d(Q, R); \end{aligned}$$

□

Al igual que las bases ortonormales son bases adaptadas a un producto escalar en los espacios vectoriales euclídeos, en los espacios afines euclídeos usaremos las referencias ortonormales. Recordamos que una base ortonormal $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ es aquella donde todos los vectores son ortogonales entre sí, $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0$, $i \neq j$, y unitarios $\|\vec{v}_i\| = 1$, $i = 1, \dots, n$.

Definición 3.1.4. Se dice que una referencia cartesiana de un espacio afín euclídeo A , $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ es una *referencia ortonormal* si \mathcal{B} es una base ortonormal de V .

En un espacio vectorial euclídeo, dado un subespacio vectorial $W \subset V$, definimos su *ortogonal* como

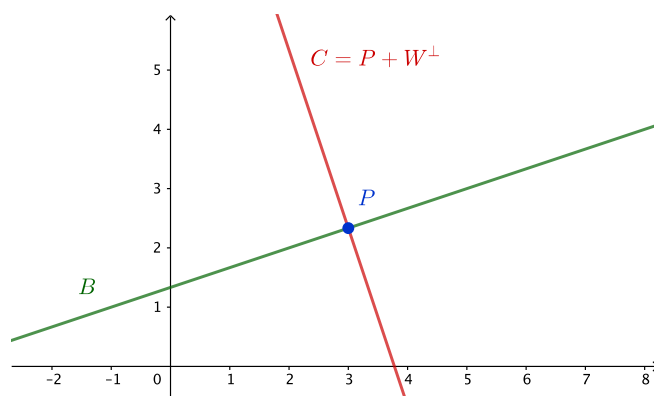
$$W^\perp = \{\vec{v} \in V : \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0, \forall \vec{w} \in W\}.$$

Se verifica que

$$W \oplus W^\perp$$

y

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V.$$

Figura 3.1: Perpendicular a B por el punto P .

Definición 3.1.5. Dado un subespacio de un espacio afín euclídeo, $B \subset A$, con dirección $W \subset V$, y un punto $P \in B$, definimos el subespacio *perpendicular* a B por el punto P como

$$B_P^\perp := P + W^\perp.$$

Observación 3.1.6. Obsérvese que si la dimensión de B es d y la de A es n , la dimensión del perpendicular a B por P es $\dim B_P^\perp = n - d$.

Definición 3.1.7. Dos subespacios $B_1, B_2 \subset A$, de direcciones $W_1, W_2 \subset V$ respectivamente, son *ortogonales* si

$$W_1 \subset W_2^\perp \quad \text{o} \quad W_2 \subset W_1^\perp.$$

Si se cortan, $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, entonces B_1 y B_2 son *perpendiculares* y escribimos $B_1 \perp B_2$.

Observación 3.1.8. Obsérvese que si B_1 y B_2 son ortogonales, entonces

$$\dim B_1 + \dim B_2 \leq \dim A.$$

Ejemplo 3.1.9. Sean el plano $B \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ de ecuación $B : \{x - y + z = 2\}$ y sea el punto $P = (2, 1, 1) \in B$. Calculemos el subespacio (recta) perpendicular a B por P .

Como la dirección W de B tiene por ecuación $W : \{x - y + z = 0\}$, un vector normal al plano es $\vec{v} = (1, -1, 1)$, por lo que $W^\perp = \mathcal{L}\{\vec{v}\} = \mathcal{L}\{(1, -1, 1)\}$. Por tanto la recta ortogonal a B por P es

$$B_P^\perp = P + \mathcal{L}\{(1, -1, 1)\},$$

que tiene por ecuaciones implícitas

$$B_P^\perp : \begin{cases} x + y & = 3 \\ x & - z = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 3.1.10. Sean en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ las rectas L_1, L_2, L_3 de ecuaciones

$$L_1 : \begin{cases} x - y = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

$$L_2 : \begin{cases} x + y = -1 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$L_3 : \begin{cases} x + y = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el primer sistema encontramos que la recta L_1 puede escribirse como $L_1 = (0, -1, -2) + \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$. Haciendo lo propio con los otros dos sistemas podemos escribir $L_2 = (0, -1, -2) + \mathcal{L}\{(1, -1, 0)\}$ y $L_3 = (-1, 0, 2) + \mathcal{L}\{(1, -1, 0)\}$. Observamos que las rectas vectoriales $\mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$ y $\mathcal{L}\{(1, -1, 0)\}$ son ortogonales en \mathbb{R}^3 .

La concatenación del primer y segundo sistemas es un sistema compatible, que tiene como única solución el punto $P := (0, -1, -2)$, por tanto L_1 y L_2 son perpendiculares, $L_1 \perp L_2$. Como la concatenación del primer y el tercer sistemas no proporciona un sistema compatible pero las direcciones de L_1 y L_3 son ortogonales, las rectas L_1 y L_3 son ortogonales pero no perpendiculares. Además, se observa que L_2 y L_3 son paralelas, $L_2 \parallel L_3$.

En la sección 2.2 estudiamos proyecciones y simetrías con base un subespacio B de dirección W y paralelas a un subespacio vectorial cualquiera U , tal que $W \oplus U = V$. Sin embargo, en un espacio afín euclídeo existe un complementario distinguido para cada subespacio. Por cada punto $P \in B$, existe un único subespacio perpendicular B_P^\perp con dirección W^\perp , tal que $W \oplus W^\perp = V$.

Definición 3.1.11. A la proyección sobre B y a la simetría respecto de B , paralelas a W^\perp , las llamaremos respectivamente *proyección ortogonal* sobre B y *simetría ortogonal* respecto de B .

Una de las cosas más importantes que nos permite definir el concepto de ortogonalidad es la distancia entre puntos y subespacios afines, y la distancia entre dos subespacios afines.

Definición 3.1.12. La distancia entre un punto $P \in A$ y un subespacio afín $B \subset A$ se define como

$$d(P, B) := \inf\{d(P, Q) : Q \in B\}.$$

Proposición 3.1.13. La distancia entre un punto $P \in A$ y un subespacio afín $B \subset A$ es igual a

$$d(P, \pi(P))$$

donde π es la proyección ortogonal sobre B . En particular, se alcanza el ínfimo de la definición.

Demostración. Dado otro punto $Q \in B$, para el cuadrado de la distancia entre P y Q tenemos

$$d(P, Q)^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\overrightarrow{P\pi(P)} + \overrightarrow{\pi(P)Q}\|^2 = \|\overrightarrow{P\pi(P)}\|^2 + \|\overrightarrow{\pi(P)Q}\|^2$$

por el teorema de Pitágoras, ya que los vectores \overrightarrow{PQ} , $\overrightarrow{P\pi(P)}$ y $\overrightarrow{\pi(P)Q}$ forman un triángulo rectángulo. Por tanto,

$$\|\overrightarrow{P\pi(P)}\|^2 + \|\overrightarrow{\pi(P)Q}\|^2 \geq \|\overrightarrow{P\pi(P)}\|^2 = d(P, \pi(P))^2,$$

y la distancia entre P y B es

$$d(P, B) = d(P, \pi(P)).$$

□

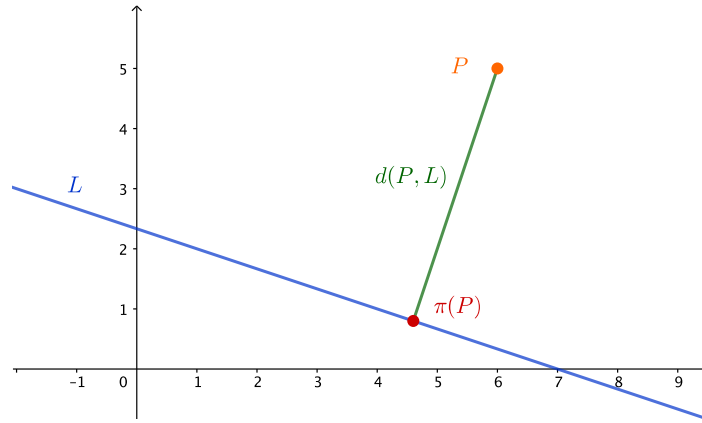


Figura 3.2: Distancia entre un punto P y una recta L .

Ejemplo 3.1.14. Calcularemos la distancia entre el punto $P = (0, 2, 1)$ y el plano $B : \{x - y + 2z = 1\}$. La dirección del plano es $W : \{x - y + 2z = 0\}$ y su ortogonal es $W^\perp = \mathcal{L}\{(1, -1, 2)\}$. La proyección ortogonal de P sobre B viene dada por $B \cap (P + W^\perp)$. Las ecuaciones paramétricas de la recta $L := P + W^\perp$ son

$$L : \begin{cases} x &= & \lambda \\ y &= & 2 - \lambda \\ z &= & 1 + 2\lambda \end{cases}$$

por lo que introduciéndolas en la ecuación del plano B obtendremos la intersección $B \cap L$:

$$\lambda - (2 - \lambda) + 2 \cdot (1 + 2\lambda) = 1$$

cuya solución es $\lambda = \frac{1}{6}$, por lo que

$$\pi(P) = \left(\frac{1}{6}, \frac{11}{6}, \frac{8}{6} \right).$$

Finalmente, la distancia de P a B viene dada por

$$d(P, B) = d(P, \pi(P)) = d\left((0, 2, 1), \left(\frac{1}{6}, \frac{11}{6}, \frac{8}{6}\right)\right) = \left\| \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{2}{6}\right) \right\| = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Definición 3.1.15. La distancia entre dos subespacios afines $B_1 \in A$ y $B_2 \subset A$ se define como

$$d(B_1, B_2) := \inf\{d(P, Q) : P \in B_1, Q \in B_2\}.$$

Proposición 3.1.16. Sean $B_1 = P + W_1 \subset A$ y $B_2 = Q + W_2 \subset A$ dos subespacios afines y definimos $C = Q + W_1 + W_2$. La distancia entre B_1 y B_2 es igual a

$$d(B_1, B_2) = d(P, C) = d(P, \pi(P))$$

donde π es la proyección ortogonal sobre C . En particular, se alcanza el ínfimo de la definición.

Demostración. Primero mostraremos que $d(B_1, B_2) \geq d(P, \pi(P))$.

Sean $P, P' \in B_1$, $Q, Q' \in B_2$, por lo que $\overrightarrow{PP'} \in W_1$, $\overrightarrow{QQ'} \in W_2$. Si definimos el punto

$$R := Q - \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} \in Q + W_1 + W_2 = C$$

comprobamos que

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{P'Q'}.$$

Como hemos elegido $P' \in B_1$, $Q' \in B_2$ de forma arbitraria tenemos que

$$d(B_1, B_2) \geq \|\overrightarrow{P'Q'}\| = \|\overrightarrow{PR}\| = d(P, R) \geq d(P, C) = d(P, \pi(P)).$$

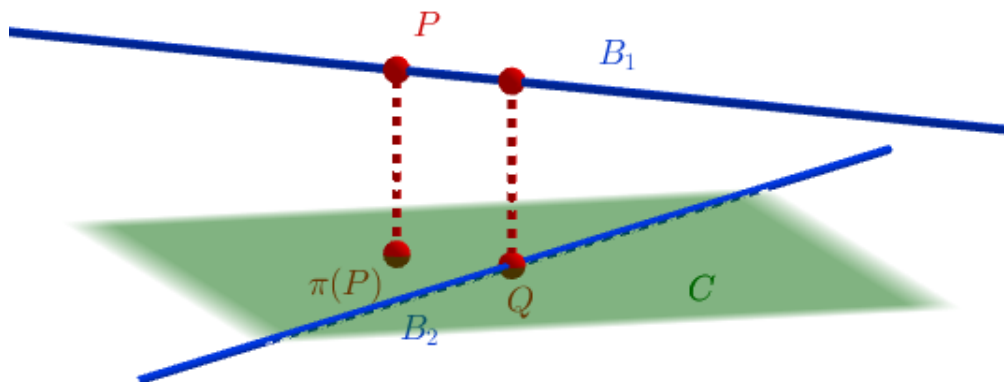
Por otra parte, $\pi(P) \in C = Q + W_1 + W_2$, por lo que existen vectores $\vec{w}_1 \in W_1$, $\vec{w}_2 \in W_2$ con $\pi(P) = Q + \vec{w}_1 + \vec{w}_2$. Si definimos $S_1 := P - \vec{w}_1$ y $S_2 := Q + \vec{w}_2$ tenemos que

$$\overrightarrow{P\pi(P)} = \overrightarrow{PQ} + \vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{S_1P} + \overrightarrow{QS_2} = \overrightarrow{S_1S_2},$$

reorganizando puntos y vectores. Por tanto, existen puntos $S_1 \in B_1$ y $S_2 \in B_2$ con

$$d(P, \pi(P)) = d(S_1, S_2) \leq d(B_1, B_2),$$

lo que concluye la prueba. □



Ejemplo 3.1.17. Con el resultado de la Proposición 3.1.16 podemos resolver el problema de calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$.

$$L_1 : \begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$$
$$L_1 = P + \mathcal{L}\{(0, 1, 1)\}$$
$$L_2 = Q + \mathcal{L}\{\overrightarrow{QR}\} = (0, 1, 0) + \mathcal{L}\{(3, 0, 2)\}$$
$$L_2 : \begin{cases} x &= & 3\lambda \\ y &= & 1 \\ z &= & 2\lambda \end{cases}$$

Por la Proposición 3.1.16, la distancia entre ambas rectas viene dada por

$$d(L_1, L_2) = d(P, C) = d(P, \pi(P))$$

donde $C = Q + W = (0, 1, 0) + \mathcal{L}\{(0, 1, 1)\} + \mathcal{L}\{(3, 0, 2)\}$, y π es la proyección ortogonal sobre C . Unas ecuaciones paramétricas para C vienen dadas por

$$C : \begin{cases} x = & 3\mu \\ y = 1 + \lambda \\ z = & \lambda + 2\mu \end{cases}$$

y que, resolviendo, dan una ecuación implícita para C

$$C : \{2x + 3y - 3z = 3\}.$$

Como $C = Q + W$, el ortogonal de su dirección es $W^\perp = \mathcal{L}\{(2, 3, -3)\}$, por lo que

$$\pi(P) = C \cap (P + W^\perp) = C \cap \left((1, 0, 1) + \mathcal{L}\{(2, 3, -3)\} \right).$$

Introduciendo las ecuaciones paramétricas de $P + W^\perp$ en la ecuación implícita de C , tenemos

$$2 \cdot (1 + 2\lambda) + 3 \cdot (3\lambda) - 3 \cdot (1 - 3\lambda) = 3$$

con solución $\lambda = \frac{2}{11}$, por lo tanto

$$\pi(P) = (1, 0, 1) + \frac{2}{11} \cdot (2, 3, -3) = \left(\frac{15}{11}, \frac{6}{11}, \frac{5}{11} \right)$$

y, finalmente, la distancia entre las rectas es

$$d(L_1, L_2) = d(P, \pi(P)) = d\left((1, 0, 1), \left(\frac{15}{11}, \frac{6}{11}, \frac{5}{11} \right) \right) = \left\| \left(\frac{4}{11}, \frac{6}{11}, -\frac{6}{11} \right) \right\| = \frac{\sqrt{88}}{21}.$$

Ejemplo 3.1.18. Otro de los problemas métricos que podemos resolver es el cálculo de la distancia entre dos planos paralelos en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$.

Sean $B_1 : \{2x - y + 2z = 1\}$ y $B_2 : \{2x - y + 2z = 3\}$, dos planos en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$. Obsérvese que la dirección $W : \{2x - y + 2z = 0\}$ es común a ambos planos. Si escribimos $B_1 = (0, -1, 0) + W$, $B_2 = (0, -3, 0) + W$, por la Proposición 3.1.16, la distancia entre ambos planos es

$$d(B_1, B_2) = d(P, \pi(P)),$$

donde $P := (0, -1, 0) \in B_2$ y π es la proyección ortogonal sobre $C = Q + W + W = Q + W$, con $Q = (0, -3, 0) \in B_2$, por lo tanto $C = B_2$. El ortogonal a W es $W^\perp = \mathcal{L}\{(2, -1, 2)\}$, por lo que

$$\pi(P) = C \cap (P + W^\perp) = B_2 \cap (P + W^\perp) = B_2 \cap \left((0, -1, 0) + \mathcal{L}\{(2, -1, 2)\} \right).$$

Otra vez introduciendo las ecuaciones paramétricas de $P + W^\perp$ en la ecuación implícita de B_2 , obtenemos

$$2 \cdot (2\lambda) - (-1 - \lambda) + 2 \cdot (2\lambda) = 3,$$

con solución $\lambda = \frac{2}{9}$, por lo que

$$\pi(P) = (0, -1, 0) + \frac{2}{9} \cdot (2, -1, 2) = \left(\frac{4}{9}, -\frac{11}{9}, \frac{4}{9}\right),$$

y la distancia entre los dos planos paralelos es

$$d(B_1, B_2) = d(P, \pi(P)) = d\left((0, -1, 0), \left(\frac{4}{9}, -\frac{11}{9}, \frac{4}{9}\right)\right) = \left\|\left(\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9}\right)\right\| = \frac{2}{3}.$$

Para finalizar la sección, la noción de producto escalar nos permite definir ángulos entre vectores en un espacio vectorial euclídeo. Sean \vec{v}_1, \vec{v}_2 dos vectores de V , el coseno del ángulo que forman viene dado por

$$\cos \widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2} = \frac{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle}{\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|}.$$

Esto nos permite definir ángulos entre diferentes subespacios de un espacio afín euclídeo.

Definición 3.1.19. Dadas dos rectas que se cortan en un punto P , $L_1 = P + \mathcal{L}\{\vec{v}_1\}$, $L_2 = P + \mathcal{L}\{\vec{v}_2\}$, definimos el *ángulo* que forman L_1 y L_2 , denotado por $\widehat{L_1, L_2}$, por medio de

$$\cos \widehat{L_1, L_2} = \cos \widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}.$$

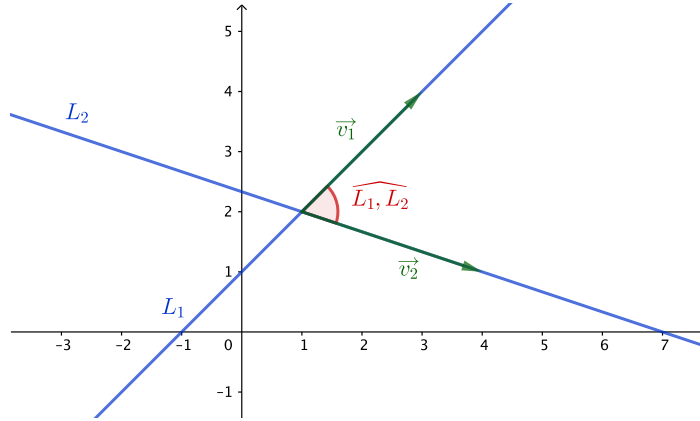


Figura 3.4: Ángulo entre dos rectas L_1 y L_2 .

Dados dos planos no paralelos $B_1, B_2 \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, por la Fórmula de Grassmann se cortan en una recta $B_1 \cap B_2 = L = P + \mathcal{L}\{\vec{v}\}$, con $P \in B_1 \cap B_2$. Sea M_1 la recta perpendicular a L por P contenida en B_1 , y sea M_2 la recta perpendicular a L por P contenida en B_2 (observa que $M_1 + M_2$ es el plano perpendicular a L por P).

Definición 3.1.20. Definimos el *ángulo* entre los planos B_1 y B_2 como el ángulo que forman las rectas M_1 y M_2 ,

$$\widehat{B_1, B_2} = \widehat{M_1, M_2}.$$

Observando que las direcciones de las rectas L , M_1 y el vector normal a B_1 , \vec{n}_1 , forman una base ortogonal de \mathbb{R}^3 (así como L , M_2 y el vector normal a B_2 , \vec{n}_2), la definición del ángulo entre los dos planos es equivalente a

$$\widehat{B_1, B_2} = \widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}.$$

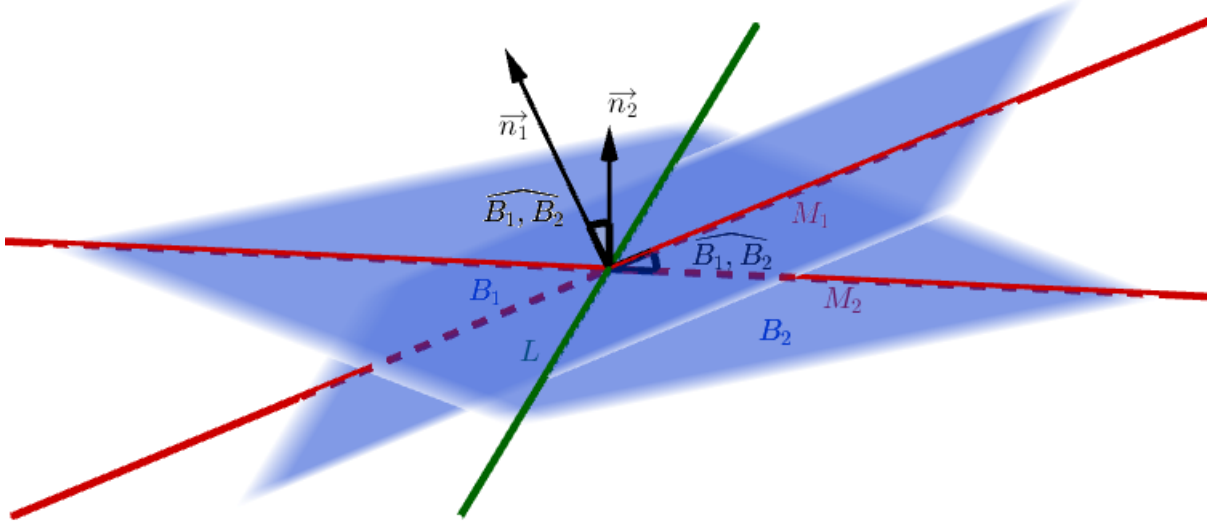


Figura 3.5: Ángulo entre dos planos B_1 y B_2 .

3.2. Movimientos

Tras definir los conceptos y propiedades más importante de los espacios afines euclídeos, pasamos a las aplicaciones que conservan la estructura definida, los movimientos.

Definición 3.2.1. Una aplicación $f : A \longrightarrow A$ en un espacio afín euclídeo A es un *movimiento* (también llamado *isometría afín*) si conserva las distancias

$$d(P, Q) = d(f(P), f(Q)), \quad \forall P, Q \in A.$$

Observación 3.2.2. En la Definición 3.2.1 es equivalente preservar las distancias a preservar el producto escalar

$$\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR} \rangle = \langle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PR}) \rangle, \forall P, Q, R \in A$$

o a preservar la norma

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\| \quad \forall P, Q \in A.$$

Proposición 3.2.3. *Un movimiento $f : A \rightarrow A$ en un espacio afín euclídeo A verifica que*

1. *f es una aplicación afín cuya aplicación vectorial asociada \overrightarrow{f} es una isometría lineal.*
2. *f es biyectiva y su inversa f^{-1} también es un movimiento.*
3. *La composición $g \circ f$ con otro movimiento $g : A \rightarrow A$ es un movimiento. Por tanto los movimientos forman un subgrupo del grupo de afinidades, denotado por $\text{Iso}(A)$.*
4. *Transforma referencias ortonormales en referencias ortonormales de A .*

Demostración. 1. Fijado un punto $O \in A$, la aplicación lineal asociada a f es

$$\overrightarrow{f} : V \rightarrow V, \overrightarrow{OP} \mapsto \overrightarrow{f(O)f(P)}.$$

Dado un vector $\overrightarrow{v} \in V$, existe un único $P \in A$ tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP} \in V$. Se tiene que

$$\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})\| = \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OP})\| = \|\overrightarrow{f(O)f(P)}\| = d(f(O), f(P)) = d(O, P) = \|\overrightarrow{OP}\| = \|\overrightarrow{v}\|,$$

por lo que \overrightarrow{f} conserva la norma y, en consecuencia, conserva el producto escalar. Probando que (véase Problema 3.3.6), dados $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\overrightarrow{f}(\lambda \overrightarrow{v} + \mu \overrightarrow{w}) = \lambda \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) + \mu \overrightarrow{f}(\overrightarrow{w})$$

se tiene que \overrightarrow{f} es lineal y, por tanto, isometría lineal. Por consiguiente, f es afín con aplicación lineal asociada la isometría lineal \overrightarrow{f} .

2. Como \overrightarrow{f} es isometría lineal es, en particular, isomorfismo lineal. Por tanto f es biyectiva con inversa f^{-1} y $(\overrightarrow{f})^{-1} = \overrightarrow{f^{-1}}$.
3. Dados dos puntos $P, Q \in A$,

$$d((g \circ f)(P), (g \circ f)(Q)) = d(g(f(P)), g(f(Q))) = d(f(P), f(Q)) = d(P, Q),$$

por lo que la composición es también un movimiento.

4. Si f es un movimiento y $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ una referencia cartesiana ortonormal de A , entonces \vec{f} es una isometría lineal que transforma una la base ortonormal \mathcal{B} de V en otra base ortonormal de V . Por tanto f lleva referencias ortonormales en referencias ortonormales. \square

Pasamos ahora a recordar el concepto de orientación de bases en un espacio vectorial euclídeo para poder hablar de movimientos directos e inversos, dependiendo de que preserven o inviertan la orientación.

Definición 3.2.4. Dadas dos bases ortonormales $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de un espacio vectorial euclídeo V , diremos que tienen la *misma orientación* si el determinante de la matriz de cambio de base $C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ es positivo. Diremos que tienen *orientación diferente* si el determinante de la matriz de cambio de base es negativo.

En un espacio vectorial euclídeo V de dimensión finita n hay dos orientaciones. Por convenio, diremos que la base canónica

$$\mathcal{B}_e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

tiene *orientación positiva*. Cualquier otra base ortonormal \mathcal{B}' con $\det C_{\mathcal{B}_e \mathcal{B}'} > 0$ será una base con orientación positiva, mientras que si $\det C_{\mathcal{B}_e \mathcal{B}'} < 0$ \mathcal{B}' será una base con orientación negativa.

Observación 3.2.5. Con el concepto de orientación podemos resolver una ambigüedad en la definición de ángulo entre dos vectores. Dados $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$, el ángulo que forman está dado por

$$\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2} = \pm \arccos \frac{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle}{\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|}.$$

donde escogeremos el ángulo positivo si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base positivamente orientada (del plano que forman los dos vectores) y escogeremos el ángulo negativo si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base negativamente orientada.

Recordemos que las matrices que representan isometrías lineales $\psi : V \rightarrow V$ en un espacio vectorial euclídeo tienen determinante

$$\det(M(\psi)_{\mathcal{B}\mathcal{B}}) = \pm 1,$$

ya que son matrices ortogonales donde la matriz traspuesta, del mismo determinante, coincide con la inversa:

$$M(\psi)_{\mathcal{B}\mathcal{B}} \cdot M(\psi)_{\mathcal{B}\mathcal{B}}^t = I_n.$$

Dada una base con orientación positiva \mathcal{B} de V y una isometría con $\det(M(\psi)_{\mathcal{B}\mathcal{B}}) = 1$, la imagen de la base por la aplicación, $\psi(\mathcal{B})$, es otra base con orientación positiva. Si $\det(M(\psi)_{\mathcal{B}\mathcal{B}}) = -1$, la imagen de la base, $\psi(\mathcal{B})$, será una base con orientación negativa.

Dado un movimiento $f : A \rightarrow A$ y una referencia ortonormal $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ de A , el determinante de $M(f)_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}$ coincide con el determinante de $M(\vec{f})_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$. Por tanto definimos el sentido de un movimiento en base al de su isometría lineal asociada.

Definición 3.2.6. Dado un movimiento $f : A \longrightarrow A$ definimos su determinante como el determinante de su matriz respecto de cualquier referencia cartesiana:

$$\det(f) := \det(M(f)_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}) = \det\left(M(\vec{f})_{\mathcal{B}\mathcal{B}}\right)$$

Se dice que un movimiento f es *directo* o que *preserva la orientación* si $\det(f) = 1$. Se dice f es *inverso* o que *invierte la orientación* si $\det(f) = -1$.

Observación 3.2.7. Los movimientos directos forman un subgrupo $\text{Iso}^+(A)$ del grupo de movimientos $\text{Iso}(A)$.

A diferencia de las aplicaciones afines en general, los movimientos sí admiten una clasificación exhaustiva. A continuación clasificaremos los movimientos en dimensiones bajas.

Recordemos que un movimiento $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$ es una aplicación afín y, por tanto, se puede entender como la composición

$$f = \tau_{\vec{v}} \circ \vec{f}$$

de una isometría lineal \vec{f} en \mathbb{R}^n con una traslación $\tau_{\vec{v}}$ de vector \vec{v} . Además, una isometría lineal verifica

$$\|f(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|.$$

Por tanto, los valores propios λ de \vec{f} verifican que existe un vector propio \vec{v} tal que $\vec{f}(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ y, entonces:

$$\|f(\vec{v})\| = \|\lambda \vec{v}\| = \|\vec{v}\| \implies |\lambda| = 1$$

Obtenemos que todos los valores propios de una isometría lineal tienen módulo unidad, por tanto serán de la forma $\lambda = \cos \alpha + i \sin \alpha$, con $\lambda = 1$ ($\alpha = 0$) y $\lambda = -1$ ($\alpha = \pi$) como casos particulares.

3.2.1. Clasificación de movimientos en la recta $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$.

Sea un movimiento $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1 \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$, por tanto $f = \tau_{\vec{v}} \circ \vec{f}$ donde $\vec{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una isometría (por tanto $\vec{f} = \pm \text{Id}_{\mathbb{R}}$), y el vector de traslación es un punto $a \in \mathbb{R}$.

Por tanto, existen dos casos:

- a) Si $\vec{f} = \text{Id}_{\mathbb{R}}$, entonces $f = \tau_a$ es una traslación de vector $a \in \mathbb{R}$, un movimiento directo. Si $a = 0$, $f = \text{Id}_{\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1}$ y todos los puntos son fijos, mientras que si $a \neq 0$, no existen puntos fijos. Respecto de una referencia ortonormal $\mathcal{R}_c = \{P; \{1\}\}$, la matriz de f es

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Si $\vec{f} = -\text{Id}_{\mathbb{R}}$, f es un movimiento inverso. Los puntos fijos de f verifican

$$P = f(P) = a + \vec{f}(P) = a - P$$

por lo que $\frac{a}{2}$ es el único punto fijo y, respecto de la referencia ortonormal $\mathcal{R}_c = \{\frac{a}{2}; \{1\}\}$, la matriz de f es

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right),$$

por lo que f es una simetría respecto del punto $\frac{a}{2}$.

3.2.2. Clasificación de movimientos en el plano $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.

Sea un movimiento $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, por tanto $f = \tau_{\vec{v}} \circ \vec{f}$ donde \vec{f} es una isometría en \mathbb{R}^2 , y el vector de traslación es $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$.

Dada la isometría $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, su polinomio característico tendrá grado dos y, por tanto, dos raíces $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Como $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ tenemos las posibilidades

- $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, por tanto \vec{f} es la identidad $\text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ y f será un movimiento directo.
- $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, por tanto \vec{f} es una simetría ortogonal respecto de una recta y f será un movimiento inverso.
- $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, por tanto $\vec{f} = -\text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ y f será un movimiento directo.
- $\lambda_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha, \lambda_2 = \cos \alpha - i \sin \alpha, \alpha \neq 0, \pi$, por tanto \vec{f} es un giro de ángulo α y f será un movimiento directo.

El subespacio de vectores invariantes coincide con el espacio propio asociado con el valor propio 1 (vectores cuya imagen son ellos mismos) y viene dado por:

$$W = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}).$$

Realizaremos esta clasificación dependiendo de las tres posibilidades que existen para la dimensión de W , que coincide con la multiplicidad algebraica del valor propio 1.

a) **dim $W = 2$.** En tal caso $\vec{f} = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ y $f = \tau_{\vec{v}}$ es una *traslación* de vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Se trata de un movimiento directo que, en la referencia ortonormal $\mathcal{R}_c = \{O; \{e_1, e_2\}\}$ (de hecho, en cualquier referencia cartesiana, como vimos en la Sección 2.2.1), se expresa como

$$M_{\mathcal{R}_{c,e} \mathcal{R}_{c,e}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

donde (a_1, a_2) son las coordenadas de \vec{v} respecto de la base canónica de \mathbb{R}^2 .

- b) **dim $W = 1$.** Entonces $W = \mathcal{L}\{\vec{v}_1\}$ y el otro valor propio de \vec{f} es -1 por lo que \vec{f} es la simetría ortogonal respecto de W y f será un movimiento inverso. Sea $\vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ un vector tal que $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^2 y sean (a_1, a_2) las coordenadas de \vec{v} respecto de \mathcal{B} . Sea $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$ una referencia ortonormal, con $O \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, tal que

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

por lo que los puntos fijos son las soluciones del sistema (2.1),

$$\begin{cases} a_1 + x_1 = x_1 \\ a_2 - x_2 = x_2 \end{cases}$$

donde existen dos posibilidades:

- b.1) Si $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, entonces el vector \vec{v} es ortogonal a $W = \mathcal{L}\{\vec{v}_1\}$ y los puntos fijos vienen dados por la recta

$$B : \{x_2 = \frac{a_2}{2}\} = (0, \frac{a_2}{2}) + \mathcal{L}\{\vec{v}_1\}.$$

Por tanto, respecto de la referencia ortonormal $\mathcal{R}'_c = \{(0, \frac{a_2}{2}); \mathcal{B}\}$, la matriz de f es

$$M_{\mathcal{R}'_c\mathcal{R}'_c}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

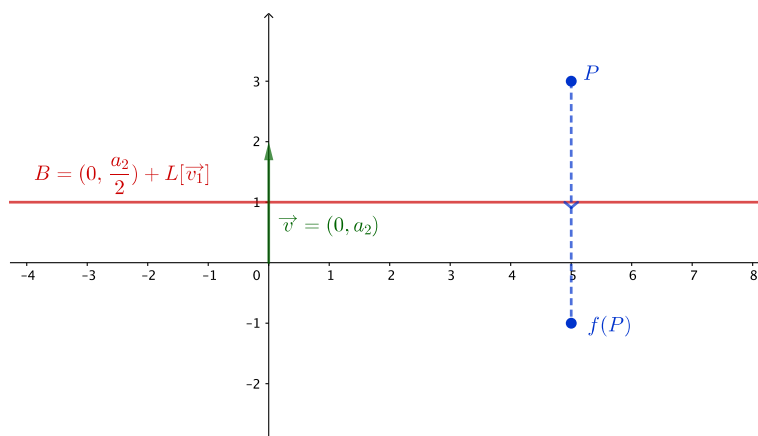
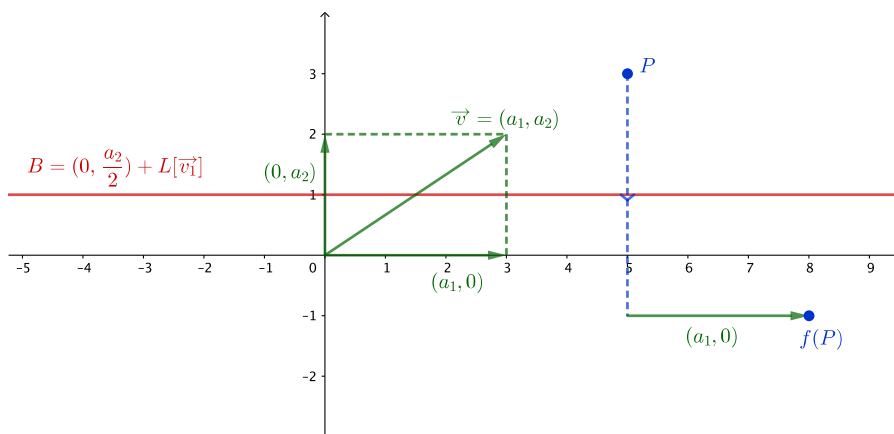
y f es una *simetría ortogonal* respecto de la recta B .

- b.2) Si $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$, el sistema no tiene solución y no hay puntos fijos. Podemos descomponer el vector \vec{v} como

$$\vec{v} = (a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2)$$

de tal modo que f se puede escribir como $f = \tau_{(a_1, 0)} \circ \tau_{(0, a_2)} \circ \vec{f}$ y por tanto viene dada como la composición de $\tau_{(0, a_2)} \circ \vec{f}$, que es una simetría respecto de $B = (0, \frac{a_2}{2}) + \mathcal{L}\{\vec{v}_1\}$ (como acabamos de ver en b.1)) y una traslación $\tau_{(a_1, 0)}$ paralela a B . Llamaremos a este movimiento *simetría con deslizamiento* y su matriz respecto de $\mathcal{R}'_c = \{(0, \frac{a_2}{2}); \mathcal{B}\}$ es

$$M_{\mathcal{R}'_c\mathcal{R}'_c}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Figura 3.6: Simetría ortogonal respecto de la recta B .Figura 3.7: Simetría ortogonal respecto de la recta B con deslizamiento paralelo a B .

- c) $\dim W = 0$. Por tanto \vec{f} es un giro de ángulo α y f será un movimiento directo. Calculando sus puntos fijos observamos

$$P = f(P) = (\tau_{\vec{v}} \circ \vec{f})(P) = \vec{f}(P) + \vec{v},$$

que se puede transformar en la ecuación

$$(\text{Id}_{\mathbb{R}^2} - \vec{f})(P) = \vec{v},$$

con solución única (ya que el sistema homogéneo asociado tiene solución única, la solución trivial correspondiente al subespacio vectorial W). Entonces existe un único punto fijo de f , llamémosle Q . Por tanto, respecto de la referencia ortonormal, $\mathcal{R}_c = \{Q; \{e_1, e_2\}\}$ la matriz de f es

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{array} \right).$$

por lo que f es un *giro* de centro Q y ángulo α .

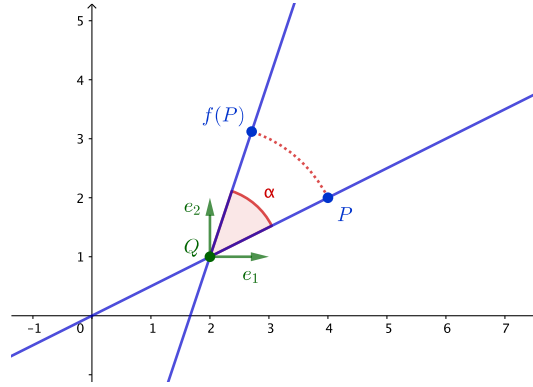
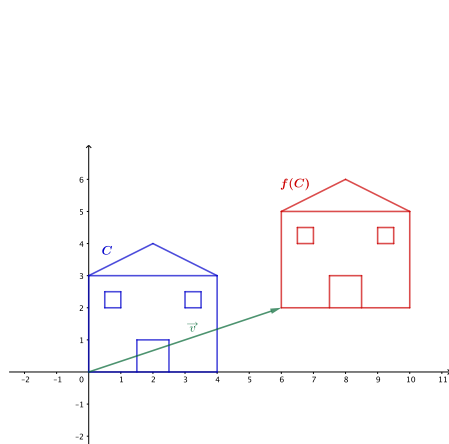
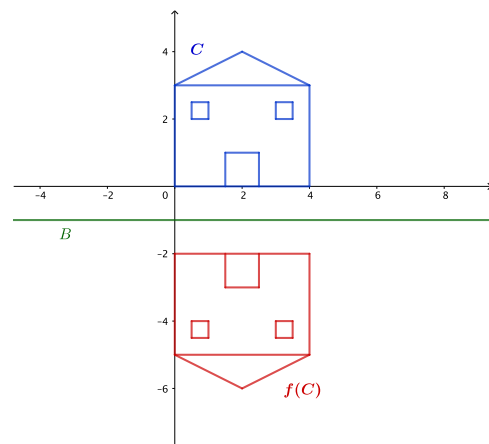
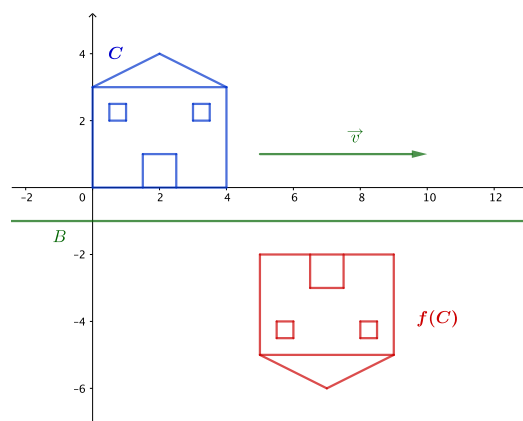
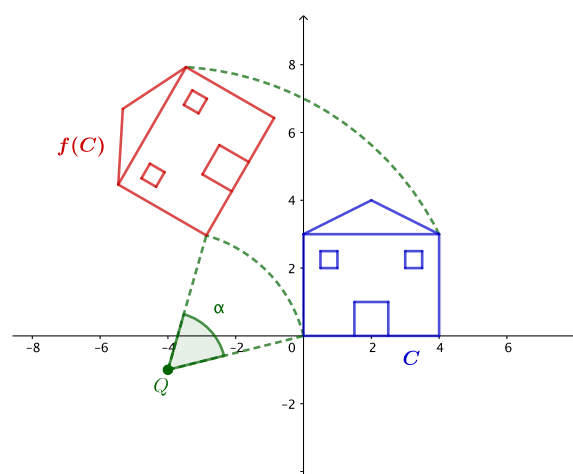


Figura 3.8: Giro de centro Q y ángulo α .

3.2.3. Clasificación de movimientos en el espacio $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$.

Realizaremos un tratamiento similar a los de dimensión 1 y 2. Sea un movimiento $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, con $f = \tau_{\vec{v}} \circ \vec{f}$ donde \vec{f} es una isometría en \mathbb{R}^3 , y el vector de traslación es $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Dada la isometría $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, su polinomio característico tendrá grado tres y, por tanto, tres raíces $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$. Como $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$ tenemos las posibilidades

- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, por tanto \vec{f} es la identidad $\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}$ y f será un movimiento directo.
- $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$, por tanto \vec{f} es una simetría ortogonal respecto de un plano y f será un movimiento inverso.
- $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, por tanto \vec{f} es una simetría ortogonal respecto de una recta (o un giro de ángulo π) y f será un movimiento directo.

(a) Traslación de vector \vec{v} .(b) Simetría ortogonal respecto de B .(c) Simetría ortogonal respecto de B con deslizamiento paralelo a B .(d) Giro de centro Q y ángulo α .

- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, por tanto $\vec{f} = -\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ y f será un movimiento inverso.
- $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \cos \alpha + i \sin \alpha, \lambda_3 = \cos \alpha - i \sin \alpha, \alpha \neq 0, \pi$, por tanto \vec{f} es un giro de ángulo α y f será un movimiento directo.
- $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \cos \alpha + i \sin \alpha, \lambda_3 = \cos \alpha - i \sin \alpha, \alpha \neq 0, \pi$, por tanto \vec{f} es composición de una simetría respecto de un plano con un giro de ángulo α en ese plano, y f será un movimiento inverso.

El subespacio de vectores invariantes coincide con el espacio propio asociado con el valor propio 1 (vectores cuya imagen son ellos mismos) y viene dado por igualmente por:

$$W = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}).$$

Realizaremos esta clasificación dependiendo de las cuatro posibilidades que existen para la dimensión de W , que coincide con la multiplicidad algebraica del valor propio 1.

- a) **dim $W = 3$.** En este caso, como en los anteriores, $\vec{f} = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ y $f = \tau_{\vec{v}}$ es una *traslación* de vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, que es un movimiento directo. En la referencia ortonormal $\mathcal{R}_c = \{O; \{e_1, e_2, e_3\}\}$, se expresa como

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

con (a_1, a_2, a_3) son las coordenadas de \vec{v} respecto de la base canónica.

- b) **dim $W = 2$.** En tal caso, \vec{f} es una simetría respecto del plano $W = \mathcal{L}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ y f será un movimiento inverso. Supongamos que \vec{v}_1, \vec{v}_2 son vectores ortonormales y completamos hasta una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, respecto de la cual las coordenadas de \vec{v} son (a_1, a_2, a_3) . Escogiendo un punto arbitrario $O \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ formamos una referencia ortonormal $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ respecto de la cual la matriz de f tiene la forma

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Los puntos fijos, en este caso, solucionan el sistema (2.1)

$$\begin{cases} a_1 + x_1 &= x_1 \\ a_2 + x_2 &= x_2 \\ a_3 - x_3 &= x_3 \end{cases}$$

Si descomponemos el vector de traslación como

$$\vec{v} = (a_1, a_2, a_3) = \vec{w} + \vec{u} = (a_1, a_2, 0) + (0, 0, a_3)$$

donde el primer vector $\vec{w} \in W$ y el segundo $\vec{u} \in W^\perp$, distinguiremos entonces dos casos:

b.1) Si $\vec{w} = \mathbf{0}$, es decir, $a_1 = a_2 = 0$, entonces $\vec{v} = \vec{u} = (0, 0, a_3)$ y se prueba que los puntos fijos vienen dados por el plano

$$\text{Fix}(f) = (0, 0, \frac{a_3}{2}) + W = (0, 0, \frac{a_3}{2}) + \mathcal{L}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} := B.$$

Respecto de la referencia ortonormal $\mathcal{R}'_c = \{(0, 0, \frac{a_3}{2}); \mathcal{B}\}$, la matriz de f es

$$M_{\mathcal{R}'_c \mathcal{R}'_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

y f es una *simetría ortogonal* respecto del plano B .

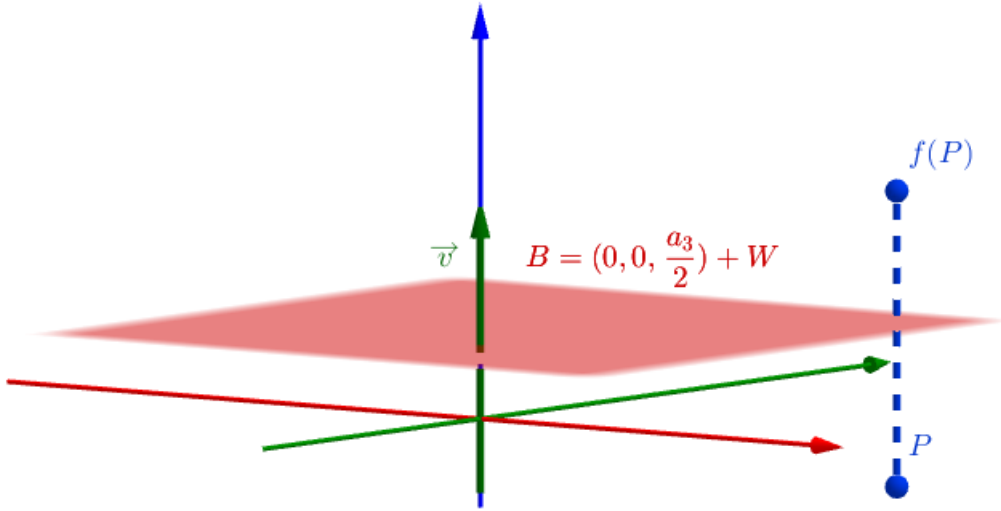


Figura 3.10: Simetría ortogonal respecto del plano B .

b.2) Si $\vec{w} \neq \mathbf{0}$, el conjunto de puntos fijos es vacío. De igual modo al caso bidimensional se tiene que $f = \tau_{\vec{w}} \circ \tau_{\vec{u}} \circ \vec{f}$, y f es la composición de $\tau_{\vec{u}} \circ \vec{f}$, una simetría respecto del plano $B = \vec{u} + W$, y una traslación $\tau_{\vec{w}}$ paralela a

B . Llamaremos también a este movimiento *simetría con deslizamiento*, con matriz respecto de $\mathcal{R}'_c = \{(0, 0, \frac{a_3}{2}); \mathcal{B}\}$

$$M_{\mathcal{R}'_c \mathcal{R}'_c}(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

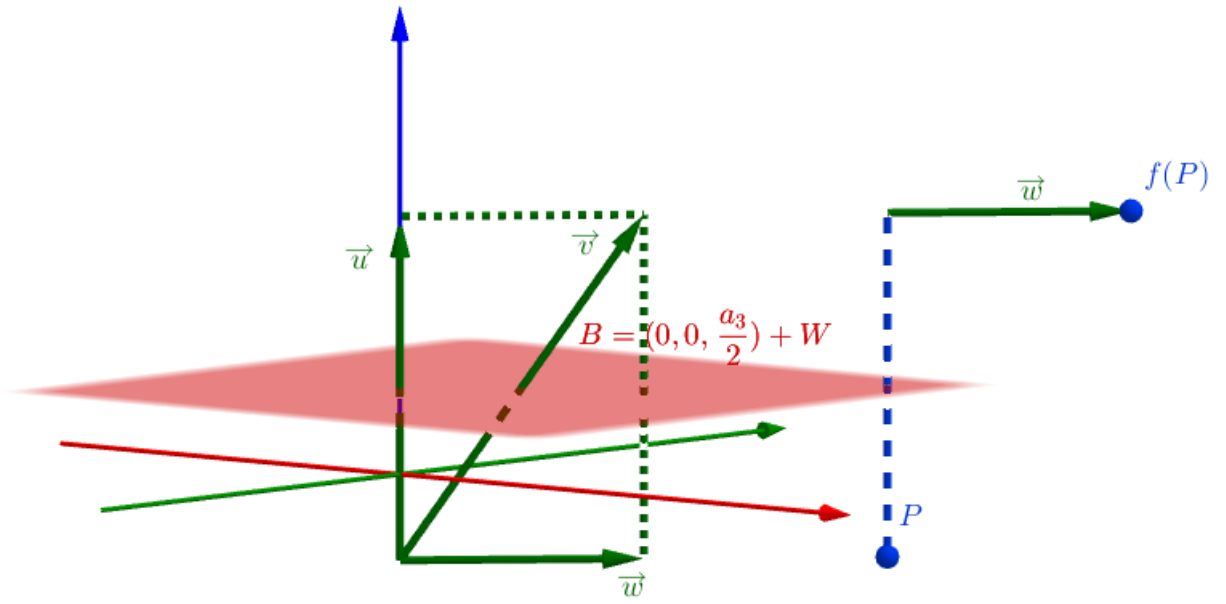


Figura 3.11: Simetría ortogonal respecto del plano B con deslizamiento paralelo a B .

- c) **dim $W = 1$.** En este caso \vec{f} será un giro respecto de una recta $W = \mathcal{L}\{\vec{v}_1\}$ y f será un movimiento directo. Sea $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base de W^\perp y descomponemos el vector de traslación como

$$\vec{v} = (a_1, a_2, a_3) = \vec{w} + \vec{u} = (a_1, 0, 0) + (0, a_2, a_3)$$

con $\vec{w} \in W$ y $\vec{u} \in W^\perp$. Entonces, $f = \tau_{\vec{w}} \circ \tau_{\vec{u}} \circ \vec{f}$ y f es la composición de $\tau_{\vec{u}} \circ \vec{f}$, que es un giro en el plano de dirección W^\perp (como se vió en el caso c) de los movimientos bidimensionales, Sección 3.2.2) y una traslación $\tau_{\vec{w}}$ paralela a la recta W .

- c.1) Si $\vec{w} = \mathbf{0}$, f es simplemente el giro en un plano bidimensional. Los giros bidimensionales tienen un punto fijo, su centro $Q = (0, b_1, b_2)$, por tanto en el espacio tridimensional existe toda una recta de puntos fijos, que está dada por

$$\text{Fix}(f) = Q + W = \{(t, b_1, b_2) : t \in \mathbb{R}\}$$

y, respecto de la referencia ortonormal $\mathcal{R}_c = \{Q; \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}\}$ la matriz de f está dada por

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Por tanto f es un giro respecto de la recta $L = Q + W$, con ángulo α .

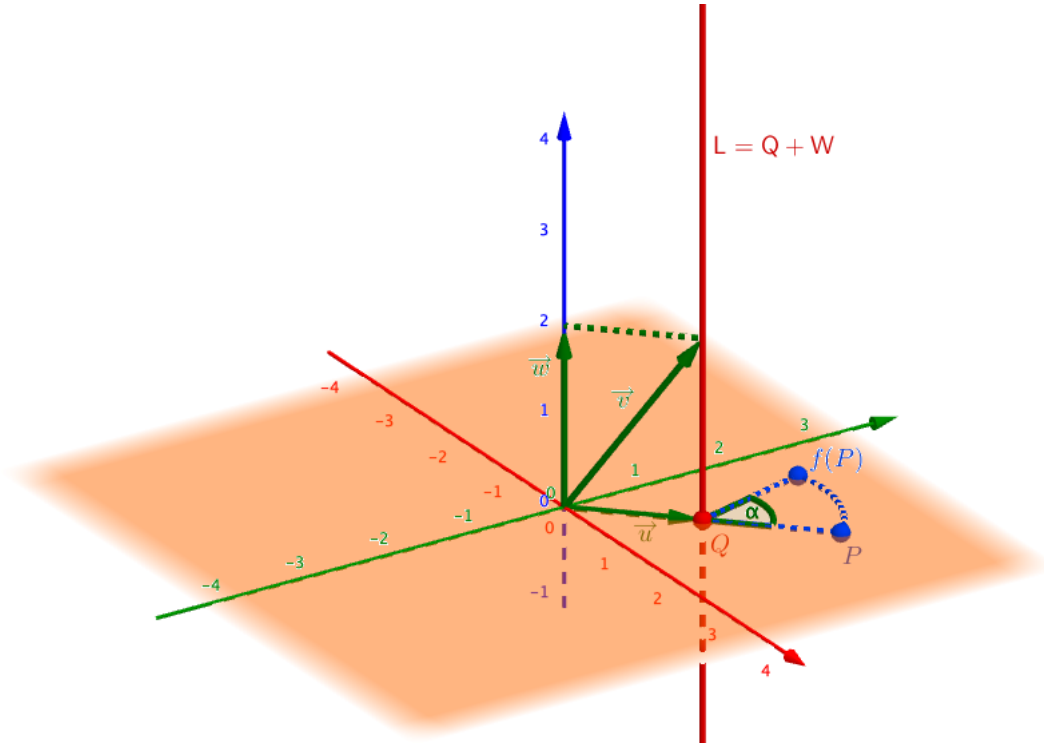


Figura 3.12: Giro respecto de la recta $L = Q + W$ con ángulo α .

- c.2) Si $\vec{w} \neq \mathbf{0}$, f es la composición del giro respecto de la recta $L = Q + W$, con ángulo α , y una traslación de vector \vec{w} paralelo a la recta. Se puede demostrar que, en este caso, no hay puntos fijos y, respecto de la misma referencia ortonormal $\mathcal{R}_c = \{Q; \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}\}$, la matriz de f es

$$M_{\mathcal{R} \mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

En este caso f es un *movimiento helicoidal*, ya que compone el giro respecto de la recta $L = Q + W$ de ángulo α , con una traslación en la dirección de la recta, simulando el movimiento de una hélice.

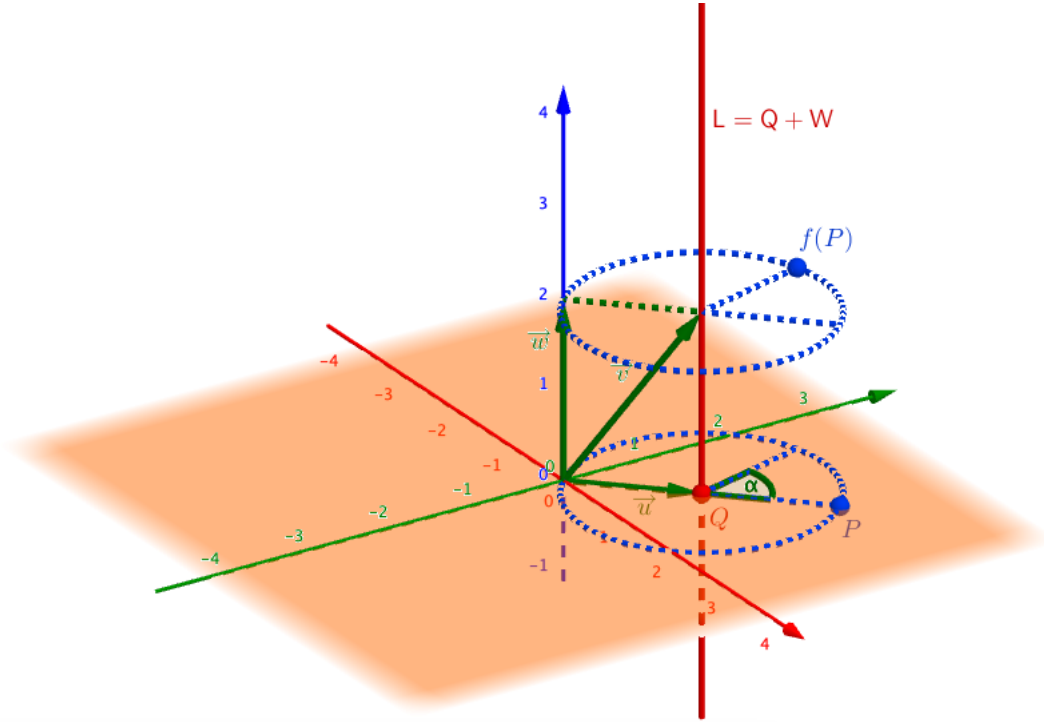


Figura 3.13: Movimiento helicoidal, composición de un giro respecto de la recta $L = Q + W$ con ángulo α , y una traslación paralela a L .

- d) **$\dim W = 0$** . En este caso \vec{f} será la composición de un giro respecto a una recta $U = \mathcal{L}\{\vec{v}_1\}$ y una simetría ortogonal respecto al plano $U^\perp = \mathcal{L}\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, por tanto f será un movimiento inverso. Se puede ver que el sistema de ecuaciones (2.1) es compatible determinado, por lo cual f tiene un único punto fijo P , de tal forma que la recta $L = P + U$ será el eje del giro y el plano $H = P + U^\perp$ será el subespacio respecto del cual se refleja la simetría. Por tanto, respecto de la referencia ortonormal $\mathcal{R}_c = \{P; \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}\}$ la matriz de f está dada por

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, f es la *composición de un giro* respecto a $L = P + U$ con una *simetría* respecto del plano $H = P + U^\perp$.

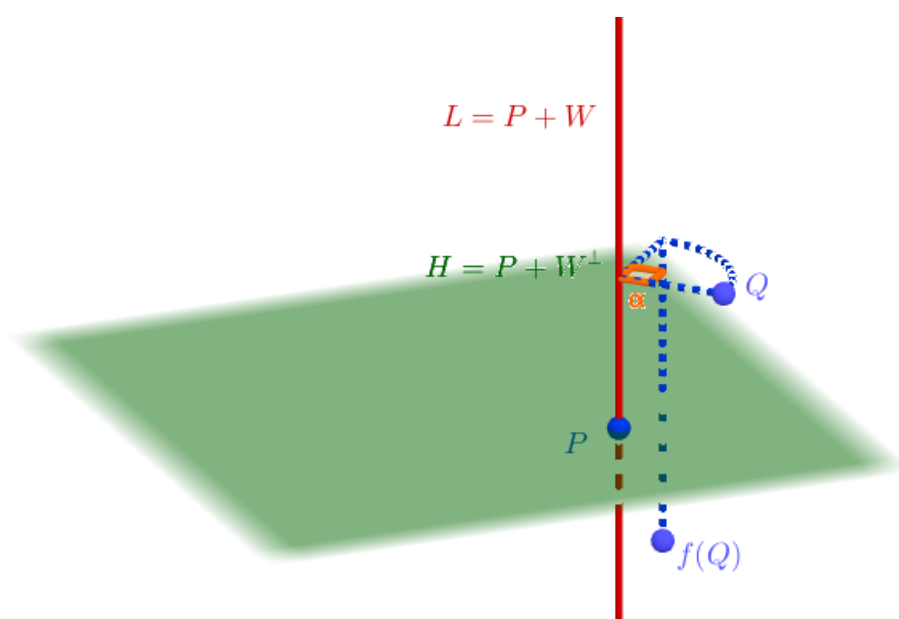


Figura 3.14: Composición de un giro respecto de la recta $L = P + U$ con ángulo α , y una simetría respecto del plano $H = P + U^\perp$.

A	$\dim W$ (v. fijos de \vec{f})	Tipo \vec{f}	$\dim(\text{Fix}(f))$	Tipo f	Orientación Movimiento
$\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$	1	Identidad	\emptyset	Traslación	Directo
	0	Simetría ortogonal respecto de punto	0	Simetría ortogonal respecto de punto	Inverso
$\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$	2	Identidad	\emptyset	Traslación	Directo
	1	Simetría ortogonal respecto de recta	1	Simetría ortogonal respecto de recta	Inverso
			\emptyset	Simetría ortogonal respecto de recta con deslizamiento	Inverso
	0	Giro	0	Giro	Directo
$\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$	3	Identidad	\emptyset	Traslación	Directo
	2	Simetría ortogonal respecto de plano	2	Simetría ortogonal respecto de plano	Inverso
			\emptyset	Simetría ortogonal respecto de plano con deslizamiento	Inverso
	1	Giro respecto de recta	1	Giro respecto de recta	Directo
			\emptyset	Movimiento helicoidal	Directo
	0	Composición de giro y simetría ortogonal respecto de plano	0	Composición de giro y simetría ortogonal respecto de plano	Inverso

Cuadro 3.1: Movimientos en baja dimensión y sus propiedades.

3.3. Problemas

Problema 3.3.1. Demuestra que tres puntos P_1 , P_2 y P_3 están alineados con razón simple $[P_1, P_2, P_3] \geq 1$, si y solo si la distancia entre ellos verifica

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$$

Problema 3.3.2. En $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sea L la recta que pasa por los puntos $P_1 = (3, 0, -1)$ y $P_2 = (2, 1, 0)$. Calcula su perpendicular por P_2 .

Problema 3.3.3. Calcula la distancia entre la recta $L_1 \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ que pasa por $(-1, 0, -1)$ con dirección $\mathcal{L}\{(-2, 1, 1)\}$ y la recta de ecuaciones

$$L_2 : \begin{cases} x + y + z = -2 \\ -y + 2z = 1 \end{cases}$$

Problema 3.3.4. Calcula la distancia en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ del punto $P = (1, 1, 4)$ a la recta

$$L : \begin{cases} -3x + z = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

Problema 3.3.5. Calcula la distancia entre los dos planos paralelos $B_1 : \{x + y - 2z = -1\}$ y $B_2 : \{x + y - 2z = 1\}$.

Problema 3.3.6. Prueba que la aplicación asociada a un movimiento $f : A \rightarrow A$ en un espacio afín euclídeo es lineal. Para ello prueba que, dados $\vec{v}, \vec{w} \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\|\vec{f}(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) - \lambda\vec{f}(\vec{v}) - \mu\vec{f}(\vec{w})\|^2 = 0.$$

Problema 3.3.7. Muestra que, al igual que sucede en las isometrías lineales, el determinante de un movimiento

$$\det(f) := \det(M(\vec{f})_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c})$$

no depende de la referencia ortonormal escogida \mathcal{R}_c , por lo tanto el determinante es un invariante de f , igual a ± 1 .

Problema 3.3.8. Estudia la simetría ortogonal en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ respecto de la recta $L : \{x + 3y = -2\}$, encontrando una representación matricial respecto de una referencia cartesiana apropiada. Calcula sus subespacios invariantes y la imagen de la recta $B : \{3x - y = 5\}$.

Problema 3.3.9. Estudia el giro en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ de centro $Q = (-1, -2)$ y ángulo $\frac{\pi}{6}$, encontrando una representación matricial respecto de una referencia cartesiana apropiada. Calcula la imagen del punto $P = (3, 3)$.

Problema 3.3.10. Estudia el movimiento composición de una simetría ortogonal en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ respecto de la recta $L : \{x + y = 2\}$, y una traslación de vector $\vec{v} = (3, -3)$, encontrando una representación matricial respecto de una referencia cartesiana apropiada. Calcula la imagen del origen de coordenadas.

Problema 3.3.11. Estudia el movimiento composición de una simetría ortogonal en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ respecto de la recta $L : \{x + y = 2\}$, y una traslación de vector $\vec{v} = (1, 1)$, encontrando una representación matricial respecto de una referencia cartesiana apropiada. Calcula la imagen del origen de coordenadas.

Problema 3.3.12. Estudia el movimiento composición de una simetría ortogonal en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ respecto del plano $H : \{x + y - 2z = -1\}$, y una traslación de vector $\vec{v} = (-1, 1, 0)$, encontrando una representación matricial respecto de una referencia cartesiana apropiada. Calcula la imagen de la recta que une los puntos $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, -2)$.

Problema 3.3.13. Estudia el giro en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ respecto de la recta $L = (0, 1, 2) + \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$ y ángulo $\frac{3\pi}{4}$, encontrando una representación matricial respecto de una referencia cartesiana apropiada. Calcula sus puntos fijos y la imagen del punto $P = (-2, -2, 1)$.

Capítulo 4

Espacios Projectivos

La geometría proyectiva nace de la necesidad de dotar de base matemática a los problemas de perspectiva en el arte renacentista, especialmente el dibujo y la pintura. Esta geometría generaliza el concepto de espacio afín, estudiando las propiedades de los objetos que se conservan por proyección. La Figura 4 representa las relaciones que satisface un dibujo en perspectiva, donde a partir de un objeto (representado por el triángulo PQR) y un observador (representado por O), se forman las *proyectantes* de cada punto desde O , que son las rectas que unen P , Q y R con O , respectivamente, y se cortan con el plano H para obtener el objeto proyectado $P'Q'R'$. Observamos cómo el único punto que no se puede proyectar desde O es el propio O , y que las proyectantes paralelas a H no cortan a H , por tanto no se pueden proyectar en H .

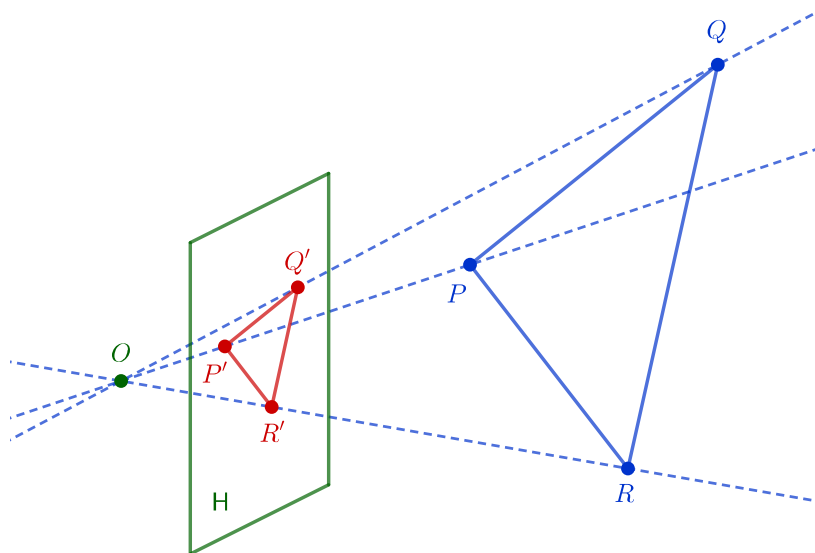


Figura 4.1: Perspectiva del triángulo PQR proyectado en el plano H desde el punto O .

Por otra parte, sea L una recta exterior a O y consideremos todas las proyectantes desde O de los puntos $P \in L$, denotadas por OP . Estas rectas coinciden con las rectas que están contenidas en el plano generado por O y L , excepto la recta paralela a L por O , denotada por OL_∞ (véase Figura 4). De este modo podemos definir el conjunto de rectas en el plano generado por O y L como

$$\{OP : P \in L\} \sqcup \{OL_\infty\}.$$

Esta idea se debe a Desargues, y consiste en añadir a la recta L su punto del infinito L_∞ (un punto *impropio*) para obtener lo que llamamos su clausura proyectiva

$$\bar{L} = L \sqcup \{L_\infty\},$$

formada por los puntos propios de L más el punto correspondiente a la paralela a L por el punto del observador. Véase que la recta OL_∞ es especial sólo en relación a L , ya que si tomamos otra recta L' obtendremos una paralela por O diferente, OL'_∞ , que sí que corta a L (L'_∞ se trata de un punto propio para L pero impropio para L').

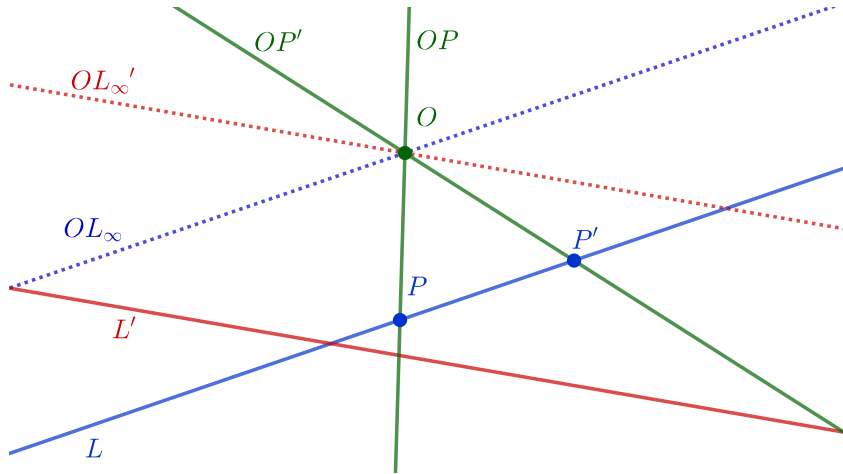


Figura 4.2: Clausura proyectiva de las rectas L y L' , añadiendo sus puntos del infinito L_∞ y L'_∞ representados por las rectas OL_∞ y OL'_∞ , paralelas a L y L' , respectivamente.

Idénticas construcciones se pueden hacer en dimensión superior. Por ejemplo, sea O el punto del observador y un plano H exterior a O . El conjunto de rectas que pasan por O , en el espacio tridimensional generado por O y H , es la unión disjunta de las rectas que cortan a H y de las rectas paralelas a H . Cada recta por O paralela a H es paralela a una recta $L \subset H$, por lo que podemos interpretar cada una de estas rectas paralelas como OL_∞ , donde L_∞ es el punto del infinito de la recta $L \subset H$. De este modo, al igual

que cada recta L tiene un punto del infinito L_∞ , cada plano tiene toda una recta de puntos del infinito H_∞ , donde

$$H_\infty = \{L_\infty : L \subset H\},$$

y la clausura proyectiva del plano es

$$\overline{H} = H \sqcup \{H_\infty\}.$$

Obsérvese que, si dos rectas $L, L' \subset H$, con $L \parallel L'$ paralelas, sus puntos del infinito coinciden, $L_\infty = L'_\infty$, por lo que

$$\overline{L} \cap \overline{L'} = \{L_\infty\}.$$

Por tanto, en la geometría proyectiva, la noción de paralelismo desaparece, y dos rectas paralelas se cortan en un punto impropio, o del infinito, al igual que en un dibujo en perspectiva rectas paralelas se cortan en el punto de fuga.

4.1. El espacio proyectivo

El espacio proyectivo será una generalización de los espacios vectorial y afín, y el objeto básico de nuestro estudio. Aunque es posible desarrollar la geometría proyectiva sobre otros cuerpos, nos limitaremos a los casos real y complejo, por lo que en todo el Capítulo 4, \mathbb{K} denotará el cuerpo \mathbb{R} o \mathbb{C} .

Definición 4.1.1. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} . Llamamos *espacio proyectivo* asociado a V , denotado por $\mathbb{P}(V)$, al conjunto de rectas vectoriales

$$\mathbb{P}(V) := \{L[\vec{v}] : \vec{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}\}.$$

En un espacio proyectivo cada recta denota un punto

$$P = [\vec{v}] \in \mathbb{P}(V)$$

y dos vectores proporcionales, $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, definen el mismo punto

$$P = [\vec{v}] = [\vec{u}].$$

Una forma alternativa de definir un espacio proyectivo es como el conjunto cociente de $V \setminus \{\mathbf{0}\}$ por la relación de equivalencia $\vec{v} \sim \vec{u}$ si $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{\mathbf{0}\}) / \sim.$$

La proyección sobre el conjunto cociente de esta relación de equivalencia

$$\begin{aligned} \pi : V \setminus \{\mathbf{0}\} &\longrightarrow V \setminus \{\mathbf{0}\} / \sim \\ \vec{v} &\longmapsto \pi(\vec{v}) := P = [\vec{v}] \end{aligned}$$

se llama *proyección canónica*.

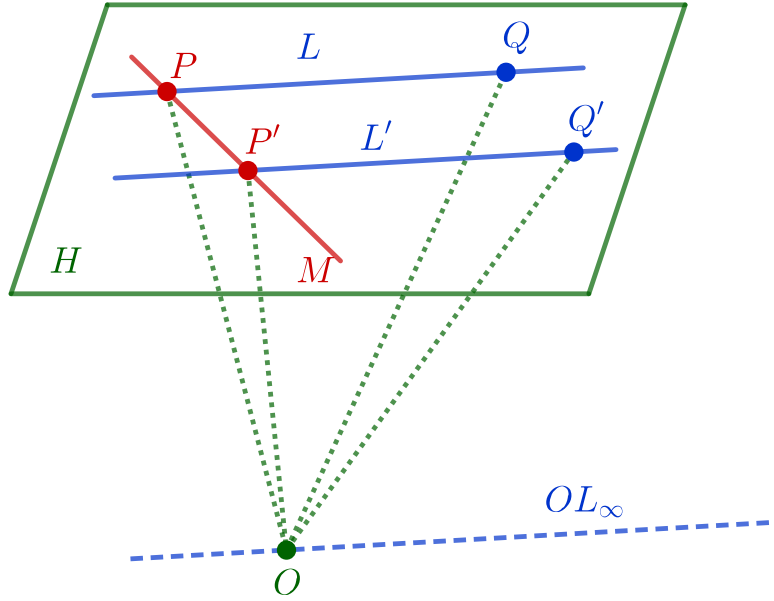


Figura 4.3: Clausura proyectiva del plano H . Las rectas $L, L' \subset H$ comparten el mismo punto del infinito L_∞ , representado por la recta OL_∞ .

Definición 4.1.2. La *dimensión* de un espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ es

$$\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1.$$

Notación 4.1.3. Si $V = \mathbb{K}^{n+1}$, denotaremos por $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ al *espacio proyectivo estándar* (real o complejo), que es un espacio proyectivo de dimensión n .

Observación 4.1.4. Se puede demostrar que la recta proyectiva real $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ es homeomorfa a la esfera S^1 , y que la recta proyectiva compleja $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es homeomorfa a la esfera S^2 .

4.2. Referencias proyectivas y coordenadas homogéneas

Al igual que hicimos con los espacios afines, el siguiente paso será construir unos sistemas de referencia en los espacios proyectivos para poder expresar cada punto en coordenadas respecto a esas referencias.

Definición 4.2.1. Dados puntos $P_0, P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}(V)$, se dice que son (*proyectivamente*) *independientes* si $P_i = [\vec{v}_i], i = 0, 1, \dots, r$, y los vectores $\vec{v}_i \in V, i = 0, 1, \dots, r$ son linealmente independientes.

Obsérvese que la Definición 4.2.1 no depende del representante \vec{v}_i elegido en cada punto del espacio proyectivo ya que dos vectores que definen el mismo punto de $\mathbb{P}(V)$ definen la misma recta de V y son proporcionales, por tanto se preserva la dependencia o independencia lineal.

Definición 4.2.2. Dados puntos $P_0, P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}(V)$, se dice que están en *posición general* si

- $r \leq n = \dim \mathbb{P}(V)$ y los puntos son independientes.
- $r > n = \dim \mathbb{P}(V)$ y cualquier subconjunto de $n + 1$ puntos son independientes.

Definición 4.2.3. Dados puntos $P_0, P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}(V)$, se dice que son (*proyectivamente*) *generadores* de $\mathbb{P}(V)$ si $P_i = [\vec{v}_i], i = 0, 1, \dots, r$, y los vectores $\vec{v}_i \in V, i = 0, 1, \dots, r$ son generadores de V como espacio vectorial.

Del igual modo, la Definición 4.2.3 no depende de los vectores representantes de cada punto.

Siguiendo con las analogías con los casos vectorial y afín, la idea podría ser que la definición de referencia proyectiva sea una colección de puntos que sean al mismo tiempo independientes y generadores del espacio proyectivo. Como cada punto $P \in \mathbb{P}(V)$ corresponde a una recta $P = [\vec{v}], \vec{v} \in V$, vectores asociados a una colección de puntos proyectivamente tanto independientes como generadores forman una base de V . Sin embargo, estas bases no son únicas, ya que las bases

$$\{\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \quad \text{y} \quad \{\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \lambda \vec{v}_n\}$$

con $\lambda \in \mathbb{K}$, definen los mismos puntos $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$. Entonces tendría sentido que las coordenadas de la recta que representa el punto P_n , el último de los puntos de la familia, respecto a la propia familia, fuesen todas nulas excepto la última. Esta última coordenada podría tomar cualquier valor $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ y con ello se deberá permitir, en el caso proyectivo, que las coordenadas sean invariantes por reescalamiento. Pero el problema surge al considerar dos puntos como

$$Q_1 = [\vec{v}_0 + \vec{v}_n] \quad \text{y} \quad Q_2 = [\vec{v}_0 + \lambda \vec{v}_n], 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}.$$

Respecto a cada una de las bases iniciales, tanto Q_1 como Q_2 tendrían la misma primera y última coordenadas, y el resto nulas. Pero como ambas bases dan la misma colección de puntos en el espacio proyectivo, las coordenadas de Q_1 y Q_2 respecto de $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ serían iguales, aunque $Q_1 \neq Q_2$, lo que viola el principio de que las coordenadas determinen unívocamente los elementos de un espacio.

Para solucionar este embrollo, introducimos un nuevo punto en las referencias proyectivas, el punto unidad, que servirá para calibrar qué múltiplo de un vector generador de cada recta tomamos en la base de V asociada.

Definición 4.2.4. Una *referencia proyectiva* de un espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ de dimensión n es una colección de puntos

$$\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_n; P_{n+1}\}$$

en posición general. El último punto, P_{n+1} se llama *punto unidad*.

Definición 4.2.5. Dada una referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_n; P_{n+1}\}$, una *base asociada* a \mathcal{R} es una base de V ,

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$$

donde

- $P_i = [\vec{v}_i], i = 0, 1, \dots, n.$
- $P_{n+1} = [\vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_n].$

Toda referencia proyectiva tiene una base asociada. En efecto, como los puntos $\{P_0, P_1, \dots, P_n; P_{n+1}\}$ están en posición general, sea $P_i = [\vec{u}_i], i = 0, 1, \dots, n, n+1$, y tenemos que

$$\{\vec{u}_0, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$$

es base de V por lo que existen escalares $\lambda_i \in \mathbb{K}, i = 0, 1, \dots, n$ tales que

$$u_{n+1} = \lambda_0 \cdot \vec{u}_0 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n.$$

Entonces, definiendo $\vec{v}_i := \lambda_i \cdot \vec{u}_i, i = 0, 1, \dots, n$, tenemos que

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$$

es una base asociada ya que cumple las propiedades de la Definición 4.2.5.

La propiedad clave que nos permitirá definir coordenadas respecto a una referencia proyectiva es la siguiente.

Lemma 4.2.6. *Dos bases asociadas a la misma referencia proyectiva son proporcionales.*

Demostración. Sean

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \text{ y } \mathcal{B}' = \{\vec{v}_0', \vec{v}_1', \dots, \vec{v}_n'\}$$

dos bases asociadas a la misma referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_n; P_{n+1}\}$. Por la Definición 4.2.5 se tiene que

$$P_i = [\vec{v}_i] = [\vec{v}_i'], \quad i = 0, 1, \dots, n$$

luego

$$\vec{v}_i = \lambda_i \cdot \vec{v}_i', \quad 0 \neq \lambda_i \in \mathbb{K}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Igualmente,

$$P_{n+1} = [\vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_n] = [\vec{v}_0' + \vec{v}_1' + \dots + \vec{v}_n']$$

luego

$$\vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_n = \lambda(\vec{v}_0' + \vec{v}_1' + \dots + \vec{v}_n'), \quad 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}.$$

Uniendo ambas igualdades obtenemos

$$\lambda_0 \cdot \vec{v}_0' + \lambda_1 \cdot \vec{v}_1' + \dots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n' = \lambda \cdot \vec{v}_0' + \lambda \cdot \vec{v}_1' + \dots + \lambda \cdot \vec{v}_n'$$

y, por unicidad de las coordenadas respecto a una base del espacio vectorial V , los escalares deben ser iguales para cada vector, por tanto

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda,$$

con lo cual las dos bases son proporcionales con la misma constante de proporcionalidad para cada vector. \square

Gracias al Lema 4.2.6 podemos definir coordenadas en el espacio proyectivo.

Definición 4.2.7. Sea $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_n; P_{n+1}\}$ una referencia proyectiva con $P_i = [\vec{v}_i], i = 0, 1, \dots, n$. Las *coordenadas homogéneas* de un punto $Q \in \mathbb{P}(V)$ respecto de \mathcal{R} son

$$Q = [\vec{u}] = [\lambda_0 : \lambda_1 : \dots : \lambda_n]$$

donde $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ son las coordenadas de \vec{u} respecto de la base $\{\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ de V .

Observación 4.2.8. 1. Obsérvese que las coordenadas homogéneas en la Definición 4.2.7 están definidas salvo reescalamiento, es decir, si $[1 : 3 : -1]$ son coordenadas homogéneas de $Q \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, $[2 : 6 : -2]$ también son coordenadas homogéneas de Q .

2. Véase también que las coordenadas homogéneas de los puntos de una referencia proyectiva, respecto de esa referencia, son

$$P_0 = [1 : 0 : \dots : 0], P_1 = [0 : 1 : 0 : \dots : 0], \dots, P_n = [0 : 0 : \dots : 0 : 1], P_{n+1} = [1 : 1 : \dots : 1].$$

3. Cualquier reordenación de una referencia proyectiva es otra referencia proyectiva. Sin embargo las coordenadas homogéneas cambian, no sólo se reordenan.

Definición 4.2.9. En el espacio proyectivo estándar $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$, los puntos $P_0 = [e_0]$, $P_1 = [e_1], \dots, P_n = [e_n]$, $P_{n+1} = [e_0 + e_1 + \dots + e_n]$ son una referencia proyectiva con base asociada la base canónica $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{K}^{n+1} , que llamaremos *referencia estándar*.

La siguiente proposición permite caracterizar aquellos conjuntos de puntos que forman una referencia proyectiva.

Proposición 4.2.10. Una colección de puntos $\{P_0, P_1, \dots, P_n; P_{n+1}\}$ es una referencia proyectiva en un espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ de dimensión n si $P_i = [\vec{v}_i]$, $i = 0, 1, \dots, n+1$, verificando que $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ son vectores linealmente independientes (luego base) de V , y que al escribir

$$\vec{v}_{n+1} = \lambda_0 \cdot \vec{v}_0 + \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n$$

todos los escalares $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $i = 0, 1, \dots, n$, son no nulos.

Demostración. Únicamente hay que probar que, dado $0 \leq i \leq n$, la colección

$$\{P_0, P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n, P_{n+1}\}$$

es proyectivamente independiente, es decir, si los vectores

$$\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_n, \vec{v}_{n+1}$$

son independientes. Sea la combinación lineal

$$\mu_0 \cdot \vec{v}_0 + \mu_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + \mu_{i-1} \cdot \vec{v}_{i-1} + \mu_{i+1} \cdot \vec{v}_{i+1} + \dots + \mu_n \cdot \vec{v}_n + \mu_{n+1} \cdot \vec{v}_{n+1} = \mathbf{0} \in V$$

Usando la expresión de \vec{v}_{n+1} en función de los restantes vectores por hipótesis, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mu_0 \cdot \vec{v}_0 + \mu_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + \mu_{i-1} \cdot \vec{v}_{i-1} + \mu_{i+1} \cdot \vec{v}_{i+1} + \dots + \mu_n \cdot \vec{v}_n + \mu_{n+1} \cdot (\lambda_0 \cdot \vec{v}_0 + \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n) = \\ &= (\mu_0 + \mu_{n+1} \cdot \lambda_0) \cdot \vec{v}_0 + (\mu_1 + \mu_{n+1} \cdot \lambda_1) \cdot \vec{v}_1 + \dots + (\mu_{i-1} + \mu_{n+1} \cdot \lambda_{i-1}) \cdot \vec{v}_{i-1} + \\ &\quad \mu_{n+1} \cdot \lambda_i \cdot \vec{v}_i + (\mu_{i+1} + \mu_{n+1} \cdot \lambda_{i+1}) \cdot \vec{v}_{i+1} + \dots + (\mu_n + \mu_{n+1} \cdot \lambda_n) \cdot \vec{v}_n. \end{aligned}$$

Como $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ son linealmente independientes por hipótesis, se tiene que cada coeficiente de la combinación lineal debe ser igual a cero:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mu_0 + \mu_{n+1} \cdot \lambda_0 & = & 0 \\ \mu_1 + \mu_{n+1} \cdot \lambda_1 & = & 0 \\ & \dots & \\ \mu_{i-1} + \mu_{n+1} \cdot \lambda_{i-1} & = & 0 \\ \mu_{n+1} \cdot \lambda_i & = & 0 \\ \mu_{i+1} + \mu_{n+1} \cdot \lambda_{i+1} & = & 0 \\ & \dots & \\ \mu_n + \mu_{n+1} \cdot \lambda_n & = & 0 \end{array} \right.$$

Como cada $\lambda_j \neq 0$, $j = 0, 1, \dots, n$, en particular $\lambda_i \neq 0$, por lo que necesariamente $\mu_{n+1} = 0$ y, por tanto, todos los $\mu_j = 0$, $j = 0, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n, n+1$, lo que prueba que los vectores

$$\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_n, \vec{v}_{n+1}$$

son independientes, por tanto los puntos asociados

$$\{P_0, P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n, P_{n+1}\}$$

son proyectivamente independientes y la colección $\{P_0, P_1, \dots, P_n; P_{n+1}\}$ es una referencia proyectiva. \square

Dadas dos referencias proyectivas de $\mathbb{P}(V)$, \mathcal{R} y \mathcal{R}' con bases asociadas \mathcal{B} y \mathcal{B}' respectivamente, y un punto $P \in \mathbb{P}(V)$ con coordenadas homogéneas

$$\mathbf{x} = [x_0 : x_1 : \dots : x_n], \quad \mathbf{y} = [y_0 : y_1 : \dots : y_n]$$

respecto de ambas referencias, es claro que se verifica

$$\lambda \cdot \mathbf{y}^t = C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot \mathbf{x}^t$$

donde $C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ es la matriz de cambio de base en V y el escalar $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ toma cuenta del rescalamiento de las bases asociadas. En la geometría proyectiva la *matriz de cambio de referencia* $C_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}$ será la clase de equivalencia

$$C_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} := [C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} / C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \sim \lambda \cdot C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}]$$

de la correspondiente matriz de cambio de base salvo rescalamiento. Como en el caso vectorial, se tiene que

$$C_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}^{-1} = C_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}.$$

Ejemplo 4.2.11. Consideremos la colección de puntos en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$

$$\{P_0 = [1 : 0 : 1], P_1 = [2 : 1 : -1], P_2 = [-1 : 2 : 0]; P_3 = [-3 : 3 : 2]\}$$

expresados en coordenadas homogéneas estándar de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Veamos que esta colección es una referencia proyectiva. Usando la Proposición 4.2.10 primero comprobamos que los vectores $\vec{u}_0 := (1, 0, 1)$, $\vec{u}_1 := (2, 1, -1)$ y $\vec{u}_2 := (-1, 2, 0)$, con $P_i = [\vec{u}_i]$, $i = 0, 1, 2$, son linealmente independientes, ya que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 7 \neq 0$$

Falta comprobar que $\vec{u}_3 := (-3, 3, 2)$ se escribe como

$$\vec{u}_3 = \mu_0 \cdot \vec{u}_0 + \mu_1 \cdot \vec{u}_1 + \mu_2 \cdot \vec{u}_2,$$

con $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \neq 0$. En efecto, resolviendo el sistema

$$\begin{cases} \mu_0 + 2\mu_1 - \mu_2 = -3 \\ \mu_1 + 2\mu_2 = 3 \\ \mu_0 - \mu_1 = 2 \end{cases}$$

obtenemos la solución

$$\mu_0 = 1, \mu_1 = -1, \mu_2 = 2,$$

con lo cual $\mathcal{R} := \{P_0, P_1, P_2; P_3\}$ es referencia proyectiva con punto unidad P_3 . Una base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ asociada a esta referencia se puede construir fácilmente a partir de la resolución del sistema anterior, para garantizar que el último de los vectores sea la suma de los anteriores:

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 &:= \vec{u}_0 = (1, 0, 1), \\ \vec{v}_1 &:= -\vec{u}_1 = (-2, -1, 1), \\ \vec{v}_2 &:= 2 \cdot \vec{u}_2 = (-2, 4, 0), \end{aligned}$$

tal que $P_3 = [\vec{u}_3]$ con

$$\vec{u}_3 = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (-3, 3, 2).$$

Cualquier otra base asociada será múltiplo de \mathcal{B} , por el Lema 4.2.6.

Para obtener las coordenadas homogéneas de otro punto respecto de \mathcal{R} , digamos $Q = [0 : -1 : 3]$, escribimos el vector $\vec{w} = (0, -1, 3)$, $Q = [\vec{w}]$, respecto de la base \mathcal{B} , obteniendo

$$\vec{w} = (0, -1, 3) = 2 \cdot (1, 0, 1) + (-2, -1, 1) = 2 \cdot \vec{v}_0 + 1 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2$$

con lo cual las coordenadas homogéneas de Q respecto de \mathcal{R} son $Q = [2 : 1 : 0]_{\mathcal{R}}$. La matriz de cambio de referencia de \mathcal{R} a la referencia estándar \mathcal{R}_e , $C_{\mathcal{R}\mathcal{R}_e}$, es cualquier múltiplo de la matriz de cambio de base de la base \mathcal{B} a la base canónica de \mathbb{R}^3 , $C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_e}$,

$$C_{\mathcal{R}\mathcal{R}_e} = [C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_e}] = \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

que, obviamente verifica

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Se observa que, si hubiéramos tomado como coordenadas homogéneas de Q , en la referencia \mathcal{R} , $Q = [4 : 2 : 0]_{\mathcal{R}}$, la matriz que relaciona ambas coordenadas es $\frac{1}{2} \cdot C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_e}$, un múltiplo suyo:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1 & -1 \\ 0 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4.3. Subespacios proyectivos

Tras la definición de los objetos básicos de la geometría proyectiva, los espacios proyectivos, como proyectivizaciones de espacios vectoriales, los subespacios proyectivos serán, precisamente, las proyectivizaciones de subespacios vectoriales.

4.3.1. Subespacios proyectivos

Definición 4.3.1. Un *subespacio proyectivo* de un espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ es un subconjunto $X \subset \mathbb{P}(V)$ tal que existe un subespacio vectorial $W \subset V$ con $X = \mathbb{P}(W)$.

La siguiente proposición caracteriza los subespacios proyectivos y ayudará a su estudio.

Proposición 4.3.2. Un subconjunto $X \subset \mathbb{P}(V)$ es subespacio proyectivo si y solo si el conjunto

$$\widehat{X} := \pi^{-1}(X) \cup \{\mathbf{0}\} = \{\bar{v} \in V : \vec{v} = \mathbf{0} \text{ ó } [\vec{v}] \in X\}$$

es un subespacio vectorial de V .

Demostración. Si X es subespacio proyectivo, existe un subespacio vectorial $W \subset V$ tal que $X = \mathbb{P}(W)$. Sea $\mathbf{0} \neq \vec{v} \in W$, entonces $\pi(\vec{v}) = [\vec{v}] \in X$, por tanto $\vec{v} \in \pi^{-1}(X)$ y $W = \widehat{X}$. Recíprocamente, supongamos que \widehat{X} es subespacio vectorial. Si $\vec{v} \in \pi^{-1}(X)$, se tiene que $[\vec{v}] \in X$, por lo que $X = \mathbb{P}(\widehat{X})$ y X es subespacio proyectivo. \square

Véase que la Proposición 4.3.2 establece una biyección entre los subespacios vectoriales de V y los subespacios proyectivos de $\mathbb{P}(V)$

$$\begin{aligned} X &\longleftrightarrow \widehat{X} = \pi^{-1}(X) \cup \{\mathbf{0}\} \\ \mathbb{P}(W) &\longleftrightarrow W \end{aligned}$$

donde, en particular, $\widehat{\mathbb{P}(V)} = V$.

Definición 4.3.3. Sea $\mathbb{P}(V)$ un espacio proyectivo de dimensión n . La *dimensión* de un subespacio proyectivo $X = \mathbb{P}(W)$ es

$$\dim X = \dim W - 1$$

y, por convenio, $\mathbb{P}(\{\mathbf{0}\}) = \emptyset$ con $\dim \emptyset = -1$. Los subespacios proyectivos de dimensión 0 se llaman *puntos*, los de dimensión 1 se llaman *rectas* y los de dimensión 2 se llaman *planos*. Los subespacios proyectivos de dimensión $n - 1$ se llaman *hiperplanos*. La *codimensión* de X se define como

$$\text{codim } X = \dim \mathbb{P}(V) - \dim X = n - \dim X = \dim V - \dim W.$$

Es claro que la biyección entre subespacios proyectivos y vectoriales respeta los contenidos

$$X_1 = \mathbb{P}(W_1) \subseteq X_2 = \mathbb{P}(W_2) \iff W_1 \subseteq W_2,$$

con $\dim X_1 \leq \dim X_2$. Además, si $X_1 \subseteq X_2$ con $\dim X_1 = \dim X_2$, entonces $X_1 = X_2$ (véase Problema 4.5.4).

4.3.2. Operaciones con subespacios proyectivos

Proposición 4.3.4. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de subespacios proyectivos de $\mathbb{P}(V)$. Entonces la intersección $X := \bigcap_{i \in I} X_i$ es un subespacio proyectivo con espacio vectorial asociado $\widehat{X} = \bigcap_{i \in I} \widehat{X}_i$.

Demostración. Usando la definición de subespacio vectorial asociado (c.f. Proposición 4.3.2),

$$\widehat{X} = \pi^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \cup \{\mathbf{0}\} = \bigcap_{i \in I} \pi^{-1}(X_i) \cup \{\mathbf{0}\} = \bigcap_{i \in I} \widehat{X}_i,$$

y como $\bigcap_{i \in I} \widehat{X}_i$ es un subespacio vectorial, X es subespacio proyectivo. \square

Dado un subconjunto $S \subset \mathbb{P}(V)$, definimos el *subespacio proyectivo generado por S* como

$$V(S) = \bigcap_{\substack{X_i \text{ subespacio proyectivo} \\ S \subset X_i}} X_i$$

que es subespacio proyectivo (por ser una intersección) y es el menor subespacio proyectivo que contiene a todos los puntos de S .

Proposición 4.3.5. El subespacio vectorial asociado a $V(S)$ es

$$\widehat{V(S)} = L[\pi^{-1}(S)].$$

Demostración. Como $S \subset V(S)$, $\pi^{-1}(S) \subset \widehat{V(S)}$ y, por tanto $L[\pi^{-1}(S)] \subset \widehat{V(S)}$. Por otra parte, para cada $P = [\vec{v}] \in S$, $\vec{v} \in \pi^{-1}(S) \subset L[\pi^{-1}(S)]$, por lo que $P \in \mathbb{P}(L[\pi^{-1}(S)])$ y, entonces $V(S) \subset \mathbb{P}(L[\pi^{-1}(S)])$ y, por tanto, $\widehat{V(S)} \subset L[\pi^{-1}(S)]$. \square

Corolario 4.3.6. En particular, si $S = \{P_0, P_1, \dots, P_r\}$, con $P_i = [\vec{v}_i]$, $i = 0, 1, \dots, r$, se tiene que

$$V(S) = \mathbb{P}(L[\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r]).$$

Demostración. Inmediata a partir de la Proposición 4.3.5. \square

Como en los subespacios vectoriales y afines, la unión de subespacios proyectivos no es un subespacio proyectivo. Sin embargo esta operación será sustituida por la suma, definida como el subespacio generado por la unión.

Proposición 4.3.7. Dados subespacios proyectivos $X_i, i \in I$, con subespacios vectoriales asociados $\widehat{X}_i, i \in I$, su suma

$$\sum_{i \in I} X_i := V\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)$$

es un subespacio proyectivo con subespacio vectorial asociado

$$\widehat{\sum_{i \in I} X_i} = \sum_{i \in I} \widehat{X}_i.$$

En particular, para dos subespacios proyectivos X_1, X_2 , su suma se define como

$$X_1 + X_2 := V(X_1 \cup X_2)$$

con subespacio vectorial asociado

$$\widehat{X_1 + X_2} = \widehat{X_1} + \widehat{X_2}.$$

Demostración. Daremos solo una prueba para la suma de dos subespacios X_1 y X_2 . La prueba para la suma de un número finito se sigue por inducción. La prueba para una suma arbitraria puede encontrarse en [FernandoGamboa, Sección 2.a.3].

Como $X_1, X_2 \subset X_1 + X_2$, sus subespacios vectoriales asociados también verifican

$$\widehat{X_1}, \widehat{X_2} \subset \widehat{X_1 + X_2}$$

y, por tanto,

$$\widehat{X_1} + \widehat{X_2} \subset \widehat{X_1 + X_2}.$$

Por otra parte, sea

$$\vec{v} \in \widehat{X_1 + X_2} = L[\pi^{-1}(X_1 \cup X_2)].$$

Entonces, existen un número finito de vectores $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k \in \pi^{-1}(X_1 \cup X_2)$, y escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, tales que

$$\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{w}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{w}_2 + \dots + \lambda_k \cdot \vec{w}_k.$$

Como cada $\vec{w}_i \in \pi^{-1}(X_1 \cup X_2)$, entonces $\pi(\vec{w}_i) \in X_1 \cup X_2$, y formamos los subconjuntos de índices $J_1 = \{j \in \{1, 2, \dots, k\} : \pi(\vec{w}_j) \in X_1\}$, y $J_2 = \{1, 2, \dots, k\} \setminus J_1$. Definimos

$$\vec{v}_1 = \sum_{j \in J_1} \lambda_j \cdot \vec{w}_j, \quad \text{y} \quad \vec{v}_2 = \sum_{j \in J_2} \lambda_j \cdot \vec{w}_j$$

de tal forma que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, con $\vec{v}_1 \in \widehat{X_1}$ (ya que cada $\vec{w}_j \in \widehat{X_1}, j \in J_1$), y de forma similar $\vec{v}_2 \in \widehat{X_2}$. Por tanto, $\vec{v} \in \widehat{X_1} + \widehat{X_2}$.

En consecuencia, $X_1 + X_2$ es subespacio proyectivo, ya que $\widehat{X_1 + X_2} = \widehat{X_1} + \widehat{X_2}$ es subespacio vectorial. \square

Ejemplo 4.3.8. La suma de dos puntos distintos en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ define una recta proyectiva. En efecto, en coordenadas de la referencia estándar, sean $P = [1 : 0 : 1]$ y $Q = [1 : 1 : 0]$ dos puntos en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Su suma viene dada por

$$\{P\} + \{Q\} = V(\{P\} \cup \{Q\}) = V(P, Q)$$

y el subespacio vectorial asociado a su suma es

$$\widehat{\{P\} + \{Q\}} = \widehat{\{P\}} + \widehat{\{Q\}} = L[(1, 0, 1)] + L[(1, 1, 0)] = L[(1, 0, 1), (1, 1, 0)]$$

que es el plano $H : \{x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, y la recta generada por P y Q es el proyectivizado del plano, $\mathbb{P}(H)$.

Ejemplo 4.3.9. De forma similar, la suma de tres puntos no alineados en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ define un plano proyectivo. En coordenadas de la referencia estándar, sean $P = [1 : 1 : 0 : 0]$, $Q = [1 : 0 : 1 : 0]$ y $R = [1 : 0 : 0 : 1]$, tres puntos en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$. Su suma está dada por

$$\{P\} + \{Q\} + \{R\} = V(\{P\} \cup \{Q\} \cup \{R\}) = V(P, Q, R)$$

y el subespacio vectorial asociado a su suma es

$$\begin{aligned} \{P\} + \widehat{\{Q\}} + \{R\} &= \widehat{\{P\}} + \widehat{\{Q\}} + \widehat{\{R\}} = \\ L[(1, 1, 0, 0)] + L[(1, 0, 1, 0)] + L[(1, 0, 0, 1)] &= \\ L[(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)] \end{aligned}$$

que es el hiperplano $H : \{x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$. Por lo tanto, su proyectivizado $\mathbb{P}(H)$ es un plano de dimensión 2, que es el generado por P , Q y R . Obsérvese que los puntos no están alineados ya que no generan una recta, sino un plano.

Teorema 4.3.10 (Fórmula de Grassmann). Sean subespacios proyectivos $X_1, X_2 \subset \mathbb{P}(V)$. Se verifica

$$\dim(X_1 + X_2) = \dim X_1 + \dim X_2 - \dim(X_1 \cap X_2).$$

Demostración. Dado que

$$\dim(X_1 \cap X_2) = \dim(\widehat{X_1 \cap X_2}) - 1 = \dim(\widehat{X_1} \cap \widehat{X_2}) - 1$$

y que

$$\dim(X_1 + X_2) = \dim(\widehat{X_1 + X_2}) - 1 = \dim(\widehat{X_1} + \widehat{X_2}) - 1,$$

combinando con la fórmula de Grassmann para subespacios vectoriales

$$\dim(\widehat{X_1} + \widehat{X_2}) = \dim \widehat{X_1} + \dim \widehat{X_2} - \dim(\widehat{X_1} \cap \widehat{X_2})$$

se tiene el resultado. □

A partir de la relación entre dos subespacios proyectivos $X_1, X_2 \subset \mathbb{P}(V)$, encontramos tres posibilidades para las *posiciones relativas* de X_1 y X_2 :

- Si $X_1 \subseteq X_2$ o $X_2 \subseteq X_1$, un subespacio está *incluido* en el otro.
- Si $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ pero $X_1 \not\subseteq X_2$ ni $X_2 \not\subseteq X_1$, X_1 y X_2 se *cortan*.
- Si $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, X_1 y X_2 *no se cortan*.

Observación 4.3.11. Obsérvese cómo en la geometría proyectiva desaparece la noción afín de paralelismo. Dos subespacios cuya intersección es vacía simplemente no se cortan.

En particular tenemos el siguiente resultado, que al comparar con la Proposición 1.3.20 nos proporciona una de las esencias que diferencian la geometría proyectiva de la afín.

Proposición 4.3.12. *Una recta y un hiperplano proyectivo siempre se cortan. En particular, dos rectas en el plano proyectivo siempre se cortan.*

Demostración. Sean L y H respectivamente una recta y un hiperplano de $\mathbb{P}(V)$. Por la fórmula de Grassmann

$$n = \dim \mathbb{P}(V) \geq \dim(L + H) = \dim L + \dim H - \dim(L \cap H) = 1 + (n - 1) - \dim(L \cap H)$$

por lo que $\dim(L \cap H) \geq 0$ y $L \cap H \neq \emptyset$. □

Como caso particular obtenemos este Corolario (véase Problema 4.5.5).

Corolario 4.3.13. *Sean un hiperplano $H \subset \mathbb{P}(V)$ y un punto $P \notin H$. Entonces*

$$\{P\} + H = V(\{P\}, H) = \mathbb{P}(V).$$

4.3.3. Ecuaciones de subespacios proyectivos

Sea $\mathbb{P}(V)$ un espacio proyectivo de dimensión n y sea \mathcal{R} una referencia proyectiva con base asociada \mathcal{B} . Dado un subespacio proyectivo $X \subset \mathbb{P}(V)$ de dimensión d , su subespacio vectorial asociado $\hat{X} \subset V$ tiene dimensión $d + 1$ y, por tanto, existe una matriz $M \in \mathcal{M}_{((n+1)-(d+1)) \times (n+1)}(\mathbb{K})$, de rango $(n + 1) - (d + 1) = n - d$, tal que

$$\hat{X} : \{M \cdot \mathbf{x}^t = \mathbf{0}\}$$

son unas ecuaciones implícitas de \hat{X} (respecto de la base \mathcal{B}). Por tanto, unas ecuaciones implícitas de X serán

$$X : \{M \cdot \mathbf{x}^t = \mathbf{0}\},$$

en coordenadas homogéneas respecto de la referencia \mathcal{R} , ya que las coordenadas homogéneas (salvo escalar) de un punto $P = [\vec{v}]$ respecto de \mathcal{R} se corresponden con las coordenadas de \vec{v} respecto de la base asociada \mathcal{B} .

Al igual que en los casos vectorial y afín, resolviendo el sistema de ecuaciones implícitas obtenemos unas ecuaciones paramétricas de X :

$$\mathbf{x}^t = C \cdot \boldsymbol{\lambda}^t$$

donde $C \in \mathcal{M}_{(n+1) \times (d+1)}(\mathbb{K})$, $\mathbf{x} = [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ son coordenadas homogéneas y $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_0 : \lambda_1 : \dots : \lambda_d] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^d$ las coordenadas homogéneas del vector de parámetros.

Observación 4.3.14. Obsérvese que se cumple

$$\dim \mathbb{P}(V) = \dim X + \text{mínimo número ecs. implícitas.}$$

Los procedimientos para obtener ecuaciones, tanto implícitas como paramétricas, de subespacios proyectivos, sus sumas e intersecciones, son análogos a los casos vectorial y afín y los exploraremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.3.15. Sea la recta L en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ generada por los puntos $P = [0 : 1 : 2]$ y $Q = [1 : 0 : -1]$. La recta $L = V(\{P, Q\}) = \{P\} + \{Q\}$ es el proyectivizado de $\widehat{L} = \widehat{\{P\}} + \widehat{\{Q\}}$, que es el plano generado por los vectores $(0, 1, 2), (1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$. Por tanto,

$$\widehat{L} = L[(0, 1, 2), (1, 0, -1)]$$

y unas ecuaciones paramétricas de \widehat{L} son

$$\begin{cases} x_0 &= & \lambda_1 \\ x_1 &= & \lambda_0 \\ x_2 &= & 2\lambda_0 - \lambda_1 \end{cases}$$

con $(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2$, por lo que el mismo sistema

$$\begin{cases} x_0 &= & \lambda_1 \\ x_1 &= & \lambda_0 \\ x_2 &= & 2\lambda_0 - \lambda_1 \end{cases}$$

con $(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ son unas ecuaciones paramétricas de $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ en coordenadas homogéneas respecto de la referencia estándar. Eliminando los parámetros obtenemos una ecuación implícita de L ,

$$L : \{x_0 - 2x_1 + x_2 = 0\}.$$

Sea otra recta $M : \{2x_0 + x_1 = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Unas ecuaciones implícitas de la intersección $L \cap M$ se obtienen concatenando ambas ecuaciones

$$L \cap M : \begin{cases} x_0 & -2x_1 & +x_2 & = & 0 \\ 2x_0 & +x_1 & & = & 0 \end{cases}$$

Es claro que ambas rectas proyectivas son diferentes, ya que sus ecuaciones, que son también ecuaciones de los planos asociados en \mathbb{R}^3 , no son proporcionales por lo que definen planos diferentes. Por tanto, por la fórmula de Grassmann, su suma es el espacio proyectivo total $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ y su intersección tiene dimensión proyectiva 0, luego es un punto. Y este punto tendrá una recta vectorial asociada en \mathbb{R}^3 que es la solución del sistema anterior, visto como sistema en \mathbb{R}^3 . Así, resolvemos el sistema y obtenemos

$$L \cap M : \begin{cases} x_0 &= & \lambda \\ x_1 &= & -2\lambda \\ x_2 &= & -5\lambda \end{cases}$$

Entonces se tiene que

$$\widehat{L} \cap \widehat{M} = L[(1, -2, -5)]$$

y

$$L \cap M = [(1, -2, -5)] = [1 : -2 : -5] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2.$$

Ejemplo 4.3.16. Sea la recta $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ definida por las ecuaciones implícitas (en la referencia proyectiva estándar):

$$L : \begin{cases} x_0 - x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

y sea el plano $H \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ generado por los puntos $P = [1 : 0 : 0 : 1]$, $Q = [0 : 2 : -1 : 0]$ y $R = [0 : -1 : 3 : 1]$. Siguiendo el procedimiento, unas ecuaciones implícitas de $H = V(P, Q, R)$ son

$$H : \begin{cases} x_0 = \lambda_0 \\ x_1 = 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ x_2 = \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ x_3 = \lambda_0 + \lambda_2 \end{cases}$$

y eliminando parámetros obtenemos una ecuación implícita para H

$$H : \{5x_0 + x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0\}.$$

Calculemos la intersección $L \cap H$. Concatenando las ecuaciones implícitas de ambos subespacios proyectivos obtenemos

$$L \cap H : \begin{cases} x_0 - x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_0 + x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

y, resolviendo este sistema, llegamos a unas ecuaciones paramétricas

$$L \cap H : \begin{cases} x_0 = -6\lambda \\ x_1 = \lambda \\ x_2 = 2\lambda \\ x_3 = -5\lambda \end{cases}$$

Por lo tanto, la intersección es un punto:

$$L \cap H = [(-6, 1, 2, -5)] = [-6 : 1 : 2 : -5].$$

Usando la fórmula de Grassmann, se tiene que $\dim L + H = 3$, por lo que $L + H = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$.

4.4. Completación proyectiva de espacios afines

En el estudio de la geometría afín tiene especial importancia la visión de espacios vectoriales como espacios afines (mediante su estructura afín estándar). Cada uno de los subespacios vectoriales se corresponden con unos subespacios afines particulares, aquellos definidos por ecuaciones implícitas homogéneas.

Al estudiar los espacios proyectivos y decir que son una generalización de los espacios afines, es por tanto necesario detallar una construcción que nos permita visualizar un espacio afín dentro de un espacio proyectivo. Esto nos lleva a la idea de completación proyectiva de cada uno de los objetos afines: espacios, referencias y subespacios.

4.4.1. Completación proyectiva de espacios afines

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} de dimensión n y sea A un espacio afín de dirección V . Dado un punto $P \in A$, podemos escribir $A = P + V$. Consideramos las aplicaciones

$$\begin{aligned} \psi : A &\longrightarrow \mathbb{K} \oplus V \\ Q &\longmapsto (1, \overrightarrow{PQ}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \xi : V &\longrightarrow \mathbb{K} \oplus V \\ \vec{v} &\longmapsto (0, \vec{v}) \end{aligned}$$

Tanto ψ (independientemente del punto P elegido) como ξ son inmersiones de A y V en el espacio vectorial $\mathbb{K} \oplus V \simeq \mathbb{K}^{n+1}$, tales que sus imágenes vienen dadas por

$$\psi(A) = \{x_0 = 1\} \quad \text{y} \quad \xi(V) = \{x_0 = 0\},$$

en coordenadas de la base canónica de \mathbb{K}^{n+1} . Como $\psi(P) = (1, \mathbf{0}) = (1, 0, \dots, 0)$ se tiene que

$$\mathbb{K}^{n+1} \simeq \mathbb{K} \oplus V = L[\psi(P)] \oplus \xi(V).$$

Definimos la *completación proyectiva* del espacio afín A , denotada por \overline{A} , como

$$\overline{A} := \mathbb{P}(\mathbb{K} \oplus V),$$

que es un espacio proyectivo de dimensión n . La restricción de la proyección

$$\pi : (\mathbb{K} \oplus V) \setminus \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \overline{A}$$

a $\psi(A)$ es inyectiva. En efecto, sean $\vec{v}, \vec{w} \in V$ tales que $(1, \vec{v}), (1, \vec{w}) \in \psi(A)$ y $\pi(1, \vec{v}) = \pi(1, \vec{w})$. Entonces, $[(1, \vec{v})] = [(1, \vec{w})]$ y existe $\lambda \in \mathbb{K}$ con $(1, \vec{v}) = \lambda \cdot (1, \vec{w})$, luego $\lambda = 1$ y $\vec{v} = \vec{w}$. Además, véase que la imagen de $\psi(A)$ por la proyección es

$$\pi(\psi(A)) = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \overline{A} : x_0 \neq 0\},$$

con inversa

$$(\pi|_{\psi(A)})([x_0 : x_1 : \dots : x_n]) = (1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}).$$

Por tanto, podemos identificar

$$A \longleftrightarrow \psi(A) \longleftrightarrow \pi(\psi(A))$$

y definir el complementario en \overline{A} como

$$A_\infty := \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \overline{A} : x_0 = 0\}$$

de tal forma que

$$\overline{A} = A \sqcup A_\infty.$$

El conjunto A_∞ recibe el nombre de *hiperplano de puntos del infinito* y, por la construcción anterior, tenemos que sus puntos están caracterizados por tener primera coordenada nula y definir rectas paralelas a A :

$$R = [\vec{u}] \in A_\infty \iff R = [0 : x_1 : x_2 : \cdots : x_n] \iff \vec{u} \in V \iff \vec{u} \parallel A.$$

Entonces A_∞ es un hiperplano proyectivo con

$$A_\infty = \mathbb{P}(V) \quad \text{y} \quad \widehat{A_\infty} = V,$$

y también podemos establecer las identificaciones

$$V \longleftrightarrow \xi(V) \longleftrightarrow \pi(\xi(V)) \longleftrightarrow A_\infty.$$

Los puntos de A_∞ se corresponden por tanto con direcciones en $\mathbb{K} \oplus V$ que no cortan al hiperplano afín A (véase Figura 4.4.1), por tanto direcciones paralelas a A . Al proyectivizar, estas direcciones se corresponden con los puntos del infinito de cada recta en A (o puntos impropios, siguiendo la idea de Desargues), y de ahí toman su nombre.

En la construcción anterior aparece de forma distinguida la coordenada x_0 cuyo valor, siendo cero o diferente de cero, distingue los puntos propios del espacio afín A de los del infinito A_∞ en la completación proyectiva \overline{A} . Sin embargo, podríamos haber realizado el mismo tratamiento con cualquier otra coordenada. Identificamos, por simplicidad, A con $\mathbb{A}_\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{P}(V)$ con $\mathbb{P}_\mathbb{K}^n$, y definimo para cada $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ las aplicaciones

$$\begin{aligned} \rho_i : \quad \mathbb{A}_\mathbb{K}^n & \longrightarrow \{x_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}_\mathbb{K}^n \\ (x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) & \longmapsto [x_0 : x_1 : \cdots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \cdots : x_n] \end{aligned}$$

con inversas

$$\rho_i^{-1}([x_0 : x_1 : \cdots : x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

Definimos las *cartas afines*

$$U_i := \{x_i \neq 0\} \simeq \mathbb{A}_\mathbb{K}^n \subset \mathbb{P}_\mathbb{K}^n$$

y, de este modo, podemos entender el espacio proyectivo por medio de un *atlas afín*,

$$\mathbb{P}_\mathbb{K}^n = \bigcup_{i=0}^n U_i,$$

donde el espacio proyectivo n -dimensional es la unión de $n + 1$ cartas afines, cada una de ellas identificada con el espacio afín n -dimensional.

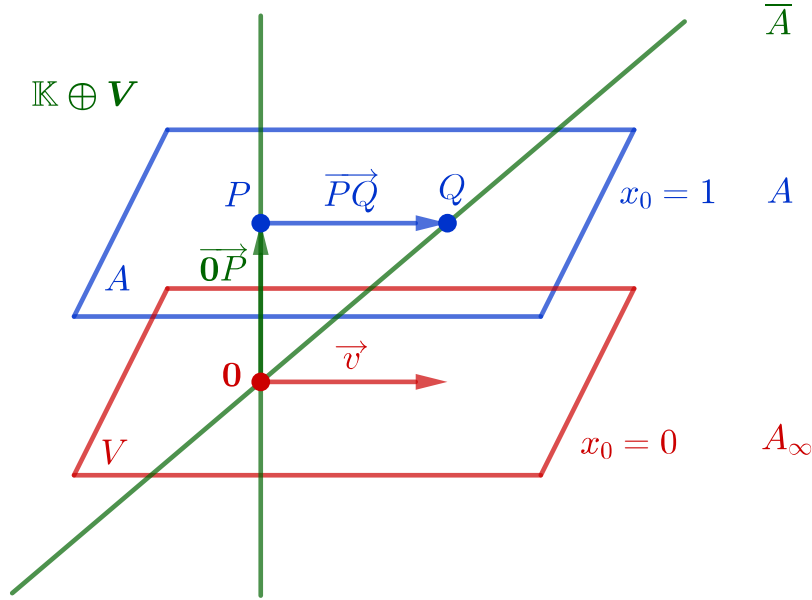


Figura 4.4: Completación proyectiva $\bar{A} = \mathbb{P}(V)$ del espacio afín A , donde A se sumerge como el hiperplano afín $\{x_0 = 1\}$ (que será el conjunto $A = \{x_0 \neq 0\}$ en la completación proyectiva), y el espacio vectorial V se corresponde con el hiperplano del infinito $A_\infty = \{x_0 = 0\}$.

4.4.2. Completación proyectiva de referencias afines

Una vez entendida la completación proyectiva de espacios afines pasamos a estudiar la relación entre bases de V y referencias cartesianas de A , y referencias proyectivas que construiremos en la completación proyectiva \bar{A} .

Sea

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$$

una base de V . Sea $P \in A$ y sea $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ una referencia cartesiana en $A = P + V = O + V$. Mediante la inmersión

$$\begin{aligned} \psi: A &\longrightarrow \mathbb{K} \oplus V \\ Q &\longmapsto (1, \overrightarrow{PQ}) \end{aligned}$$

el punto P va a $\psi(P) = (1, \mathbf{0}) \in \mathbb{K} \oplus V$ en la recta del eje de la primera coordenada de $\mathbb{K} \oplus V$ y podemos entender el punto O como un vector

$$\vec{v}_0 := (1, \overrightarrow{PO}) \in \mathbb{K} \oplus V$$

, por tanto

$$\mathcal{B}' := \{\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$$

es una base de $\mathbb{K} \oplus V$. Así, definimos

$$\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_n; P_{n+1}\}$$

donde

- $P_0 := [\vec{v}_0] \in A$
- $P_i := [\vec{v}_i] \in A_\infty, i = 1, 2, \dots, n$
- $P_{n+1} := [\vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n] \in A.$

que es una referencia proyectiva con base asociada \mathcal{B}' , llamada la *completación proyectiva* de la referencia cartesiana \mathcal{R}_c . Para ver que $P_{n+1} \in A$, observamos que $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n \in V$, ya que cada uno de ellos está en V , por tanto al sumarle $\vec{v}_0 \notin V$, obtenemos $\vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n \notin V$, y entonces $[\vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n] \notin A_\infty$.

Las coordenadas cartesianas de un punto $Q \in A$, respecto a \mathcal{R}_c , son $Q = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ si

$$\overrightarrow{OQ} = x_1 \cdot \vec{v}_1 + x_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{v}_n.$$

Entonces, podemos ver Q como un vector de $\mathbb{K} \oplus V$,

$$\begin{aligned} Q &= O + x_1 \cdot \vec{v}_1 + x_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{v}_n = \\ &1 \cdot \vec{v}_0 + x_1 \cdot \vec{v}_1 + x_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{v}_n, \end{aligned}$$

con lo cual Q tiene coordenadas $(1, x_1, x_2, \dots, x_n)$ respecto a la base \mathcal{B}' de $\mathbb{K} \oplus V$. Y así, las coordenadas homogéneas de $[Q] \in \mathbb{P}(\mathbb{K} \oplus V) = \overline{A}$, respecto de la referencia proyectiva \mathcal{R} , son $[1 : x_1 : x_2 : \dots : x_n]$.

Observación 4.4.1. Si el espacio afín a completar es el espacio afín estándar $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ con su referencia cartesiana canónica $\mathcal{R}_c, e = \{\mathbf{0}; \mathcal{B}_c\}$, eligiendo como $P = \mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ su transformado en la inmersión es

$$\psi(P) = (1, \overrightarrow{PP}) = (1, \mathbf{0}) = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}^n$$

El punto de la referencia cartesiana canónica (que es igual a P), define el primer vector de la completación de la referencia

$$\vec{v}_0 := (1, \overrightarrow{P\mathbf{0}}) = (1, \mathbf{0}) = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}^n,$$

y el resto de los vectores e_i de la base canónica \mathcal{B}_c de \mathbb{K}^n definen

$$\vec{v}_i := (0, e_i).$$

Por tanto, definiendo $P_i := [\vec{v}_i]$, $i = 0, 1, \dots, n$, y $P_{n+1} := [\vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_n]$ obtenemos la completación proyectiva $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_n; P_{n+1}\}$ de la referencia cartesiana $\mathcal{R}_{c,e}$, que es la referencia proyectiva canónica en $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$. Nos referiremos a esta construcción como la *completación proyectiva estándar* de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ en $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$.

Ejemplo 4.4.2. Para ilustrar la completación de espacios y referencias afines, supongamos la referencia cartesiana en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$

$$\mathcal{R}_c = \{(1, 1); \{(2, 1), (0, -1)\}\}$$

donde $\mathcal{B} = \{(2, 1), (0, -1)\}$ es una base de \mathbb{R}^2 . Denotamos por $P = (0, 0)$ y $O = (1, 1) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ y, mediante la inmersión

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \\ Q &\longmapsto (1, \overrightarrow{PQ}) \end{aligned}$$

podemos calcular la imagen de cada punto de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$. Por ejemplo, si $Q = (3, 2)$, entonces $\overrightarrow{PQ} = (3, 2)$, y $\psi(Q) = (1, 3, 2) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^3$. Del mismo modo,

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \\ \vec{v} &\longmapsto (0, \vec{v}) \end{aligned}$$

y los vectores de \mathcal{B} , $(2, 1)$ y $(0, -1)$ se identifican con $\vec{v}_1 := (0, 2, 1)$ y $\vec{v}_2 := (0, 0, -1)$ respectivamente, en $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^3$. El punto P se identifica con $\psi(P) = (1, 0, 0)$ y el punto O con

$$\vec{v}_0 := (1, \overrightarrow{PO}) = (1, \overrightarrow{(0, 0)(1, 1)}) = (1, 1, 1) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^3,$$

con lo cual completa la base de $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{B}' = \{\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}.$$

La completación proyectiva de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ se define como

$$\overline{\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2} := \mathbb{P}(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3).$$

Y la referencia proyectiva

$$\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2; P_3\},$$

donde $P_i = [\vec{v}_i]$, $i = 0, 1, 2$, y

$$P_3 := [\vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2] = [(1, 3, 1)],$$

es la completación proyectiva de la referencia cartesiana \mathcal{R}_c . En la completación proyectiva, $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ se identifica con el conjunto de puntos $\{[x_0 : x_1 : x_2] : x_0 \neq 0\}$. Por ejemplo, el punto de coordenadas homogéneas (respecto de la referencia estándar) $[3 : 6 : -9]$, se corresponde con

$$(1, \frac{6}{3}, \frac{-9}{3}) = (1, 2, -3) \in \psi(\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2) \subset \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^3,$$

por tanto con el punto $R := (2, -3) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, que tiene coordenadas cartesianas $(\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$ respecto a \mathcal{R}_c (que son las coordenadas de \overrightarrow{OQ} respecto de la base \mathcal{B} de \mathbb{R}^2). Es sencillo comprobar que las coordenadas homogéneas del punto de partida, respecto de la referencia proyectiva \mathcal{R} , son $[1 : \frac{1}{2} : \frac{9}{2}]$ (o un múltiplo como $[2 : 1 : 9]$). Por otra parte, el punto de coordenadas homogéneas (respecto de la referencia estándar) $[0 : 1 : -2]$ es un punto perteneciente al hiperplano del infinito $\mathbb{A}_{\mathbb{R}, \infty}^2$. Su recta en $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^3$ es paralela a la inmersión $\psi(\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2)$ y está definida por el vector $(0, 1, -2)$, que se corresponde con $\overrightarrow{w} = (1, -2) \in \mathbb{R}^2$. Las coordenadas de \overrightarrow{w} respecto a la base \mathcal{B} son $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ y, del mismo modo, se puede comprobar que, respecto de la referencia proyectiva \mathcal{R} , las coordenadas homogéneas del punto de partida son $[0 : \frac{1}{2} : \frac{5}{2}] = [0 : 1 : 5]$.

4.4.3. Completación proyectiva de subespacios afines

Mediante la construcción de la completación proyectiva de espacios afines, cualquier subespacio afín se corresponderá con un subespacio proyectivo.

Sea A un espacio afín de dirección V , que es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} de dimensión n , y sea $B \subset A$ un subespacio afín de dirección W . Supongamos que $P \in B$, tal que $B = P + W$, y sea la inmersión

$$\begin{array}{rclcl} \psi : A & \longrightarrow & \mathbb{K} \oplus V & = & L[\psi(P)] \oplus \xi(V) \\ \cup & & \cup & & \\ B & \longrightarrow & \mathbb{K} \oplus W & = & L[\psi(P)] \oplus \xi(W) \\ Q & \longmapsto & (1, \overrightarrow{PQ}) & & \end{array}$$

Componiendo con la proyección

$$\pi : (\mathbb{K} \oplus V) \setminus \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \overline{A} = \mathbb{P}(\mathbb{K} \oplus V)$$

definimos la *completación proyectiva* de B como la restricción a $\mathbb{K} \oplus W$,

$$\overline{B} = \pi|_{\mathbb{K} \oplus W} = \mathbb{P}(\mathbb{K} \oplus W),$$

que es un subespacio proyectivo. Al igual que hicimos con los espacios afines, podemos establecer las identificaciones

$$B \longleftrightarrow \psi(B) \longleftrightarrow \pi(\psi(B))$$

y

$$W \longleftrightarrow \xi(W) \longleftrightarrow \pi(\xi(W)).$$

Veamos que se verifica

$$\overline{B} = \mathbb{P}(\mathbb{K} \oplus W) = V(\psi(B)) = V(B)$$

En efecto, el subespacio vectorial asociado a $V(B)$ es $\widehat{V(B)} = L[\pi^{-1}(B)]$, que es $L[B] = L[\psi(B)]$ visto como subespacio vectorial de $\mathbb{K} \oplus V$. Pero

$$L[B] = L[\psi(B)] = L[\psi(P)] \oplus W = \mathbb{K} \oplus W = \widehat{B},$$

por definición de subespacio vectorial asociado a un subespacio proyectivo. Por tanto

$$\overline{B} = \mathbb{P}(\mathbb{K} \oplus W) = \mathbb{P}(\widehat{V(B)}) = V(B),$$

es decir, la completación proyectiva de un subespacio afín B es el subespacio proyectivo generado por todas las rectas que unen el origen con los puntos de B inmerso en $\mathbb{K} \oplus V$.

Definimos el *subespacio de puntos del infinito* de B como

$$B_\infty := \overline{B} \setminus B$$

que tiene por subespacio vectorial asociado

$$\widehat{B_\infty} = W, \quad B_\infty = \mathbb{P}(W).$$

Las siguientes igualdades se desprenden de la construcción

$$B_\infty = \overline{B} \cap \{x_0 = 0\} = \overline{B} \cap A_\infty = V(B) \cap A_\infty,$$

$$B = \overline{B} \cap \{x_0 = 1\} = \overline{B} \cap A = V(B) \cap A.$$

Así, el subespacio afín B se puede visualizar como la intersección de A con la completación proyectiva \overline{B} , y sus puntos del infinito B_∞ son aquellos puntos del infinito de A que están en la completación proyectiva \overline{B} . Obsérvese que $\dim B_\infty = \dim B - 1$.

El siguiente resultado muestra que cualquier subespacio proyectivo que no esté formado únicamente por puntos del hiperplano del infinito, se puede cortar con A en la completación proyectiva para obtener un subespacio afín cuyo completado proyectivo es el subespacio inicial.

Proposición 4.4.3. *Sea $Z \subset \overline{A} = \mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{K}^n}$ un subespacio proyectivo no contenido en los puntos del infinito $A_\infty = \{x_0 = 0\}$. Entonces*

$$Y := Z \cap \{x_0 \neq 0\} = Z \cap A$$

es una subvariedad afín con completación proyectiva $\overline{Y} = Z$, por tanto $\dim Y = \dim Z$, y sus puntos del infinito son $Y_\infty = Z \cap A_\infty$.

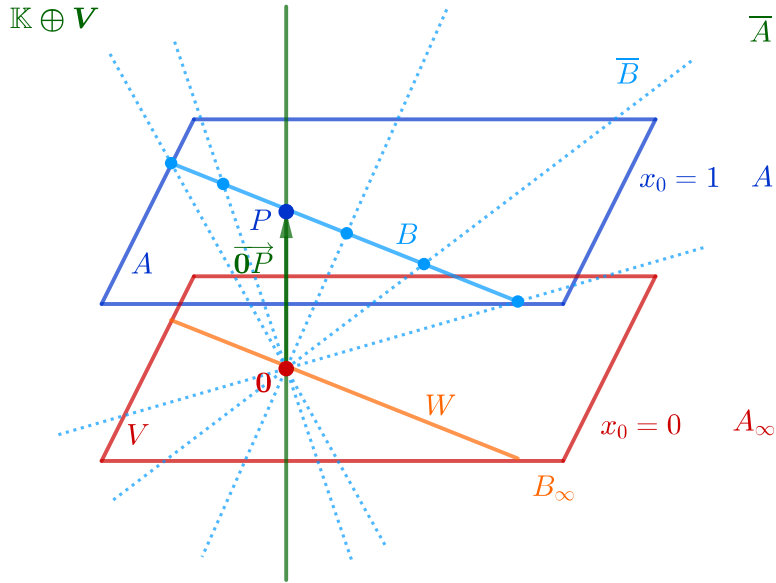


Figura 4.5: Completación proyectiva $\bar{B} = \mathbb{P}(W)$ del subespacio afín B . El espacio vectorial W se corresponde con los puntos del infinito de B , B_∞ , y la completación afín está generada por todas las rectas que unen el origen con B , $\bar{B} = \mathbb{P}(W) = V(B)$.

Demostración. Sea $d = \dim Z$ y, dado $Z \not\subset A_\infty$, $\dim Z \cap A_\infty = d - 1$, por la fórmula de Grassmann. Escogemos un punto $P_0 \in Z \setminus A_\infty$ y puntos $P_1, P_2, \dots, P_d \in Z \cap A_\infty$ tales que $V(P_0, P_1, P_2, \dots, P_d) = Z \cap A_\infty$. Completamos con puntos $P_{d+1}, P_{d+2}, \dots, P_n \in A_\infty$ y el punto unidad P_{n+1} de tal modo que $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2, \dots, P_d, P_{d+1}, P_{d+2}, \dots, P_n; P_{n+1}\}$ es una referencia proyectiva respecto de la cual

$$Z : \{x_{d+1} = 0, x_{d+2} = 0, \dots, x_n = 0\},$$

e

$$Y := Z \cap A = \{x_0 = 1, x_{d+1} = 0, x_{d+2} = 0, \dots, x_n = 0\} \subset \mathbb{K} \oplus V$$

que es una subvariedad afín de A , con dimensión d . Su completación proyectiva se realiza al añadirle los puntos del infinito,

$$Y_\infty = Z \cap A_\infty = \{x_0 = 0, x_{d+1} = 0, x_{d+2} = 0, \dots, x_n = 0\}$$

obteniendo $\bar{Y} = Z$. □

Y mediante este otro resultado, reinterpretamos la noción de paralelismo afín en la completación proyectiva, donde el paralelismo se lee en el comportamiento de los puntos del infinito.

Proposición 4.4.4. *Dos subespacios afines $B, C \subset A$, con $\dim B \leq \dim C$, son paralelos si y solo si $B \cap C = \emptyset$ y $B_\infty \subset C_\infty$.*

Demostración. Sean $W, U \subset V$ las direcciones de B y C respectivamente. Mediante la identificación $W = B_\infty$, $U = C_\infty$ obtenemos que $B \parallel C$ equivale a que sean disjuntos y $W = B_\infty \subset U = C_\infty$. \square

Para finalizar, observamos la relación entre las ecuaciones implícitas de un subespacio afín y su completación proyectiva. Sea $B \subset A$ un subespacio afín y $\overline{B} \subset \overline{A}$ su completación proyectiva. Si el sistema

$$B : C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

son unas ecuaciones implícitas de B respecto de una referencia cartesiana de A , entonces

$$\overline{B} : C \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

son unas ecuaciones implícitas de la completación proyectiva \overline{B} respecto de la completación proyectiva de la referencia cartesiana. A este proceso se le llama *homogeneizar* las ecuaciones implícitas. Al proceso inverso, consistente en hacer la primera coordenada $x_0 = 1$, se llama *deshomogeneizar*.

Ejemplo 4.4.5. En la referencia cartesiana estándar de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, cuya completación proyectiva es la referencia estándar de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, la recta de ecuación implícita

$$B : \{x_1 - 2x_2 = 3\}$$

se puede escribir como

$$B : \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Al homogeneizar, obtenemos

$$\overline{B} : \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

que es la ecuación implícita que define la completación proyectiva de B ,

$$\overline{B} : \{-3x_0 + x_1 - 2x_2 = 0\}.$$

4.5. Problemas

Problema 4.5.1. Da un ejemplo de referencia proyectiva en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ y comprueba que las coordenadas homogéneas no se conservan al reordenar los puntos de la referencia, dando un ejemplo explícito de ello.

Problema 4.5.2. Muestra que los puntos $P_0 = [1 : 0 : 1]$, $P_1 = [0 : 1 : 2]$, $P_2 = [1 : -1 : 0]$, $P_3 = [3 : -2 : 0]$ forman una referencia proyectiva en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2; P_3\}$, con P_3 como punto unidad. Calcula una base asociada.

Problema 4.5.3. Muestra que los puntos $P_0 = [0 : 1 : 0 : 1]$, $P_1 = [2 : -1 : -1 : 0]$, $P_2 = [0 : 1 : -1 : 2]$, $P_3 = [0 : -1 : 0 : 2]$ forman una referencia proyectiva en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$, $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2, P_3; P_4\}$, con P_4 como punto unidad. Calcula una base asociada.

Problema 4.5.4. Prueba que si dos subespacios proyectivos verifican $X_1 \subseteq X_2$ con $\dim X_1 = \dim X_2$, entonces $X_1 = X_2$.

Problema 4.5.5. Prueba que un hiperplano $H \subset \mathbb{P}(V)$ y un punto $P \notin H$ generan todo el espacio proyectivo:

$$\{P\} + H = V(\{P\}, H) = \mathbb{P}(V).$$

Problema 4.5.6. Sea el punto $P = [1 : -2 : 3] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ y sea la recta $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ generada por los puntos $[-1 : -1 : 2]$ y $[3 : 0 : -1]$. Calcula ecuaciones implícitas de la suma $P + L$.

Problema 4.5.7. Sean los puntos del plano proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ $P = [1 : 0 : 1]$, $Q = [-1 : 1 : 0]$ y $R = [1 : -2 : 3]$. Sean las rectas $L = V(P, Q)$ y $M = V(P, R)$. Calcula su suma $L + M$ y su intersección $L \cap M$, obteniendo ecuaciones implícitas de ambas.

Problema 4.5.8. Obtén la intersección de la recta $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ generada por $P = [1 : 0 : -1]$ y $Q = [2 : 1 : 0]$ y la recta M de ecuación implícita $M : \{x_0 - 3x_1 + x_2 = 0\}$.

Problema 4.5.9. Obtén unas ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio proyectivo obtenido al intersecar los planos $B, C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ de ecuaciones

$$B : \{x_0 - x_1 + x_2 - x_3 = 0\}, \quad y \quad C : \{2x_0 + x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

Problema 4.5.10. Calcula la ecuación de la recta que pasa por los siguientes pares de puntos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$:

- a) $[-1 : 1 : 1]$ y $[1 : 3 : 2i]$.
- b) $[1 : -1 : i]$ y $[i : 1 : -1]$.
- c) $[1 : 1 : 2i]$ y $[1 - 2 : 2i]$.

Problema 4.5.11. Calcula la suma de la recta $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ de ecuaciones

$$L : \begin{cases} x_0 - 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_0 + x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

y de la recta M generada por los puntos $[1 : 0 : -1 : -1]$ y $[-1 : 1 : 2 : 2]$. Estudia si se cortan las rectas.

Problema 4.5.12. Considera la referencia cartesiana en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$

$$\mathcal{R}_c = \{(1, 2); \{(-1, 1), (1, 1)\}\}$$

donde $\mathcal{B} = \{(-1, 1), (1, 1)\}$ es una base de \mathbb{R}^2 .

- Calcula su completación proyectiva.
- Relaciona las coordenadas cartesianas del punto $Q = [-2, -1] \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ con sus coordenadas homogéneas en la completación proyectiva.

Problema 4.5.13. Considera el plano $B : \{x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2\} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$.

- Calcula su completación proyectiva \overline{B} obteniendo unas ecuaciones implícitas respecto de la referencia proyectiva estándar (completación proyectiva de la referencia cartesiana estándar en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$).
- Obtén sus puntos del infinito.

Problema 4.5.14. Considera las rectas en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$

$$L : \{x_0 + x_1 - 3x_2 = 0\},$$

$$M : \{2x_0 + x_1 - 3x_2 = 0\}.$$

- Calcula el punto donde intersecan.
- Deshomogeneiza las ecuaciones para obtener las variedades afines asociadas $L \cap \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ y $M \cap \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.
- Comprueba que las variedades afines son paralelas, precisamente porque L y M se cortan en un punto del infinito.

Problema 4.5.15. Sea el plano $B : \{2x_1 + x_2 - x_3 = -2\} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$.

- Calcula todos los planos afines paralelos a él.
- Obtén la completación proyectiva para cada uno de ellos y observa el patrón de sus ecuaciones implícitas en coordenadas homogéneas.

Problema 4.5.16. Describe la completación proyectiva del espacio vectorial de las matrices 2×2 con coeficientes reales, $M \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ (visto como espacio afín con su estructura afín estándar) y del subespacio de matrices de traza igual a 3

$$B = \{M \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : \text{tr}(M) = 3\},$$

dando ecuaciones homogéneas de \overline{B} (véase Problema 1.4.3).

Problema 4.5.17. Describe la completación proyectiva del espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3, $\mathcal{P}_3[X]$ (visto como espacio afín con su estructura afín estándar), y del subespacio afín

$$C = \{p(X) \in \mathcal{P}_3[X] : p(1) = 3\},$$

dando ecuaciones homogéneas de \overline{C} (véase Problema 1.4.4).

Capítulo 5

Aplicaciones Proyectivas

5.1. Aplicaciones proyectivas y representación matricial

Como en cualquier geometría, tras definir los espacios a tratar, estudiaremos las aplicaciones que conservan la estructura de estos espacios, en este caso las aplicaciones proyectivas.

5.1.1. Definición y propiedades de las aplicaciones proyectivas

Al igual que hemos definido espacios y subespacios proyectivos como las imágenes por la proyección canónica de espacios y subespacios vectoriales, nos gustaría definir aplicaciones proyectivas como

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}(V) &\longrightarrow \mathbb{P}(V') \\ P = [\vec{v}] &\longmapsto f(P) := [\hat{f}(\vec{v})] \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{f} : V &\longrightarrow V' \\ \vec{v} &\longmapsto \hat{f}(\vec{v}) \end{aligned}$$

es una aplicación lineal. Esta construcción está bien definida en el sentido de no depender de la elección del vector \vec{v} . En efecto, sea $\vec{u} \in V$ tal que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ y $P = [\vec{v}] = [\vec{u}]$. Por linealidad de \hat{f} se tiene que $\hat{f}(\vec{u}) = \lambda \hat{f}(\vec{v})$ por lo que

$$f(P) = [\hat{f}(\vec{v})] = [\lambda \hat{f}(\vec{v})] = [\hat{f}(\vec{u})]$$

está bien definida.

Sin embargo, f no está definida para aquellos $Q = [\vec{w}] \in \mathbb{P}(V)$ tales que $\hat{f}(\vec{w}) = \mathbf{0} \in V'$, es decir, $\vec{w} \in \text{Ker } \hat{f}$. Esto nos lleva a la siguiente definición de aplicación proyectiva.

Definición 5.1.1. Una *aplicación proyectiva* entre dos espacios proyectivos $\mathbb{P}(V)$ y $\mathbb{P}(V')$ es una aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}(V) &\dashrightarrow \mathbb{P}(V') \\ P = [\vec{v}] &\longmapsto f(P) := [\widehat{f}(\vec{v})] \end{aligned}$$

asociada a una aplicación lineal no nula $\widehat{f} : V \rightarrow V'$ cuyo dominio es

$$\text{Dom } f = \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(\text{Ker } \widehat{f})$$

y cuya imagen es

$$\text{im } f = \{[\widehat{f}(\vec{v})] : \vec{v} \in V \setminus \text{Ker } \widehat{f}\} = \mathbb{P}(\text{im } \widehat{f}).$$

El subespacio proyectivo

$$Z(f) := \mathbb{P}(\text{Ker } \widehat{f})$$

donde f no está definida se llama *centro* de f .

Veamos que una aplicación proyectiva f está determinada por su aplicación lineal \widehat{f} salvo proporcionalidad.

Proposición 5.1.2. *Dos aplicaciones proyectivas $f, g : \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V')$ son iguales si y solo si $\widehat{f}, \widehat{g} : V \rightarrow V'$ son proporcionales.*

Demostración. Si $\widehat{f}, \widehat{g} : V \rightarrow V'$ son proporcionales, entonces existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $\widehat{f} = \lambda \widehat{g}$. Entonces, sea $P = [\vec{v}] \in \mathbb{P}(V) \setminus Z(f)$, se tiene

$$f(P) = [\widehat{f}(\vec{v})] = [\lambda \widehat{g}(\vec{v})] = [\widehat{g}(\vec{v})] = g(P).$$

Recíprocamente, supongamos que $f = g$, por lo que ambas tienen el mismo dominio y $Z(f) = Z(g)$. Sea $W \subset V$ un subespacio complementario de $\text{ker}(\widehat{f}) = \text{Ker}(\widehat{g})$ tal que $W \oplus \text{Ker}(\widehat{f}) = V$. Para cada vector $\vec{w} \in W \setminus \{0\}$ se tiene que existe un escalar $\lambda_{\vec{w}} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ con $\widehat{f}(\vec{w}) = \lambda_{\vec{w}} \widehat{g}(\vec{w})$, por lo que podemos escoger una base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_r\}$ de W y escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tales que $\widehat{f}(\vec{w}_i) = \lambda_i \widehat{g}(\vec{w}_i)$. Supongamos que existen dos de estos escalares diferentes, $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$. Para el vector $\vec{w}_i + \vec{w}_j$ existirá otro escalar, digamos μ , tal que $\widehat{f}(\vec{w}_i + \vec{w}_j) = \mu \widehat{g}(\vec{w}_i + \vec{w}_j)$. Por tanto tenemos las igualdades

$$\begin{aligned} \mu \widehat{g}(\vec{w}_i) + \mu \widehat{g}(\vec{w}_j) &= \mu(\widehat{g}(\vec{w}_i) + \widehat{g}(\vec{w}_j)) = \mu \widehat{g}(\vec{w}_i + \vec{w}_j) = \\ \widehat{f}(\vec{w}_i + \vec{w}_j) &= \widehat{f}(\vec{w}_i) + \widehat{f}(\vec{w}_j) = \lambda_i \widehat{g}(\vec{w}_i) + \lambda_j \widehat{g}(\vec{w}_j). \end{aligned}$$

Así tendremos que

$$(\mu - \lambda_i) \widehat{g}(\vec{w}_i) + (\mu - \lambda_j) \widehat{g}(\vec{w}_j) = 0$$

es una combinación lineal igual a cero, con escalares no ambos nulos ya que $\lambda_i \neq \lambda_j$. Pero esto es imposible, ya que por definición de W , \widehat{g} es inyectiva en W , por tanto $\widehat{g}(\vec{w}_i)$

y $\widehat{g}(\vec{w}_j)$ son vectores linealmente independientes. Entonces existe un mismo $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $\widehat{f} = \lambda \widehat{g}$ sobre una base de W , luego sobre todos los vectores de W . Y como cualquier $\vec{v} \in V$ descompone como $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ con $\vec{u} \in \text{Ker}(\vec{f}) = \text{Ker}(\vec{g})$ y $\vec{w} \in W$ se tiene

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\vec{v}) &= \widehat{f}(\vec{u} + \vec{w}) = \widehat{f}(\vec{u}) + \widehat{f}(\vec{w}) = \widehat{f}(\vec{w}) = \\ &= \lambda \widehat{g}(\vec{w}) = \lambda \widehat{g}(\vec{u}) + \lambda \widehat{g}(\vec{w}) = \lambda \widehat{g}(\vec{u} + \vec{w}) = \lambda \widehat{g}(\vec{v}),\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. \square

La siguiente proposición recoge las propiedades más importantes de las aplicaciones proyectivas

Proposición 5.1.3. 1. Sean $f : \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V')$, $g : \mathbb{P}(V') \dashrightarrow \mathbb{P}(V'')$ aplicaciones proyectivas con aplicaciones lineales asociadas $\widehat{f} : V \rightarrow V'$ y $\widehat{g} : V' \rightarrow V''$. Si $\widehat{g} \circ \widehat{f} \neq 0$ entonces la composición $g \circ f$ es aplicación proyectiva, con aplicación lineal asociada $\widehat{g \circ f} = \widehat{g} \circ \widehat{f}$.

2. Una aplicación proyectiva $f : \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V')$ es inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva) si y solo si \widehat{f} es inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva).

Demostración. 1. Si $\widehat{h} := \widehat{g} \circ \widehat{f} \neq 0$, sea h su aplicación proyectiva asociada. Entonces, para todo $P = [\vec{v}] \notin Z(h) = Z(f)$, tenemos

$$h(P) = [\widehat{h}(\vec{v})] = [\widehat{g}(\widehat{f}(\vec{v}))] = g([\widehat{f}(\vec{v})]) = g(f([\vec{v}])) = (g \circ f)(P)$$

y la composición es aplicación proyectiva.

2. Supongamos que \widehat{f} es inyectiva y sean $P = [\vec{v}]$, $Q = [\vec{w}] \in \mathbb{P}(V) \setminus Z(f)$ tales que $f(P) = f(Q)$, luego $[\widehat{f}(\vec{v})] = [\widehat{f}(\vec{w})]$ y, por tanto $\widehat{f}(\vec{v}) = \lambda \widehat{f}(\vec{w})$, con $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Como \widehat{f} es inyectiva se tiene que $\vec{v} = \lambda \vec{w}$, por lo que $P = Q$. Recíprocamente, supongamos que \widehat{f} no es inyectiva y, como no es nula, existen $\vec{v}, \vec{w} \in V$ tales que $\widehat{f}(\vec{v}) = 0$ y $\widehat{f}(\vec{w}) \neq 0$. Entonces los vectores \vec{w} y $\vec{v} + \vec{w}$ son linealmente independientes, luego $P = [\vec{w}]$ y $Q = [\vec{v} + \vec{w}]$ son dos puntos distintos con

$$f(P) = [\widehat{h}(\vec{w})] = [\widehat{h}(\vec{v}) + \widehat{h}(\vec{w})] = [\widehat{h}(\vec{v} + \vec{w})] = f(Q)$$

ya que $\widehat{f}(\vec{v}) = \widehat{f}(\vec{v} + \vec{w}) = 0$. Por tanto f no es inyectiva.

Supongamos que \widehat{f} es sobreyectiva y sea $P' = [\vec{v}'] \in \mathbb{P}(V')$. Existe $\vec{v} \in V \setminus \{0\}$ tal que $\widehat{f}(\vec{v}) = \vec{v}'$, por lo que $P := [\vec{v}]$ verifica

$$f(P) = f([\vec{v}]) = [\widehat{f}(\vec{v})] = [\vec{v}'] = P'$$

y f es sobreyectiva. Recíprocamente, si f es sobreyectiva, sea $\vec{v}' \in V' \setminus \{0\}$ y tenemos que existe $P = [\vec{v}] \in \mathbb{P}(V)$ tal que $f(P) = [\vec{v}']$. Por tanto $\widehat{f}(\vec{v}) = \lambda \vec{v}'$, para cierto $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ y entonces tomamos $\vec{w} := \lambda^{-1} \vec{v}'$ y se tiene que

$$\widehat{f}(\vec{w}) = \widehat{f}(\lambda^{-1} \vec{v}') = \lambda^{-1} \widehat{f}(\vec{v}') = \lambda^{-1} \lambda \vec{v}' = \vec{v}'$$

y \widehat{f} es sobreyectiva.

La equivalencia para f y \widehat{f} biyectivas es consecuencia de las dos anteriores. \square

Observación 5.1.4. Como consecuencia de la Proposición 5.1.3

- f inyectiva equivale a que $\text{Dom } f = \mathbb{P}(V)$.
- f sobreyectiva equivale a que $\text{im } f = \mathbb{P}(V')$.
- Si f es biyectiva entonces su inversa f^{-1} es una aplicación proyectiva con aplicación lineal asociada $\widehat{f^{-1}} = \widehat{f}^{-1}$. Además, las dimensiones de $\mathbb{P}(V)$ y $\mathbb{P}(V')$ coinciden.

Dado un subespacio proyectivo $X \subset \mathbb{P}(V)$, recordemos que $\widehat{X} := \pi^{-1}(X) \cup \{0\}$. Vamos a analizar las imágenes y preimágenes de subespacios proyectivos por aplicaciones proyectivas.

Proposición 5.1.5. Sea $f : \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V')$ una aplicación proyectiva.

1. Dado un subespacio proyectivo $X \subset \mathbb{P}(V)$, su imagen por f es $f(X) := f(X \setminus Z(f))$ que es un subespacio proyectivo de $\mathbb{P}(V')$ y verifica $\widehat{f(X)} = \widehat{f}(\widehat{X})$.
2. Dado un subespacio proyectivo $Y \subset \mathbb{P}(V')$, su preimagen por f es $f^{-1}(Y) := f^{-1}(Y) \cup Z(f)$ que es un subespacio proyectivo de $\mathbb{P}(V)$ y verifica $\widehat{f^{-1}(Y)} = \widehat{f}^{-1}(\widehat{Y})$.

Demostración. Se trata de un cálculo sencillo que se deja al lector en el Ejercicio 5.5.2. \square

El siguiente Lema facilita el cálculo de los subespacios proyectivos de la Proposición 5.1.5.

Lemma 5.1.6. Sea $f : \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V')$ una aplicación proyectiva.

1. Dado un subespacio proyectivo $X \subset \mathbb{P}(V)$ tal que $X \not\subset Z(f)$, de la forma $X = V(\{P_1, P_2, \dots, P_r\})$ con $P_i = [\vec{v}_i]$, $\vec{v}_i \notin \text{Ker } \widehat{f}$, $i = 1, 2, \dots, r$, su imagen por f es $f(X) = V(\{f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_r)\})$.
2. Dado un subespacio proyectivo $Y \subset \mathbb{P}(V')$ tal que $Y \cap \text{im } f = V(\{Q_1, Q_2, \dots, Q_s\})$ y puntos $P_j \in \mathbb{P}(V)$, con $f(P_j) = Q_j$, $j = 1, 2, \dots, s$, su preimagen por f es $f^{-1}(Y) = V(\{P_1, P_2, \dots, P_s\} \cup Z(f))$.

Demostración. 1. Por la Proposición 5.1.5, tenemos que

$$\widehat{f(X)} = \widehat{f(\widehat{X})} = \widehat{f(L[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r])} = L[\widehat{f(\vec{v}_1)}, \widehat{f(\vec{v}_2)}, \dots, \widehat{f(\vec{v}_r)}].$$

Usando el Corolario 4.3.6, concluimos que $f(X) = V(\{f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_r)\})$.

2. Como $Y \cap \text{im } f = V(\{Q_1, Q_2, \dots, Q_s\})$, sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s \in V' \setminus \{0\}$ tales que $Q_j = [\vec{v}_j]$, $j = 1, 2, \dots, s$. Por el Corolario 4.3.6 se tiene que

$$\widehat{f^{-1}(Y)} = \widehat{f^{-1}(\widehat{Y})} = \widehat{f^{-1}(\widehat{Y} \cap \text{im } \widehat{f})} = \widehat{f^{-1}(Y \cap \text{im } f)} = \widehat{f^{-1}(L[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s])}.$$

Escribiendo $P_j = [\vec{v}_j]$, $j = 1, 2, \dots, s$, tenemos

$$\widehat{f^{-1}(L[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s])} = L[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s] + \ker \widehat{f} = L[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s \cup \ker \widehat{f}]$$

y proyectivizando tenemos $f^{-1}(Y) = V(\{P_1, P_2, \dots, P_s\} \cup Z(f))$. □

Ejemplo 5.1.7. Consideremos la aplicación proyectiva $f : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ inducida por la aplicación lineal en \mathbb{R}^4

$$\widehat{f}(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1, x_3, x_3),$$

luego

$$f([x_0 : x_1 : x_2 : x_3]) = [x_1 : x_1 : x_3 : x_3],$$

El núcleo de \widehat{f} es

$$\text{Ker } \widehat{f} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_3 = 0\}$$

luego f está definida en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \setminus Z(f)$, donde

$$Z(f) = \mathbb{P}(\text{Ker } \widehat{f}) = \mathbb{P}(L[(0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)]) = V(\{P_1, P_2\})$$

con $P_1 = [0 : 1 : 0 : 0]$ y $P_2 = [0 : 0 : 0 : 1]$.

Por su parte, la imagen de f es

$$\text{im } f = \mathbb{P}(\text{im } \widehat{f}) = \mathbb{P}(L[(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)]) = V(\{Q_1, Q_2\})$$

donde $Q_1 = [1 : 1 : 0 : 0]$ y $Q_2 = [0 : 0 : 1 : 1]$. Es claro que f no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

Dados $R_1 = [1 : 0 : 1 : 0]$, $R_2 = [1 : 0 : 0 : 1]$, observamos que $R_1 \in Z(f)$, por lo tanto para calcular la imagen de la recta proyectiva $L = V(\{R_1, R_2\})$ buscamos otro conjunto generador. Como $L = \mathbb{P}(L[(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)]) = \mathbb{P}(L[(2, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1)])$, llamando $R_3 := [(2, 0, 1, 1)] \notin Z(f)$ se tiene que $L = V(\{R_3, R_2\})$. Usando el Lema 5.1.6, la imagen de la recta L es

$$f(L) = V(\{f(R_3), f(R_2)\}) = V(\{[0 : 0 : 1 : 1], [0 : 0 : 1 : 1]\}) = \{Q_2\},$$

que es un punto.

Por otra parte, dados $S_1 = [1 : 0 : 0 : 0]$, $S_2 = [0 : 1 : 0 : 0]$ y $S_3 = [0 : 0 : 1 : 0]$, sea el plano $H := V(\{S_1, S_2, S_3\}) = \{x_3 = 0\}$. La intersección

$$H \cap \text{im } f = \{x_0 - x_1 = x_2 = x_3 = 0\} = \{Q_1\}$$

es un punto que verifica $f([1 : 0 : 0 : 0]) = [1 : 1 : 0 : 0] = Q_1$. Entonces, la preimagen de H por f es

$$f^{-1}(H) = V(\{[1 : 0 : 0 : 0]\} \cup Z(f)) = V(\{[1 : 0 : 0 : 0], [0 : 1 : 0 : 0], [0 : 0 : 0 : 1]\}),$$

que es el plano de ecuación $f^{-1}(H) = \{x_2 = 0\}$.

Observación 5.1.8. En una aplicación proyectiva $f : \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V')$, dado que se cumple

$$\dim \text{Ker } \hat{f} + \dim \text{im } \hat{f} = \dim V$$

se verifica la siguiente fórmula para las dimensiones del centro y la imagen:

$$\dim Z(f) + \dim \text{im } f = \dim \mathbb{P}(V) - 1.$$

Dentro de las aplicaciones proyectivas, tienen especial importancia las que están definidas en todo el espacio proyectivo de partida.

Definición 5.1.9. Una *homografía* es una aplicación proyectiva inyectiva $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$, por tanto definida en todo $\mathbb{P}(V)$.

Nos gustaría imitar el Teorema 2.1.10 y encontrar el mínimo número de puntos necesarios para determinar completamente una homografía. Las aplicaciones proyectivas $f_1, f_2 : \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ inducidas por las aplicaciones lineales

$$\hat{f}_1 : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2, \quad (x_0, x_1) \mapsto (x_0, x_1)$$

$$\hat{f}_2 : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2, \quad (x_0, x_1) \mapsto (x_0, 2x_1)$$

coinciden en $P_1 = [1 : 0]$ y $P_2 = [0 : 1]$:

$$f_1(P_1) = [1 : 0] = f_2(P_1),$$

$$f_1(P_2) = [0 : 1] = [0 : 2] = f_2(P_2).$$

Sin embargo, no son proporcionales, luego inducen aplicaciones proyectivas distintas. En efecto, sobre el punto $P_3 = [1 : 1]$:

$$f_1(P_3) = [1 : 1] \neq [1 : 2] = f_2(P_3).$$

Por tanto, para determinar una aplicación proyectiva en un espacio de dimensión 1, son necesarios más de dos puntos, de hecho hacen falta 3, los mismos que los de una referencia proyectiva tras añadir el punto unidad.

Teorema 5.1.10. Sean $\mathbb{P}(V)$ un espacio proyectivo de dimensión n y sea una referencia proyectiva de $\mathbb{P}(V)$, $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_n; P_{n+1}\}$. Sea $\mathbb{P}(V')$ otro espacio proyectivo y sean puntos $Q_0, Q_1, \dots, Q_n, Q_{n+1} \in Y \subset \mathbb{P}(V')$ en posición general dentro del subespacio proyectivo $Y \subset \mathbb{P}(V')$. En tal caso, existe una única homografía $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ tal que $f(P_i) = Q_i$, $i = 0, 1, \dots, n, n+1$.

Demostración. Como los puntos $Q_0, Q_1, \dots, Q_n, Q_{n+1}$ están en posición general de Y son, en efecto, una referencia proyectiva \mathcal{R}' de Y . Dadas $\mathcal{B} = \{\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\vec{v}'_0, \vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_n\}$ bases asociadas a \mathcal{R} y \mathcal{R}' respectivamente, existe una única aplicación lineal $\hat{f} : V \rightarrow V'$ tal que $\hat{f}(\vec{v}_i) = \vec{v}'_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, luego su aplicación proyectiva asociada f verifica $f(P_i) = Q_i$, para todo $i = 0, 1, \dots, n$. Además, se tiene que

$$\hat{f}(\vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_n) = \hat{f}(\vec{v}_0) + \hat{f}(\vec{v}_1) + \dots + \hat{f}(\vec{v}_n) = \vec{v}'_0 + \vec{v}'_1 + \dots + \vec{v}'_n$$

por lo que también $f(P_{n+1}) = Q_{n+1}$ para el punto unidad.

Supongamos que existe otra homografía $g : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ tal que $g(P_i) = Q_i$, $i = 0, 1, \dots, n, n+1$. Se tendría que \hat{g} es una aplicación lineal inyectiva que lleva la base \mathcal{B} en otra base \mathcal{B}'' de \hat{Y} que verifica

$$[\hat{g}(\vec{v}_i)] = g([\vec{v}_i]) = g(P_i) = Q_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

y

$$\begin{aligned} [\hat{g}(\vec{v}_0) + \hat{g}(\vec{v}_1) + \dots + \hat{g}(\vec{v}_n)] &= [\hat{g}(\vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_n)] = \\ g([\vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_n]) &= g(P_{n+1}) = Q_{n+1}. \end{aligned}$$

Entonces \mathcal{B}'' es otra base asociada a la referencia proyectiva \mathcal{R}' . Por el Lema 4.2.6, la base \mathcal{B}'' es proporcional a \mathcal{B}' , luego \hat{g} es proporcional a \hat{f} y, por tanto, por la Proposición 5.1.2, se tiene que $f = g$. \square

5.1.2. Representación matricial de aplicaciones proyectivas

Sea $f : \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V')$ una aplicación proyectiva y sean $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ referencias proyectivas de $\mathbb{P}(V)$ y $\mathbb{P}(V')$, con bases asociadas $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, respectivamente. Sean $\mathbf{x} = [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ unas coordenadas homogéneas respecto de \mathcal{R} de un punto $P = [\vec{v}] \in \mathbb{P}(V) \setminus Z(f)$ y sean $\mathbf{y} = [y_0 : y_1 : \dots : y_m]$ unas coordenadas homogéneas respecto de \mathcal{R}' de su imagen $f(P) = [\vec{v}'] \in \mathbb{P}(V')$. Los vectores $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_m)$ también pueden interpretarse como las coordenadas de $\vec{v} \in V$ respecto de la base \mathcal{B} y de $\vec{v}' \in V'$ respecto de la base \mathcal{B}' , respectivamente. Por definición de aplicación lineal asociada $\hat{f} : V \rightarrow V'$, más que las coordenadas homogéneas están definidas salvo escalar, se tiene que

$$\lambda \cdot \mathbf{y}^t = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\hat{f}) \cdot \mathbf{x}^t, \quad \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}.$$

Al igual que hicimos con las matrices de cambio de referencia proyectiva, definimos la *matriz asociada a la aplicación proyectiva f* respecto de las referencias \mathcal{R} y \mathcal{R}' , denotada

por $M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(f)$, como la clase de equivalencia

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(f) := [M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\widehat{f}) /_{M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\widehat{f}) \sim \lambda \cdot M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\widehat{f})}]$$

de la correspondiente matriz de la aplicación lineal asociada salvo rescalamiento. Por tanto tenemos la relación entre las coordenadas homogéneas de P y $f(P)$ dada por

$$\mathbf{y}^t = M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(f) \cdot \mathbf{x}^t.$$

Dadas $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$, referencias proyectivas de $\mathbb{P}(V)$, con bases asociadas \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 respectivamente, y dadas $\mathcal{R}'_1, \mathcal{R}'_2$, referencias proyectivas de $\mathbb{P}(V)$, con bases asociadas \mathcal{B}'_1 y \mathcal{B}'_2 respectivamente, existe la siguiente relación para el cambio de base de las matrices asociadas a \widehat{f}

$$M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}'_2}(\widehat{f}) = C_{\mathcal{B}'_1\mathcal{B}'_2} \cdot M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}'_1}(\widehat{f}) \cdot C_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$$

donde $C_{\mathcal{B}'_1\mathcal{B}'_2}$ y $C_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$ son las correspondientes matrices de cambio de base en V' y V , respectivamente. Por tanto, para f tenemos la siguiente relación

$$\lambda \cdot M_{\mathcal{R}_2\mathcal{R}'_2}(f) = C_{\mathcal{R}'_1\mathcal{R}'_2} \cdot M_{\mathcal{R}_1\mathcal{R}'_1}(f) \cdot C_{\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1}, \quad \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}.$$

Dadas aplicaciones proyectivas $f : \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V')$, $g : \mathbb{P}(V)' \dashrightarrow \mathbb{P}(V'')$ con aplicaciones lineales asociadas $\widehat{f} : V \rightarrow V'$ y $\widehat{g} : V' \rightarrow V''$, la matriz de la composición $\widehat{g} \circ \widehat{f}$ es el producto de las matrices de \widehat{g} y \widehat{f} , respecto de las bases apropiadas. Como las matrices de aplicaciones proyectivas asociadas están definidas salvo proporcionalidad, dadas referencias $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ y \mathcal{R}'' de $\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(V)'$ y $\mathbb{P}(V)''$ respectivamente, se cumple que

$$\lambda \cdot M_{\mathcal{R}\mathcal{R}''}(g \circ f) = M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}''}(g) \cdot M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(f) \quad \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}.$$

Ejemplo 5.1.11. Sean las referencias proyectivas en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ dadas por

$$\mathcal{R} := \{P_0 := [1 : 0 : 0], P_1 := [-1 : 1 : 0], P_2 := [1 : 1 : 1]; P_3 := [0 : 3 : 2]\},$$

$$\mathcal{R}' := \{Q_0 := [0 : 1 : 0], Q_1 := [2 : 1 : 0], Q_2 := [-1 : 0 : 1]; Q_3 := [1 : 0 : 1]\}.$$

Es sencillo comprobar que las bases de \mathbb{R}^3

$$\mathcal{B} = \{(-1, 0, 0), (-1, 1, 0), (2, 2, 2)\}$$

$$\mathcal{B}' = \{(0, -1, 0), (2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$

son bases asociadas a \mathcal{R} y \mathcal{R}' respectivamente.

Por el Teorema 5.1.10, existe una única homografía $f : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ que lleva una referencia proyectiva en otra, es decir, $f(P_i) = Q_i, i = 0, 1, 2, 3$. Respecto de las referencias \mathcal{R} y \mathcal{R}' es inmediato escribir la matriz de f :

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(f) = [M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\widehat{f})] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ya que \widehat{f} lleva cada vector de \mathcal{B} en su correspondiente de \mathcal{B}' .

Para entender cómo actúa f , nos gustaría calcular su representación respecto de la referencia proyectiva canónica

$$\mathcal{R}_c := \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]; [1 : 1 : 1]\}.$$

Para ello efectuamos el cambio de base

$$\begin{aligned} \lambda \cdot M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f) &= C_{\mathcal{R}' \mathcal{R}_c} \cdot M_{\mathcal{R} \mathcal{R}'}(f) \cdot C_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5/2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto, reescalando con λ , podemos escribir la matriz de la homografía f respecto de la referencia canónica en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ como

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observación 5.1.12. Los isomorfismos de un espacio vectorial V de dimensión $n + 1$ sobre \mathbb{K} forman un grupo denotado por $GL(n + 1, \mathbb{K})$, llamado *grupo general lineal* o *grupo lineal*, cuyos elementos son matrices cuadradas invertibles $(n + 1) \times (n + 1)$ con coeficientes en \mathbb{K} . Las homografías del espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ en sí mismo forman un grupo denotado por $PGL(n + 1, \mathbb{K})$ y llamado *grupo proyectivo general lineal* o *grupo proyectivo*. Este subgrupo se puede obtener como cociente del grupo lineal por las homotecias lineales

$$PGL(n + 1, \mathbb{K}) = GL(n + 1, \mathbb{K}) / \{\lambda I_{n+1} : \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\},$$

lo que equivale a reescalar cada matriz al pasar al proyectivo.

5.1.3. Puntos fijos y subespacios invariantes

Al igual que hicimos con las afinidades, para estudiar las homografías en un espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ es importante el conocimiento de sus puntos fijos y de sus subespacios invariantes.

Definición 5.1.13. Dada una homografía $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$, el conjunto de *puntos fijos* de f es

$$\text{Fix}(f) = \{P \in \mathbb{P}(V) : f(P) = P\}.$$

Dada una referencia proyectiva \mathcal{R} de $\mathbb{P}(V)$, un punto $x \in \mathbb{P}(V)$ con coordenadas homogéneas $\mathbf{x} = [x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$ respecto de \mathcal{R} es un punto fijo por una homografía $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ si sus coordenadas solucionan el sistema

$$\lambda \cdot \mathbf{x}^t = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\hat{f}) \cdot \mathbf{x}^t, \quad \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\},$$

donde \mathcal{B} es una base asociada a \mathcal{R} . Este sistema equivale a

$$(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\hat{f}) - \lambda \cdot I_{n+1}) \cdot \mathbf{x}^t, \quad \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\},$$

con lo cual las coordenadas de los puntos fijos son las de los vectores propios de \hat{f} de valor propio λ (que siempre es no nulo ya que \hat{f} es inyectiva). Por tanto los puntos fijos de f serán una unión de subespacios proyectivos

$$\text{Fix}(f) = \bigsqcup_{\lambda} X_{\lambda}$$

donde

$$X_{\lambda} = \mathbb{P}(\widehat{X}_{\lambda}) \quad \text{y} \quad \widehat{X}_{\lambda} = \text{Ker}(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\hat{f}) - \lambda \cdot I_{n+1}) \subset V$$

es el espacio propio de \hat{f} asociado al valor propio λ . Observa que los subespacios de puntos fijos son disjuntos, ya que un punto fijo $P = [\vec{v}]$ se corresponde con un vector propio \vec{v} asociado a un único valor propio.

Observación 5.1.14. Para que exista algún punto fijo es suficiente con que exista algún valor propio de \hat{f} , es decir, que el polinomio característico $P_{\hat{f}}(t) = \det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\hat{f}) - t \cdot I_{n+1})$ tenga alguna raíz en \mathbb{K} . Esto sucede siempre para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, y para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ con $\dim V$ impar (ya que el grado del polinomio característico es igual a $\dim V$). Por tanto las homografías en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ o en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{2k}$ siempre tienen puntos fijos. Por el contrario las homografías, por ejemplo, de la recta proyectiva real $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, pueden tener puntos fijos o no.

Definición 5.1.15. Se dice que el subespacio proyectivo $X \subset \mathbb{P}(V)$ es un *subespacio invariante* por una aplicación proyectiva $f : \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V)$, si $f(X) \subset X$. Si f es una homografía, como es biyectiva, X es subespacio invariante si $f(X) = X$.

Observación 5.1.16. Obviamente, cualquier subespacio proyectivo de puntos fijos $X \subset \text{Fix}(f)$, es además invariante.

Proposición 5.1.17. Sea una recta $L \subset \mathbb{P}(V)$ y sea $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ una homografía tal que $L \not\subset \text{Fix}(f)$. La recta L es invariante para f si y solo si para cada punto $P \in L \setminus \text{Fix}(f)$ se tiene $(f \circ f)(P) \in V(P, f(P)) = L$.

Demostración. Supongamos que L es invariante y sea $P \in L \setminus \text{Fix}(f)$, tal que $P \neq f(P) \in L$, por la invarianza de L . Entonces L está generada por cualesquiera dos puntos distintos, por ejemplo $L = V(P, f(P))$ y, por ser L invariante, $f(f(P)) = (f \circ f)(P) \in L$.

Recíprocamente, sea $P \in L \setminus \text{Fix}(f)$ tal que $(f \circ f)(P) \in V(P, f(P)) = L$. Para otro punto $Q \in L$, tenemos

$$f(Q) \in f(L) = f(V(P, f(P))) = V(f(P), f(f(P))) = V(f(P), (f \circ f)(P)) \subset L,$$

ya que tanto $f(P)$ como $(f \circ f)(P)$ pertenecen a L , por hipótesis. \square

Proposición 5.1.18. Sea \mathcal{R} una referencia proyectiva de $\mathbb{P}(V)$ con base asociada \mathcal{B} y sea $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ una homografía con aplicación lineal asociada \widehat{f} y matriz $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\widehat{f})$ respecto de \mathcal{B} . Los hiperplanos invariantes de $\mathbb{P}(V)$ vienen dados por la ecuación

$$\left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\widehat{f})^t - \lambda \cdot I_{n+1} \right) \cdot \mathbf{b}^t = \mathbf{0},$$

donde las soluciones $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ representan la ecuación de un hiperplano

$$b_0x_0 + b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 0,$$

en coordenadas homogéneas respecto de \mathcal{R} .

Demostración. La prueba imita el resultado análogo de la Proposición 2.1.17.

En coordenadas respecto de \mathcal{B} , un hiperplano H de ecuación

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}^t = 0$$

es invariante por \widehat{f} si, para cada $\vec{v} \in H$, con coordenadas \mathbf{x} , se cumple

$$\mathbf{b} \cdot M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\widehat{f}) \cdot \mathbf{x}^t = 0.$$

Como todas las ecuaciones de H son múltiplos unas de otras y la expresión anterior (si no es nula) define una ecuación de H , entonces

$$\mathbf{b} \cdot M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\widehat{f}) = \lambda \cdot \mathbf{b}$$

lo que, trasponiendo, nos da la expresión del enunciado. \square

Al igual que en el caso afín, los dos resultados anteriores permiten calcular todos los subespacios proyectivos invariantes de homografías en espacios proyectivos de dimensión menor o igual que tres. En efecto, los posibles subespacios invariantes serán puntos (fijos), rectas o planos (hiperplanos).

Observación 5.1.19. Como el polinomio característico de una aplicación es el mismo tomando la matriz traspuesta de la que representa la aplicación lineal

$$P_{\widehat{f}}(\lambda) = \det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\widehat{f}) - \lambda \cdot I_{n+1}) = \det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\widehat{f})^t - \lambda \cdot I_{n+1})$$

los escalares $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ son los mismos para el cálculo de las subvariedades de puntos fijos y de los hiperplanos invariantes. Además, como los sistemas de ecuaciones de ambos procedimientos son traspuestos, las soluciones i.e. cada subespacio de puntos fijos

$$\widehat{X}_\lambda = \text{Ker}(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\widehat{f}) - \lambda \cdot I_{n+1}) \subset V,$$

y cada haz de hiperplanos

$$\widehat{X}_\lambda^* := \{\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} :$$

$$\left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\widehat{f})^t - \lambda \cdot I_{n+1}\right) \cdot \mathbf{b}^t = \mathbf{0}, \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \subset V^*,$$

tienen la misma dimensión. Por lo tanto existe una dualidad entre los puntos fijos y los hiperplanos invariantes, de tal modo que por cada punto fijo existe un correspondiente hiperplano invariante dual y viceversa. Esto es una expresión del principio de dualidad en la Geometría Projectiva.

Además, se tiene que las homografías en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ o en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{2k}$ siempre tienen hiperplanos invariantes pero una homografía de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ puede tener hiperplanos (planos) invariantes o no.

5.2. Completación proyectiva de aplicaciones afines

Tras estudiar la completación proyectiva de espacios, referencias y subespacios afines en la sección 4.4, el siguiente paso es estudiar la relación entre las aplicaciones afines y las proyectivas.

Sean A y A' espacios afines de direcciones V y V' respectivamente, y sea $f : A \rightarrow A'$ una aplicación afín. Elegimos puntos $P \in A$, $P' \in A'$, y sean $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ y $\mathcal{R}'_c = \{O'; \mathcal{B}'\}$ referencias cartesianas de A y A' .

Como vimos en la sección 4.4, sean las aplicaciones de inmersión de A y A' en $\mathbb{K} \oplus V$ y $\mathbb{K} \oplus V'$ respectivamente

$$\begin{aligned} \psi : A &\rightarrow \mathbb{K} \oplus V & \xi : V &\rightarrow \mathbb{K} \oplus V \\ Q &\mapsto (1, \overrightarrow{PQ}) & \vec{v} &\mapsto (0, \vec{v}) \\ \psi' : A' &\rightarrow \mathbb{K} \oplus V' & \xi' : V' &\rightarrow \mathbb{K} \oplus V' \\ Q' &\mapsto (1, \overrightarrow{P'Q'}) & \vec{v}' &\mapsto (0, \vec{v}') \end{aligned}$$

Si tomamos coordenadas (x_0, \mathbf{x}) en $\mathbb{K} \oplus V$ y (y_0, \mathbf{y}) en $\mathbb{K} \oplus V'$, la composición

$$\psi' \circ f \circ \psi^{-1} : \psi(A) = \{x_0 = 1\} \rightarrow \psi'(A') = \{y_0 = 1\}$$

es una aplicación afín, con aplicación vectorial asociada

$$\xi' \circ \vec{f} \circ \xi^{-1} : \xi(V) = \{x_0 = 0\} \rightarrow \xi'(V') = \{y_0 = 0\}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} (\psi' \circ f \circ \psi^{-1})(1, \vec{v}) &= (\psi' \circ f)(P + \vec{v}) = \psi'(f(P) + \vec{f}(\vec{v})) = \\ &= \overrightarrow{(1, P'(f(P) + \vec{f}(\vec{v})))} = (1, \overrightarrow{P'f(P)} + \vec{f}(\vec{v})) = \end{aligned}$$

y por tanto lleva el punto $Q = P + \vec{v} \in A$ en $f(P) + \vec{f}(\vec{v}) \in A'$.

Definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} \widehat{f} : \mathbb{K} \oplus V &\rightarrow \mathbb{K} \oplus V' \\ (\lambda, \vec{v}) &\mapsto \lambda \cdot (\psi' \circ f)(P) + (\xi' \circ \vec{f})(\vec{v}) \end{aligned}$$

Véase que

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\lambda, \vec{v}) &= \lambda \cdot (\psi' \circ f)(P) + (\xi' \circ \vec{f})(\vec{v}) = \\ &= \lambda \cdot (1, \overrightarrow{P'f(P)}) + (0, \vec{f}(\vec{v})) = (\lambda, \lambda \cdot \overrightarrow{P'f(P)} + \vec{f}(\vec{v})).\end{aligned}$$

Por lo tanto, la aplicación \widehat{f} restringida a $\psi(A) = \{x_0 = 1\}$ coincide con

$$\widehat{f}|_{\psi(A)} : (1, \vec{v}) \mapsto (1, \overrightarrow{P'f(P)} + \vec{f}(\vec{v})) = \psi' \circ f \circ \psi^{-1}$$

y entonces la identificamos con f , vista como la aplicación afín $\psi' \circ f \circ \psi^{-1}$ entre las inmersiones de A y A' en $\mathbb{K} \oplus V$ y $\mathbb{K} \oplus V'$, respectivamente.

Entonces definiremos la *completación proyectiva* de la aplicación afín f como la proyectivización de \widehat{f} :

$$\begin{aligned}\bar{f} : \bar{A} = \mathbb{P}(\mathbb{K} \oplus V) &\dashrightarrow \bar{A}' = \mathbb{P}(\mathbb{K} \oplus V') \\ [(\lambda, \vec{v})] &\longmapsto [\widehat{f}(\lambda, \vec{v})].\end{aligned}$$

En lo sucesivo, añadiremos a las identificaciones ya conocidas

$$A \longleftrightarrow \psi(A) \longleftrightarrow \pi(\psi(A)), \quad A' \longleftrightarrow \psi'(A') \longleftrightarrow \pi(\psi'(A'))$$

$$V \longleftrightarrow \xi(V) \longleftrightarrow \pi(\xi(V)) \longleftrightarrow A_\infty, \quad V' \longleftrightarrow \xi'(V') \longleftrightarrow \pi(\xi'(V')) \longleftrightarrow A'_\infty$$

la identificación

$$f \longleftrightarrow \psi' \circ f \circ \psi^{-1}.$$

Algunas propiedades de la completación proyectiva \bar{f} son

1. El centro de \bar{f} está contenido en los puntos del infinito:

$$Z(\bar{f}) = \mathbb{P}(\text{Ker } \vec{f}) \subset A_\infty.$$

Sea $Q \in Z(\bar{f}) \subset \mathbb{P}(\mathbb{K} \oplus V)$, por tanto $Q = [(\lambda, \vec{v})]$ con

$$\widehat{f}(\lambda, \vec{v}) = (\lambda, \lambda \cdot \overrightarrow{P'f(Q)} + \vec{f}(\vec{v})) = (0, \mathbf{0}) \in \mathbb{K} \oplus V',$$

luego $\lambda = 0$, por lo que $Q \in A_\infty$, y $\vec{f}(\vec{v}) = \mathbf{0} \in V'$, por lo que $\vec{v} \in \text{Ker } \vec{f}$.

2. Restringida a A , \bar{f} es la aplicación afín f :

$$\bar{f}|_A = f, \text{ y por tanto } \bar{f}(A) \subset A'.$$

En efecto, como hemos visto anteriormente, $\widehat{f}|_{\psi(A)=\{x_0=1\}} = \psi' \circ f \circ \psi^{-1} = f$.

3. Restringida a A_∞ , \bar{f} es la aplicación lineal asociada \vec{f} :

$$\widehat{\bar{f}|_{A_\infty}} = \vec{f}, \text{ y por tanto } \bar{f}(A_\infty) \subset A'_\infty.$$

En efecto, $\widehat{\bar{f}|_{A_\infty}} = \widehat{f}|_{A_\infty}$, y

$$\widehat{f}|_{A_\infty} : (0, \vec{v}) \mapsto (0, \vec{f}(\vec{v}))$$

se identifica con \vec{f} .

Teorema 5.2.1. *La extensión proyectiva $\bar{f} : \bar{A} \dashrightarrow \bar{A}'$ de una aplicación afín $f : A \rightarrow A'$ definida anteriormente es única.*

Demostración. Primero supongamos que f es constante. En tal caso su aplicación lineal asociada \vec{f} es idénticamente nula, por lo tanto

$$Z(\bar{f}) = \mathbb{P}(\text{Ker } \vec{f}) = \mathbb{P}(V) = A_\infty,$$

y $f = \bar{f} : \bar{A} \setminus Z(\bar{f}) \rightarrow \bar{A}'$ con lo que f y \bar{f} coinciden en sus dominios de definición, por tanto son iguales. Sea $g : \bar{A} \dashrightarrow \bar{A}'$ otra aplicación proyectiva tal que $g|_A = f$. Cualquier vector $\vec{v} \in V = A_\infty$ se puede escribir como $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$, con $P, Q \in A$, por lo que

$$\widehat{g}(\vec{v}) = \widehat{g}(\overrightarrow{PQ}) = \widehat{g}(Q - P) = g(Q) - g(P) = f(Q) - f(P) = 0 \in \mathbb{K},$$

por lo cual $A_\infty \subset Z(g)$. Como $\bar{A} = A \sqcup A_\infty$ y $g|_A = f$, concluimos que $Z(g) = A_\infty$ y que $g = \bar{f}$.

Ahora supongamos que f no es constante y sea $g : \bar{A} \dashrightarrow \bar{A}'$ otra aplicación proyectiva tal que $g|_A = f$. Dado un punto $P \in A \subset \bar{A}$, tenemos que $g(P) = f(P) = \bar{f}(P)$, por lo que existe un escalar, que depende del punto, $\lambda_P \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $\widehat{g}(P) = \lambda_P \widehat{f}(P)$. Tomamos otro punto $Q \in A$ tal que $f(Q) \neq f(P)$ y $\widehat{g}(Q) = \lambda_Q \widehat{f}(Q)$. Para el punto medio $R := \frac{P+Q}{2}$ se tiene así mismo $\widehat{g}(R) = \lambda_R \widehat{f}(R)$, por lo que podremos escribir

$$\frac{1}{2} \lambda_R \widehat{f}(P) + \frac{1}{2} \lambda_R \widehat{f}(Q) = \lambda_R \widehat{f}(R) = \widehat{h}(R) = \frac{1}{2} \widehat{h}(P) + \frac{1}{2} \widehat{h}(Q) = \frac{1}{2} \lambda_P \widehat{f}(P) + \frac{1}{2} \lambda_Q \widehat{f}(Q).$$

Entonces

$$\frac{\lambda_R - \lambda_P}{2} \widehat{f}(P) + \frac{\lambda_R - \lambda_Q}{2} \widehat{f}(Q) = 0.$$

Pero como $f(Q) \neq f(P)$ los vectores $\widehat{f}(P)$ y $\widehat{f}(Q)$ son linealmente independientes, vistos como vectores de $\mathbb{K} \oplus V$, por lo tanto los escalares verifican

$$\frac{\lambda_R - \lambda_P}{2} = \frac{\lambda_R - \lambda_Q}{2} = 0.$$

En tal caso $\lambda_P = \lambda_Q = \lambda_R$, y se tiene que $\widehat{g}|_A = \lambda \widehat{f}|_A$, con $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ independiente del punto elegido en A . Si hubiéramos escogido el punto $Q \in A$ tal que $f(Q) = f(P)$, siempre existirá un tercer punto $S \in A$ con $f(S) \neq f(Q) = f(P)$ y $\widehat{g}(S) = \lambda_S \widehat{f}(Q)$. Entonces, llamando $R_1 := \frac{P+S}{2}$, $R_2 := \frac{Q+S}{2}$ y siguiendo el tratamiento anterior se tendría que $\lambda_{R_1} = \lambda_P = \lambda_S$ y $\lambda_{R_2} = \lambda_Q = \lambda_S$, por lo tanto también llegamos a la conclusión $\widehat{g}|_A = \lambda \widehat{f}|_A$. Para finalizar, $\mathbb{K} \oplus V$ está generado por A como espacio vectorial, $\mathbb{K} \oplus V = V(A)$, por lo tanto la relación $\widehat{g}|_A = \lambda \widehat{f}|_A$ extiende a todo $\mathbb{K} \oplus V$ y, en tal caso,

$$g = \bar{f} : \bar{A} = \mathbb{P}(\mathbb{K} \oplus V) \dashrightarrow \bar{A}'.$$

□

Proposición 5.2.2. *Dada una aplicación afín $f : A \longrightarrow A'$ y su completación proyectiva $\overrightarrow{f} : \overline{A} \dashrightarrow \overline{A}'$,*

1. *f es inyectiva si y solo si \overrightarrow{f} es inyectiva.*
2. *f es sobreyectiva si y solo si \overrightarrow{f} es sobreyectiva.*
3. *f es biyectiva si y solo si \overrightarrow{f} es biyectiva.*

Demostración. 1. Que \overrightarrow{f} sea inyectiva es equivalente a que su centro sea el conjunto vacío. Como $Z(\overrightarrow{f}) = \mathbb{P}(\text{Ker } \overrightarrow{f})$, esto es equivalente a que $\text{Ker } \overrightarrow{f} = \{0\} \subset V$ y a que \overrightarrow{f} y, por tanto, f sean inyectivas.

2. Que \overrightarrow{f} sea sobreyectiva es equivalente a que \widehat{f} sea sobreyectiva. Por definición de \widehat{f} se tiene

$$\widehat{f}(\lambda, \vec{v}) = (\lambda, \lambda \cdot \overrightarrow{P'f(P)} + \overrightarrow{f}(\vec{v})),$$

por lo que \widehat{f} sobreyectiva es equivalente a que la aplicación lineal \overrightarrow{f} y, por tanto, f sean sobreyectiva.

3. Es consecuencia de las dos anteriores.

□

No toda aplicación proyectiva es la completación de una aplicación afín. Este hecho contrasta con el caso de subespacios, donde todo subespacio proyectivo es un completado proyectivo de un subespacio afín para cierta completación, es decir, una vez hemos elegido un hiperplano del infinito. Para las aplicaciones proyectivas el problema estriba en que la aplicación puede no respetar las elecciones de un hiperplano del infinito en los espacios de partida y de llegada. La siguiente proposición caracteriza las aplicaciones proyectivas que sí son completaciones proyectivas de una afín.

Proposición 5.2.3. *Sea $f : \overline{A} \dashrightarrow \overline{A}'$ una aplicación proyectiva entre completaciones proyectivas de dos espacios afines A y A' , tal que*

1. $f(A) \not\subset A'_\infty$
2. $f(A_\infty \setminus Z(f)) \subset A'_\infty$

Entonces se verifica que $f(A) \subset A'$ y f es la completación proyectiva de una aplicación afín $g : A \longrightarrow A'$, $\overline{g} = f$.

Demostración. Dado que $f(A) \not\subset A'_\infty$, existe un punto $R = [\vec{u}] \in A$ tal que $f(R) = [\vec{u}'] \in R' \in A'$. Como todas las aplicaciones lineales \widehat{f} asociadas a \overrightarrow{f} son proporcionales, podemos escoger \widehat{f} tal que exactamente $\widehat{f}(\vec{u}) = \vec{u}'$. Como $f(A_\infty \setminus Z(f)) \subset A'_\infty$, podemos definir la restricción

$$\overrightarrow{f} := \widehat{f}|_{A_\infty} : V = A_\infty \longrightarrow V' = A'_\infty.$$

Entonces, dado un punto $Q \in A$, podemos escribirlo como $Q = R + \vec{v}$, con $\vec{v} \in V$. Tenemos

$$\widehat{f}(Q) = \widehat{f}(R + \vec{v}) = \widehat{f}(\vec{u}) + \vec{f}(\vec{v}) = \vec{u}' + \vec{f}(\vec{v}) = R' + \vec{f}(\vec{v}) \in A'.$$

Por lo tanto podemos definir

$$g := f|_A : A \longrightarrow A'$$

tal que

$$Q = R + \vec{v} \mapsto f(Q) = [\widehat{f}(Q)] = [\widehat{f}(R + \vec{v})] = [R' + \vec{f}(\vec{v})] = R' + \vec{f}(\vec{v})$$

por lo que es una aplicación afín cuya completación proyectiva es, por unicidad, f . \square

Como aplicación del resultado anterior, podemos caracterizar las homografías que son completaciones proyectivas de una aplicación afín. Recordemos que una afinidad es una aplicación afín biyectiva de un espacio afín en sí mismo.

Proposición 5.2.4. *Una homografía $f : \overline{A} \longrightarrow \overline{A}$ es la completación proyectiva de una afinidad $g : A \longrightarrow A$, es decir $\overline{g} = f$, si y solo si deja invariante el hiperplano del infinito, es decir $f(A_\infty) = A_\infty$.*

Demostración. Como una afinidad g es biyectiva, su completación proyectiva \overline{g} es también biyectiva, luego es una homografía $\overline{g} : \overline{A} \longrightarrow \overline{A}$. Además, la aplicación lineal asociada $\vec{g} : V \longrightarrow V$ es un isomorfismo lineal, luego $\widehat{\overline{g}}_{A_\infty} = \vec{g} : A_\infty \longrightarrow A_\infty$ es una biyección y $\overline{g}(A_\infty) = A_\infty$.

Recíprocamente, sea $f : \overline{A} \longrightarrow \overline{A}$ una homografía tal que $f(A_\infty) = A_\infty$. Como f es biyectiva, $Z(f) = \emptyset$ y $f(A) \not\subset A_\infty$, pues en caso contrario f no sería biyectiva ya que los puntos de A no tendrían preimagen por f . Entonces, por la Proposición 5.2.3 existe una aplicación afín $g : A \longrightarrow A$ tal que $f = \overline{g}$ es su completación proyectiva. Y g es biyectiva por serlo f , por tanto g es una afinidad. \square

Observación 5.2.5. Como hemos visto en la Proposición 5.2.4, la completación proyectiva de una afinidad deja invariante el hiperplano del infinito $A_\infty = \{x_0 = 0\}$. Los coeficientes de la ecuación de este hiperplano forman el vector $\mathbf{b} = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$. Según vimos en la Observación 5.1.19, este vector que define un hiperplano invariante es solución del sistema

$$\left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\widehat{f})^t - \lambda \cdot I_{n+1} \right) \cdot \mathbf{b}^t = \mathbf{0},$$

respecto de una base apropiada en la completación. Así, la matriz de \widehat{f} es de la forma

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\widehat{f}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & & & * \end{array} \right)$$

que es exactamente la forma de una matriz del grupo afín $GA(n, \mathbb{K})$ (ver Observación 2.1.9). Esta es la identificación entre afinidades y homografías que preservan el hiperplano del infinito de la Proposición 5.2.4.

También por la Observación 5.1.19, sabemos que si existe un hiperplano invariante entonces existe un punto O que es un punto fijo para la completación proyectiva \bar{f} . Por tanto, podemos escoger una referencia afín cartesiana $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ tal que $O = P_0$, el primer punto de la completación proyectiva \mathcal{R} de esta referencia cartesiana, y

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(\bar{f}) = \begin{pmatrix} 1 & * & & * \\ 0 & * & & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & * & & * \end{pmatrix}.$$

Podemos visualizar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} GL(n+1, \mathbb{K}) & \longrightarrow & PGL(n+1, \mathbb{K}) \\ \cup & & \cup \\ GA(n, \mathbb{K}) & = & GA(n, \mathbb{K}) \end{array}$$

que relaciona los grupos afín, proyectivo y lineal, donde las afinidades de $GA(n, \mathbb{K}) \subset GL(n+1, \mathbb{K})$ se corresponden con las homografías de $PGL(n+1, \mathbb{K})$ que satisfacen la condición de dejar invariante A_∞ .

Como observación final podemos decir que cualquier homografía que tenga un punto fijo tiene un hiperplano invariante, por lo que podemos designarlo como hiperplano del infinito en una completación proyectiva e identificarla con una afinidad. Entonces podemos rephrasear la Proposición 5.2.4 y decir que dada una homografía $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ existe una completación proyectiva de un espacio afín A , $\bar{A} = \mathbb{P}(V)$, y una afinidad $g : A \rightarrow A$ tal que f es la completación proyectiva de g si y solo si f tiene un punto fijo.

Para finalizar la sección, veamos la relación entre la representación matricial de una aplicación afín y su completación proyectiva. Dada una aplicación afín $f : A \rightarrow A'$, y referencias cartesianas $\mathcal{R}_c = \{P; \mathcal{B}\}$, $\mathcal{R}'_c = \{P'; \mathcal{B}'\}$ de A y A' respectivamente, la relación matricial entre las coordenadas \mathbf{x} de un punto $P \in A$ e \mathbf{y} de $f(P) \in A'$ viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{y}^t \end{pmatrix} = M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c}(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \mathbf{b}^t & M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\vec{f}) \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ son las coordenadas cartesianas de $f(P)$ respecto de la referencia \mathcal{R}'_c y $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\vec{f})$ es la matriz de la aplicación lineal asociada \vec{f} respecto de las bases \mathcal{B} y \mathcal{B}' .

Su completación proyectiva $\bar{f} : \bar{A} \dashrightarrow \bar{A}'$ tiene por aplicación lineal asociada (cualquier múltiplo de)

$$\widehat{f}(x_0, \vec{v}) = (x_0, x_0 \cdot \overrightarrow{P'f(P)} + \vec{f}(\vec{v})).$$

Como las coordenadas cartesianas de $f(P)$ respecto de la referencia \mathcal{R}'_c son iguales a las del vector $\overrightarrow{P'f(P)}$ respecto de la base \mathcal{B}' , tenemos que la relación matricial para un

múltiplo $\lambda \cdot \widehat{f}$ viene dada por

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ \mathbf{y}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \cdot \mathbf{b}^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\overrightarrow{f}) \cdot \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{b}^t & M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\overrightarrow{f}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c}(f) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(\overline{f}) = [M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c}(f)]$$

y la matriz de la completación proyectiva \overline{f} es igual a la matriz de f , salvo reescalamiento. Al igual que ocurría con las ecuaciones de subespacios, matricialmente, la completación proyectiva se refleja con el proceso de homogeneizar la matriz, así como restringir al espacio afín es hacer $x_0 = y_0 = 1$ y deshomerogeneizar.

Ejemplo 5.2.6. Sea $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ la aplicación afín

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1 + x_2 - x_3 + 1, 2x_1 + x_3 - 2).$$

Respecto de las referencias cartesianas canónicas \mathcal{R}_c y \mathcal{R}'_c , la matriz de f es

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Por definición, la completación proyectiva de f es la aplicación proyectiva $\overline{f} : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ con aplicación lineal asociada $\widehat{f} : \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$

$$\widehat{f}(\lambda, \overrightarrow{v}) = (\lambda, \lambda \cdot \overrightarrow{0f(\mathbf{0})} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})),$$

donde véase que $\overrightarrow{0f(\mathbf{0})} = (1, -2)$ en coordenadas de la base canónica de \mathbb{R}^2 . La matriz de la completación proyectiva \overline{f} respecto de las referencias proyectivas estándar \mathcal{R} y \mathcal{R}' en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ y $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ respectivamente es, salvo reescalamiento,

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(\overline{f}) = [M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c}(f)] = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

y la imagen por \overline{f} de un punto $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$ en coordenadas homogéneas respecto de \mathcal{R} y \mathcal{R}' , es

$$\overline{f}([x_0 : x_1 : x_2 : x_3]) = [x_0 - x_1 + x_2 - x_3 : -2x_0 + 2x_1 + x_3],$$

cuyas ecuaciones son la homogeneización de las correspondientes afines.

5.3. Algunas aplicaciones proyectivas

Estudiaremos en esta sección algunos tipos representativos de aplicaciones proyectivas y sus relaciones con las aplicaciones afines vistas en la sección 2.2.

5.3.1. Elaciones y homologías

Definiremos elaciones y homologías como completaciones proyectivas de traslaciones y homotecias, respectivamente. Seguidamente veremos cómo aparecen en el espacio proyectivo por sí mismas.

Elaciones

Sea $\tau : A \longrightarrow A$ una traslación afín de vector \vec{v} no nulo. Respecto de una referencia cartesiana de A , $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$, la matriz de la traslación τ se expresa como

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(\tau) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \mathbf{a}^t & I_n \end{array} \right).$$

donde $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ son las coordenadas cartesianas de $f(O)$ respecto a \mathcal{R}_c , o las coordenadas de \vec{v} respecto de la base \mathcal{B} (c.f. sección 2.2.1).

Según hemos visto en la sección 5.2, la misma matriz salvo reescalamiento es la matriz de la completación proyectiva

$$\bar{\tau} : \bar{A} \longrightarrow \bar{A}$$

de la traslación τ respecto de la completación proyectiva \mathcal{R} de la referencia cartesiana \mathcal{R}_c :

$$M_{\mathcal{R} \mathcal{R}}(\bar{\tau}) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \mathbf{a}^t & I_n \end{array} \right).$$

Llamaremos a $\bar{\tau}$ una *elación*. Observamos que

- $\bar{\tau}|_A$ no tiene puntos fijos, ya que es una traslación.
- $\bar{\tau}|_{A_\infty} = \text{Id}|_{A_\infty}$, ya que la aplicación lineal asociada a τ es $\vec{\tau} = \text{Id}_{\mathbb{K}^n}$. Por tanto los únicos puntos fijos de $\bar{\tau}$ son A_∞ .
- Como vimos en la sección 2.2.1, los subespacios afines paralelos a \vec{v} , i.e. $B = P + W \subset A$, con $\vec{v} \in W$, son invariantes por τ . Al proyectivizar, esta condición equivale a que un subespacio proyectivo $X \subset \bar{A}$ contenga al punto del infinito de la dirección \vec{v} , es decir, $P_\infty = [0 : a_1 : a_2 : \dots : a_n] \in X$. Por tanto, los subespacios invariantes por $\bar{\tau}$ son $X \subset A_\infty$ o $P_\infty \in X$.

Homologías

Sea $\eta : A \longrightarrow A$ una homotecia de centro $C \in A$ y razón $\lambda \neq 0, 1$. Respecto de la referencia cartesiana $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$, la matriz de η viene dada por

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(\eta) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline (1-\lambda)\mathbf{a}^t & \lambda I_n \end{array} \right)$$

donde $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ son las coordenadas cartesianas del centro C (c.f. sección 2.2.2).

Esta matriz, reescalada, es también la matriz de la completación proyectiva

$$\bar{\eta} : \bar{A} \longrightarrow \bar{A}$$

de la homotecia η respecto de la completación proyectiva \mathcal{R} de la referencia cartesiana \mathcal{R}_c :

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(\bar{\eta}) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline (1-\lambda)\mathbf{a}^t & \lambda I_n \end{array} \right).$$

Llamaremos a $\bar{\eta}$ una *homología*. Observamos que

- $\bar{\eta}|_A$ tiene un único punto fijo C con coordenadas $C = [1 : a_1 : a_2 : \dots : a_n]$.
- $\bar{\eta}|_{A_\infty} = \text{Id}|_{A_\infty}$, ya que la aplicación lineal asociada a η es $\vec{\eta} = \lambda \cdot \text{Id}_{\mathbb{K}^n}$, luego es equivalente a la identidad al proyectivizar. Por tanto los puntos fijos de $\bar{\eta}$ son $A_\infty \sqcup \{C\}$.
- Como vimos en la sección 2.2.2, los subespacios afines que contienen a C , i.e. $C \in B = P + W \subset A$, son invariantes por η . Al proyectivizar, esta condición equivale a que un subespacio proyectivo $X \subset \bar{A}$ contenga al punto proyectivizado $C = [1 : a_1 : a_2 : \dots : a_n]$. Por tanto, los subespacios invariantes por $\bar{\eta}$ son $X \subset A_\infty$ o $C \in X$.

Homografías con un hiperplano de puntos fijos

Recíprocamente, supongamos que tenemos una homografía $f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ distinta de la identidad, tal que tiene un hiperplano de puntos fijos $H \subset \mathbb{P}(V)$. Entonces, por la Proposición 5.2.4, f es la completación proyectiva de una aplicación afín. Podemos identificar el espacio proyectivo con una completación proyectiva de un espacio afín, $\mathbb{P}(V) = \bar{A}$, donde el hiperplano H sea el hiperplano del infinito $H = A_\infty$. Respecto de la referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n; P_{n+1}\}$ donde la ecuación de $H = A_\infty$ sea $\{x_0 = 0\}$, podemos suponer que P_1, P_2, \dots, P_n generan H , por lo cual su primera coordenada es nula y $f(P_i) = P_i, i = 1, 2, \dots, n$. En este caso la matriz de f es de la forma

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(\bar{f}) = \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline * & I_n \end{array} \right).$$

Deshomogeneizando esta matriz, tendremos que

$$\hat{f}|_{A_\infty} = \lambda \cdot \text{Id}_{\mathbb{K}^n}$$

por lo que la aplicación afín cuya completación proyectiva es f es una traslación o una homotecia. Resta calcular los puntos fijos con ayuda de la matriz anterior para concluir que

- si $\text{Fix}(f) = H$, entonces f es una elación, completación proyectiva de una traslación.
- si $\text{Fix}(f) = H \sqcup \{P\}$, entonces f es una homología, completación proyectiva de una homotecia.

Podemos entender la matriz $M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(f)$ como la matriz de un endomorfismo vectorial de \mathbb{K}^{n+1} respecto a la base asociada \mathcal{B} ,

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(f) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\widehat{f})$$

y sabemos que los puntos fijos vienen de vectores propios de esta matriz. Si f tiene un hiperplano H de puntos fijos es porque existe un valor propio $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que

$$H = \widehat{X}_\lambda = \text{Ker}(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\widehat{f}) - \lambda \cdot I_{n+1})$$

tiene dimensión n . Entonces el polinomio característico

$$P_{\widehat{f}}(t) = \det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\widehat{f}) - t \cdot I_{n+1})$$

tiene a $t = \lambda$ como raíz con multiplicidad al menos n y, necesariamente, factoriza como

$$P_{\widehat{f}}(t) = (t - \lambda)^n \cdot (t - \mu),$$

por lo que tiene todos los valores propios posibles al ser de grado $n + 1$. Pueden ocurrir dos casos:

- Si $\mu = \lambda$, la multiplicidad algebraica del valor propio λ es $n + 1$, y la geométrica, es decir, la dimensión de $\widehat{X}_\lambda = \text{Ker}(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\widehat{f}) - \lambda \cdot I_{n+1})$ es mayor o igual que n . Si $\dim \widehat{X}_\lambda = n + 1$, entonces $\widehat{f} = \lambda \cdot \text{Id}_{\mathbb{K}^{n+1}}$ y, por tanto $f = \text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$. Si, por el contrario, $\dim \widehat{X}_\lambda = n$, podemos encontrar una base \mathcal{B}' de \mathbb{K}^{n+1} y una referencia proyectiva \mathcal{R}' de $\mathbb{P}(V)$ tales que, reescalando,

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(f) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\widehat{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}.$$

es la forma de Jordan. Entonces f es una elación, completación proyectiva de una traslación de vector $\vec{v} = (1, 0, \dots, 0)$, en coordenadas de la base resultante de eliminar el primer vector de \mathcal{B}' .

- Si $\mu \neq \lambda$, existen dos espacios propios

$$\widehat{X}_\mu = \text{Ker}(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\widehat{f}) - \mu \cdot I_{n+1}), \quad \widehat{X}_\lambda = \text{Ker}(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\widehat{f}) - \lambda \cdot I_{n+1}),$$

de dimensiones

$$\dim \widehat{X}_\mu = 1, \quad \dim \widehat{X}_\lambda = n,$$

con lo cual \widehat{f} es diagonalizable y existe una base \mathcal{B}' de \mathbb{K}^{n+1} y una referencia proyectiva \mathcal{R}' de $\mathbb{P}(V)$ tales que

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\widehat{f}) = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Podemos reescalar esta matriz tal que

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda' & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & \lambda' \end{pmatrix}$$

es la matriz de una homología, completación proyectiva de una homotecia de razón $\lambda' = \lambda/\mu$, y centro el punto del espacio afín $A = \{x_0 = 1\} \subset \mathbb{K}^{n+1}$ que viene dado por el primer vector de \mathcal{B}' , que es un punto fijo.

Ejemplo 5.3.1. Sea $f : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ una homografía con matriz

$$M_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}_c}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

respecto de la referencia proyectiva canónica en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Viendo esta matriz como $M_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}_c}(\widehat{f})$ respecto de la base canónica de \mathbb{R}^3 , calculamos su polinomio característico

$$P_{\widehat{f}}(t) = \det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\widehat{f}) - t \cdot I_{n+1}) = -t^3 + 12t^2 - 36t + 32$$

que factoriza como

$$P_{\widehat{f}}(t) = -(t-2)^2(t-8)$$

luego sabemos que se trata de una homología. Calculando los espacios propios, obtenemos

$$\widehat{X}_8 = L[(0, 1, 2)], \quad \widehat{X}_2 = L[(1, -1, 0), (0, 1, -1)],$$

con lo cual, respecto de la base

$$\mathcal{B}' = \{(0, 1, 2), (1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$$

la matriz de \widehat{f} es

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(\widehat{f}) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Reescalando, podemos escribir a matriz de la homología f como

$$M_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix},$$

respecto de la referencia proyectiva \mathcal{R}' , completación proyectiva de \mathcal{B}' . Así, la homología f es completación proyectiva de una homotecia de razón $1/4$ y centro el punto $(0, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$, que se corresponde el punto de la referencia cartesiana de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ en el proceso de completación proyectiva.

Observación 5.3.2. En la Observación 2.2.4 vimos que las traslaciones y las homotecias forman un subgrupo de las afinidades $GA(n, \mathbb{K})$. Mediante la inclusión de la Observación 5.2.5,

$$GA(n, \mathbb{K}) \subset PGL(n+1, \mathbb{K}),$$

el subgrupo de traslaciones y homotecias se identifica con el subgrupo de elaciones y homologías, que es el subgrupo de $PGL(n+1, \mathbb{K})$ que dejan fijo el hiperplano del infinito, con matrices (tras reordenación de puntos en las referencias),

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(\bar{f}) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right).$$

5.3.2. Proyecciones cónicas

Uno de los tipos más relevantes de aplicaciones proyectivas son las proyecciones cónicas. Por una parte son aplicaciones intrínsecamente proyectivas, ligadas a la idea de perspectiva, y por otra serán las completaciones proyectivas de las proyecciones afines.

Sean $X, Y \subset \mathbb{P}(V)$ dos subespacios proyectivos que no se cortan, es decir, $X \cap Y = \emptyset$, y tales que

$$\dim X + \dim Y = \dim \mathbb{P}(V) - 1,$$

o equivalentemente por la fórmula de Grassmann, $\dim(X+Y) = \dim \mathbb{P}(V)$. Observamos que esto equivale a que

$$\dim \widehat{X} + \dim \widehat{Y} = V, \quad \widehat{X} \cap \widehat{Y} = \{\mathbf{0}\},$$

es decir,

$$V = \widehat{X} \oplus \widehat{Y},$$

y los subespacios X e Y son tales que sus correspondientes subespacios vectoriales son complementarios.

Consideremos la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \widehat{\pi} : \quad V = \widehat{X} \oplus \widehat{Y} &\longrightarrow \widehat{X} \\ \vec{v} = \vec{w} + \vec{u} &\longmapsto \vec{w} \end{aligned}$$

Su aplicación proyectiva asociada es la *proyección cónica*

$$\pi : \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V)$$

con centro

$$Z(\pi) = \mathbb{P}(\text{Ker } \widehat{\pi}) = \mathbb{P}(\widehat{Y}) = Y,$$

e imagen

$$\text{im}(\pi) = \mathbb{P}(\text{im } \widehat{\pi}) = \mathbb{P}(\widehat{X}) = X.$$

Podemos describir las proyecciones cónicas de un modo más geométrico con ayuda del siguiente resultado.

Lemma 5.3.3. *Dada una proyección cónica π de centro Y e imagen X , para todo punto $P \in \mathbb{P}(V) \setminus Y$ se tiene que la imagen viene dada por*

$$\pi(P) = V(P, Y) \cap X.$$

Demostración. Sea un punto $P \in \mathbb{P}(V) \setminus Y$, por tanto $P = [\vec{v}]$ con $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$, $\vec{0} \neq \vec{w} \in \widehat{X}$ y $\vec{u} \in \widehat{Y}$. Por tanto

$$\widehat{\pi}(\vec{v}) = \vec{w} = \vec{v} - \vec{u} \in L[\vec{v}, \widehat{Y}] \cap \widehat{X}.$$

Entonces se tiene que

$$\pi(P) \in V(P, Y) \cap X.$$

Por otra parte,

$$\dim L[\vec{v}, \widehat{Y}] = \dim \widehat{Y} + 1,$$

ya que $\vec{v} \notin \widehat{Y}$. Y también

$$V = L[\widehat{Y}, \widehat{X}] \subset L[\vec{v}, \widehat{Y}, \widehat{X}],$$

luego $\dim L[\vec{v}, \widehat{Y}, \widehat{X}] = \dim V$. Por tanto, por la fórmula de Grassmann,

$$\begin{aligned} \dim V(P, Y) \cap X &= \dim V(P, Y) + \dim X - \dim V(P, Y, X) = \\ &= \dim L[\vec{v}, \widehat{Y}] - 1 + \dim \widehat{X} - 1 - (\dim L[\vec{v}, \widehat{Y}, \widehat{X}] - 1) = \\ &= \dim \widehat{Y} + 1 - 1 + \dim \widehat{X} - 1 - (\dim V - 1) = 0, \end{aligned}$$

con lo cual la intersección es un único punto y $\pi(P) = V(P, Y) \cap X$ está bien definido. \square

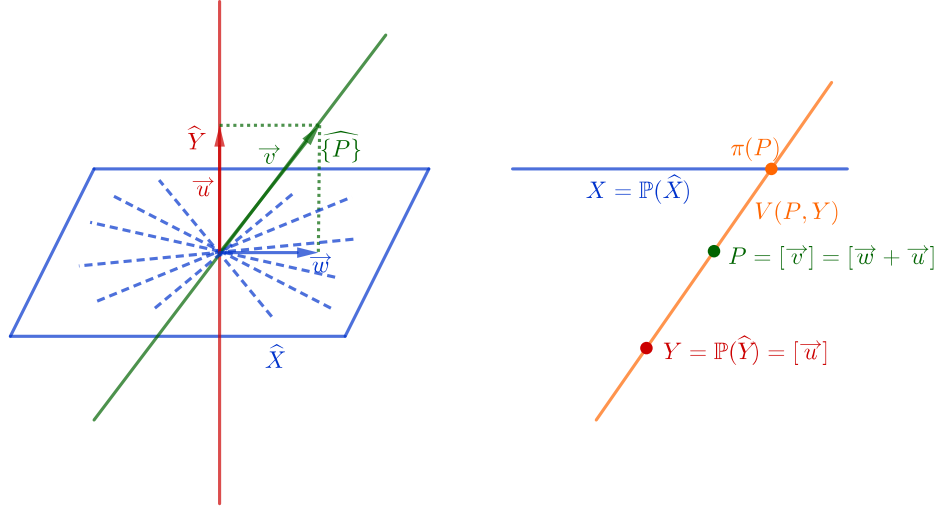


Figura 5.1: Proyección cónica $\pi : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ y aplicación lineal asociada $\hat{\pi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Como se observa en la Figura 5.1, la imagen de cada punto P viene dada por la intersección de la recta que une el centro Y con P y la imagen X . El nombre proyección cónica hace referencia precisamente a proyectar desde el centro Y el cono de rayos (o subespacios) que unen cada punto P con Y en la imagen X .

Si escogemos una base de V ,

$$\mathcal{B} = \{\vec{w}_0, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_d, \vec{u}_{d+1}, \vec{u}_{d+2}, \dots, \vec{u}_n\},$$

donde $\vec{w}_i \in \hat{X}, i = 0, 1, \dots, d$ y $\vec{u}_j \in \hat{Y}, j = d + 1, d + 2, \dots, n$, es claro que la matriz de $\hat{\pi}$ respecto de esta base será

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\hat{\pi}) = \left(\begin{array}{c|c} I_{d+1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right),$$

que será también, salvo reescalamiento, la matriz de la proyección cónica π respecto de la referencia proyectiva \mathcal{R} asociada a la base \mathcal{B} .

Perspectividades

Las proyecciones cónicas dan lugar a un tipo de aplicaciones proyectivas que conectan con la idea de perspectiva de Desargues, las perspectividades. Supongamos que tenemos

dos rectas distintas X_1, X_2 del plano proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$, y sea un punto $P \notin X_1 \cup X_2$. Los subespacios X_2 y $\{P\}$ cumplen que $X_2 \cap \{P\} = \emptyset$ y

$$\dim X_2 + \dim \{P\} = 1 + 0 = \dim \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2 - 1 = 2 - 1.$$

Por tanto, podemos definir la proyección cónica $\pi : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ con centro $Z(\pi) = \{P\}$ e imagen X_2 . La restricción de esta proyección a la recta X_1

$$f = \pi|_{X_1} : X_1 \longrightarrow X_2$$

define una *perspectividad* de X_1 en X_2 con centro P . Véase que una perspectividad entre dos rectas es una aplicación proyectiva biyectiva, es decir una homografía entre las rectas.

Como se observa en la Figura 5.2, la imagen por f de cada punto $Q \in X_1$ viene dado, gracias al Lema 5.3.3, por

$$\pi(Q) = V(Q, P) \cap X_2,$$

es decir, la intersección de la recta que une el centro P con el punto Q y la recta X_2 . Las rectas X_1 y X_2 se cortan en un punto O , que es un punto fijo (el único) de la perspectividad f .

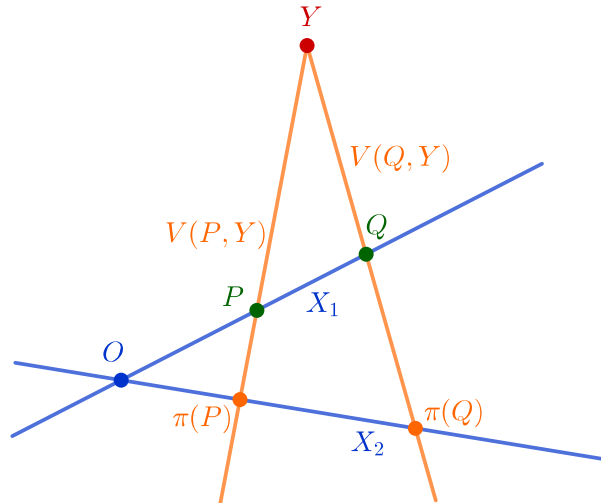


Figura 5.2: Perspectividad $\pi|_{X_1}$ en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ de X_1 en X_2 con centro Y .

Esta idea de perspectividad se puede extender a más dimensiones. Supongamos X_1, X_2 , dos planos diferentes de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$ y sea un punto $P \notin X_1 \cup X_2$. Entonces podemos definir la proyección cónica π de centro $Z(\pi) = \{P\}$ e imagen X_2 y la perspectividad

$$f = \pi|_{X_1} : X_1 \longrightarrow X_2$$

como se observa en la Figura 5.3. Los planos X_1 y X_2 se cortan en una recta de puntos fijos por f y la perspectividad es una homografía entre los dos planos.

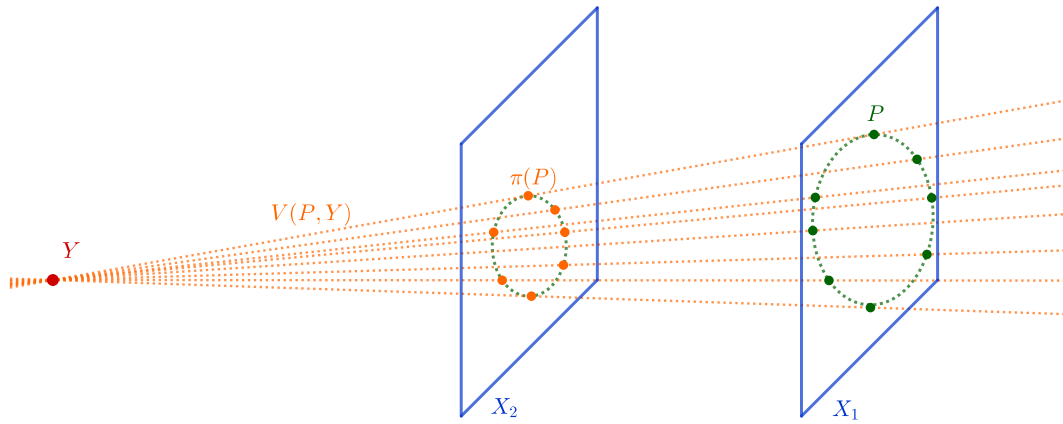


Figura 5.3: Perspectividad $\pi|_{X_1}$ en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ de X_1 en X_2 con centro Y .

Proyecciones cónicas y homografías

No todas las aplicaciones proyectivas son homografías, desafortunadamente. Sin embargo, gracias a las proyecciones cónicas podemos transformar una aplicación proyectiva arbitraria en una homografía, ya que toda aplicación proyectiva f descompone como la composición de una proyección cónica π (en la cual llevamos el posible centro $Z(f)$, que viene del $\text{Ker } \hat{f}$, a cero mediante la aplicación lineal $\hat{\pi}$) y una homografía.

Proposición 5.3.4. *Sea $f : \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V)$ una aplicación proyectiva no inyectiva. En tal caso existe un subespacio proyectivo $X \subset \mathbb{P}(V)$ de dimensión $\dim X = \dim \mathbb{P}(V) - \dim Z(f) - 1$ y una proyección cónica $\pi : \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V)$ con centro $Z(\pi) = Z(f)$ e imagen $\text{im } \pi = X$, tales que la restricción $f|_X : X \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ es una homografía y $f = f|_X \circ \pi$.*

Demostración. Sea $W \subset V$ tal que $W \oplus \text{Ker } \hat{f} = V$ y definimos $X := \mathbb{P}(W)$. Es claro entonces que $X \cap Z(f) = \emptyset$ ya que $W \cap \text{Ker } \hat{f} = \{\mathbf{0}\}$ y que

$$\dim X + \dim Z(f) = \dim \mathbb{P}(V) - 1.$$

Por tanto definimos la proyección cónica $\pi : \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V)$ de centro $Z(f)$ e imagen X . Ya que $X \cap Z(f) = \emptyset$, la restricción $f|_X : X \rightarrow \mathbb{P}(V)$ es una homografía.

Dado un punto $P = [\vec{v}] \in \mathbb{P}(V) \setminus Z(f)$, \vec{v} descompone como $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$, con $\mathbf{0} \neq \vec{w} \in W$ y $\vec{u} \in \text{Ker } \hat{f}$. Se tiene en tal caso que $\pi(P) = [\hat{\pi}(\vec{v})] = [\vec{w}]$ y que

$$f(P) = [\hat{f}(\vec{v})] = [\hat{f}(\vec{w} + \vec{u})] = [\hat{f}(\vec{w}) + \hat{f}(\vec{u})] = [\hat{f}(\vec{w})] = f|_X([\vec{w}]) = f|_X(\pi(P)),$$

con lo cual $f = f|_X \circ \pi$. □

Observación 5.3.5. Obsérvese que la elección de X en la Proposición 5.3.4 no es única, ya que la elección del subespacio vectorial W no es única, por tanto la proyección π y la factorización de f no son únicas.

En el caso particular en que $Z(f) = Z(f \circ f)$, se puede tomar el subespacio proyectivo distinguido $X = \text{im } f$, que resulta ser invariante $f(X) = X$, con lo cual $f|_X$ es una homografía biyectiva.

Proyecciones afines y cónicas

Veamos que las proyecciones cónicas son las completaciones proyectivas de las proyecciones afines. Sea A un espacio afín de dirección V y sean $B \subset A$ un subespacio afín de dirección $W \subset V$ y un subespacio vectorial $U \subset V$, tal que $W \oplus U = V$. La proyección π sobre B con dirección U se define como

$$\begin{aligned} \pi : A &\longrightarrow A \\ P &\longmapsto B \cap (P + U) \end{aligned}$$

Sea \overline{A} la completación proyectiva del espacio afín A y definimos

$$X := \overline{B} = V(B),$$

$$Y := \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V) = A_\infty.$$

Usando que $Y \subset A_\infty$ y que $X \cap A_\infty = \mathbb{P}(W)$ (c.f. sección 4.4.3) tenemos que

$$X \cap Y = X \cap A_\infty \cap Y = \mathbb{P}(W) \cap \mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(W \cap U) = \mathbb{P}(\{\mathbf{0}\}) = \emptyset,$$

y también,

$$\dim X + \dim Y = \dim B + \dim U - 1 = \dim W + \dim U - 1 = \dim V - 1 =$$

$$\dim \mathbb{K} \oplus V - 2 = \dim \mathbb{P}(\mathbb{K} \oplus V) - 1 = \dim \overline{A} - 1.$$

Por tanto podemos definir la proyección cónica

$$f : \overline{A} \dashrightarrow \overline{A}$$

de centro $Z(f) = Y$ e imagen $\text{im } f = X$.

Primero veamos que esta aplicación proyectiva es una completación proyectiva de alguna aplicación afín. Por una parte, sea $P \in B \subset A$, como $P \in B \subset \overline{B} = X$, $f(P) = P \in A$, por lo que $f(A) \not\subset A_\infty$. Por otra parte, sea $Q \in A_\infty \setminus Z(f)$, entonces $V(Q, Y) \subset A_\infty$. Por tanto por el Lema 5.3.3 $f(Q) = V(Q, Y) \cap X \in A_\infty$. Entonces por la Proposición 5.2.3 se tiene que $f(A) \subset A$ (junto con $\text{im } f = X$, tenemos $f(A) \subset A \cap X = B$) y que existe una aplicación afín $g : A \rightarrow A$ tal que $\overline{g} = f$.

Por unicidad de la completación proyectiva (c.f. Teorema 5.2.1), basta ver que la aplicación afín g es, efectivamente, la proyección afín π para concluir que f es la completación proyectiva de π y escribir $f = \pi$. Sea $P \in A$, tenemos que $g(P) = f|_A(P) = V(P, Y) \cap X \in A$. Como $P \notin Y$, es fácil ver que

$$V(P, Y) = P + Y = P + \mathbb{P}(U) = V(P, \mathbb{P}(U)) = V(P + U)$$

donde $P + U \subset A$ es un subespacio afín. Entonces $V(P, Y) \cap A = V(P + U) \cap A = P + U$ y, por tanto,

$$g(P) = V(P, Y) \cap X = V(P, Y) \cap A \cap X = (P + U) \cap X = (P + U) \cap B = \pi(P),$$

lo que completa la prueba.

Recíprocamente, si tenemos una proyección cónica $f : \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V)$ de centro $Z(f) = Y$ e imagen $\text{im } f = X$, escogemos un hiperplano del infinito tal que $Y = Z(f) \subset A_\infty$. Como $\dim X + \dim Y = \dim \mathbb{P}(V) - 1 = \dim A_\infty$ y $X \cap Y = \emptyset$, por la fórmula de Grassmann se tiene que

$$\dim(X + Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y) = \dim A_\infty - (-1) = \dim A_\infty + 1,$$

luego $\text{im } f = X \not\subset A_\infty$. Por otra parte, dado $P \in A_\infty \setminus Z(f)$ su imagen viene dada por el Lema 5.3.3 como $f(P) = V(P, Y) \cap X \subset V(P, Y) \subset A_\infty$. Por tanto, por la Proposición 5.2.3 existe una aplicación afín $g : A \rightarrow A$ tal que $\overline{g} = f$. Sean $B := X \cap A$, sean $W \subset V$ las direcciones de B y A , y sea $U := \widehat{Y}$. Jugando con las dimensiones es sencillo comprobar que $W \oplus U = V$ y usando el tratamiento anterior se puede concluir que $g : A \rightarrow A$ es precisamente la proyección afín sobre B con dirección U .

Ejemplo 5.3.6. Recordemos el Ejemplo 2.2.7, donde estudiamos la proyección $\pi : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ con base $B = \{-x_1 + 2x_2 = 2\}$ y dirección $U = L[(1, 2)] : \{-2x_1 + x_2 = 0\}$. Consideramos la completación proyectiva estándar $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ y sean

$$X := \overline{B} = \{-2x_0 - x_1 + 2x_2 = 0\}$$

e

$$Y := \mathbb{P}(U) = \{-2x_1 + x_2 = x_0 = 0\} = \{[0 : 1 : 2]\} \subset A_\infty.$$

La completación proyectiva de π , $\bar{\pi}$, es la proyección cónica de centro Y e imagen X .

Respecto de la referencia cartesiana

$$\mathcal{R}_c = \{(0, 1); (2, 1), (1, 2)\}$$

la matriz de π estaba dada por

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(\pi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Por tanto, respecto de la completación proyectiva de esta referencia:

$$\mathcal{R} = \{[1 : 0 : 1], [0 : 2 : 1], [0 : 1 : 2]; [1 : 3 : 3]\},$$

la matriz de $\bar{\pi}$ es, salvo reescalamiento, la misma:

$$M_{\mathcal{R} \mathcal{R}}(\bar{\pi}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Observa cómo la hipotética imagen mediante la matriz del punto $[0 : 1 : 2]$, que es el centro Y , no existe, ya que obtenemos $[0 : 0 : 0]$.

5.3.3. Homografías involutivas

Una homografía involutiva es una homografía $\sigma : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ tal que $\sigma \circ \sigma = \text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$. Por tanto, su aplicación lineal asociada $\hat{\sigma}$ verifica $\hat{\sigma} \circ \hat{\sigma} = \lambda \cdot \text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$, para algún $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Distinguiremos dos casos: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, podemos sustituir $\hat{\sigma}$ por $\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\lambda}}$ tal que $\hat{\sigma} \circ \hat{\sigma} = \text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$, con lo que $\hat{\sigma} : V \rightarrow V$ es una simetría vectorial. Los valores propios de $\hat{\sigma}$ son ± 1 y la base de la simetría es $V_1 = \text{Ker}(\hat{\sigma} - \text{Id}_V)$ mientras que la dirección de la simetría es $V_{-1} = \text{Ker}(\hat{\sigma} + \text{Id}_V)$ tal que existe una base

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d, \vec{v}_{d+1}, \dots, \vec{v}_n\}$$

con \vec{v}_i , $i = 0, 1, \dots, d$ base de V_1 y \vec{v}_j , $j = d+1, d+2, \dots, n$ base de V_{-1} , con

$$M_{\mathcal{B} \mathcal{B}}(\hat{\sigma}) = \left(\begin{array}{c|c} I_{d+1} & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-d} \end{array} \right).$$

Si tomamos la referencia proyectiva \mathcal{R} asociada a la base \mathcal{B} tendremos que, salvo reescalamiento,

$$M_{\mathcal{R} \mathcal{R}}(\sigma) = \left(\begin{array}{c|c} I_{d+1} & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-d} \end{array} \right).$$

Podemos observar que los subespacios proyectivos de puntos fijos son $\text{Fix}(\sigma) = X \cup Y$ donde $X = \mathbb{P}(V_1)$ e $Y = \mathbb{P}(V_{-1})$. Cumplen que $X \cap Y = \emptyset$ y $\dim X + \dim Y = \dim \mathbb{P}(V) - 1$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, podemos sustituir $\widehat{\sigma}$ por $\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{|\lambda|}}$ tal que $\widehat{\sigma} \circ \widehat{\sigma} = \pm \text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$. Si $\widehat{\sigma} \circ \widehat{\sigma} = \text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$ (lo cual ocurre, en particular, siempre que $\dim V$ es impar), $\widehat{\sigma} : V \rightarrow V$ es una simetría vectorial y razonamos como en el caso complejo. En el caso en que $\widehat{\sigma} \circ \widehat{\sigma} = -\text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$ (y, necesariamente, $\dim V$ es impar y $\dim \mathbb{P}(V)$ es par), usando resultados de álgebra lineal podemos hallar una base \mathcal{B} de V tal que

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\widehat{\sigma}) = \begin{pmatrix} J & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J \end{pmatrix}$$

donde

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

y $M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(\sigma)$ será la misma matriz (salvo reescalamiento) respecto de la referencia proyectiva \mathcal{R} asociada a la base \mathcal{B} . Como se observa en la matriz, la actuación de $\widehat{\sigma}$ es diagonal por bloques bidimensionales, donde en cada plano actúa como un giro de ángulo $\frac{\pi}{2}$ (entendiendo por un instante la estructura euclídea estándar en $V \simeq \mathbb{R}^{2k}$), por tanto no tiene vectores propios y, entonces, σ no tiene puntos fijos ni hiperplanos invariantes.

Simetrías afines y homografías involutivas

Veamos que las homografías involutivas que tienen puntos fijos son las completaciones proyectivas de las simetrías afines. Como hicimos con la proyección, sea A un espacio afín de dirección V y sean $B \subset A$ un subespacio afín de dirección $W \subset V$ y un subespacio vectorial $U \subset V$ tal que $W \oplus U = V$. La simetría σ respecto de B con dirección U se define como

$$\begin{aligned} \sigma : A &\longrightarrow A \\ Q &\longmapsto \pi(Q) + \overrightarrow{Q\pi(Q)}, \end{aligned}$$

donde π es la proyección afín correspondiente, y verifica que $\sigma \circ \sigma = \text{Id}_A$. Sea \overline{A} la completación proyectiva del espacio afín A donde escogemos $P \in B \subset A$ en la inmersión y $\overline{\sigma}$ la completación proyectiva de σ . Se tiene que

$$\overline{\sigma} \circ \overline{\sigma} = \overline{\sigma \circ \sigma} = \overline{\text{Id}_A} = \text{Id}_{\overline{A}},$$

por lo que es una homografía involutiva. Observamos que $\overline{\sigma}(A_\infty) = A_\infty$ por lo cual el hiperplano del infinito es un hiperplano invariante. Entonces la homografía involutiva $\overline{\sigma}$

debe tener algún punto fijo y, por lo visto anteriormente, en efecto tiene dos subespacios de puntos fijos X e Y , tales que $X \cap Y = \emptyset$ y $\dim X + \dim Y = \dim \mathbb{P}(V) - 1$. Sabemos que podemos elegir $\widehat{\sigma}$ tal que $\widehat{\sigma} \circ \widehat{\sigma} = \text{Id}_{\mathbb{K} \oplus V}$ y $X = \mathbb{P}(V_1) = \mathbb{P}(\text{Ker}(\widehat{\sigma} - \text{Id}_{\mathbb{K} \oplus V}))$, $Y = \mathbb{P}(V_{-1}) = \mathbb{P}(\text{Ker}(\widehat{\sigma} + \text{Id}_{\mathbb{K} \oplus V}))$. Obsérvese que el punto P de la inmersión es $P = [(1, \mathbf{0})]$ con $(1, \mathbf{0}) \in \mathbb{K} \oplus V$ y que

$$[(1, \mathbf{0})] = P = \sigma(P) = \bar{\sigma}|_A(P) = [\widehat{\sigma}(1, \mathbf{0})]$$

con lo cual podemos considerar que la dirección $(1, \mathbf{0}) \in \mathbb{K} \oplus V$ es de vectores propios de valor propio 1, es decir, $\mathbb{K} \times \{\mathbf{0}\} \subset V_1$ y $P \in X \cap A$.

Sea $Q \in X \cap A$. Visto como punto de A , $Q = P + \vec{v}$, y como punto proyectivo $Q = [(1, \vec{v})]$. Se tiene que $\widehat{\sigma}(1, \vec{v}) = (1, \vec{v})$, por tanto

$$\sigma(Q) = \sigma(P) + \vec{\sigma}(\vec{v}) = P + \vec{v} = Q,$$

luego $X \cap A = B$ y $\bar{B} = X$. Por otra parte, sea $\vec{u} \in U \subset V$, entonces $(0, \vec{u}) \in \mathbb{K} \oplus V$. Se tiene que

$$\widehat{\sigma}(0, \vec{u}) = (0, \vec{\sigma}(\vec{u})) = (0, -\vec{u})$$

con lo cual $(0, \vec{u}) \in V_{-1}$ e identificamos $U = V_{-1} \subset A_\infty$. Entonces $Y = \mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(V_{-1})$. Por tanto, la homografía involutiva, resultado de completar proyectivamente la simetría afín respecto de B con dirección U , tiene por subespacios de puntos fijos la completación proyectiva de B , $X = \bar{B}$, y la proyectivización de U , $Y = \mathbb{P}(U)$.

Recíprocamente, sea $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ una homografía involutiva con subespacios de puntos fijos X e Y . Existe algún hiperplano invariante $H \subset \mathbb{P}(V)$ por f que necesariamente (usando la expresión matricial de una homografía involutiva con puntos fijos) debe contener a X o Y . Supongamos que $Y \subset H$ e identificamos $H = A_\infty$ en una completación proyectiva de un espacio afín $\bar{A} = \mathbb{P}(V)$. Como H es invariante, f es una homografía que deja invariante el hiperplano del infinito, luego es la completación proyectiva de una aplicación afín $\sigma : A \rightarrow A$, $\bar{\sigma} = f$, por la Proposición 5.2.4. Como $f \circ f = \text{Id}_{\bar{A}}$, entonces $\sigma \circ \sigma = \text{Id}_A$ y se puede demostrar que una afinidad tal es una simetría afín. Por unicidad de la completación proyectiva y por lo visto anteriormente, σ es simetría respecto de $B := X \cap A$ con dirección $U := \bar{Y}$.

Ejemplo 5.3.7. Siguiendo con los Ejemplos 2.2.8 y 5.3.6, sea la simetría $\sigma : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ respecto de $B : \{-x + 2y = 2\}$ con dirección $U = L[(1, 2)] : \{-2x + y = 0\}$. En la completación proyectiva estándar $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ definimos igualmente

$$X := \bar{B} = \{-2x_0 - x_1 + 2x_2 = 0\}$$

e

$$Y := \mathbb{P}(U) = \{-2x_1 + x_2 = x_0 = 0\} = \{[0 : 1 : 2]\} \subset \mathbb{A}_\infty,$$

de tal modo que la completación proyectiva de σ , $\bar{\sigma}$, es la homografía involutiva con subespacios de puntos fijos X e Y .

Respecto de la referencia cartesiana

$$\mathcal{R}_c = \{(0, 1); (2, 1), (1, 2)\}$$

la matriz de σ estaba dada por

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(\pi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

y respecto de la completación proyectiva de esta referencia:

$$\mathcal{R} = \{[1 : 0 : 1], [0 : 2 : 1], [0 : 1 : 2]; [1 : 3 : 3]\},$$

la matriz de $\bar{\sigma}$ es, salvo reescalamiento, la misma:

$$M_{\mathcal{R} \mathcal{R}}(\pi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Observamos cómo los puntos $[1 : 0 : 1]$ y $[0 : 2 : 1]$, que generan la recta X , se transforman en ellos mismos mediante la matriz. Así mismo, el punto $[0 : 1 : 2]$, que es Y , es fijo, ya que su imagen es el punto $[0 : -1 : -2] = [0 : 1 : 2]$.

5.4. Razón doble

La razón doble será el invariante apropiado que extiende la noción de razón simple al caso proyectivo. Supongamos que tenemos tres puntos $P = [1 : 1]$, $Q = [1 : 2]$ y $R = [1 : 3]$ en la recta proyectiva real $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Podemos elegir distintos hiperplanos (puntos) del infinito de tal modo que veamos estos tres puntos en diferentes espacios afines. Elegimos la carta afín estándar $\{x_0 \neq 0\}$, donde $P = 1$, $Q = 2$ y $R = 3$, por lo que su razón simple en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ es

$$[P, Q, R] = [1, 2, 3] = \frac{3-1}{2-1} = 2;$$

mientras que en la otra carta afín estándar $\{x_1 \neq 0\}$, se tiene $P = 1$, $Q = \frac{1}{2}$ y $R = \frac{1}{3}$, por lo que su razón simple es

$$[P, Q, R] = [1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}] = \frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{4}{3},$$

que es un valor diferente. Esto nos lleva a tener que modificar este invariante para que esté bien definido para una colección de puntos del espacio proyectivo.

En el caso afín, una aplicación afín biyectiva de una recta en otra queda determinada por las imágenes de dos puntos distintos, por tanto la razón simple de estos dos puntos con un tercero alineado con ellos viene descrita por la imagen de este tercer punto (c.f.

Lema 2.3.2). Como en el caso proyectivo las homografías entre rectas vienen determinadas por las imágenes de tres puntos distintos, usaremos un cuarto punto alineado con ellos para definir la razón doble de cuatro puntos alineados en términos de la imagen de este cuarto punto.

Definición 5.4.1. Sea L una recta proyectiva y sean puntos distintos $P, Q, R, S \in L$. Por el Teorema 5.1.10, existe una única homografía $f : L \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ tal que

$$\begin{aligned} f : L &\longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \\ P &\longmapsto [0 : 1] = \mathbb{A}_{\infty} := \infty \\ Q &\longmapsto [1 : 0] = 0 \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1 := 0 \\ R &\longmapsto [1 : 1] = 1 \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1 := 1 \end{aligned}$$

Llamaremos *razón doble* de P, Q, R, S al escalar que viene dado como imagen del cuarto punto S , denotado por

$$[P, Q, R, S] = f(S) \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1 \setminus \{0, 1\} = \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}.$$

Observación 5.4.2. Podemos entender la razón simple como una razón doble tras una completación proyectiva. Sea L una recta afín y sean $A, B, C \in L$. Supongamos una completación proyectiva de L , donde $\bar{L} = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ y sea $L_{\infty} = \bar{L} \setminus L$ su punto del infinito. Por el Teorema 5.1.10 existe una única homografía $f : \bar{L} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ tal que $f(L_{\infty}) = [0 : 1] = \infty$, $f(A) = [1 : 0] = 0$ y $f(B) = [1 : 1] = 1$. Y restringiendo esta homografía a la recta afín, $f|_L(A) = 0$ y $f|_L(B) = 1$, por lo que por el Lema 2.3.2, la razón simple de A, B, C es igual a $f(C)$, que es igual a la razón doble de L_{∞}, A, B, C . Por tanto se tiene

$$[L_{\infty}, A, B, C] = [A, B, C] = f(C).$$

Proposición 5.4.3. Sean dos rectas proyectivas L_1 y L_2 y puntos distintos $P_i, Q_i, R_i, S_i \in L_i$, $i = 1, 2$. Son equivalentes:

1. Existe una única homografía $f : L_1 \rightarrow L_2$ tal que $f(P_1) = P_2$, $f(Q_1) = Q_2$, $f(R_1) = R_2$ y $f(S_1) = S_2$.
2. $[P_1, Q_1, R_1, S_1] = [P_2, Q_2, R_2, S_2]$.

Demostración.

- 1) \implies 2) Supongamos que existe una única homografía $f : L_1 \rightarrow L_2$ tal que $f(P_1) = P_2$, $f(Q_1) = Q_2$, $f(R_1) = R_2$ y $f(S_1) = S_2$. Además, existen homografías $g_i : L_i \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ tales que $g_i(P_i) = [0 : 1] = \infty$, $g_i(Q_i) = [1 : 0] = 0$ y $g_i(R_i) = [1 : 1] = 1$, y entonces $g_i(S_i) = [P_i, Q_i, R_i, S_i]$, $i = 1, 2$. Observamos que $(g_2 \circ f)(P_1) = \infty$, $(g_2 \circ f)(Q_1) = 0$ y $(g_2 \circ f)(R_1) = 1$, por lo que $g_2 \circ f$ y g_1 coinciden en una referencia proyectiva, luego $g_2 \circ f = g_1$ y, por tanto,

$$[P_1, Q_1, R_1, S_1] = g_1(S_1) = (g_2 \circ f)(S_1) = g_2(S_2) = [P_2, Q_2, R_2, S_2].$$

- 2) \implies 1) Sean $g_i : L_i \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, $i = 1, 2$, las únicas homografías tales que $g_i(P_i) = [0 : 1] = \infty$, $g_i(Q_i) = [1 : 0] = 0$ y $g_i(R_i) = [1 : 1] = 1$, $i = 1, 2$. Por definición de razón doble y por hipótesis se tiene que

$$g_1(S_1) = [P_1, Q_1, R_1, S_1] = [P_2, Q_2, R_2, S_2] = g_2(S_2)$$

y, entonces, la homografía $f := g_2^{-1} \circ g_1$ es la buscada, verificando sus condiciones. \square

A continuación enunciamos el resultado análogo del Teorema 2.3.5 que afirma que el preservar la razón simple, junto con la propiedad de llevar rectas en rectas, caracteriza las homografías. Lo demostraremos para el caso de la recta proyectiva, para una prueba general puede consultarse [FernandoGamboa, Teorema V.2.6].

Teorema 5.4.4. *Una aplicación $f : \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V)$ es una homografía si y solo si es biyectiva, lleva rectas en rectas y preserva la razón doble.*

Demostración. Daremos la demostración para $f : \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$.

Si f es una homografía, por la Proposición 5.4.3 se tiene que para cualesquiera puntos diferentes $P, Q, R, S \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$,

$$[P, Q, R, S] = [f(P), f(Q), f(R), f(S)],$$

por lo que la razón doble se preserva.

Recíprocamente, sea una biyección $f : \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ que preserva la razón doble. Sea $\mathcal{R} = \{P_0, P_1; P_2\}$ una referencia proyectiva de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$. Por el Teorema 5.1.10 existe una única homografía $g : \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ tal que $g(P_i) = f(P_i)$, $i = 0, 1, 2$. Sea $P_3 \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$, distinto de P_0, P_1, P_2 . Como f preserva la razón doble

$$[P_0, P_1, P_2, P_3] = [f(P_0), f(P_1), f(P_2), f(P_3)]$$

y, por la Proposición 5.4.3, la homografía g , que es única, cumple $g(P_3) = f(P_3)$. Por tanto, $g = f$ en toda la recta proyectiva y f es una homografía. \square

Cálculo de la razón doble

Sea $\mathcal{R} = \{P_0, P_1; P_2\}$ una referencia proyectiva de la recta L y sean puntos diferentes $P, Q, R, S \in L$ con coordenadas homogéneas respecto a L

$$P = [a_0 : a_1], \quad Q = [b_0 : b_1], \quad R = [c_0 : c_1], \quad S = [d_0 : d_1].$$

Sea $f : L \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ la única homografía por el Teorema 5.1.10 que cumple $f(P) = [0 : 1]$, $f(Q) = [1 : 0]$ y $f(R) = [1 : 1]$. La aplicación lineal asociada \hat{f} lleva múltiplos de

los vectores que definen P y Q a los puntos correspondientes, pero verificando que la suma de estos dos múltiplos sea el correspondiente al punto R , es decir, existen escalares $\lambda, \mu, \rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tales que

$$\widehat{f}(\lambda a_0, \lambda a_1) = (0, 1), \quad \widehat{f}(\lambda b_0, \lambda b_1) = (1, 0),$$

y

$$\begin{cases} \lambda a_0 + \mu b_0 = \rho c_0 \\ \lambda a_1 + \mu b_1 = \rho c_1 \end{cases}$$

Este sistema tiene por soluciones

$$\lambda = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}, \quad \mu = - \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix},$$

que son ambos no nulos ya que los puntos P, Q, R son diferentes. La razón doble de P, Q, R, S es el cociente de las coordenadas homogéneas de la imagen $f(S) = f([d_0 : d_1])$, en la referencia proyectiva canónica de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Primero expresemos S como combinación de P y Q , es decir existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tales que

$$\begin{cases} \alpha a_0 + \beta b_0 = \gamma d_0 \\ \alpha a_1 + \beta b_1 = \gamma d_1 \end{cases}$$

con soluciones

$$\alpha = \begin{vmatrix} d_0 & d_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}, \quad \beta = - \begin{vmatrix} d_0 & d_1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix},$$

que son ambos no nulos ya que los puntos P, Q, S son diferentes. Entonces

$$\begin{aligned} f(S) = f([d_0 : d_1]) &= [\widehat{f}(d_0, d_1)] = [\widehat{f}(\alpha(a_0, a_1) + \beta(b_0, b_1))] = \\ &= [\alpha(0, \frac{1}{\lambda}) + \beta(\frac{1}{\mu}, 0)] = [(\frac{\beta}{\mu}, \frac{\alpha}{\lambda})]. \end{aligned}$$

Por tanto la razón doble de P, Q, R, S es igual a

$$[P, Q, R, S] = \frac{\beta}{\mu} : \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} d_0 & d_1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_0 & d_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}}.$$

Esta fórmula justifica el nombre de razón doble, como cociente de dos razones.

Como casos particulares:

- Si los puntos pertenecen a la recta afín

$$P, Q, R, S \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$$

con respecto a la referencia proyectiva estándar en $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ sus coordenadas homogéneas son

$$P = [1 : a], Q = [1 : b], R = [1 : c], S = [1 : d]$$

con lo cual su razón doble se reduce a

$$[P, Q, R, S] = \frac{a - c}{b - c} : \frac{a - d}{b - d} = \frac{[C, B, A]}{[D, B, A]}$$

que es la fórmula clásica de la razón doble como cociente de dos raíces simples.

- Si P es el punto del infinito, $P = [0 : 1]$ y $Q = [1 : b]$, $R = [1 : c]$, $S = [1 : d]$ son puntos de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \setminus \{\infty\}$, la fórmula reduce a

$$[P, Q, R, S] = [\infty, Q, R, S] = \frac{1}{b - c} : \frac{1}{b - d} = \frac{d - b}{c - b} = [Q, R, S]$$

como ya habíamos visto en la Observación 5.4.2.

- Si $P = [0 : 1]$ y $Q = [1 : 0]$, $R = [1 : 1]$ son la referencia proyectiva estándar en $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$, y $S = [d_0 : d_1]$, la razón doble viene dada por

$$[P, Q, R, S] = \frac{1}{d_0} : \frac{-1}{-d_1} = \frac{d_1}{d_0},$$

que es la razón de las coordenadas de S y su coordenada afín en la carta estándar $\{x_0 \neq 0\}$.

Cuaternas armónicas

Se dice que cuatro puntos distintos P, Q, R, S en una recta proyectiva forman una *cuaterna armónica* si su razón doble es $[P, Q, R, S] = -1$. Dados puntos P, Q, R en una recta proyectiva, siempre podemos encontrar su *cuarto armónico* S tal que P, Q, R, S forman una cuaterna armónica.

En el caso especial en que la recta es $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ y $P = [0 : 1] = \infty$,

$$-1 = [P, Q, R, S] = [Q, R, S]$$

por lo que el cuarto armónico S es el simétrico de Q respecto de R .

En general, para calcular el cuarto armónico de $P = [a_0 : a_1]$, $Q = [b_0 : b_1]$, $R = [c_0 : c_1]$ podemos aplicar la fórmula anterior del cálculo de la razón doble igualada a -1 y despejar las coordenadas homogéneas $S = [d_0 : d_1]$, obteniendo

$$S = [d_0 : d_1] = [a_1b_0c_0 - 2a_0b_0c_1 + a_0b_1c_0 : 2a_1b_1c_0 - a_0b_1c_1 - a_1b_0c_1].$$

En el caso particular donde los cuatro puntos sean afines, con coordenadas $P = [1 : a]$ y $Q = [1 : b]$, $R = [1 : c]$, $S = [1 : d]$, se tiene que

$$d = \frac{2ab - bc - ac}{a - 2c + b}.$$

5.5. Problemas

Problema 5.5.1. Dadas $f : \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V')$, $g : \mathbb{P}(V') \dashrightarrow \mathbb{P}(V'')$ aplicaciones afines con aplicaciones lineales asociadas $\widehat{f} : V \rightarrow V'$ y $\widehat{g} : V' \rightarrow V''$, demuestra que $\text{im } f \not\subset Z(g)$ equivale a $\widehat{g} \circ \widehat{f} \neq 0$, la condición para que la composición $g \circ f$ esté definida.

Problema 5.5.2. Demuestra las desigualdades

$$f(X \setminus Z(f)) = \mathbb{P}(\widehat{f}(\widehat{X}))$$

$$f^{-1}(Y) \cup Z(f) = \mathbb{P}(\widehat{f^{-1}}(\widehat{Y}))$$

y, con ello, da una prueba de la Proposición 5.1.5.

Problema 5.5.3. Sea una aplicación proyectiva $f : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4$ que está definida en todo $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ excepto una recta proyectiva L

- Calcula la dimensión de su imagen.
- Dada otra recta proyectiva $M \neq L$ tal que $L \cap M \neq \emptyset$, calcula la dimensión de $f(M)$.

Problema 5.5.4. Sea una aplicación proyectiva $f : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ con aplicación lineal asociada sobreyectiva. Calcula la dimensión de su centro.

Problema 5.5.5. Comprueba que

$$\mathcal{R} := \{P_0 := [0 : 1 : 0], P_1 := [-1 : 0 : 1], P_2 := [1 : -1 : 1]; P_3 := [0 : 1 : 2]\},$$

y

$$\mathcal{R}' := \{Q_0 := [1 : 0 : 1], Q_1 := [2 : 0 : 1], Q_2 := [-1 : -1 : 1]; Q_3 := [1 : -1 : 0]\}.$$

son referencias proyectivas en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Obtén la matriz de la única homografía f tal que $f(P_i) = Q_i$, $i = 0, 1, 2, 3$, respecto de la referencia canónica en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.

Problema 5.5.6. Demuestra que la completación proyectiva de una homotecia restringida a la carta afín A , $\overline{\eta}|_A$, tiene un único punto fijo y calcula sus coordenadas.

Problema 5.5.7. Sea $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ la traslación de vector $\vec{v} = (-1, 1, 2)$.

- Obtén la matriz de su completación proyectiva $f : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ respecto de la referencia proyectiva estándar en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$.
- Describe de qué aplicación proyectiva se trata y calcula sus puntos fijos y sus subespacios invariantes.

Problema 5.5.8. Sea $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ la homotecia de razón $\lambda = 2$ y centro $C = (0, 2, -1)$.

- Obtén la matriz de su completación proyectiva $f : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ respecto de la referencia proyectiva estándar en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$.
- Describe de qué aplicación proyectiva se trata y calcula sus puntos fijos y sus subespacios invariantes.

Problema 5.5.9. Sea la recta $L := \{x_2 - x_1 = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ y los puntos $P_0 := [1 : 0 : 1]$, $P_1 := [1 : -1 : 1]$ y $Q := [2 : -1 : 2]$.

- Calcula la razón de la homotecia $\eta : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus L \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus L$ de centro P_0 y que transforma P_1 en Q .
- Obtén una matriz de su completación proyectiva respecto de la referencia proyectiva estándar.

Problema 5.5.10. Dada la recta $L := \{x_0 + x_1 + x_2 = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ y los puntos $P := [1 : 0 : 1]$ y $Q := [1 : 2 : 1]$:

- Calcula el vector de traslación de la homotecia $\tau : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus L \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus L$ que transforma P en Q .
- Obtén una matriz de su completación proyectiva respecto de la referencia proyectiva estándar.

Problema 5.5.11. Dada la homografía $f : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$

$$f([x_0 : x_1 : x_2] = [x_1 + x_2 : x_0 + x_2, x_0 + x_1]),$$

representa matricialmente f respecto de la referencia proyectiva canónica y calcula sus puntos fijos y sus subespacios invariantes.

Problema 5.5.12. Estudia los puntos fijos de la homografía $f : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ con matriz

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 10 & 7 & -5 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

respecto de la referencia proyectiva canónica en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Averigua y describe de qué aplicación afín puede f ser completación proyectiva.

Problema 5.5.13. Estudia los puntos fijos de la homografía $f : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ con matriz

$$M_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_c}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

respecto de la referencia proyectiva canónica en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Averigua y describe de qué aplicación afín puede f ser completación proyectiva.

Problema 5.5.14. Sean los puntos $P_1 = [0 : 1 : 0]$, $P_2 = [1 : 2 : 1]$, $Q_1 = [-1 : 1 : 0]$, $Q_2 = [-1 : -1 : 2]$ en el plano proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Sea L la recta que pasa por P_1 y P_2 y M la recta que pasa por Q_1 y Q_2 .

- Describe la perspectividad entre L y M con centro $R = [0 : 0 : 1]$.
- Obtén referencias proyectivas de L y M tales que compartan el primer punto y la matriz de la perspectividad respecto de estas referencias sea la identidad.

Problema 5.5.15. Sean en el plano afín real $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ el punto $P = (2, 1)$ y las rectas vectoriales $W = L[(-1, 1)]$ y $U = L[(0, 1)]$ de \mathbb{R}^2 . Sea π la proyección afín sobre $B := P + W$ con dirección U . Estudia su completación proyectiva obteniendo su matriz, sus puntos fijos y subespacios invariantes en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.

Problema 5.5.16. Considera en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ el punto $P = (0, 1, 3)$ y los subespacios vectoriales $W = L[(-1, 1, 1), (0, 1, 0)]$ y $U = L[(1, 1, 0)]$ de \mathbb{R}^3 . Sea σ la simetría afín respecto de $B := P + W$ con dirección U . Estudia su completación proyectiva obteniendo su matriz, sus puntos fijos y subespacios invariantes en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$.

Problema 5.5.17. Determina los puntos fijos P y Q de la homografía de la recta proyectiva

$$f([x_0 : x_1]) = [-x_1 : 2x_0 + 3x_1]$$

y calcula la razón doble $[P, Q, R, f(R)]$, donde $R := [2 : 5]$.

Problema 5.5.18. Prueba que dados cuatro puntos distintos P, Q, R, S de una recta proyectiva, se cumple que las siguientes razones dobles son inversas:

$$[P, Q, R, S] \cdot [Q, P, R, S] = 1.$$

Problema 5.5.19. Demuestra que dados cinco puntos distintos P, Q, R, S, T de una recta proyectiva, se cumple la propiedad multiplicativa

$$[P, Q, R, S] \cdot [P, Q, S, T] = [P, Q, R, T].$$

Problema 5.5.20. Sean $P := [1 : 1]$, $Q := [2 : 1]$ y $R := [-1 : 2]$ puntos de la recta proyectiva real.

- Calcula la matriz respecto de la referencia proyectiva canónica de la única homografía $f : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ que cumple $f(P) = [0 : 1]$, $f(Q) = [1 : 0]$ y $f(R) = [1 : 1]$.
- Calcula el cuarto armónico S de P, Q y R y su imagen por f .
- Comprueba que f preserva la razón doble de estos cuatro puntos, por tanto $f(S)$ es el cuarto armónico de $f(P), f(Q)$ y $f(R)$.

Problema 5.5.21. Sean los puntos $P := [1 : -1]$, $Q := [3 : -1]$ y $R := [1 : 0]$ en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$.

- a) Dado un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, halla el punto $S_\lambda \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ tal que $[P, Q, R, S_\lambda] = \lambda$.
- b) Usa a) para obtener el cuarto armónico S de P, Q y R .
- c) Ahora supón que los puntos P, Q, R pertenecen a la recta proyectiva compleja $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ y responde a los apartados a) y b).

Problema 5.5.22. Dados los puntos $P = [1 : 0 : 0]$, $Q = [1 : 1 : 1]$, $R = [0 : 1 : 1]$ y $S = [-2 : 1 : 1]$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$

- a) Comprueba que están alineados.
- b) Calcula la razón doble $[P, Q, R, S]$.
- c) Halla un punto T tal que Q, R, S, T , en este orden, forman una cuaterna armónica.

Problema 5.5.23. Calcula el cuarto armónico de los puntos $P = [1 : i]$, $Q = [-i : 2]$ y $R = [0 : -i]$, en la recta proyectiva compleja $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

Capítulo 6

Cónicas y cuádricas

6.1. Descripción métrica de las cónicas

6.1.1. Cónicas como lugares geométricos

En el plano afín euclídeo $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ podemos definir una serie de curvas notables, llamadas *cónicas*, como lugares geométricos verificando una serie de propiedades métricas.

Elipse

Dados dos puntos $F_1, F_2 \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, definimos la *elipse* como el lugar geométrico de los puntos de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ tales que la suma de las distancias a F_1 y F_2 es constante y mayor que la distancia entre F_1 y F_2 :

$$\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 : d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

Los puntos F_1, F_2 reciben el nombre de *focos* y su distancia $2c := d(F_1, F_2)$ se llama distancia focal. El punto medio del segmento que une los focos se llama *centro* de la elipse. Eligiendo una referencia ortonormal adecuada con origen el centro de la elipse, se obtiene que los puntos de la elipse verifican la ecuación

$$\mathcal{E} : \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\},$$

donde a y b se denominan *semieje mayor* y *semieje menor* respectivamente. El cociente $e := \frac{c}{a}$ es un número entre 0 y 1 y se llama *excentricidad*.

Figura 6.1: Elipse.

En el caso particular en el que $F_1 = F_2$, obtenemos una elipse con excentricidad $e = 0$ que es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a $C := F_1 = F_2$ es constante, lo

cual nos da una *circunferencia*:

$$\mathcal{C} = \{P \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 : d(P, C) = r\}$$

de ecuación

$$\mathcal{C} : \{x^2 + y^2 = r^2\}.$$

La constante r se denomina *radio* de la circunferencia y C es el centro de la circunferencia.

Figura 6.2: Circunferencia

Si generalizamos al espacio afín tridimensional $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ obtenemos el *elipsoide*. La ecuación de un elipsoide con centro el origen y semiejes a , b y c viene dada por

$$\mathcal{E} : \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

Hipérbola

Dados dos puntos $F_1, F_2 \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, definimos la *hipérbola* como el lugar geométrico de los puntos de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ tales que la diferencia de las distancias a F_1 y F_2 es constante y menor que la distancia entre F_1 y F_2 :

$$\mathcal{H} = \{P \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 : d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a\}.$$

Los puntos F_1, F_2 reciben el nombre de *focos* y su distancia $2c := d(F_1, F_2)$ se llama distancia focal. El punto medio del segmento que une los focos se llama *centro* de la hipérbola. Eligiendo una referencia ortonormal adecuada con origen el centro de la hipérbola, se obtiene que los puntos de la hipérbola verifican la ecuación

$$\mathcal{H} : \left\{ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\},$$

donde a y b se denominan *semieje mayor* y *semieje menor* respectivamente. El cociente $e := \frac{c}{a}$ es un número mayor que 1 y se llama *excentricidad*. Las rectas $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ y $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ se denominan *asíntotas* de la hipérbola.

Figura 6.3: Hipérbola.

Si generalizamos al espacio afín tridimensional $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ obtenemos los dos tipos de *hiperboloideas*:

- Hiperboloide de una hoja con centro el origen y semiejes a , b y c :

$$\mathcal{H} : \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\},$$

donde los cortes con planos $\{z = \gamma\}$ son elipses y los cortes con planos $\{x = \alpha\}$, $\{y = \beta\}$ son hipérbolas.

- Hiperboloide de dos hojas con centro el origen y semiejes a , b y c :

$$\mathcal{H} : \left\{ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\},$$

donde los cortes con planos $\{x = \alpha\}$ son elipses o vacíos, y los cortes con planos $\{y = \beta\}$, $\{z = \gamma\}$ son hipérbolas.

Parábola

Dado un punto $F \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, y una recta $D \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ que no pasa por F , definimos la *parábola* como el lugar geométrico de los puntos de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ que equidistan de F y D :

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 : d(P, F) = d(P, D)\}.$$

El punto F se llama foco y la recta D se llama *directriz*. Eligiendo una referencia ortonormal adecuada donde D tiene por ecuación $\{y = -\frac{p}{2}\}$ y $F = (0, \frac{p}{2})$, con $d(F, D) = p$, se obtiene que los puntos de la parábola verifican la ecuación

$$\mathcal{P} : \{x^2 = 2py\}.$$

El origen de esta referencia es el vértice de la parábola.

Si generalizamos al espacio afín tridimensional $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ obtenemos los dos tipos de *paraboloides*:

- Paraboloide elíptico de semiejes a y b :

$$\mathcal{H} : \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \right\},$$

donde los cortes con planos $\{x = \alpha\}$, $\{y = \beta\}$ son parábolas y los cortes con planos $\{z = \alpha\}$ son elipses.

- Paraboloide hiperbólico de semiejes a y b :

$$\mathcal{H} : \left\{ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \right\},$$

donde los cortes con planos $\{x = \alpha\}$, $\{y = \beta\}$ son parábolas y los cortes con planos $\{z = \gamma\}$ son hipérbolas.

Figura 6.4: Parábola.

Observación 6.1.1. Desde el punto de vista afín, todas las cónicas del mismo tipo son afínmente equivalentes, en el sentido de que existe una afinidad del plano $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ que transforma una en otra.

En efecto, sea la elipse \mathcal{C} de la Figura 6.5, que tiene a P_0 y P_1 por focos y pasa por el punto P_2 que dista del centro el valor del semieje menor. Es claro que estos tres puntos forman una referencia afín (siempre que P_2 lo escojamos no alineado con P_0 y P_1) y que determinan unívocamente una elipse de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$. Por otra parte, la elipse \mathcal{C}' , de ecuación $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ tiene por focos a los puntos $Q_0 := (-1, 0)$, $Q_1 := (1, 0)$ y además pasa por el punto $Q_2 := (0, 1)$, que también dista del centro $(0, 0)$ el valor del semieje menor, que es 1). Estos tres puntos también forman una referencia afín. Por el Teorema 2.1.10 existe una única afinidad f de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ tal que $f(P_i) = Q_i$, $i = 0, 1, 2$.

Se puede comprobar, aunque es un cálculo laborioso, que efectivamente $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$. Componiendo transformaciones de este estilo podemos establecer isomorfismos afines entre cualesquiera dos elipses del plano. Para el resto de cónicas podemos realizar un tratamiento similar. Una prueba rigurosa de este hecho se verá en la sección 6.2.

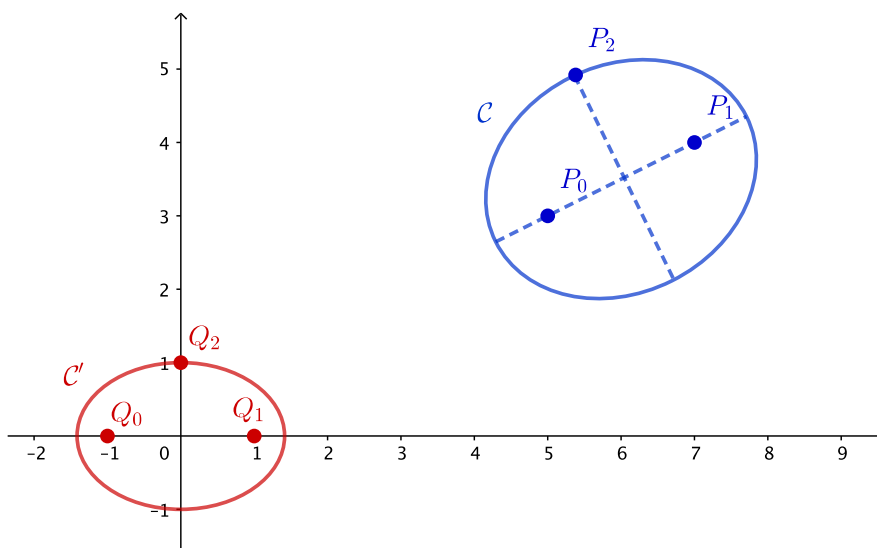


Figura 6.5: Elipse transformada mediante una afinidad.

6.1.2. Secciones cónicas

Las cónicas toman su nombre del cono, ya que se pueden obtener como secciones de él, es decir, intersecando el cono con planos.

Supongamos, para simplificar, el cono de ecuación $C : \{x^2 + y^2 = z^2\}$ en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, respecto a una referencia cartesiana $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$, donde O es el vértice del cono. La recta $\{x = y = 0\}$ es el eje del cono y la recta $\{x = 0; y = z\}$ es una de sus generatrices, a partir de la cual el cono es una superficie de revolución al rotar alrededor del eje z .

Sea $H \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ un plano afín. Con la elección de la generatriz, para calcular $H \cap C$ podemos suponer que H es de la forma $H := \{ay + bz = c\}$, con a y b no ambos nulos.

- Si $a = 0$, $b \neq 0$, entonces $H := \{z = \frac{c}{b}\}$, y obtenemos

$$H \cap C = \{x^2 + y^2 = \frac{c^2}{b^2}, z = \frac{c}{b}\}.$$

- Si $c \neq 0$, obtenemos una *circunferencia* de radio $\frac{c}{b}$.
- Si $c = 0$, obtenemos el punto $\{x^2 + y^2 = z = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$ que llamaremos *punto doble*.

- Si $a \neq 0$, entonces $H := \{y = -\frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\}$, y sustituímos en la ecuación de C

$$x^2 + \left(-\frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right)^2 = z^2$$

$$x^2 + \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)z^2 - 2\frac{bc}{a^2}z + \frac{c^2}{a^2} = 0.$$

- Si $b = a$, se tiene

$$x^2 - 2\frac{c}{a}z + \frac{c^2}{a^2} = 0$$

- Si $c \neq 0$, obtenemos una *parábola*.

$$x^2 - 2\frac{c}{a}\left(z - \frac{c}{2a}\right) = 0.$$

- Si $c = 0$, obtenemos la *recta doble* $\{x^2 = y + z = 0\}$.

- Si $b \neq a$, la ecuación de la intersección

$$x^2 + \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)z^2 - 2\frac{bc}{a^2}z + \frac{c^2}{a^2} = 0$$

equivale a

$$a^2x^2 + (b^2 - a^2)z^2 - 2bcz + c^2 = 0$$

Y factorizando y completando cuadrados obtenemos

$$a^2x^2 + (b^2 - a^2)\left(z - \frac{bc}{b^2 - a^2}\right)^2 - \frac{a^2c^2}{b^2 - a^2} = 0.$$

- Si $c \neq 0$, la ecuación

$$a^2x^2 + (b^2 - a^2)\left(z - \frac{bc}{b^2 - a^2}\right)^2 = \frac{a^2c^2}{b^2 - a^2}$$

define una *elipse* si $b > a$ o una *hipérbola* si $b < a$.

- Si $c = 0$, la ecuación se reduce a

$$a^2x^2 + (b^2 - a^2)z^2 = 0$$

cuyas soluciones son el *punto doble*

$$\{a^2x^2 + (b^2 - a^2)z^2 = ay + bz = 0\} = \{(0, 0, 0)\},$$

si $b > a$, o el *par de rectas*

$$\{ax + \sqrt{a^2 - b^2}z = ay + bz = 0\}, \quad \{ax - \sqrt{a^2 - b^2}z = ay + bz = 0\}$$

que se cortan en el vértice del cono $(0, 0, 0)$, si $b < a$.

Mediante secciones del cono obtenemos todas las cónicas no degeneradas (elipse, hipérbola y parábola), y tres de los tipos degenerados (recta doble, punto doble y dos rectas que intersecan). Para obtener los dos tipos degenerados restantes, como veremos en la sección 6.2, podemos repetir el procedimiento pero con secciones del cilindro. Sea $D := \{x^2 + y^2 = 1\}$ en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, respecto a una referencia cartesiana $\mathcal{R}_c\{O; \mathcal{B}\}$. La recta $\{x = y - 1 = 0\}$ es una generatriz a partir de la cual el cilindro es una superficie de revolución al rotar alrededor del eje z .

Sea $H \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ un plano afín y para calcular $H \cap D$ supondremos que H es de la forma $H := \{ay + bz = c\}$, con a y b no ambos nulos.

- Si $a = 0$, $b \neq 0$, entonces $H := \{z = \frac{c}{b}\}$, y obtenemos

$$H \cap D = \{x^2 + y^2 = 1, z = \frac{c}{b}\}.$$

que es una *circunferencia* de radio 1.

- Si $a \neq 0$, entonces $H := \{y = -\frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\}$, y sustituimos en la ecuación de D

$$x^2 + \left(\frac{bz - c}{a}\right)^2 = 1$$

- Si $b \neq 0$ obtenemos una *elipse*. En el caso particular $b = a$ se obtiene una *circunferencia*.
- Si $b = 0$ queda

$$x^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}.$$

- Si $|c| > |a|$ obtenemos el *conjunto vacío*.
- Si $|c| = |a|$ obtenemos la *recta doble*

$$\{x^2 = y - \frac{c}{a} = 0\}.$$

- Si $|c| < |a|$ obtenemos dos *rectas paralelas*,

$$\{x = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}, z = 0\}, \quad \{x = -\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}, z = 0\}.$$

6.2. Clasificación de cuádricas afines

Desde el punto de vista geométrico hemos definido las cónicas afines como lugares geométricos verificando ciertas propiedades. Además hemos visto que se corresponden con secciones del cono al cortar con diferentes planos. Al pasar a tres dimensiones, se generalizan las ecuaciones de grado dos para obtener ciertas superficies. Desde un punto de vista algebraico, definiremos una cuádrica afín como los puntos que satisfacen una ecuación de segundo grado en un espacio afín.

Sea A un espacio afín de dimensión n y sea $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ una referencia cartesiana de A .

Definición 6.2.1. Una *cuádrica afín* \mathcal{Q} es el conjunto de puntos de A cuyas coordenadas $\mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots, x_n)$ respecto de la referencia cartesiana \mathcal{R}_c satisfacen una ecuación de segundo grado:

$$\mathcal{Q} := \{P \in A : \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{k=1}^n \beta_k x_k + \gamma = 0, \alpha_{ij}, \beta_k, \gamma \in \mathbb{K}\}$$

donde al menos algún α_{ij} es no nulo.

Podemos realizar las transformaciones:

- $a_{ij} = a_{ji} := \frac{\alpha_{ij}}{2}$, si $i < j$
- $a_{ii} = \alpha_{ii}$, si $i = j$
- $b_k = \frac{\beta_k}{2}$, $k = 1, \dots, n$
- $c = \gamma$

y definir la matriz

$$M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) := \left(\begin{array}{c|c} c & b \\ \hline b^t & A \end{array} \right)$$

con $b := (b_1, \dots, b_n)$ y $A := (a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ tal que la ecuación de una cuádrica \mathcal{Q} respecto de la referencia cartesiana \mathcal{R}_c se puede reescribir como

$$\varphi(\mathbf{x}) := \mathbf{x} A \mathbf{x}^t + 2b\mathbf{x}^t + c = (1 \mid \mathbf{x}) \left(\begin{array}{c|c} c & b \\ \hline b^t & A \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{array} \right) = (1 \mid \mathbf{x}) M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{array} \right) = 0.$$

Observación 6.2.2. Véase que cualquier múltiplo de la matriz $M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q})$ define la misma cuádrica respecto de la referencia cartesiana \mathcal{R}_c .

Sea \mathcal{R}'_c otra referencia cartesiana de A . Si \mathbf{x} son las coordenadas de un punto $P \in A$ en la referencia \mathcal{R}_c , entonces \mathbf{y} son las coordenadas de P en la referencia cartesiana \mathcal{R}'_c , verificando

$$C_{\mathcal{R}'_c \mathcal{R}_c} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{y}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix},$$

donde $C_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}'_c}$ es la matriz de cambio de referencia (c.f. 1.2). Por tanto

$$0 = \varphi(\mathbf{x}) = (1 \mid \mathbf{x}) M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = (1 \mid \mathbf{y}) C_{\mathcal{R}'_c \mathcal{R}_c}^t M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) C_{\mathcal{R}'_c \mathcal{R}_c} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{y}^t \end{pmatrix} = \varphi'(\mathbf{y}).$$

Entonces

$$M_{\mathcal{R}'_c}(\mathcal{Q}) := C_{\mathcal{R}'_c \mathcal{R}_c}^t M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) C_{\mathcal{R}'_c \mathcal{R}_c}$$

es la matriz de la misma cuádrica \mathcal{Q} respecto de la referencia \mathcal{R}'_c y $\varphi'(\mathbf{y}) = 0$ es la ecuación de \mathcal{Q} en coordenadas de \mathcal{R}'_c .

Dos cuádricas representarán el mismo lugar geométrico, en el sentido afín, si sus ecuaciones son iguales tras un cambio afín de coordenadas. Ello nos lleva a la siguiente definición.

Definición 6.2.3. Se dice que dos cuádricas afines \mathcal{Q}_1 y \mathcal{Q}_2 , de ecuaciones respecto de una referencia cartesiana \mathcal{R}_c

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x} A_1 \mathbf{x}^t + 2b_1 \mathbf{x}^t + c_1 = (1 \mid \mathbf{x}) M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}_1) \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = 0$$

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x} A_2 \mathbf{x}^t + 2b_2 \mathbf{x}^t + c_2 = (1 \mid \mathbf{x}) M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}_2) \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = 0$$

son *afínmente equivalentes* si existe otra referencia cartesiana \mathcal{R}'_c con matriz de cambio de referencia $C_{\mathcal{R}'_c \mathcal{R}_c}$, tales que

$$\lambda M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}_1) = C_{\mathcal{R}'_c \mathcal{R}_c}^t M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}_2) C_{\mathcal{R}'_c \mathcal{R}_c}$$

con $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Observación 6.2.4. De la Definición 6.2.3 se desprende que dos cuádricas \mathcal{Q}_1 y \mathcal{Q}_2 son afínmente equivalentes si sus matrices respecto de una referencia cartesiana \mathcal{R}_c , $M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}_1)$ y $M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}_2)$, son congruentes mediante matrices invertibles del tipo

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline e^t & D \end{array} \right).$$

Sea la afinidad $f : A \rightarrow A$ y una cuádrica \mathcal{Q} con matriz $M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q})$ respecto de una referencia cartesiana. La afinidad f transforma \mathcal{R}_c en otra referencia cartesiana \mathcal{R}'_c y como se vió en la sección 2.1.2, $M_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c}(f) = C_{\mathcal{R}'_c\mathcal{R}_c}$, por tanto $M_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c}(f^{-1}) = C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c}$. Sean un punto $P \in \mathcal{Q}$ con coordenadas \mathbf{x} y sea $f(P)$ con coordenadas \mathbf{y} , ambas respecto de \mathcal{R}_c . Tenemos

$$0 = (1 \mid \mathbf{x}) M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = (1 \mid \mathbf{y}) M_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c}(f^{-1})^t M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) M_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c}(f^{-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{y}^t \end{pmatrix} =$$

$$(1 \mid \mathbf{y}) C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c}^t M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{y}^t \end{pmatrix}$$

por lo que $f(\mathcal{Q})$ es otra cuádrica con matriz, respecto de \mathcal{R}_c ,

$$M_{\mathcal{R}_c}(f(\mathcal{Q})) := C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c}^t M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c}.$$

Además, usando la relación anterior:

$$M_{\mathcal{R}'_c}(f(\mathcal{Q})) := C_{\mathcal{R}'_c\mathcal{R}_c}^t C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c}^t M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c} C_{\mathcal{R}'_c\mathcal{R}_c} = M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}).$$

De la relación entre cuádricas y afinidades también podemos concluir que, salvo reescalamiento, dos cuádricas son afínmente equivalente si existe una afinidad que transforma una en otra.

En la sección 6.1 vimos que hay un elemento que distingue a elipses e hipérbolas de las parábolas: las dos primeras tienen un centro.

Definición 6.2.5. Sea A un espacio afín \mathcal{Q} una cuádrica. Se dice que un punto $O \in A$ es un *centro* de \mathcal{Q} si existe una referencia cartesiana $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ tal que la ecuación $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ de \mathcal{Q} respecto de \mathcal{R}_c satisface

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(-\mathbf{x}).$$

Proposición 6.2.6. Los centros de una cuádrica \mathcal{Q} satisfacen las siguientes propiedades.

1. Si \mathcal{Q} tiene algún centro O , respecto de una referencia cartesiana $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$, su matriz es del tipo

$$M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) = \left(\begin{array}{c|c} c & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & A \end{array} \right).$$

Por tanto su ecuación respecto de \mathcal{R}_c es

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x} + c = 0.$$

2. Si O es un centro de \mathcal{Q} , respecto de cualquier otra referencia cartesiana $\mathcal{R}'_c = \{O; \mathcal{B}'\}$, su matriz también es del tipo

$$M_{\mathcal{R}'_c}(\mathcal{Q}) = \left(\begin{array}{c|c} c' & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & A' \end{array} \right)$$

y su ecuación respecto de \mathcal{R}'_c es

$$\varphi'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A' \mathbf{x} + c' = 0.$$

3. Los centros de una cuádrica, si los hay, forman un subespacio afín de A .
4. Dada cualquier referencia cartesiana \mathcal{R} , la ecuación de \mathcal{Q} respecto de \mathcal{R} toma un valor constante en todos sus centros.
5. Sea un centro $O \in A$ de una cuádrica \mathcal{Q} . Se tiene que $O \in \mathcal{Q}$ si y solo si, respecto de una referencia cartesiana $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$, la ecuación de la cuádrica verifica $\varphi(O) = c = 0$.
6. Las afinidades de A y los cambios afines de coordenadas preservan los centros de \mathcal{Q} .

Demostración.

1. Sean O un centro de \mathcal{Q} y $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ una referencia cartesiana. La ecuación de \mathcal{Q} respecto de \mathcal{R}_c verifica

$$(1 \mid \mathbf{x}) \left(\begin{array}{c|c} c & b \\ \hline \mathbf{b}^t & A \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{array} \right) = (1 \mid \mathbf{x}) M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{array} \right) = \varphi(\mathbf{x}) =$$

$$\varphi(-\mathbf{x}) = (1 \mid -\mathbf{x}) M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) \left(\begin{array}{c} 1 \\ -\mathbf{x}^t \end{array} \right) = (1 \mid \mathbf{x}) \left(\begin{array}{c|c} c & -b \\ \hline -\mathbf{b}^t & A \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{array} \right)$$

de lo cual se deduce $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

2. Sea \mathcal{R}'_c otra referencia cartesiana. Como el punto O de ambas referencias es el mismo, la matriz de cambio de referencia es de la forma

$$C_{\mathcal{R}'_c \mathcal{R}_c} \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & M \end{array} \right).$$

Sea un punto $P \in A$ con coordenadas \mathbf{x} respecto de \mathcal{R}_c y coordenadas \mathbf{y} respecto de \mathcal{R}'_c . Se tiene que

$$M_{\mathcal{R}'_c}(\mathcal{Q}) = C_{\mathcal{R}'_c \mathcal{R}_c}^t M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) C_{\mathcal{R}'_c \mathcal{R}_c} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & M^t \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} c & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & A \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & M \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} c & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & M^t A M \end{array} \right).$$

3. Sea una referencia cartesiana $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ y la matriz de \mathcal{Q} con respecto a ella

$$M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) = \left(\begin{array}{c|c} c & b \\ \hline \mathbf{b}^t & A \end{array} \right).$$

Sea un punto $P \in A$ y sea la referencia cartesiana $\mathcal{R}'_c = \{P; \mathcal{B}\}$ que cumple que

$$C_{\mathcal{R}'_c \mathcal{R}_c} \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{d}^t & I_n \end{array} \right)$$

donde \mathbf{d} son las coordenadas de P en la referencia cartesiana \mathcal{R}_c . La matriz de \mathcal{Q} respecto de la referencia cartesiana \mathcal{R}'_c está dada por

$$M_{\mathcal{R}'_c}(\mathcal{Q}) = C_{\mathcal{R}'_c \mathcal{R}_c}^t M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) C_{\mathcal{R}'_c \mathcal{R}_c} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{d} \\ \hline \mathbf{0} & I_n \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} c & b \\ \hline b^t & A \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{d}^t & I_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} c + 2\mathbf{d}b^t + \mathbf{d}A\mathbf{d}^t & b + \mathbf{d}A \\ \hline b^t + A\mathbf{d}^t & A \end{array} \right).$$

Por 1. y 2. si $P \in A$ es un centro de \mathcal{Q} , se ha de verificar que $b + A\mathbf{d}^t = \mathbf{0}$, lo que es equivalente a

$$A\mathbf{d}^t = -b^t.$$

Por tanto los centros son aquellos puntos P con coordenadas \mathbf{d} que satisfacen este sistema de ecuaciones lineales que, cuando no es incompatible, tiene como soluciones un subespacio afín.

4. Sea \mathcal{R}_c una referencia cartesiana y la matriz de \mathcal{Q} con respecto a ella

$$M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) = \left(\begin{array}{c|c} c & b \\ \hline b^t & A \end{array} \right).$$

Sean puntos $P_1, P_2 \in A$ con coordenadas $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$, respectivamente, en la referencia \mathcal{R}_c . Se tiene que

$$\varphi(\mathbf{d}_1) = (1 \mid \mathbf{d}_1) \left(\begin{array}{c|c} c & b \\ \hline b^t & A \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \mathbf{d}_1^t \end{array} \right) = c + 2\mathbf{d}_1 b^t + \mathbf{d}_1 A \mathbf{d}_1^t.$$

Además, por 3. sabemos que $A\mathbf{d}_1^t = A\mathbf{d}_2^t = -b^t$. Usando además que A es simétrica obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{d}_1) &= c + 2\mathbf{d}_1 b^t + \mathbf{d}_1 A \mathbf{d}_1^t = c + \mathbf{d}_1 b^t + \mathbf{d}_1 (b^t + A\mathbf{d}_1^t) = c + \mathbf{d}_1 b^t = \\ &= c - \mathbf{d}_1 A \mathbf{d}_2^t = c - (\mathbf{d}_1 A \mathbf{d}_2^t)^t = c - \mathbf{d}_2 A \mathbf{d}_1^t = c + \mathbf{d}_2 b^t = \\ &= c + \mathbf{d}_2 b^t + \mathbf{d}_2 (b^t + A\mathbf{d}_2^t) = c + 2\mathbf{d}_2 b^t + \mathbf{d}_2 A \mathbf{d}_2^t = \varphi(\mathbf{d}_2). \end{aligned}$$

5. Las coordenadas del centro O respecto de $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ son $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Como $M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q})$ es de la forma prescrita por 1., $\varphi(O) = \varphi(\mathbf{0}) = c$. Si O pertenece a \mathcal{Q} , estos valores son cero.
6. Sea O un centro de \mathcal{Q} y sea $f : A \rightarrow A$ una afinidad que transforma la referencia cartesiana $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ en otra referencia cartesiana $\mathcal{R}'_c = \{f(O); \mathcal{B}'\}$. La relación entre las matrices de \mathcal{Q} y su imagen $f(\mathcal{Q})$ respecto de las referencias es

$$M_{\mathcal{R}'_c}(f(\mathcal{Q})) = M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}).$$

Como O es un centro de \mathcal{Q} , estas matrices son de la forma

$$M_{\mathcal{R}'_c}(f(\mathcal{Q})) = M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) = \left(\begin{array}{c|c} c & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & A \end{array} \right)$$

por lo tanto $f(O)$ es un centro de $f(\mathcal{Q})$. Como cualquier cambio de referencia cartesiana se puede tratar como una afinidad, se sigue el resultado.

□

Pasemos a clasificar las cuádricas de un espacio afín A de dimensión n .

Clasificación de cuádricas afines con centros

Primero supongamos que \mathcal{Q} tiene algún centro O , por lo que respecto de una referencia cartesiana $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ la matriz de la cuádrica es

$$M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) = \left(\begin{array}{c|c} c & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & A \end{array} \right).$$

Como A es una matriz simétrica de tamaño $n \times n$, es diagonalizable por congruencia. Por tanto, existe una base \mathcal{B}' de \mathbb{K}^n tal que

$$C_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}^t A C_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

donde $r := \text{rk}(A)$ es el rango de la matriz A . Por tanto, respecto de la referencia cartesiana $\mathcal{R}'_c = \{O; \mathcal{B}'\}$ la ecuación de la cuádrica \mathcal{Q} es

$$\psi(\mathbf{y}) = c + \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 = 0.$$

El rango de $M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q})$ se conserva por cambios de coordenadas, por lo cual es inmediato comprobar que

$$q := \text{rk } M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) = \text{rk } M_{\mathcal{R}'_c}(\mathcal{Q}) = r + \begin{cases} 0 & \text{si } c = 0 \\ 1 & \text{si } c \neq 0 \end{cases}$$

Obsérvese que el rango de A también se conserva por congruencia de matrices.

Definición 6.2.7. Una cuádrica afín $\mathcal{Q} \subset A$ con algún centro es *no degenerada* si $q := \text{rk } M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) = n + 1$ y $r := \text{rk } A = n$, donde $n = \dim A$. En caso contrario diremos que \mathcal{Q} es *degenerada*.

- Si el cuerpo es $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, podemos realizar el cambio de coordenadas

$$z_i := \sqrt{\lambda_i} y_i, \quad i = 1, \dots, r, \quad z_j = y_j, \quad j = r + 1, \dots, n,$$

para obtener una cuádrica de ecuación

$$\psi(\mathbf{z}) = c + z_1^2 + \cdots + z_r^2 = 0, \quad c = 0, 1$$

y dos cuádricas afines complejas con algún centro \mathcal{Q} y \mathcal{Q}' son afinmente equivalentes si sus rangos son iguales, $q = q'$ y $r = r'$ (equivalentemente, $c = c'$ y $r = r'$).

- Si el cuerpo es $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, supongamos que los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ son positivos y que el resto $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_r$ son negativos, donde $s = \text{sg}(A)$ es la signatura de A . Entonces podemos realizar el cambio de coordenadas

$$z_i := \sqrt{|\lambda_i|} y_i, \quad i = 1, \dots, r, \quad z_j = y_j, \quad j = r+1, \dots, n,$$

para obtener una cuádrica de ecuación

$$\psi(\mathbf{z}) = c + z_1^2 + \dots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \dots - z_r^2 = 0, \quad c = 0, 1$$

y dos cuádricas afines reales con algún centro \mathcal{Q} y \mathcal{Q}' son afínmente equivalentes si sus rangos son iguales, $q = q'$ y $r = r'$, y sus signaturas también, $s = s'$ (equivalentemente $c = c'$, $r = r'$ y $s = s'$).

Observación 6.2.8. ■ En un espacio afín complejo de dimensión n , habrá $2n$ tipos de cuádricas con algún centro, clasificadas por el par $(c, r) \in \{0, 1\} \times \{1, 2, \dots, n\}$.

- En el caso real, véase que, si $c = 0$, los casos (r, s) y $(r, r-s)$ son equivalentes cambiando el signo de todos los términos en la ecuación. Por tanto, supondremos en la clasificación de las cuádricas afines reales con algún centro que, si $c = 0$, entonces $s \geq \frac{r}{2}$ y quedan clasificadas por la terna $(1, r, s)$ con $r = 1, \dots, n$ y $s = 1 \dots, r$, o la terna $(0, r, s)$, con $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $s \in [\frac{r}{2}, n] \cap \mathbb{Z}$.

Clasificación de cuádricas afines sin centros

Ahora supongamos que \mathcal{Q} no tiene ningún centro O , por lo que respecto de cualquier referencia cartesiana $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ la matriz de la cuádrica es

$$M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) = \left(\begin{array}{c|c} c & b \\ \hline b^t & A \end{array} \right)$$

con $b \neq 0$ y el sistema $a\mathbf{d}^t = -b^t$ es incompatible, por lo que $\text{rk } A \leq n_1$. Como A es una matriz simétrica de tamaño $n \times n$, es diagonalizable por congruencia. Por tanto, existe una base \mathcal{B}' de \mathbb{K}^n tal que

$$C_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}^t A C_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando este cambio de referencia cartesiana a la ecuación de \mathcal{Q} , y otro más para simplificarla (véase [Fernando Gamboa, sección IV.1.b.1]) obtenemos

$$\psi(\mathbf{y}) = c + \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_r y_r^2 + 2y_n = 0,$$

que tiene por matriz asociada

$$M_{\mathcal{R}_c'}(\mathcal{Q}) = \left(\begin{array}{c|ccc|cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline 0 & \lambda_1 & & & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & \lambda_r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Por tanto, como el rango de $M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q})$ se conserva por cambios de coordenadas,

$$q := \text{rk } M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) = \text{rk } M_{\mathcal{R}_c'}(\mathcal{Q}) = r + 2.$$

Definición 6.2.9. Una cuádrica afín $\mathcal{Q} \subset A$ sin centros es *no degenerada* si $q := \text{rk } M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) = n + 1$ y $r := \text{rk } A = n - 1$, donde $n = \dim A$. En caso contrario diremos que \mathcal{Q} es *degenerada*.

- Si el cuerpo es $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, podemos realizar el cambio de coordenadas

$$z_i := \sqrt{\lambda_i} y_i, \quad i = 1, \dots, r, \quad z_j = y_j, \quad j = r + 1, \dots, n,$$

para obtener una cuádrica de ecuación

$$\psi(\mathbf{z}) = z_1^2 + \cdots + z_r^2 + 2z_n = 0,$$

y dos cuádricas afines complejas sin centros \mathcal{Q} y \mathcal{Q}' son afínmente equivalentes si sus rangos son iguales, $q = q'$ (equivalentemente, $r = r'$).

- Si el cuerpo es $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, supongamos que los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ son positivos y que el resto $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_r$ son negativos, donde $s = \text{sg}(A)$ es la signatura de A . Entonces podemos realizar el cambio de coordenadas

$$z_i := \sqrt{|\lambda_i|} y_i, \quad i = 1, \dots, r, \quad z_j = y_j, \quad j = r + 1, \dots, n,$$

para obtener una cuádrica de ecuación

$$\psi(\mathbf{z}) = z_1^2 + \cdots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \cdots - z_r^2 + 2z_n = 0,$$

y dos cuádricas afines reales \mathcal{Q} y \mathcal{Q}' son afínmente equivalentes si sus rangos son iguales, $q = q'$ y sus signaturas también, $s = s'$ (equivalentemente $r = r'$ y $s = s'$). Obsérvese que $\text{sg}(M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q})) = \text{sg } A + 1$ por lo que es equivalente considerar cualquiera de las dos signaturas.

Observación 6.2.10. ■ En un espacio afín complejo de dimensión n , habrá $n - 1$ tipos de cuádricas sin centros, clasificadas por el par $r = 1, \dots, n - 1$.

- En el caso real, los casos (r, s) y $(r, r - s)$ son equivalentes transformando z_n en $-z_n$. Por tanto, supondremos en la clasificación de las cuádricas afines reales sin centros que $s \geq \frac{r}{2}$ y quedan clasificadas por el par (r, s) con $r = 1, \dots, n - 1$ y $s \in [\frac{r}{2}, n - 1] \cap \mathbb{Z}$.

Algoritmo de clasificación de cuádricas afines

Resumiendo todo lo visto anteriormente, sea \mathcal{Q} una cuádrica afín de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ con matriz

$$M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q}) = \left(\begin{array}{c|c} c & b \\ \hline b^t & A \end{array} \right)$$

respecto de una referencia cartesiana $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$. Calculamos los invariantes

- $q := \text{rk } M_{\mathcal{R}_c}(\mathcal{Q})$
- $r := \text{rk } A$
- $s := \text{sg } A$

que son independientes de la referencia cartesiana escogida.

- Si $q - r = 0$, se trata de una cuádrica afín con algún centro, $c = 0$ y $A\mathbf{d}^t = b^t$ compatible, que es una cuádrica degenerada. En el caso complejo quedan clasificadas por $r = 1, \dots, n$. En el caso real quedan clasificadas por (r, s) con $r = 1, \dots, n$ y $s \in [\frac{r}{2}, n] \cap \mathbb{Z}$.
- Si $q - r = 1$, se trata de una cuádrica afín con algún centro, $c = 1$ y $A\mathbf{d}^t = b^t$ compatible. En el caso complejo quedan clasificadas por $r = 1, \dots, n$. En el caso real quedan clasificadas por (r, s) con $r = 1, \dots, n$ y $s = 1, \dots, r$.
 - Si $r = n$ es una cuádrica con algún centro no degenerada.
 - Si $r < n$ es una cuádrica con algún centro degenerada.
- Si $q - r = 2$, se trata de una cuádrica afín sin centros con $A\mathbf{d}^t = b^t$ incompatible. En el caso complejo quedan clasificadas por $r = 1, \dots, n-1$. En el caso real quedan clasificadas por (r, s) con $r \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ y $s \in [\frac{r}{2}, n-1] \cap \mathbb{Z}$.
 - Si $r = n-1$ es una cuádrica sin centros no degenerada.
 - Si $r < n-1$ es una cuádrica sin centros degenerada.

6.2.1. Cónicas del plano afín

Llamaremos *cónica afín* a una cuádrica $\mathcal{Q} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ en el plano afín. Usaremos los resultados de la sección anterior para determinar todas las clases de equivalencia de cónicas del plano afín. En la clasificación, como hemos visto, tenemos que distinguir las cónicas que tienen algún centro de las que no tienen centros, y también el caso real del complejo.

Cónicas afines complejas

Sea $\mathcal{Q} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ una cónica afín compleja. Si \mathcal{Q} tiene algún centro C , existe una referencia cartesiana \mathcal{R}_c respecto de la cual la ecuación de \mathcal{Q} , $\psi(x_1, x_2)$, es de una de las siguientes formas, indexadas por el par (c, r)

- (1) $(c, r) = (0, 1)$, $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 = 0$, la recta doble $\{x_1 = 0\}$.
- (2) $(c, r) = (0, 2)$, $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = 0$, dos rectas $\{x_1 + ix_2 = 0\}$, $\{x_1 - ix_2 = 0\}$, que se cortan en el origen $(0, 0)$.
- (3) $(c, r) = (1, 1)$, $\psi(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 = 0$, dos rectas paralelas $\{1 + ix_1 = 0\}$, $\{1 - ix_1 = 0\}$, ya que sus direcciones son la misma recta vectorial $\{ix_1 = 0\}$.
- (4) $(c, r) = (1, 2)$, $\psi(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, la cónica afín compleja no degenerada.

Y si \mathcal{Q} no tiene centros, existe una referencia cartesiana \mathcal{R}_c respecto de la cual la ecuación de \mathcal{Q} $\psi(x_1, x_2)$ es

- (5) $r = 1$, $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2 = 0$, la parábola compleja.

Cónicas afines reales

Sea $\mathcal{Q} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ una cónica afín real. Si \mathcal{Q} tiene algún centro C , existe una referencia cartesiana \mathcal{R}_c respecto de la cual la ecuación de \mathcal{Q} , $\psi(x_1, x_2)$, es de una de las siguientes formas, indexadas por la terna (c, r, s)

- (1) $(c, r, s) = (0, 1, 1)$, $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 = 0$, la recta doble $\{x_1 = 0\}$.
- (2) $(c, r, s) = (0, 2, 2)$, $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = 0$, el punto doble $(0, 0)$.
- (3) $(c, r, s) = (0, 2, 1)$, $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 = 0$, dos rectas $\{x_1 + x_2 = 0\}$, $\{x_1 - x_2 = 0\}$, que se cortan en el origen $(0, 0)$.
- (4) $(c, r, s) = (1, 1, 1)$, $\psi(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 = 0$, el conjunto vacío.
- (5) $(c, r, s) = (1, 1, 0)$, $\psi(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 = 0$, dos rectas paralelas $\{1 + x_1 = 0\}$, $\{1 - x_1 = 0\}$, ya que sus direcciones son la misma recta vectorial $\{x_1 = 0\}$.
- (6) $(c, r, s) = (1, 2, 2)$, $\psi(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, el conjunto vacío.
- (7) $(c, r, s) = (1, 2, 1)$, $\psi(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 - x_2^2 = 0$, una hipérbola.
- (8) $(c, r, s) = (1, 2, 0)$, $\psi(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0$, una elipse.

Y si \mathcal{Q} no tiene centros, existe una referencia cartesiana \mathcal{R}_c respecto de la cual la ecuación de \mathcal{Q} $\psi(x_1, x_2)$ es

- (9) $(r, s) = (1, 1)$, $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2 = 0$, la parábola real.

6.2.2. Superficies cuádricas afines

Llamaremos *superficie cuádrlica afín* a una cuádrlica $\mathcal{Q} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ en el espacio afín tridimensional. Usaremos los resultados de la sección anterior para determinar todas las clases de equivalencia de superficies cuádrlicas afines, distinguiendo entre las que tienen algún centro de las que no tienen centros, y también el caso real del complejo.

Superficies cuádrlicas afines complejas

Sea $\mathcal{Q} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$ una superficie cuádrlica afín real. Si \mathcal{Q} tiene algún centro C , existe una referencia cartesiana \mathcal{R}_c respecto de la cual la ecuación de \mathcal{Q} , $\psi(x_1, x_2, x_3)$, es de una de las siguientes formas, indexadas por el par (c, r)

- (1) $(c, r) = (0, 1)$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 = 0$, el plano doble $\{x_1 = 0\}$.
- (2) $(c, r) = (0, 2)$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 = 0$, dos planos $\{x_1 + ix_2 = 0\}$, $\{x_1 - ix_2 = 0\}$, que se cortan en la recta $\{x_1 = x_2 = 0\}$.
- (3) $(c, r) = (0, 3)$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, el cono complejo.
- (4) $(c, r) = (1, 1)$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_1^2 = 0$, dos planos paralelos $\{1 + ix_1 = 0\}$, $\{1 - ix_1 = 0\}$, ya que sus direcciones son el mismo plano vectorial $\{ix_1 = 0\}$.
- (5) $(c, r) = (1, 2)$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, el cilindro hiperbólico complejo.
- (6) $(c, r) = (1, 3)$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, la superficie cuádrlica afín compleja no degenerada.

Y si \mathcal{Q} no tiene centros, existe una referencia cartesiana \mathcal{R}_c respecto de la cual la ecuación de \mathcal{Q} $\psi(x_1, x_2, x_3)$ es

- (7) $r = 1$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_3 = 0$, el cilindro parabólico complejo.
- (8) $r = 2$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 = 0$, el paraboloides complejo.

Superficies cuádrlicas afines reales

Sea $\mathcal{Q} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ una superficie cuádrlica afín real. Si \mathcal{Q} tiene algún centro C , existe una referencia cartesiana \mathcal{R}_c respecto de la cual la ecuación de \mathcal{Q} , $\psi(x_1, x_2, x_3)$, es de una de las siguientes formas, indexadas por la terna (c, r, s)

- (1) $(c, r, s) = (0, 1, 1)$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 = 0$, el plano doble $\{x_1 = 0\}$.
- (2) $(c, r, s) = (0, 2, 2)$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 = 0$, la recta doble $\{x_1 = x_2 = 0\}$.
- (3) $(c, r, s) = (0, 2, 1)$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 = 0$, dos planos $\{x_1 + x_2 = 0\}$, $\{x_1 - x_2 = 0\}$, que se cortan en la recta $\{x_1 = x_2 = 0\}$.
- (4) $(c, r, s) = (0, 3, 3)$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, el punto doble $(0, 0, 0)$.

- (5) $(c, r, s) = (0, 3, 2)$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, un cono real.
- (6) $(c, r, s) = (1, 1, 1)$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_1^2 = 0$, el conjunto vacío.
- (7) $(c, r, s) = (1, 1, 0)$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = 1 - x_1^2 = 0$, dos planos paralelos $\{1 + x_1 = 0\}$, $\{1 - x_1 = 0\}$, ya que sus direcciones son la misma recta vectorial $\{x_1 = 0\}$.
- (8) $(c, r, s) = (1, 2, 2)$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, el conjunto vacío.
- (9) $(c, r, s) = (1, 2, 1)$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_1^2 - x_2^2 = 0$, el cilindro hiperbólico real.
- (10) $(c, r, s) = (1, 2, 0)$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0$, el cilindro elíptico real.
- (11) $(c, r, s) = (1, 3, 3)$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, el conjunto vacío.
- (12) $(c, r, s) = (1, 3, 2)$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$, el hiperboloide de dos hojas.
- (13) $(c, r, s) = (1, 3, 1)$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$, el hiperboloide de una hoja.
- (14) $(c, r, s) = (1, 3, 0)$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$, el elipsoide

Y si \mathcal{Q} no tiene centros, existe una referencia cartesiana \mathcal{R}_c respecto de la cual la ecuación de \mathcal{Q} $\psi(x_1, x_2, x_3)$ es

- (15) $(r, s) = (1, 1)$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_3 = 0$, el cilindro parabólico real.
- (16) $(r, s) = (2, 2)$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 = 0$, el paraboloide elíptico.
- (17) $(r, s) = (2, 1)$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3 = 0$, el paraboloide hiperbólico.

6.3. Clasificación de cuádricas proyectivas

Sea $\mathbb{P}(V)$ un espacio proyectivo de dimensión n y sea \mathcal{R} una referencia proyectiva de $\mathbb{P}(V)$.

Definición 6.3.1. Una *cuádrica proyectiva* \mathcal{Q} es el conjunto de puntos de $\mathbb{P}(V)$ cuyas coordenadas homogéneas $\mathbf{x} := [x_0 : x_1 : x_2 : \dots : x_n]$ respecto de una referencia proyectiva \mathcal{R} satisfacen una ecuación homogénea de segundo grado:

$$\mathcal{Q} := \{P \in \mathbb{P}(V) : \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j, \alpha_{ij} \in \mathbb{K}\}$$

donde al menos algún α_{ij} es no nulo.

Observación 6.3.2. La ecuación $\varphi(\mathbf{x})$ está bien definida para las coordenadas homogéneas de cada punto, por ser una ecuación homogénea. En efecto, sean $\mathbf{x} := [x_0 : x_1 : x_2 : \dots : x_n]$ y $\lambda\mathbf{x} = [\lambda x_0 : \lambda x_1 : \lambda x_2 : \dots : \lambda x_n]$ coordenadas homogéneas de un mismo punto respecto de una referencia proyectiva \mathcal{R} . Entonces

$$\varphi(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\varphi(\mathbf{x}) = 0.$$

Realizando la transformación:

- $a_{ij} = a_{ji} := \frac{\alpha_{ij}}{2}$, si $i < j$
- $a_{ii} = \alpha_{ii}$, si $i = j$

definimos la matriz simétrica

$$M_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}) := A = \left(a_{ij} \right)_{1 \leq i \leq j \leq n}$$

tal que la ecuación de una cuádrica \mathcal{Q} respecto de la referencia proyectiva \mathcal{R} se puede reescribir como

$$\varphi(\mathbf{x}) := \mathbf{x}A\mathbf{x}^t = 0.$$

Observación 6.3.3. Cualquier múltiplo de la matriz $M_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q})$ define la misma cuádrica proyectiva respecto de la referencia proyectiva \mathcal{R} .

Sea \mathcal{R}' otra referencia proyectiva de $\mathbb{P}(V)$. Si \mathbf{x} son las coordenadas homogéneas de un punto $P \in \mathbb{P}(V)$ en la referencia \mathcal{R} , entonces \mathbf{y} son las coordenadas homogéneas de P en la referencia \mathcal{R}' , verificando

$$C_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}\mathbf{y}^t = \mathbf{x}^t,$$

donde $C_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}$ es la matriz de cambio de referencia (c.f. sección 4.2). Por tanto

$$0 = \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}M_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q})\mathbf{x}^t = \mathbf{y}C_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}^t M_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}) C_{\mathcal{R}'\mathcal{R}} \mathbf{y}^t = \varphi'(\mathbf{y}).$$

Entonces

$$M_{\mathcal{R}'}(\mathcal{Q}) := C_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}^t M_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}) C_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}$$

es la matriz de la misma cuádrica \mathcal{Q} respecto de la referencia proyectiva \mathcal{R}' y $\varphi'(\mathbf{y}) = 0$ es la ecuación de \mathcal{Q} en coordenadas de \mathcal{R}' .

Al igual que en el caso afín, dos cuádricas representarán el mismo lugar geométrico, en el sentido proyectivo, si sus ecuaciones son iguales tras un cambio proyectivo de coordenadas.

Definición 6.3.4. Se dice que dos cuádricas proyectivas \mathcal{Q}_1 y \mathcal{Q}_2 , de ecuaciones respecto de una referencia proyectiva \mathcal{R}

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A_1\mathbf{x}^t = 0$$

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A_2\mathbf{x}^t = 0$$

son *proyectivamente equivalentes* si existe otra referencia proyectiva \mathcal{R}' con matriz de cambio de referencia $C_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}$, tales que

$$\lambda A_1 = C_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}^t A_2 C_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}$$

con $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Observación 6.3.5. De la Definición 6.3.4 se desprende que dos cuádricas \mathcal{Q}_1 y \mathcal{Q}_2 son proyectivamente equivalentes si sus matrices respecto de una referencia proyectiva \mathcal{R} , $A_1 = M_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}_1)$ y $A_2 = M_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}_2)$, son congruentes mediante matrices invertibles salvo reescalamiento.

Sea la homografía $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ y una cuádrica proyectiva \mathcal{Q} con matriz $M_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q})$ respecto de una referencia proyectiva \mathcal{R} . La homografía f transforma \mathcal{R} en otra referencia proyectiva \mathcal{R}' y, como se vió en la sección ??, $M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(f) = C_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}$, por tanto $M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(f^{-1}) = C_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}$. Sean un punto $P \in \mathcal{Q}$ con coordenadas homogéneas \mathbf{x} y sea $f(P)$ con coordenadas homogéneas \mathbf{y} , ambas respecto de \mathcal{R} . Tenemos

$$0 = \mathbf{x}M_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q})\mathbf{x}^t = \mathbf{y}M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(f^{-1})^t M_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}) M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(f^{-1})\mathbf{y}^t = \mathbf{y}C_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}^t M_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}) C_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}\mathbf{y}^t$$

por lo que $f(\mathcal{Q})$ es otra cuádrica proyectiva con matriz, respecto de \mathcal{R} ,

$$M_{\mathcal{R}}(f(\mathcal{Q})) := C_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}^t M_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}) C_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}.$$

Además, usando la relación anterior:

$$M_{\mathcal{R}'}(f(\mathcal{Q})) := C_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}^t C_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}^t M_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}) C_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} C_{\mathcal{R}'\mathcal{R}} = M_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}).$$

De la relación entre cuádricas proyectivas y homografías también podemos concluir que, salvo reescalamiento, dos cuádricas son proyectivamente equivalente si existe una homografía que transforma una en otra.

Los sistemas de ecuaciones homogéneos son siempre compatibles y, por esa razón, no habrá distinción de existencia de centros en las cuádricas proyectivas. Por tanto, pasemos a clasificar las cuádricas proyectivas de un espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ de dimensión n , que será más sencilla que en el caso afín.

Sea $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}(V)$ una cuádrica proyectiva con ecuación, respecto de una referencia proyectiva \mathcal{R} ,

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x} = 0.$$

Como A es una matriz simétrica de tamaño $(n+1) \times (n+1)$, es diagonalizable por congruencia. Por tanto, existe una base \mathcal{B}' de \mathbb{K}^{n+1} tal que

$$C_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}^t A C_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

donde $r+1 := \text{rk}(A)$ es el rango de la matriz A . Por tanto, respecto de la referencia proyectiva \mathcal{R}' asociada a la base \mathcal{B}' , la ecuación de la cuádrica \mathcal{Q} es

$$\psi(\mathbf{y}) = \lambda_0 y_1^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 = 0.$$

El rango de A también se conserva por congruencia de matrices.

Definición 6.3.6. Una cuádrica proyectiva $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}(V)$ es *no degenerada* si $r+1 := \text{rk } A = n+1$, donde $n = \dim \mathbb{P}(V)$. En caso contrario diremos que \mathcal{Q} es *degenerada*.

- Si el cuerpo es $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, podemos realizar el cambio de coordenadas

$$z_i := \sqrt{\lambda_i} y_i, \quad i = 1, \dots, r, \quad z_j = y_j, \quad j = r+1, \dots, n,$$

para obtener una cuádrica de ecuación

$$\psi(\mathbf{z}) = z_0^2 + \cdots + z_r^2 = 0,$$

y dos cuádricas proyectivas complejas \mathcal{Q} y \mathcal{Q}' son proyectivamente equivalentes si sus rangos son, $r = r'$.

- Si el cuerpo es $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, supongamos que los valores propios $\lambda_0, \dots, \lambda_s$ son positivos y que el resto $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_r$ son negativos, donde $s = \text{sg}(A) - 1$ y $\text{sg } A$ es la signatura de A . Entonces podemos realizar el cambio de coordenadas

$$z_i := \sqrt{|\lambda_i|} y_i, \quad i = 1, \dots, r, \quad z_j = y_j, \quad j = r+1, \dots, n,$$

para obtener una cuádrica de ecuación

$$\psi(\mathbf{z}) = z_0^2 + \cdots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \cdots - z_r^2 = 0,$$

y dos cuádricas proyectivas reales \mathcal{Q} y \mathcal{Q}' son proyectivamente equivalentes si sus rangos son iguales $r = r'$, y sus signaturas también, $s = s'$.

Observación 6.3.7.

- En un espacio proyectivo complejo de dimensión n , habrá $n+1$ tipos de cuádricas, clasificadas por $r = 0, 1, \dots, n$.
- En el caso real, los casos $(r+1, s+1)$ y $(r+1, r-s)$ son equivalentes cambiando el signo de todos los términos en la ecuación. Por tanto, supondremos en la clasificación de las cuádricas proyectivas reales que $s \geq \frac{r-1}{2}$ y quedan clasificadas por el par (r, s) con $r = 0, 1, \dots, n$ y $s \in [\frac{r-1}{2}, n] \cap \mathbb{Z}$.

Algoritmo de clasificación de cuádricas proyectivas

Resumiendo todo lo visto anteriormente, sea $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}(V)$ una cuádrica proyectiva con ecuación, respecto de una referencia proyectiva \mathcal{R} ,

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x} = 0.$$

Calculamos los invariantes

- $r := \text{rk } A - 1$
- $s := \text{sg } A - 1$

que son independientes de la referencia proyectiva escogida. Atendiendo a si el rango es máximo:

- Si $r = n$ es una cuádrica proyectiva no degenerada.
- Si $r < n$ es una cuádrica proyectiva degenerada.

Dependiendo del cuerpo \mathbb{K} :

- En el caso complejo quedan clasificadas por $r = 0, \dots, n$.
- En el caso real quedan clasificadas por (r, s) con $r = 0, \dots, n$ y $s \in [\frac{r-1}{2}, n] \cap \mathbb{Z}$.

6.3.1. Cónicas del plano proyectivo

Llamaremos *cónica proyectiva* a una cuádrica $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$ en el plano proyectivo. Usaremos los resultados de la sección anterior para determinar todas las clases de equivalencia de cónicas del plano proyectivo. En la clasificación distinguiremos el caso real del complejo.

Cónicas proyectivas complejas

Sea $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ una cónica proyectiva compleja. Existe una referencia proyectiva \mathcal{R} respecto de la cual la ecuación de \mathcal{Q} , $\psi(x_0, x_1, x_2)$, es de una de las siguientes formas, indexadas por el r

- (1) $r = 0$, $\psi(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 = 0$, la recta doble $\{x_0 = 0\}$.
- (2) $r = 1$, $\psi(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 + x_1^2 = 0$, dos rectas $\{x_1 + ix_2 = 0\}$, $\{x_1 - ix_2 = 0\}$, que se cortan en el punto $[0 : 0 : 1]$.
- (3) $r = 2$, $\psi(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 + x_1^2 + 2x_2 = 0$, la cónica proyectiva compleja no degenerada.

Cónicas proyectivas reales

Sea $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ una cónica proyectiva real. Existe una referencia proyectiva \mathcal{R} respecto de la cual la ecuación de \mathcal{Q} , $\psi(x_0, x_1, x_2)$, es de una de las siguientes formas, indexadas por el par (r, s) .

- (1) $(r, s) = (0, 0)$, $\psi(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 = 0$, la recta doble $\{x_0 = 0\}$.
- (2) $(r, s) = (1, 1)$, $\psi(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = 0$, el punto doble $[0 : 0 : 1]$.
- (3) $(r, s) = (1, 0)$, $\psi(x_1, x_2) = x_0^2 - x_1^2 = 0$, dos rectas $\{x_1 + x_2 = 0\}$, $\{x_1 - x_2 = 0\}$, que se cortan en el punto $[0 : 0 : 1]$.
- (4) $(r, s) = (2, 2)$, $\psi(x_1, x_2) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, el conjunto vacío.
- (5) $(r, s) = (2, 1)$, $\psi(x_1, x_2) = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$, la cónica proyectiva real no degenerada.

Observación 6.3.8. Se puede demostrar que, tanto en el caso real como complejo, la cónica proyectiva real no degenerada es homeomorfa a la recta proyectiva.

Sea el cambio de coordenadas

$$z_0 := x_2 - x_0, \quad z_1 := x_1, \quad z_2 := x_0 + x_2,$$

que transforma la ecuación $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ en $z_1^2 - z_0 z_2 = 0$. La *inmersión de Veronese*,

$$f : \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2 \\ [t_0 : t_1] \longmapsto [t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2]$$

es una biyección entre $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ y la cuádrica de ecuación $z_1^2 - z_0 z_2 = 0$ que se puede probar que es un homeomorfismo.

6.3.2. Superficies cuádricas proyectivas

Llamaremos *superficie cuádrica proyectiva* a una cuádrica $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$ en el espacio proyectivo tridimensional. Usaremos los resultados de la sección anterior para determinar todas las clases de equivalencia de superficies cuádricas proyectivas, distinguiendo el caso real del complejo.

Superficies cuádricas proyectivas complejas

Sea $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ una superficie cuádrica proyectiva real. Existe una referencia cartesiana \mathcal{R} respecto de la cual la ecuación de \mathcal{Q} , $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$, es de una de las siguientes formas, indexadas por r

- (1) $r = 0$, $\psi(x_0 + x_1, x_2, x_3) = x_0^2 = 0$, el plano proyectivo doble $\{x_0 = 0\}$.
- (2) $r = 1$, $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0 + x_1^2 = 0$, dos planos proyectivos $\{x_0 + ix_1 = 0\}$, $\{x_0 - ix_1 = 0\}$, que se cortan en la recta proyectiva $\{x_0 = x_1 = 0\}$.

- (3) $r = 2$, $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, el cono proyectivo complejo.
- (4) $r = 3$, $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, la superficie cuádrica proyectiva compleja no degenerada.

Superficies cuádricas proyectivas reales

Sea $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ una superficie cuádrica proeyctiva real. Existe una referencia cartesiana \mathcal{R}_c respecto de la cual la ecuación de \mathcal{Q} , $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$, es de una de las siguientes formas, indexadas por el par (r, s)

- (1) $(r, s) = (0, 0)$, $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 = 0$, el plano doble proyectivo $\{x_0 = 0\}$.
- (2) $(r, s) = (1, 1)$, $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 + x_1^2 = 0$, la recta doble proyectiva $\{x_1 = x_2 = 0\}$.
- (3) $(r, s) = (1, 0)$, $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 - x_1^2 = 0$, dos planos proyectivos $\{x_1 + x_2 = 0\}$, $\{x_1 - x_2 = 0\}$, que se cortan en la recta proyectiva $\{x_0 = x_1 = 0\}$.
- (4) $(r, s) = (2, 2)$, $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, el punto proyectivo doble $[0 : 0 : 0 : 1]$.
- (5) $(r, s) = (2, 1)$, $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$, el cono proyectivo real.
- (6) $(r, s) = (3, 3)$, $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, el conjunto vacío.
- (7) $(r, s) = (3, 2)$, $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, la superficie cuádrica proyectiva real no reglada.
- (8) $(r, s) = (3, 1)$, $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$, la superficie cuádrica proyectiva real reglada.

Observación 6.3.9. Los casos (7) y (8) corresponden a superficies cuádricas proyectivas reales no vacías y no degeneradas. Se distinguen porque el caso (8) es especial, ya que es una superficie *reglada* que está barrida por rectas.

Sea el cambio de coordenadas

$$z_0 := x_0 - x_3, \quad z_1 := x_2 - x_1, \quad z_2 := x_2 + x_1, \quad z_3 := x_0 + x_3,$$

que transforma la ecuación $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ en $z_0 z_3 - z_1 z_2 = 0$. La *inmersión de Segre*,

$$f : \quad \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3 \\ ([s_0 : s_1], [t_0 : t_1]) \quad \longmapsto \quad [s_0 t_0 : s_0 t_1 : s_1 t_0 : s_1 t_1]$$

es una biyección entre $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ y la cuádrica de ecuación $z_0 z_3 - z_1 z_2 = 0$ que se puede probar que es un homeomorfismo. Mediante esta inmersión, podemos identificar las dos familias de rectas

$$\mathcal{L}_1 := \{f([a_0 : a_1] \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1) : [a_0 : a_1] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1\},$$

$$\mathcal{L}_2 := \{f(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \times [b_0 : b_1]) : [b_0 : b_1] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1\}$$

que barren toda la cuádrlica. La intersección de una recta de cada familia,

$$f([a_0 : a_1] \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1) \cap f(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \times [b_0 : b_1]) = f([a_0 : a_1], [b_0 : b_1]) = [a_0 b_0 : a_0 b_1 : a_1 b_0 : a_1 b_1],$$

es un punto de la cuádrlica.

6.4. Completación proyectiva de cónicas y cuádrlicas afines

Recordemos la completación proyectiva de un espacio afín vista en la sección 4.4

Sea A un espacio afín de dimensión n y sea $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ una referencia cartesiana de A . Sea \bar{A} su completación proyectiva y \mathcal{R} la completación proyectiva de \mathcal{R}_c . En el espacio proyectivo $\bar{A} = A \sqcup A_\infty$, el espacio afín A está identificado con $\{x_0 \neq 0\} = \{x_0 = 1\}$ y A_∞ es el hiperplano de puntos del infinito, identificado con la dirección de A que es V .

Sea $\mathcal{Q} \subset A$ una cuádrlica afín con ecuación respecto de \mathcal{R}_c ,

$$\varphi(\mathbf{x}) := (1 \mid \mathbf{x}) \left(\begin{array}{c|c} c & b \\ \hline b^t & A \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \mathbf{x}^t \end{array} \right) = 0.$$

Al igual que hemos completado subespacios afines definidos por ecuaciones lineales, podemos hacer lo propio con una cuádrlica de ecuación cuadrática. Definimos la completación proyectiva de \mathcal{Q} , denotada por $\bar{\mathcal{Q}}$, como la cuádrlica proyectiva de ecuación, respecto de \mathcal{R} ,

$$\bar{\varphi}([x_0 : \mathbf{x}]) := (x_0 \mid \mathbf{x}) \left(\begin{array}{c|c} c & b \\ \hline b^t & A \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_0 \\ \mathbf{x}^t \end{array} \right) = 0.$$

Como las coordenadas de un punto $P \in A$ respecto de \mathcal{R}_c , $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, se transforman en la completación en las coordenadas homogéneas $[1 : x_1 : \dots : x_n]$ respecto de \mathcal{R} , si restringimos la ecuación de $\bar{\mathcal{Q}}$ a $A = \{x_0 = 1\}$, obtenemos precisamente la ecuación de \mathcal{Q} ,

$$\bar{\varphi}([1 : \mathbf{x}]) = \varphi(\mathbf{x}) = 0.$$

Obsérvese que el proceso de completación de la cuádrlica afín \mathcal{Q} a la proyectiva $\bar{\mathcal{Q}}$ consiste en homogeneizar su ecuación

$$\varphi(\mathbf{x}) \longmapsto \bar{\varphi}([x_0 : \mathbf{x}]) := x_0^2 \varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{x_0}\right) = 0$$

mientras que pasar de la cuádrlica proyectiva $\bar{\mathcal{Q}}$ a la afín \mathcal{Q} consiste en deshomonogeneizar su ecuación

$$\bar{\varphi}([x_0 : \mathbf{x}]) = 0 \longmapsto \varphi(\mathbf{x}) := \bar{\varphi}([1 : \mathbf{x}]) = 0.$$

Al igual que los puntos del infinito de un subespacio proyectivo completación de un subespacio afín son la intersección con el hiperplano del infinito, podemos definir la *cuádrica de infinito* de una completación $\overline{\mathcal{Q}}$ como

$$\mathcal{Q}_\infty := \overline{\mathcal{Q}} \cap A_\infty,$$

por tanto

$$\overline{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}_\infty.$$

La cuádrica de infinito viene descrita por la ecuación:

$$\mathcal{Q}_\infty := \overline{\mathcal{Q}} \cap A_\infty = \overline{\varphi}([0 : \mathbf{x}]) = (0 \mid \mathbf{x}) \left(\begin{array}{c|c} c & b \\ \hline b^t & A \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix} = \mathbf{x} A \mathbf{x}^t = 0$$

Que es una cuádrica proyectiva en $\mathbb{P}(V) = A_\infty$, donde V es la dirección del espacio afín A , de matriz asociada A .

El siguiente teorema relaciona las equivalencias de cuádricas afines y proyectivas, por medio de sus completaciones y las cuádricas de infinito.

Teorema 6.4.1 (Witt). *Dos cuádricas afines $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \subset A$ son afínmente equivalentes si y solo si tanto sus completaciones proyectivas $\overline{\mathcal{Q}}_1, \overline{\mathcal{Q}}_2 \subset \overline{A}$ como sus cuádricas de infinito $\mathcal{Q}_{\infty,1}, \mathcal{Q}_{\infty,2} \subset A_\infty = \mathbb{P}(V)$ son proyectivamente equivalentes.*

Demostración. Respecto de una referencia afín \mathcal{R}_c con completación proyectiva \mathcal{R} , las matrices de \mathcal{Q}_1 y \mathcal{Q}_2 son

$$M(\mathcal{Q}_1) = \left(\begin{array}{c|c} c_1 & b_1 \\ \hline b_1^t & A_1 \end{array} \right), \quad M(\mathcal{Q}_2) = \left(\begin{array}{c|c} c_2 & b_2 \\ \hline b_2^t & A_2 \end{array} \right)$$

y definimos los invariantes:

$$q_1 := \text{rk } M(\mathcal{Q}_1), \quad q_2 := \text{rk } M(\mathcal{Q}_2),$$

$$r_1 := \text{rk } A_1, \quad r_2 := \text{rk } A_2,$$

y en el caso real

$$s_1 := \text{sg } A_1, \quad s_2 := \text{sg } A_2.$$

Por las secciones 6.2 y 6.3, en el caso complejo, \mathcal{Q}_1 y \mathcal{Q}_2 son afínmente equivalentes si y solo si

$$(q_1, r_1) = (q_2, r_2).$$

Entonces $q_1 = q_2$ equivale a que sus completaciones proyectivas $\overline{\mathcal{Q}}_1$ y $\overline{\mathcal{Q}}_2$ sean proyectivamente equivalentes y $r_1 = r_2$ equivale a que sus cuádricas de infinito $\mathcal{Q}_{\infty,1}$ y $\mathcal{Q}_{\infty,2}$ sean proyectivamente equivalentes.

En el caso real, \mathcal{Q}_1 y \mathcal{Q}_2 son afínmente equivalentes si y solo si

$$(q_1, r_1, s_1) = (q_2, r_2, s_2).$$

Como $\text{sg } M(\mathcal{Q}_i) = \text{sg } A_i + 1$, $i = 1, 2$, la igualdad $(q_1, s_1 + 1) = (q_2, s_2 + 1)$ equivale a que sus completaciones proyectivas $\overline{\mathcal{Q}}_1$ y $\overline{\mathcal{Q}}_2$ sean proyectivamente equivalentes y la igualdad $(r_1, s_1) = (r_2, s_2)$ equivale a que sus cuádricas de infinito $\mathcal{Q}_{\infty,1}$ y $\mathcal{Q}_{\infty,2}$ sean proyectivamente equivalentes. \square

Observación 6.4.2. Véase que la completación proyectiva de una cuádrica afín degenerada es una cuádrica proyectiva degenerada y viceversa.

Del Teorema de Witt se desprende que dos cuádricas proyectivas equivalentes, son las completaciones de cuádricas afines equivalentes si y solo si sus cuádricas de infinito también lo son. Como hemos visto que existen más tipos en la clasificación afín que proyectiva, ocurrirá que al completar diferentes tipos de cuádricas afines obtenemos la misma cuádrica proyectiva, pero se diferenciarán en su cuádrica de infinito. Por tanto recuperaremos la clasificación de cónicas y superficies cuádricas afines y la asociaremos con la clasificación proyectiva, viendo cuál es la correspondiente cuádrica de infinito en la completación.

6.4.1. Completación proyectiva de cónicas del plano afín

Sea $\mathcal{Q} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ una cónica afín y $\overline{\mathcal{Q}}$ su completación proyectiva en la completación proyectiva estándar $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$. Su cónica de infinito es

$$\mathcal{Q}_{\infty} = \overline{\mathcal{Q}} \cap \{x_0 = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$$

por tanto una cuádrica de la recta proyectiva. Las cuádricas de la recta proyectiva son las raíces de la ecuación homogénea de segundo grado:

$$\alpha x_0^2 + \beta x_0 x_1 + \gamma x_1^2 = 0$$

que, en función del discriminante $\Delta := \beta^2 - 4\alpha\gamma$ son, en el caso complejo

- dos puntos distintos si $\Delta \neq 0$
- un punto doble si $\Delta = 0$

y en el caso real

- dos puntos distintos si $\Delta > 0$
- un punto doble si $\Delta = 0$
- el conjunto vacío si $\Delta < 0$.

Si la ecuación de \mathcal{Q} respecto de una referencia cartesiana \mathcal{R}_c de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ es $\psi(x_1, x_2) = 0$, la ecuación de su completación afín será

$$\overline{\psi}([x_0 : x_1 : x_2]) = x_0^2 \psi\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right).$$

La ecuación de su cónica de infinito será

$$\psi_{\infty}([x_1 : x_2]) = \overline{\psi}([0 : x_1 : x_2]).$$

Completación proyectiva de cónicas afines complejas

Sea $\mathcal{Q} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ una cónica afín compleja. Sus completaciones proyectivas vienen dadas por:

- (1) $(c, r) = (0, 1)$, $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 = 0$, la recta doble $\{x_1 = 0\}$. Su completación proyectiva tiene por ecuación $\bar{\psi}([x_0 : x_1 : x_2]) = x_1^2 = 0$, que es la recta doble proyectiva $\{x_1 = 0\}$. Su cónica de infinito tiene por ecuación $\psi_{\infty}([x_1 : x_2]) = x_1^2 = 0$, que es el punto doble $[0 : 1]$.
- (2) $(c, r) = (0, 2)$, $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = 0$, dos rectas $\{x_1 + ix_2 = 0\}$, $\{x_1 - ix_2 = 0\}$, que se cortan en el origen $(0, 0)$. Su completación proyectiva tiene por ecuación $\bar{\psi}([x_0 : x_1 : x_2]) = x_1^2 = 0$, que son dos rectas proyectivas $\{x_1 + ix_2 = 0\}$, $\{x_1 - ix_2 = 0\}$, que se cortan en $[1 : 0 : 0]$. Su cónica de infinito tiene por ecuación $\psi_{\infty}([x_1 : x_2]) = x_1^2 + x_2^2 = 0$, que son los puntos $[1 : i]$ y $[1 : -i]$.
- (3) $(c, r) = (1, 1)$, $\psi(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 = 0$, dos rectas paralelas $\{1 + ix_1 = 0\}$, $\{1 - ix_1 = 0\}$, ya que sus direcciones son la misma recta vectorial $\{ix_1 = 0\}$. Su completación proyectiva tiene por ecuación $\bar{\psi}([x_0 : x_1 : x_2]) = x_0^2 + x_1^2 = 0$, que son dos rectas proyectivas $\{x_0 + ix_1 = 0\}$, $\{x_0 - ix_1 = 0\}$, que se cortan en $[0 : 0 : 1]$. Su cónica de infinito tiene por ecuación $\psi_{\infty}([x_1 : x_2]) = x_1^2 = 0$, que es el punto doble $[0 : 1]$.
- (4) $(c, r) = (1, 2)$, $\psi(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, la cónica afín compleja no degenerada. Su completación proyectiva tiene por ecuación $\bar{\psi}([x_0 : x_1 : x_2]) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, que es la cónica proyectiva compleja no degenerada. Su cónica de infinito tiene por ecuación $\psi_{\infty}([x_1 : x_2]) = x_1^2 + x_2^2 = 0$, que son los puntos $[1 : i]$ y $[1 : -i]$.
- (5) $r = 1$, $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2 = 0$, la parábola compleja. Su completación proyectiva tiene por ecuación $\bar{\psi}([x_0 : x_1 : x_2]) = x_1^2 + 2x_0x_2 = 0$, es la cónica proyectiva compleja no degenerada, ya que se puede convertir en la ecuación $y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = 0$ mediante el cambio de coordenadas $x_0 := y_0 + iy_2$, $x_1 := y_1$, $2x_2 := y_0 - iy_2$. Su cónica de infinito tiene por ecuación $\psi_{\infty}([x_1 : x_2]) = x_1^2 = 0$, que es el punto doble $[0 : 1]$.

Cónicas afines reales

Sea $\mathcal{Q} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ una cónica afín real. Sus completaciones proyectivas vienen dadas por:

- (1) $(c, r, s) = (0, 1, 1)$, $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 = 0$, la recta doble $\{x_1 = 0\}$. Su completación proyectiva tiene por ecuación $\bar{\psi}([x_0 : x_1 : x_2]) = x_1^2 = 0$, que es la recta proyectiva doble $\{x_1 = 0\}$. Su cónica de infinito tiene por ecuación $\psi_{\infty}([x_1 : x_2]) = x_1^2 = 0$, que es el punto doble $[0 : 1]$.
- (2) $(c, r, s) = (0, 2, 2)$, $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = 0$, el punto doble $(0, 0)$. Su completación proyectiva tiene por ecuación $\bar{\psi}([x_0 : x_1 : x_2]) = x_1^2 + x_2^2 = 0$, y es el punto doble $[1 : 0 : 0]$. Su cónica de infinito tiene por ecuación $\psi_{\infty}([x_1 : x_2]) = x_1^2 + x_2^2 = 0$, que es el conjunto vacío.

- (3) $(c, r, s) = (0, 2, 1)$, $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 = 0$, dos rectas $\{x_1 + x_2 = 0\}$, $\{x_1 - x_2 = 0\}$, que se cortan en el origen $(0, 0)$. Su completación proyectiva tiene por ecuación $\bar{\psi}([x_0 : x_1 : x_2]) = x_1^2 - x_2^2 = 0$, son las dos rectas proyectivas $\{x_1 + x_2 = 0\}$ y $\{x_1 - x_2 = 0\}$ que se cortan en $[1 : 0 : 0]$. Su cónica de infinito tiene por ecuación $\psi_\infty([x_1 : x_2]) = x_1^2 - x_2^2 = 0$, que son los puntos $[1 : 1]$ y $[1 : -1]$.
- (4) $(c, r, s) = (1, 1, 1)$, $\psi(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 = 0$, el conjunto vacío. Su completación proyectiva tiene por ecuación $\bar{\psi}([x_0 : x_1 : x_2]) = x_0^2 + x_1^2 = 0$, que es el punto doble del infinito $[0 : 0 : 1]$. Su cónica de infinito tiene por ecuación $\psi_\infty([x_1 : x_2]) = x_1^2 = 0$, que es el punto doble $[0 : 1]$.
- (5) $(c, r, s) = (1, 1, 0)$, $\psi(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 = 0$, dos rectas paralelas $\{1 + x_1 = 0\}$, $\{1 - x_1 = 0\}$, ya que sus direcciones son la misma recta vectorial $\{x_1 = 0\}$. Su completación proyectiva tiene por ecuación $\bar{\psi}([x_0 : x_1 : x_2]) = x_0^2 - x_1^2 = 0$, que son las dos rectas proyectivas $\{x_0 + x_1 = 0\}$ $\{x_0 - x_1 = 0\}$ que se cortan en el punto del infinito $[0 : 0 : 1]$. Su cónica de infinito tiene por ecuación $\psi_\infty([x_1 : x_2]) = x_1^2 = 0$, que es el punto doble $[0 : 1]$.
- (6) $(c, r, s) = (1, 2, 2)$, $\psi(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, el conjunto vacío. Su completación proyectiva tiene por ecuación $\bar{\psi}([x_0 : x_1 : x_2]) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, que es el conjunto vacío. Su cónica de infinito tiene por ecuación $\psi_\infty([x_1 : x_2]) = x_1^2 + x_2^2 = 0$, que es el conjunto vacío.
- (7) $(c, r, s) = (1, 2, 1)$, $\psi(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 - x_2^2 = 0$, una hipérbola. Su completación proyectiva tiene por ecuación $\bar{\psi}([x_0 : x_1 : x_2]) = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$, que es la cónica proyectiva real no degenerada. Su cónica de infinito tiene por ecuación $\psi_\infty([x_1 : x_2]) = x_1^2 - x_2^2 = 0$, que son los puntos $[1 : 1]$ y $[1 : -1]$.
- (8) $(c, r, s) = (1, 2, 0)$, $\psi(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0$, una elipse. Su completación proyectiva tiene por ecuación $\bar{\psi}([x_0 : x_1 : x_2]) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$, que es cónica proyectiva real no degenerada. Su cónica de infinito tiene por ecuación $\psi_\infty([x_1 : x_2]) = x_1^2 + x_2^2 = 0$, que es el conjunto vacío.
- (9) $(r, s) = (1, 1)$, $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2 = 0$, la parábola real. Su completación proyectiva tiene por ecuación $\bar{\psi}([x_0 : x_1 : x_2]) = x_1^2 + 2x_0x_2 = 0$, es la cónica proyectiva real no degenerada, ya que se puede convertir en la ecuación $y_0^2 + y_1^2 - y_2^2 = 0$ mediante el cambio de coordenadas $x_0 := y_0 - y_2$, $x_1 := y_1$, $2x_2 := y_0 + y_2$. Su cónica de infinito tiene por ecuación $\psi_\infty([x_1 : x_2]) = x_1^2 = 0$, que es el punto doble $[0 : 1]$.

Observación 6.4.3. Observa cómo, al completar proyectivamente las tres cónicas reales no degeneradas, hipérbola, elipse y parábola, obtenemos la misma cónica proyectiva real no degenerada. Sin embargo, se distinguen por sus cónicas de infinito: la hipérbola tiene dos puntos de infinito, que se corresponden con los puntos de infinito de sus dos ramas; la elipse no tiene puntos de infinito, ya que toda la curva está contenida en la parte afín

en la completación; la parábola tiene un punto doble de infinito, que corresponde a sus dos ramas coincidiendo en el infinito.

6.4.2. Completación proyectiva de superficies cuádricas afines

6.5. Problemas

Problema 6.5.1. Demuestra que dos cuádricas \mathcal{Q}_1 y \mathcal{Q}_2 son afínmente equivalentes si y solo si existe una afinidad f (transformando \mathcal{R}_c en \mathcal{R}'_c en la Definición 6.2.3) tal que $f(\mathcal{Q}_1) = \mathcal{Q}_2$.

Problema 6.5.2. En la clasificación de las cuádricas afines sin centros, usa que el rango y la signatura se conservan por congruencia de matrices y la matriz reducida

$$M_{\mathcal{R}'_c}(\mathcal{Q}) = \left(\begin{array}{c|ccc|cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline 0 & \lambda_1 & & & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & \lambda_r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

para probar que $\text{sg } M_{\mathcal{R}'_c}(\mathcal{Q}) = \text{sg } A + 1$.