Lógica de Primer Orden: Semántica (2020)

(Con soluciones)

Ejercicio 1.

Definir una interpretación sobre el dominio {0,1} que sirva para demostrar que no se cumple la relación de consecuencia lógica:

$$\{ \forall y\, (A(y) \vee C(y)) , \exists x\, B(x) \} \not\models \forall x\, (B(x) \vee C(x))$$

Ejercicio 2.

Encontrar, si existen, un modelo y un contramodelo para cada una de las siguientes fórmulas. Hay que escribir las interpretaciones por completo.

(1) $\forall x(p(x,a) \rightarrow q(f(x),x))$
(2) $\exists z\, r(z) \vee \forall x \forall w(s(x,w) \leftrightarrow s(b,x))$

Ejercicio 3.

Defina un lenguaje de Primer Orden en el que formalizar el siguiente argumento. A continuación, demuestre mediante la construcción detallada de un contra-modelo en el dominio {Pedro, María}, que no hay relación de consecuencia lógica.

> Hay alguien que, o bien le gusta nadar, o bien le gusta correr. A Pedro no le gusta nadar. Luego a Pedro le gusta correr.

Ejercicio 4.

Probar si:

$$\{ \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \} \models \exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x))$$

Ejercicio 5.

Construir un modelo y un contramodelo de la siguiente fórmula sobre el dominio {1,2,3}:

$$\exists x \neg Q(f(x)) \wedge \neg \exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))$$

Solución

Definimos un interpretación I(D, i()) en el dominio {1,2,3}

Tendremos tres constantes en el lenguaje de Primer Orden que utlizaremos L={a,b,c}

Definimos la función de interpretación i()

Función de interpretación para las constantes:

i(a)=1, i(b)=2, i(c)=3

Función de interpretación para las funciones:

i(f(a))=a, i(f(b))=b, i(f(c))=c

Función de interpretación para los predicados:

i(Q(a)) = , i(Q(b)) = , i(Q(c))=

i(P(a,a)) = , i(P(a,b)) = , i(P(a,c)) =

i(P(b,a)) = , i(P(b,b)) = , i(P(b,c)) =

i(P(c,a)) = , i(P(c,b)) = , i(P(c,c)) =

Buscamos un modelo, es decir, una interpretación que haga verdadera la fórmula:

$i(\exists x \neg Q(f(x))) \wedge \neg \exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))) = V$

sii

$i(\exists x \neg Q(f(x))) = V$ y $i(\neg \exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))) = V$

$i(\exists x \neg Q(f(x))) = V$ sii

z=a $i(\neg Q(f(a))) = V$ sii $i(Q(f(a))) = F$

o bien

z=b $i(\neg Q(f(b))) = V$ sii $i(Q(f(b))) = F$

o bien

z=c $i(\neg Q(f(c))) = V$ sii $i(Q(f(c))) = F$

$i(\neg \exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))) = V$ sii $\exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z))) = F$

z=a $i(\forall y P(a,y) \rightarrow Q(f(a))) = F$ sii

$i(\forall y P(a,y)) = V$ y $i(Q(f(a))) = F$

$i(P(a,a))=V$

y $i(P(a,b))=V$

y $i(P(a,c))=V$

y

z=b $i(\forall y P(b,y) \rightarrow Q(f(b))) = F$ sii

$i(\forall y P(b,y)) = V$ y $i(Q(f(b)) = F$

$i(P(b,a))=V$

y $i(P(b,b))=V$

y $i(P(b,c))=V$

y

z=c i(∀yP(b,y) → Q(f(b))) = F sii

i(∀yP(c,y)) = V y i(Q(f(c))) = F

i(P(c,a))=V

y i(P(c,b))=V

y i(P(c,c))=V

Modelo: i(Q(a)) = F, i(Q(b)) = F, i(Q(c))= F, i(P(a,a)) = V, i(P(a,b)) = V, i(P(a,c)) = V, i(P(b,a)) = V, i(P(b,b)) = V, i(P(b,c)) = V, i(P(c,a)) = V, i(P(c,b)) = V, i(P(c,c)) = V

Ahora buscamos un contraModelo, es decir, una interpretación que haga falsa la fórmula:

i(∃x¬Q(f(x)) ∧ ¬∃z(∀yP(z,y) → Q(f(z)))) = F

sii

i(∃x¬Q(f(x))) = F o bien i(¬∃z(∀yP(z,y) → Q(f(z))))) = F

i(∃z¬Q(f(x))) = F sii

z=a i(¬Q(f(a))) = F sii i(Q(f(a))) = V

y

z=b i(¬Q(f(b))) = F sii i(Q(f(v))) = V

y

z=c i(¬Q(f(c))) = F sii i(Q(f(c))) = V

Contramodelo: i(Q(f(a))) = V, i(Q(f(b))) = V, i(Q(f(c))) = V

Ejercicio 6.

Sea A la fórmula ∃x P(x) → ∀x Q(x). Probar que no es lógicamente válida. ¿Es A insatisfacible?

Ejercicio 7.

Encontrar, si existen, un modelo y un contramodelo de esta fórmula. Hay que especificar tanto el dominio como la interpretación de todos los símbolos relevantes.

$$\forall x\ \forall y\ (p(g(x),y) \rightarrow \exists z\ q(z,y) \vee p(y,g(y)))$$

Ejercicio 8.

Definir una interpretación en el dominio D = {0,1} que sirva para demostrar que la fórmula siguiente no es válida:

$$\neg\exists x(R(x) \wedge S(x)) \rightarrow \neg\exists x R(x) \wedge \neg\exists x S(x)$$

Ejercicio 9.

Demostrar que la siguiente argumentación no es correcta, mediante la construcción de interpretaciones en el dominio {do, re, mi}. Justifica la respuesta desarrollando el significado de las fórmulas en dichas interpretaciones.

$$\{ \exists x\, (P(x) \wedge Q(x)), \forall x\, ((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow R(x)), P(a) \wedge \neg P(c) \wedge \neg Q(c) \} \vDash R(a) \vee R(c)$$

Ejercicio 10.

Demostrar con medios semánticos que el siguiente razonamiento no es correcto utilizando un dominio de dos elementos:

$$\{P(b), \exists x(P(x)\wedge\neg Q(x,a)), \forall x(P(x)\rightarrow\exists y\, Q(x,y))\}\vDash \exists x\, Q(x,x)$$

Solución

D={0,1}, i(a)=0, i(b)=1.
i(∃x Q(x,x))=F sii
  {x/a} *i(Q(a,a))=F*
  Y además,
  {x/b} *i(Q(b,b))=F*
i(P(b))=V
i(∃x (P(x) ∧ ¬Q(x,a)))=V sii
  {x/a} i(P(a) ∧ ¬Q(a,a)) = V sii
    i(P(a))=V y además i(Q(a,a))=F (tras descartar i(Q(b,a))=F abajo)
   O bien,
  {x/b} i(P(b) ∧ ¬Q(b,a))=V
    i(P(b))=V y además i(Q(b,a))=F (descartado más abajo)
i(∀x (P(x) → ∃x Q(x,y))))=V sii
  {x/a} i(P(a) → ∃y Q(a,y))=V sii
    i(P(a))=F
    O bien,
    i(∃yQ(a,y))=V sii
      {x/a} i(Q(a,a))=V
      O bien,
      {x/b} *i(Q(a,b))=V*
  {x/b} i(P(b) → ∃y Q(b,y))=V
    i(P(b))=F
    O bien,
    i(∃yQ(b,y))=V sii
      {x/a} *i(Q(b,a))=V*
      O bien,

{x/b} i(Q(b,b))=V
No es consecuencia lógica, el contramodelo que lo demuestra es: PD (0)=V, PD (1)=V, QD(0,1)=V,
QD (1,0)=V, QD (0,0)=F, QD (1,1)=F.

Ejercicio 11.

Sean A, B, C, D, E, F y G fórmulas de un lenguaje de Primer Orden sobre las que solo se sabe lo siguiente:

A es válida
E es la negación de A
B es insatisfacible
F es falsa para una interpretación concreta I
C es satisfacible
G es verdadera para una interpretación concreta I
D es la negación de C

Para cada una de las siguientes afirmaciones decir SI (si se cree que es correcta), NO (si se cree que es incorrecta) o DESC (si con la información que se tiene no es posible saberlo) (Nota: validez implica satisfacibilidad):

(1) $\neg B \lor C$ es satisfacible
(2) $B \rightarrow E$ es válida
(3) $(E \land C) \rightarrow G$ es insatisfacible
(4) $(A \land D) \lor F$ es verdad para la interpretación concreta I
(5) $G \rightarrow (C \land B)$ es falsa para la interpretación concreta I
(6) $(E \lor \neg B) \land C$ es verdad para la interpretación concreta I
(7) $D \land F$ es satisfacible
(8) $(\neg E \lor \neg B)$ es válida

Ejercicio 12.

Demostrar con medios semánticos que el siguiente razonamiento no es correcto utilizando un dominio de dos elementos:

$$\{ P(b) , \exists x (P(x) \land \neg Q(x,a)), \forall x (P(x) \rightarrow \exists y\, Q(x,y)) \} \vDash \exists x\, Q(x,x)$$

Solución

D={0,1}, i(a)=0, i(b)=1.
i(∃x Q(x,x))=F sii
{x/a} i(Q(a,a))=F
Y además,

{x/b} i(Q(b,b))=F
i(P(b))=V

i(∃x (P(x) ∧ ¬Q(x,a)))=V sii
{x/a} i(P(a) ∧ ¬Q(a,a)) = V sii
i(P(a))=V y además i(Q(a,a))=F (tras descartar i(Q(b,a))=F abajo)
O bien,
{x/b} i(P(b) ∧ ¬Q(b,a))=V
i(P(b))=V y además tachamos i(Q(b,a))=F (descartado más abajo)
i(∀x (P(x) → ∃x Q(x,y))))=V sii
{x/a} i(P(a) → ∃y Q(a,y))=V sii
(tachamos i(P(a))=F)
O bien,
i(∃yQ(a,y))=V sii
{x/a} (tachamos i(Q(a,a))=V)
O bien,
{x/b} i(Q(a,b))=V
{x/b} i(P(b) → ∃y Q(b,y))=V
(tachamos i(P(b))=F)
O bien,
i(∃yQ(b,y))=V sii
{x/a} i(Q(b,a))=V
O bien,
{x/b} (tachamos i(Q(b,b))=V)
No es consecuencia lógica, el contramodelo que lo demuestra es: PD(0)=V, PD(1)=V, QD(0,1)=V, QD(1,0)=V, QD(0,0)=F, QD(1,1)=F.

Ejercicio 13.

Demostrar por medios semánticos:

$$\models \exists x\ (\ P(x) \rightarrow Q(x)\ ) \rightarrow (\ \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)\ )$$

Ejercicio 14.

Demostrar con medios semánticos que el siguiente razonamiento no es correcto utilizando un dominio de dos elementos:

$$\{\ \exists x\ (\ P(x) \rightarrow Q(x,a)\ )\ ,\ P(a)\ ,\ \neg R(b)\ ,\ \forall x\ (\ Q(x,a) \rightarrow R(b))\ \} \models \forall x\ (\ P(x) \rightarrow R(x)\ )$$

Solución

{ ∃x (P(x) → Q(x,a)) , P(a) , ¬R(b) , ∀x (Q(x,a) → R(b)) } ⊨ ∀x (P(x) → R(x))

A1 A2 A3 A4 B

D = {0,1} I(a) = 0 , I(b) = 1

Buscamos interpretación I tal que I(A1) = I(A2) = I(A3) = I(A4) = V y I(B) = F

(*) I(A2) = I(P(a)) = V → PD(0) = V
(*) I(A3) = I(¬R(b)) = V → I(R(b)) = F → RD(1) = F
(*) I(B) = I(∀x (P(x) → R(x))) = F →
I(∃x ¬(P(x) → R(x))) = V → I(∃x (¬P(x) ∨ ¬R(x))) = V
para x=b I(¬P(b) ∨ ¬ R(b)) = V pues I(¬R(b)) = V
(*) I(A4) = I(∀x (Q(x,a) → R(b))) = V
como I(R(b)) = F I(∀x (Q(x,a)) = F
para x=a I(Q(a,a)) = F QD(0,0) = F
para x=b I(Q(b,a)) = F QD(1,0) = F
(*) I(A1) = I(∃x (P(x) → Q(x,a))) = V
para x=a I(P(a) → Q(a,a)) = F pues PD(0) = V y QD(0,0) = F
debe ser I(P(b) → Q(b,a)) = V
como QD(1,0) = F I(P(b)) = F PD(1) = F
⇒ cualquier interpretación I que cumpla las condiciones anteriores es el contramodelo buscado,
independientemente de cómo sean RD(1) , QD(0,0) y QD(0,0)

Ejercicio 15.

Probar:

$$\exists x\, P(x) \to Q(a) \vDash \forall x\, (P(x) \to Q(a))$$

Solución

∃x P(x) → Q(a) ⊨ ∀x (P(x) → Q(a))
A B

1) Forma indirecta: buscamos una interpretación I tal que I(A) = V y I(B) = F
I(B) = F I(∀x (P(x) → Q(a))) = F sii I(P(i) → Q(a)) = F para algún i ∈ L(D)
sii I(P(i)) = V para algún i ∈ L(D) y I(Q(a)) = F
sii ∃x P(x) y I(Q(a)) = F ⇒ i(A) = F
⇒ No es posible encontrar un contramodelo ⇒ SÍ es consecuencia lógica

2) Directamente: sea I una interpretación cualquiera tal que I(A)= V ; hay que probar I(B)=V
I(A) = I(∃x P(x) → Q(a)) = V I(∃x P(x)) = F ó I(Q(a)) = V
1er caso: I(∃x P(x)) = F I(¬∃x P(x)) = V I(∀x ¬P(x)) = V

$I(\neg P(i)) = V$ para todo $i \in (D)$ $\quad$ $I(P(i)) = F$ para todo $i \in (D)$

$I(P(i) \rightarrow Q(a)) = V$ para todo $i \in (D)$ $\quad$ $I(B) = V$

2º caso: $I(Q(a)) = V$ $\quad$ $I(P(i) \rightarrow Q(a)) = V$ para todo $i \in (D)$ $I(B) = V$

Ejercicio 16.

Siendo D = {alumnos del grupo}, crea un lenguaje de Primer Orden y formaliza las siguientes 2 afirmaciones. Construye una interpretación que sea modelo de la primera y contramodelo de la segunda:

Si todos los alumnos trabajan, todos aprueban lógica
Si hay algún alumno que no trabaja, todos suspenden lógica

Ejercicio 17.

Construir un modelo del siguiente conjunto de fórmulas sobre el dominio {1,2,3}:

$S = \{ \forall x\, (Q(x) \rightarrow R(x))\, ,\, \forall x\, \forall y (P(x, y) \rightarrow P(y, x)),\, \forall x\, \neg P(x, x)\, ,\, \forall x\, (P(f(x), x) \rightarrow Q(f(x)))$
$,\, \forall x\, (R(x) \leftrightarrow P(x, f(x)))\, ,\, Q(f(a)) \}$

Ejercicio 18.

Definir un contramodelo para demostrar que la siguiente relación de consecuencia lógica NO se verifica:

$$\{ \forall x\, (Q(x) \rightarrow R(x)),\, \forall x\, (P(x) \rightarrow R(x)),\, P(a),\, Q(b) \} \vDash \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$$

Solución

$\{ \forall x\, (Q(x) \rightarrow R(x))$ [A1], $\forall x\, (P(x) \rightarrow R(x))$ [A2], $P(a)$ [A3], $Q(b)$ [A4] $\}$ $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x)$ [B])

Buscamos una interpretación i tal que

$\forall x\, (Q(x) \rightarrow R(x))$
$\forall x\, (P(x) \rightarrow R(x)$ $\quad$ sean $\quad$ V $\quad$ y $\quad$ $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$ sea F
$P(a)$
$Q(b)$

Tomamos como dominio D = {a,b}

1ª solución:

- $i(A3) = V$ por lo tanto $i(P(a)) = V$
- $i(A4) = V$ por lo tanto $i(Q(b)) = V$
- $i(A2) \equiv i(\forall x\, (P(x) \rightarrow R(x))) = V$
  $x = a$ $\quad$ $i(P(a) \rightarrow R(a)) = V$

$i(P(a)) = V$

por lo tanto, $i(R(a)) = V$

y $x = b$ $i(P(b) \rightarrow R(b)) = V$ por lo tanto $i(P(b)) = F$ ó $i(R(b)) = V$ (1)

- $i(A1) \equiv i(\forall x\ (Q(x) \rightarrow R(x))) = V$

  $x = a$ $i(Q(a) \rightarrow R(a)) = V$ se cumple pues $i(R(a)) = V$

  y $x = b$ $i(Q(b) \rightarrow R(b)) = V$

  $i(Q(b)) = V$

  por lo tanto, $i(R(b)) = V$

  por tanto, al ser $i(R(b))=V$, también se cumple (1), y A2 es V

- $i(B) \equiv i(\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))) = F$

  $x = a$ $i(P(a) \wedge Q(a))=F$

  $i(P(a)) = V$

  por lo tanto, $i\ (Q(a)) = F$

  y $x = b$ $i(P(b) \wedge Q(b))=F$

  $i(Q(b)) = V$

  por lo tanto, $i(P(b)) = F$

Hemos encontrado un contramodelo: PD = {a} QD = {b} RD = {a,b} que además es el único contramodelo.

Por supuesto que hay otras formas de hacer este análisis. Si empezamos por hacer falsa la conclusión B:

2ª solución:

- $i(A3) = V$ por lo tanto $i(P(a)) = V$
- $i(A4) = V$ por lo tanto $i(Q(b)) = V$
- $i(B) \equiv i(\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))) = F$

  $x = a$ $i(P(a) \wedge Q(a)) = F$ $i(P(a)) = F$ ó $i(Q(a))=F$

  como $i(P(a)) = V$

  por lo tanto, $i(Q(a)) = F$

  y $x = b$ $i(P(b) \wedge Q(b)) = F$ $i(P(b)) = F$ ó $i(Q(b))=F$

  como $i(Q(b))) = V$

  por lo tanto, $i(P(b)) = F$

- $i(A1) \equiv i(\forall x\ (Q(x) \rightarrow R(x))) = V$

  $x = a$ $i(Q(a) \rightarrow R(a)) = V$ se cumple pues $i(Q(a)) = F$

  y $x = b$ $i(Q(b) \rightarrow R(b)) = V$ $i(Q(b)) = F$ ó $i(R(b)) = V$

  como $i(Q(b))) = V$

  por lo tanto, $i(R(b)) = V$

- $i(A2) \equiv i(\forall x\ (P(x) \rightarrow R(x))) = V$

  $x = a$ $i(P(a) \rightarrow R(a)) = V$ $i(P(a)) = F$ ó $i(R(a)) = V$

  como $i(P(a))) = V$

  por lo tanto, $i(R(a)) = V$

  y $x = b$ $i(P(b) \rightarrow R(b)) = V$ se cumple pues $i(P(b)) = F$

Se obtiene el mismo resultado que en la 1ª solución.

Ejercicio 19.

Averiguar si la fórmula $Q(a,b) \lor Q(c,c)$ es o no consecuencia lógica de cada uno de los siguientes conjuntos:

(1) $\{ \exists x\, P(x) , \forall y\, (P(y) \to Q(a,y)) \}$
(2) $\{ \exists x\, P(x) , \forall y\, (P(y) \to Q(c,c)) \}$

Solución

1) Llamamos $A1 \equiv \exists x\, P(x)$
$A2 \equiv \forall y\, (P(y) \to Q(a,y))$
$B \equiv Q(a,b) \lor Q(c,c)$

- Buscamos un contramodelo, es decir i tal que i(A1) = i(A2) = V y i(B) = F
- Tomamos como dominio D = {1,2,3} , por ejemplo
- i(a) = 1 i(b) = 2 i(c) = 3 por ejemplo
- i(B) = i($Q(a,b) \lor Q(c,c)$) = F i(Q(a,b)) = i(Q(c,c)) = F QD(1,2) = QD(3,3) = F
- i(A2) = i($\forall y\, (P(y) \to Q(a,y))$) = V sii
i($P(a) \to Q(a,a)$) = V sii i(P(a))= F ó i(Q(a,a)) = V (1)
y i($P(b) \to Q(a,b)$) = V sii i(P(b)) = F ó i(Q(a,b)) = V (tachamos esta expresión)
y i($P(c) \to Q(a,c)$) = V sii i(P(c)) = F ó i(Q(a,c)) = V (2)
- i(A1) = i($\exists x\, P(x)$) = V sii i(P(a)) = V ó i(P(b)) = V (tachamos esta expresión) ó i(P(c)) = V (3)
- para hacer compatibles (1), (2) y (3) elegimos i(P(a)) = V y i(Q(a,a)) = V
- los demás valores de i(Q(x,y)) pueden ser V o F $\Rightarrow$ hay unos cuantos contramodelos con ese dominio y las interpretaciones de a, b y c antes fijadas
$\Rightarrow$ se ha encontrado un contramodelo $\Rightarrow$ NO es consecuencia lógica

2) Sean $A1 \equiv \exists x\, P(x)$
$A2 \equiv \forall y\, (P(y) \to Q(c,c))$
$B \equiv Q(a,b) \lor Q(c,c)$

- En este caso SÍ es consecuencia lógica:
- Una demostración con deducción natural es la siguiente:

1.- $\exists x\, P(x)$ premisa
2.- $\forall y\, (P(y) \to Q(c,c))$ premisa
3.- $P(d)$ elim 1, d constante temporal nueva
4.- $P(d) \to Q(c,c)$ elim 3
5.- $Q(c,c)$ modus ponens 3, 4
6.- $Q(a,b) \lor Q(c,c)$ int $\lor$ 5

- por tanto { A1 , A2 } ⊢ B
- y por el teorema de completud { A1 , A2 } ⊨ B
- demostración semántica:

buscamos un contramodelo, i.e., i tal que i(A1) = i(A2) = V y i(B) = F

i(B) = F i(Q(a,b) ∨ Q(c,c)) = F QI(a,b) = QI(c,c) = F

i(A2) = V i(∀y (P(y) → Q(c,c))) = V

y = a i(P(a) → Q(c,c)) = V

y = b i(P(b) → Q(c,c)) = V

y = c i(P(c) → Q(c,c)) = V

como QI(c,c)) = F PI(a) = PI(b) = PI(c) = F (1)

i(A3) = V i(∃x P(x)) = V que no es compatible con (1)

⇒ No hay contramodelo ⇒ SÍ es consecuencia lógica.

Ejercicio 20.

Analizar si existe o no relación de consecuencia lógica en los siguientes esquemas de argumentación utilizando razonamiento semántico:

(a) {∀z ∃x P(x,z), ∃x P(x,a)} ⊨ ∃x∀z P(x,z)

(b) {∀xP(x) → Q(c)} ⊨ ∃x (P(x) → Q(c))

Solución

Para comprobar si hay consecuencia lógica, comprobamos si existen contramodelos (que hagan verdaderas las premisas y falsa la conclusión) para cada una de las argumentaciones. Buscamos contramodelos con dominio D = {a,b,c}

(a) {∀z∃xP(x,z), ∃xP(x,a)} ⊨ ∃x∀zP(x,z)

Premisas

∀z∃xP(x,z) = V

z= a ∃xP(x,a) = V sii

x=a P(a,a)=V

o

x=b P(b,a)=V

o

x=c P(c,a)=V

y z= b ∃xP(x,b) = V sii

x=a P(a,b)=V

o

x=b P(b,b)=V

o

x=c P(c,b)=V

y

z= c ∃xP(x,c) = V sii

x=a P(a,c)=V

o

x=b P(b,c)=V

o

x=c P(c,c)=V

∃xP(x,a) = V

x=a P(a,a)=V

o

x=b P(b,a)=V

o

x=c P(c,a)=V

Conclusión

∃x∀zP(x,z) = F

x=a ∀zP(a,z) = F sii

z=a P(a,a)=F

ó

z=b P(a,b)=F

ó

z=c P(a,c)=F

y

x=b ∀zP(b,z) = F sii

z=a P(b,a)=F

ó

z=b P(b,b)=F

ó

z=c P(b,c)=F

y

x=c ∀zP(c,z) = F sii

z=a P(c,a)=F

ó

z=b P(c,b)=F

ó

z=c P(c,c)=F

Existe al menos un contramodelo (P(a,a)=V y P(b,b)=V y P(c,c)=V ; P(a,b)=F y P(b,a)=F y P(c,a)=F), luego no hay consecuencia lógica.

(b) {∀xP(x) → Q(c)} ⊨ ∃x(P(x) → Q(c))

Premisas

$\forall xP(x) \rightarrow Q(c) = V$ sii

$\forall xP(x) = F$ sii

x= a $P(a) = F$

o

x= b $P(b) = F$

o

x= c $P(c) = F$

o

$Q(c)=V$

Conclusión

$\exists x(P(x) \rightarrow Q(c)) = F$ sii

x=a $P(a) \rightarrow Q(c) = F$ sii

$P(a)=V$ y $Q(c)=F$

y

x=b $P(b) \rightarrow Q(c) = F$ sii

$P(b)=V$ y $Q(c)=F$

y

x=c $P(c) \rightarrow Q(c) = F$ sii

$P(c)=V$ y $Q(c)=F$

Analizamos las opciones:
$Q(c)=V$ en la premisa es incompatible con $Q(c)=F$ que se tiene que cumplir en todas las opciones de la conclusión.
$P(a)=F$ en la premisa es incompatible con $P(a)=V$ que debe cumplirse en la primera alternativa de la conclusión. $P(b)=F$ en la premisa es incompatible con $P(b)=V$ que debe cumplirse en la segunda
alternativa de la conclusión. $P(c)=F$ en la premisa es incompatible con $P(c)=V$ que debe cumplirse en la tercera alternativa de la conclusión.
No es posible encontrar un contramodelo que haga simultáneamente verdaderas las premisas y falsa la conclusión, luego existe consecuencia lógica.

Ejercicio 21.

Dados las siguientes frases o argumentos demostrar con métodos semánticos (es decir, sin usar en ningún caso deducción natural) si son o no correctos.

(1) Nunca he criado o criaré en mi granja un animal que no tenga 4 patas. Si compro un animal es para comerlo o para criarlo en mi granja. Los pollos tienen dos patas. Un animal no puede tener 2 y 4 patas a la vez. He comprado un pollo que se llama a. Luego me lo voy a comer.

(2) Existe un melón tal que si es rojo, entonces es cuadrado. Luego si hay melones rojos, entonces hay melones cuadrados.

Ejercicio 22.

Demostrar con análisis semántico la siguiente relación de consecuencia lógica:

$$\{ \exists x (\neg P(x) \wedge Q(x)) \} \vDash \neg \forall x (Q(x) \rightarrow P(x))$$

Ejercicio 23.

Encontrar, si existen, un modelo y un contramodelo para cada una de las siguientes fórmulas; si no existen, decir que no existen y por qué. (Hay que escribir las interpretaciones por completo).

(1) $\exists z (p(z, a) \leftrightarrow q(f (z), z))$
(2) $\forall x \exists w (p(x, w) \wedge \neg p(w, x)) \wedge \exists z\, p(z, g(z))$

Ejercicio 24.

Demostrar por medios semánticos y con dominio D = { 1, 2} que no hay consecuencia lógica. Justificar adecuadamente los pasos principales del procedimiento.

$$\{ \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow Q(y) \wedge R(x)), \neg \exists x\, P(a,x), \exists x P(x,b) \} \nvDash \exists x(P(x,x)) \rightarrow Q(a) \vee R(a)$$

Solución

i(A1)=V sii i(∀y (P(a,y) → Q(y) ∧ R(a)))=V y i(∀y (P(b,y) → Q(y) ∧ R(b)))=V
sii i(P(a,a) → Q(a) ∧ R(a))=V
y i(P(a,b) → Q(b) ∧ R(a))=V
y i(P(b,a) → Q(a) ∧ R(b))=V
y i(P(b,a) → Q(b) ∧ R(b))=V
sii [i(P(a,a))=F o i(Q(a) ∧ R(a))=V]
y [i(P(a,b))=F o i(Q(b) ∧ R(a))=V]
y [i(P(b,a))=F o i(Q(a) ∧ R(b))=V]
y [i(P(b,b))=F o i(Q(b) ∧ R(b))=V]
sii [i(P(a,a))=F o (i(Q(a))=V y i(R(a))=V)]
y [i(P(a,b))=F o (i(Q(b))=V y i(R(a))=V)]
y [i(P(b,a))=F o (i(Q(a))=V y i(R(b))=V)]
y [i(P(b,b))=F o (i(Q(b))=V y i(R(b))=V)]

i(A2)=V sii i(∃x P(a,x))=F sii i(P(a,a))=F y i(P(a,b))=F

$i(A3)=V$ sii $i(P(a,b))=V$ o $i(P(b,b))=V$

$i(B)=F$ sii $i(\exists x\ (P(x,x)))=V$ y $i(Q(a) \vee R(b))=F$ sii (i(P(a,a))=V o i(P(b,b))=V)
y i(Q(a))=F
y i(R(a))=F

Unas condiciones obligatorias son i(Q(a))=F e i(R(a))=F. Estas hacen que se tengan que cumplir i(P(a,a))=F, i(P(a,b))=F, i(P(b,a))=F.
A su vez, estas condiciones hacen que se tenga que cumplir i(P(b,b))=V (porque ya no se puede cumplir ni i(P(a,b))=V ni i(P(a,a))=V)
Finalmente, esta última condición hace que se tengan que cumplir i(Q(b))=V e i(R(b))=V.
Aún así, es posible encontrar una interpretación que dé las premisas verdaderas y la conclusión falsa:

i(a)=1	
i(b)=2	
i(P2)={<2,2>}	es decir i(P)(1,1) = F; i(P)(1,2) = F; i(P)(2,1) = F; i(P)(2,2) = V;
i(Q1)={<2>}	es decir i(R)(1) = F; i(R)(2) = V
i(R1)={<2>}	es decir i(R)(1) = F; i(R)(2) = V

Ejercicio 25.

Después de haberlo formalizado en el lenguaje de la Lógica de Primer Orden, establecer por medios semánticos si el siguiente razonamiento es o no correcto:

Un número natural es azul si y solo si es el doble de algún número primo
14 es el doble de 7, y 7 es un número primo
Un número es par si y sólo si es el doble de algún número natural
Para todo número par, su sucesor no es el doble de ningún número natural
15 es el sucesor de 14
Por tanto, 15 no es un número azul

Ejercicio 26.

Determinar por medios semánticos si los siguientes razonamientos son correctos o no, justificando los pasos principales del desarrollo.

(1) $\{ \exists x\ P(x), \forall x\ R(x), \forall x(R(x) \wedge P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x(Q(x) \rightarrow P(x)) \} \models \forall x\ P(x)$

(2) $\{ \forall y(q(y) \rightarrow r(y)),\ r(a) \rightarrow p(a),\ \forall z\ q(z) \} \models \exists x\ p(x)$

Ejercicio 27.

Probar que la siguiente argumentación no es correcta mediante la definición de la correspondiente interpretación en un dominio de tres elementos (elegir los tres elementos). Justificar brevemente la respuesta desarrollando el significado de las fórmulas en dichas interpretaciones.

$$\{ \exists x P(x,a), \forall y(P(y,y) \rightarrow P(b,y) \wedge S(b)), \exists x(P(x,a) \wedge \forall z E(x,z)) \} \models P(b,c) \rightarrow S(c)$$

Ejercicio 28.

Dado el lenguaje $L = \{ a, b, f, P \}$ donde a y b son símbolos de constante, f es símbolo de función unaria y P es símbolo de predicado binario; y dada la interpretación cuyo dominio es $D = \{1,2\}$,las constantes a y b se interpretan como los individuos 1 y 2 respectivamente; el símbolo f seinterpreta como $f(1) = 2$, $f(2) = 1$ y asignando al símbolo P el significado $P(1,1) = V$, $P(1,2) = V$, $P(2,1) = F$, $P(2,2) = F$ probar que:

(a) Las fórmulas $P(a,f(b)) \wedge P(b,f(b))$ y $\forall x \forall y P(y,x)$ son falsas en esa interpretación.
(b) Las fórmulas $\forall x \exists y P(y,x)$ y $\forall x P(f(x),x) \rightarrow \forall y P(y,f(y))$ son verdaderas en esa interpretación.