Representación y Aritmética

REPRESENTACIÓN Y ARITMÉTICA

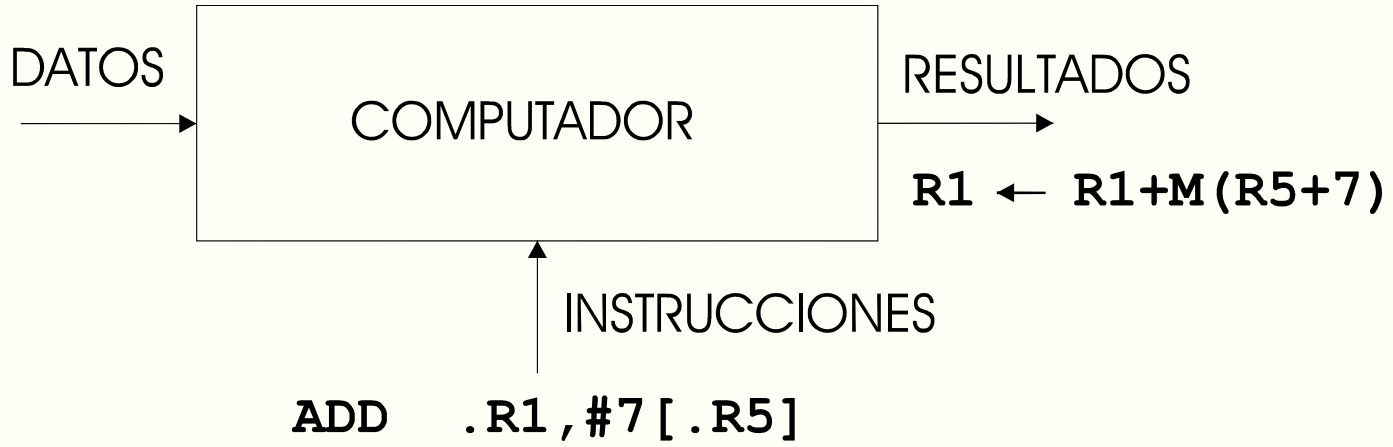
- Introducción
  - Representaciones alfanuméricas y numéricas
  - Operador y estructura de la ALU
- Representación en coma fija
  - Binario sin signo
  - Complemento a 2
  - Complemento a 1
  - Signo-magnitud
  - Exceso a M
- Representación en coma flotante
  - Definición, rango y resolución
  - Normalización y bit implícito
  - Suma y resta
  - Redondeo y bits de guarda
  - Estándar IEEE 754

BIBLIOGRAFÍA

- Fundamentos de los computadores. Pedro de Miguel. Editorial Paraninfo, 9ª edición, 2004.
- Estructura y diseño de computadores. Patterson-Hennessy. Editorial Reverté, 2000
- Organización y arquitectura de computadores. Stallings. Prentice Hall, 7ª edición, 2006
- Computer Arithmetic Systems. Omondi. Prentice Hall International, 1994
- Estructura de computadores: Problemas resueltos. García Clemente y otros. RAMA, 2006

REPRESENTACIÓN DE LA INFORMACIÓN (1)

INFORMACIÓN QUE LLEGA AL COMPUTADOR



- Datos e Instrucciones definidos por:
  - Símbolos (letras, números, caracteres ...)
  - Ideas (operaciones, movimientos, modificaciones ...)

REPRESENTACIÓN DE LA INFORMACIÓN (2)

- CONDICIONANTES DEL COMPUTADOR
  - Circuitos integrados del Computador:
    Utilización del **Sistema Binario**
  - El computador es Finito:
    Las representaciones son **Acotadas**
  - Diseño de sus unidades funcionales:
    Existen **Tamaños Privilegiados** (byte, palabra, ..)

- MODOS DE REPRESENTACIÓN
  - Representaciones Alfanuméricas
  - Representaciones Numéricas
  - Representaciones Redundantes
  - Representaciones Gráficas
  - Representaciones Etiquetadas

REPRESENTACIONES ALFANUMÉRICAS (1)

- REPRESENTAN:
  - Las 26 letras del alfabeto (Mayúsculas y minúsculas)
  - Los 10 dígitos decimales
  - Un conjunto de caracteres especiales (+ , - = < ...)
  - Un conjunto de caracteres de control (no visibles)

- CARACTERÍSTICAS:
  - Facilidad para comprobar un carácter numérico
    - ASCII: desde H'30 hasta H'39
  - Fácil equivalencia Mayúsculas y minúsculas
    - ASCII: desde H'41 (A) hasta H'5A (Z)
    - ASCII: desde H'61 (a) hasta H'7A (z)
  - Fácil comprobación si es carácter de control
    - ASCII: desde H'00 (NUL) hasta H'1F (US)
    - ASCII: excepción H'7F (DEL)

TABLA DE CÓDIGOS ASCII

Carácter más significativo

Carácter menos significativo HEX	0	1	2	3	4	5	6	7
0	NUL	DLE	Space	0	@	P	`	p
1	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
2	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
3	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
4	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
5	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
6	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
7	Bell	ETB	'	7	G	W	g	w
8	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
9	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
A	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
B	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
C	FF	FS	,	<	L	\	l	|
D	CR	GS	-	=	M	]	m	}
E	SO	RS	.	>	N	^	n	~
F	SI	US	/	?	O	_	o	DEL

REPRESENTACIONES ALFANUMÉRICAS (2)

- ASCII 8 bits:
  - Norma ISO que añade la representación de caracteres no presentes en inglés.
  - á es el 0xE1 é es el 0xE9. Á es el 0xC1 y É es el 0xC9.

- UTF-8:
  - Codificación de un carácter con varios bytes.
    - Codificación es de un byte: carácter es ASCII de 7 bits.
    - Codificación es de dos bytes: carácter pertenece a lenguas romances y otras.
    - 110000xx 10xxxxxx: xxxxxxxx es el carácter ISO de 8 bits. á es 0xC3 0xA1
    - Codificación es de tres bytes: carácter es de lenguas asiáticas.
    - Codificación es de cuatro bytes: otros.

REPRESENTACIONES NUMÉRICAS

- LIMITACIONES DE UNA REPRESENTACIÓN
  - Número finito de representaciones:

    RANGO DE REPRESENTACIÓN
    - Intervalo entre el mayor y el menor número representables
  - Número finito de bits para la representación:

    RESOLUCIÓN
    - Diferencia entre dos valores representables consecutivos
  - Operaciones con resultados no representables:

    DESBORDAMIENTO
    - Cuando un resultado está fuera del rango de representación)
- SISTEMAS POSICIONALES CON BASE

  b = base = nº natural > 1

  Rep(X) = (... x_2 x_1 x_0 x_{-1} x_{-2} ...) con xi $\in$ {b-1, b-2, ... , 1, 0}

$$V(X) = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} x_i b^i = \sum_{i=0}^{i=\infty} x_i b^i + \sum_{i=1}^{i=\infty} x_{-i} b^{-i}$$

CAMBIO DE BASE (1)

- Parte Entera = $\ldots x_2 b^2 + x_1 b^1 + x_0 b^0$

  Dividiendo la Parte Entera por b se obtiene:
  - Cociente = $\ldots x_2 b^1 + x_1 b^0$
  - Resto = x_0

- Parte Fraccionaria = $\ldots, x_{-1} b^{-1} + x_{-2} b^{-2} + x_{-3} b^{-3} + \ldots$

  Multiplicando la Parte Fraccionaria por b se obtiene:
  - Parte Entera = x_{-1}
  - Parte Fraccionaria = $\ldots, x_{-2} b^{-1} + x_{-3} b^{-2} + \ldots$

- Relación $b=2^K$. Cada K bits de la representación binaria de un número constituyen un dígito en su representación en base b.

- Conversión de base $b=2^K$ a decimal:

  $010101{,}1010_{(2} = 2^4 + 2^2 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-3} = 21{,}625_{(10}$

  $A27{,}8C_{(16} = 10\times16^2+2\times16^1+7\times16^0+8\times16^{-1}+12\times16^{-2} = 2599{,}546875_{(10}$

CAMBIO DE BASE (2)

- Ejemplo: Expresar N = $2202{,}735_{(10}$ en base 16, 8 y 2.

  $2202 = 16 \times 137 + 10 \rightarrow x_0 = 10$ (A)

  $137 = 16 \times 8 + 9 \rightarrow x_1 = 9$ y $x_2 = 8$

  $0{,}735 \times 16 = 11{,}760 \rightarrow$ x-1 = 11 (B)

  $0{,}760 \times 16 = 12{,}160 \rightarrow$ x-1 = 12 (C)

  Seguir hasta obtener el número de dígitos deseado

  N = 89A,BC… $_{(16}$

  Expandiendo cada dígito hexadecimal en 4 bits:

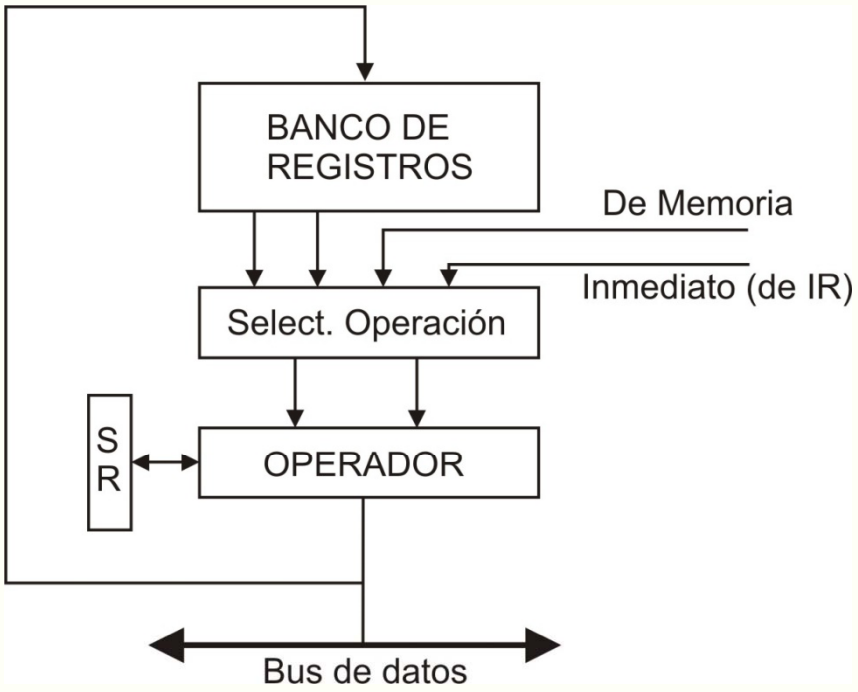
  N = 1000 1001 1010, 1011 1100 … $_{(2}$

  Agrupando cada 3 bits en un dígito octal:

  N = 100 010 011 010, 101 111 00? $_{(2}$ = 4232,57 … $_{(8}$

OPERADOR Y ESTRUCTURA DE LA ALU

- Operador: circuito que realiza una operación
- Registro de estado (SR). Los flags más usuales son: Acarreo (C), Cero (Z), Signo (S), Desbordamiento (V), Paridad (P), Resta (N), Acarreo BCD (H)
- Estructura de la ALU (modelo de ejecución Registro-Memoria)



OPERACIONES DE LA ALU (1)

- Operaciones lógicas (NOT, OR, AND, XOR, …)
  - Actúan sobre los operandos bit a bit:
  - (1001) XOR (0101) = 1100

- Desplazamientos
  - Lógicos: rellenan los huecos generados con ceros, ya sean a la derecha o a la izquierda
  - Aritméticos: realizan la multiplicación por 2 (a la izquierda) o división por 2 (a la derecha). Dependen de la representación:
    - Multiplicación en complemento a 2: Se rellena el hueco con 0 y hay desbordamiento si cambia de signo.
    - División en complemento a 2: Siendo $A=(a_{n-1} \ldots a_1\ a_0)$ y $a=|A|$, si $A<0$ resulta $A/2=2^{-1}(2^n-a)=(2^n-a/2)-2^{n-1}$, por lo que hay que poner un 1 en el hueco generado
  - Concatenados: entre registros y con biestables (acarreo)
  - Circulares o rotaciones

OPERACIONES DE LA ALU (2)

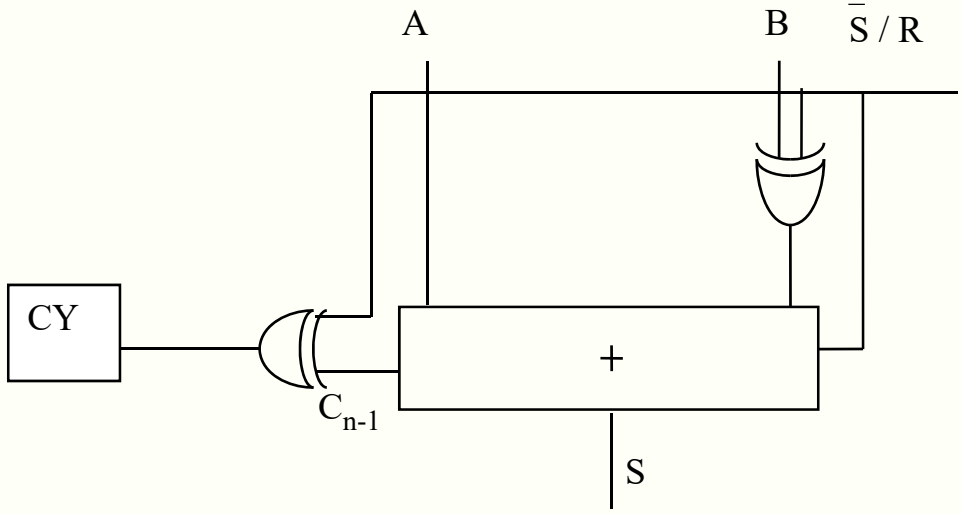
- Extensión de signo
  - Representa un dato de n bits con m bits, m>n
  - Depende de la representación. En complemento a 2 con a=|A| siendo A<0, $2^m-a=(2^n-a)+(2^m-2^n)$ por lo que hay que rellenar con 1 los (m-n) bits añadidos

- Cambio de signo
  - Dado un número a, se obtiene –a.
  - Depende del sistema de representación utilizado.

- Suma/Resta
  - Depende del sistema de representación utilizado.

BINARIO SIN SIGNO

- Rep(X) = (x_{n-1} x_{n-2} .... x_1 x_0) $\quad V(X) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i$
- Rango = [0, 2^n-1] Resolución = 1
- A-B = A+[(2^n-1-B)+1]-2^n = S + C_{n-1} •2^n - 2^n
- Desbordamiento (OVF) con CY (biestable de acarreo)
  - SUMA: C_{n-1} =1 y S/R =0 (CY=1, carry =1)
  - RESTA: C_{n-1} =0 y S/R =1 (CY=1, borrow =1)



ENTEROS EN COMPLEMENTO A 2 (1)

- Rep(X) = (x_{n-1} x_{n-2} .... x_1 x_0)
  - X_{n-1} = 0: X ≥ 0, Igual que binario puro
  - X_{n-1} = 1: X < 0, Rep(X) = 2^n -|X|
  - Rep(X) + Rep(-X) = 2^n

$$V(X) = -x_{n-1}2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} x_i 2^i$$

Ejemplo: n = 6, A = 7, B = 101110

A = 000111 -A = 1000000 – 000111 = 111001 = 111000 + 1

(-A se representa invirtiendo los bits de A y sumando 1)

|B| = 1000000 – 101110 = 010010 = 18, B = -18

Valor máximo = 011111 = 2^5 -1 = 31

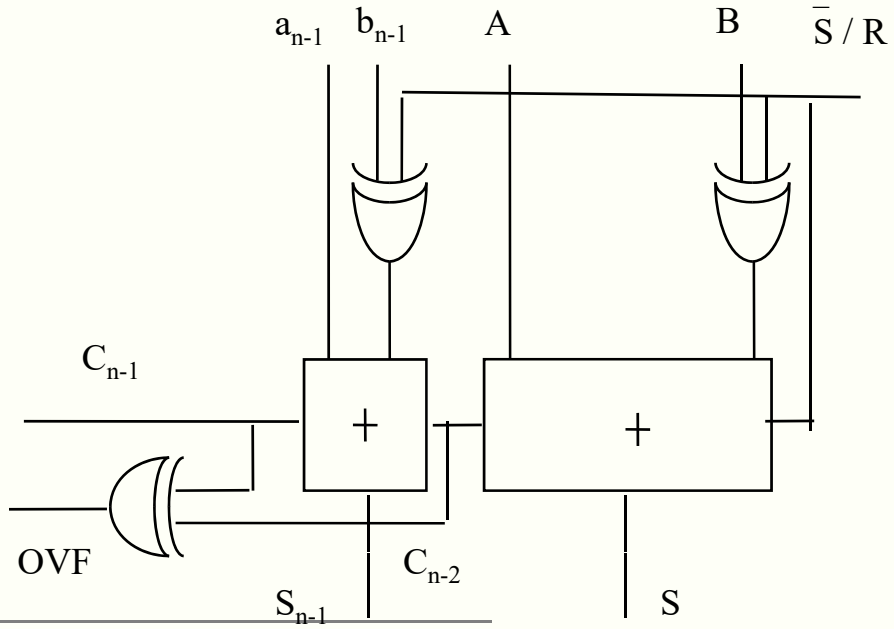
Valor mínimo = 100000 = -2^5 = -32

- Rango = [-2^{n-1}, -1]∪[0, 2^{n-1}-1] Resolución = 1
  - Rango de representación asimétrico
  - Representación del cero única

ENTEROS EN COMPLEMENTO A 2 (2)

- Suma y Resta: A - B = A + (-B) = A + [2^n - 1 - Rep(B)] + 1
- Análisis de OVF:

A	B	A+B	C_{n-1}	OVF
a	b	a+b	0	S_{n-1}=1 C_{n-2}=1
2^n- a	2^n- b	2^n+2^n - (a+b)	1	S_{n-1}=0 C_{n-2}=0
a(>b)	2^n- b	2^n+ (a-b)	1	NO C_{n-2}=1
a(<b)	2^n- b	2^n- (b-a)	0	NO C_{n-2}=0



ENTEROS EN COMPLEMENTO A 1

- Rep(X) = (x_{n-1} x_{n-2} .... x_1 x_0)
  - X_{n-1} = 0: $X \geq 0$, Igual que binario puro
  - X_{n-1} = 1: $X \leq 0$, Rep(X) = 2^n - 1 -|X|
  - Rep(X) + Rep(-X) = 2^n -1

$$V(X) = x_{n-1}(1-2^{n-1}) + \sum_{i=0}^{n-2} x_i 2^i$$

Ejemplo: n = 6, A = 7, B = 101110

A = 000111 -A = 111111 – 000111 = 111000

(-A se representa invirtiendo los bits de A)

|B| = 111111 – 101110 = 010001 = 17, B = -17

Valor máximo = 011111 = 2^5 -1 = 31

Valor mínimo = 100000 = -011111= -(2^5-1) = -31

- Rango = [-(2^{n-1}-1), 0]∪[0, 2^{n-1}-1] Resolución = 1
  - Rango de representación simétrico
  - Doble representación del cero: 000…000 y 111…111

ENTEROS EN SIGNO-MAGNITUD

- Rep(X) = (x_{n-1} x_{n-2} .... x_1 x_0)
  - X_{n-1} = bit de signo
  - X_{n-1} = 0: $X \geq 0$ y X_{n-1} = 1: $X \leq 0$

$$V(X) = (1 - 2 \cdot x_{n-1}) \cdot \sum_{i=0}^{n-2} x_i 2^i$$

Ejemplo: n = 6, A = 7, B = 101110

A = 000111 -A = 100111 B = -14 -B = 001110

- Rango y resolución igual que en complemento a 1
- Suma $A+B=(-1)^S \times M$, siendo $A=(-1)^{SA} \times MA$ y $B=(-1)^{SB} \times MB$ y utilizando un sumador en binario sin signo:
  1. Si SA=SB ir a 5
  2. Si MA<MB ir a 4
  3. S=SA, M=MA-MB, FIN
  4. S=SB, M=MB-MA, FIN
  5. S=SA=SB, M=MA+MB, si CY=1 hay OVF, FIN

ENTEROS EN EXCESO A "M"

- Rep(X) = (x_{n-1} x_{n-2} .... x_1 x_0)
  - Rep(X) = V(X) + M
  - Normalmente $M=2^{n-1}$ ó $M=2^{n-1}-1$(el usado en el estándar IEEE)

Ejemplo: n = 6, M=32, A = 7, B = 001110

A = 7+32 = 39 = 100111 B = 001110 – 32 = 14-32 = -18

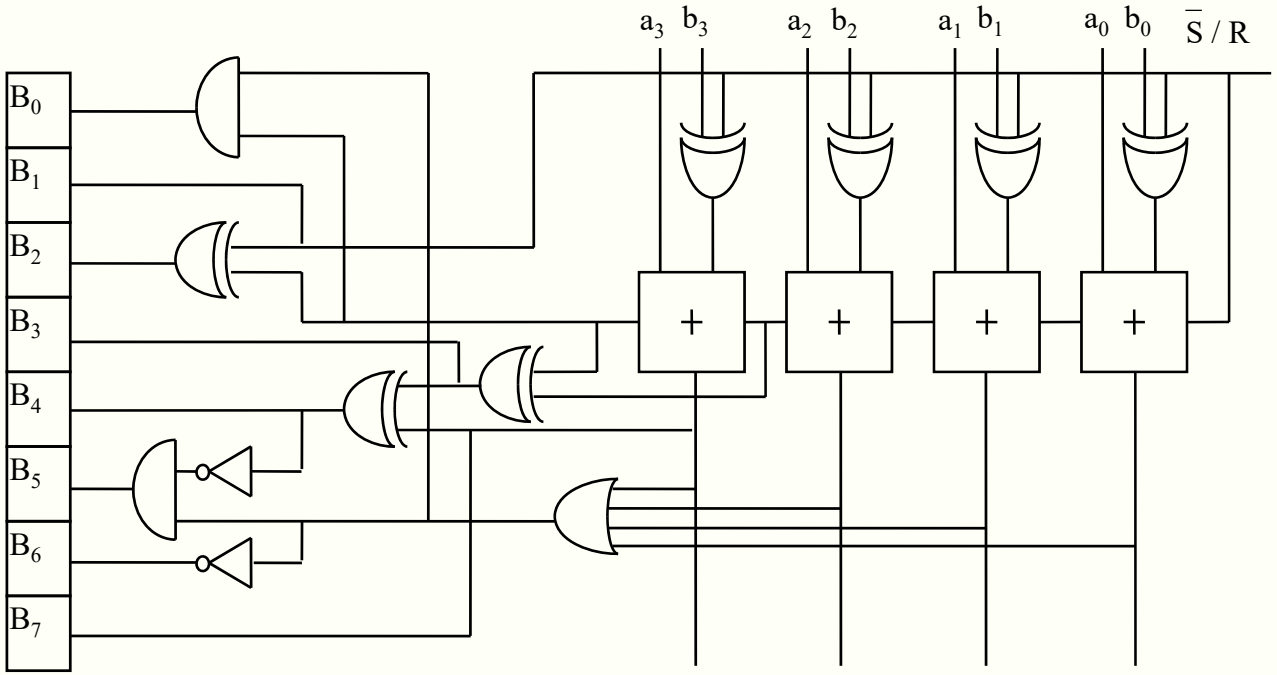
Valor máximo = 111111 = 63 – 32 = 31

Valor mínimo = 000000 = 0 – 32 = -32

- Rango = $[-M, -1] \cup [0, 2^n-1-M]$ Resolución = 1

BIESTABLES DE ESTADO (1)

- El sumador-restador para operandos de 4 bits incorpora una lógica para generar 8 señales que se almacenan en los biestables de estado, que podrán utilizarse como condiciones en las instrucciones de salto. Deducir el significado de cada biestable, al realizar la operación A-B, considerando que:
  - Los operandos están en aritmética sin signo
  - Los operandos están en aritmética de complemento a dos



BIESTABLES DE ESTADO (2)

- Binario sin signo
  - B0=1 → Carry=1 y S=1 → No hay OVF y positivo → A>B
  - B1=1 → La operación es Resta
  - B2=1 → Resta y C=1 → Borrow =1 → A<B
  - B3, B4, B5 y B7 no tienen sentido
  - B6=1 → Z=1 → A=B

- Complemento a 2
  - B0 no indica nada
  - B1 = N = flag de resta, B2 = C = flag de acarreo, B3 = V = flag de OVF
  - B4=1 → OVF ⊕ Signo = 1 → A<B
    - Si no hay OVF el signo es negativo → Resultado real negativo
    - Si hay OVF el signo es positivo → Resultado real negativo
  - B6 = Z =flag de cero, B7 = S = flag de signo

REPRESENTACIÓN EN COMA FLOTANTE (1)

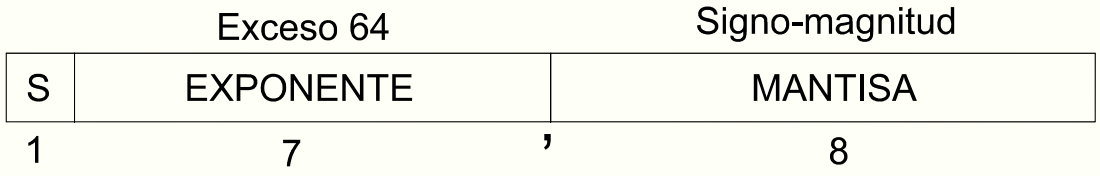
- $V(X) = M \cdot r^{E}$ (notación científica)
  - M = mantisa o fracción (p bits)
  - r = base o radix
  - E = exponente o característica (q bits)

- $Rep(X) = (e_{q-1}\ e_{q-2}\ ....\ e_1\ e_0\ m_{p-1}\ m_{p-2}\ ....\ m_1\ m_0\ )$

- CARACTERÍSTICAS:
  - Normalmente $r = 2^k$ (r = 2, 8, 16)
  - Mantisa: coma fija con signo y base r
  - Exponente: Entero y base 2

REPRESENTACIÓN EN COMA FLOTANTE (2)

- Rango Exponente = [-64, 63]



- Rango Mantisa:

  ,00000000 = 0

  ,00000001 = 2^{-8}

  .....

  ,11111111 = $1-2^{-8}$

- Rango = $\pm [2^{-8} \cdot 2^{-64}, (1-2^{-8}) \cdot 2^{63}] \cup 0$
- Resolución = $2^{-8} \cdot 2^{E}$
- A = H'C63C = 1 1000110 ,00111100

  $A = - ,00111100 \cdot 2^{6} = -15_{(10}$

  $A = - ,01111000 \cdot 2^{5} = -15_{(10} \rightarrow A = H'\ C578$

  $A = - ,11110000 \cdot 2^{4} = -15_{(10} \rightarrow A = H'\ C4F0$

REPRESENTACIÓN EN COMA FLOTANTE (3)

- Normalización

  Un número en coma flotante está con su mantisa normalizada si al desplazar la mantisa un dígito a la izquierda y decrementar el exponente en 1 cambia el valor del número

	Exceso 64		Signo-mag. Normalizada
S	EXPONENTE		MANTISA
1	7	,	8

- Rango Mantisa:

  $,10000000 = 2^{-1}$

  .....

  $,11111111 = 1-2^{-8}$

- Rango = $\pm [2^{-1} \cdot 2^{-64}, (1-2^{-8}) \cdot 2^{63}]$

- Problemas de la normalización:
  - Resultados de operaciones no normalizados
  - El cero no es representable

REPRESENTACIÓN EN COMA FLOTANTE (4)

- Bit Implícito

  A un número en coma flotante con r=2 y su mantisa en signo magnitud y normalizada, puede dejarse el bit más significativo como implícito ya que tiene que ser un 1

	Exceso 64		Signo-mag. con Bit implícito
S	EXPONENTE		MANTISA
1	7	,i	8

- Rango Mantisa:

  ,1 00000000 = 2^{-1}

  .....

  .....

  ,1 11111111 = $1-2^{-9}$

- Rango = $\pm [2^{-1} \cdot 2^{-64}, (1-2^{-9}) \cdot 2^{63}]$

SUMA Y RESTA EN COMA FLOTANTE (1)

Solución analítica:

$A = MA \times r^{EA}$ $B = MB \times r^{EB}$

$r = 2^{k}$; Las mantisas MA y MB normalizadas

- EA > EB siendo d = EA – EB

  $A \pm B = (MA \pm MB \times r^{-d}) \times r^{EA}$

- EA < EB siendo d = EB – EA

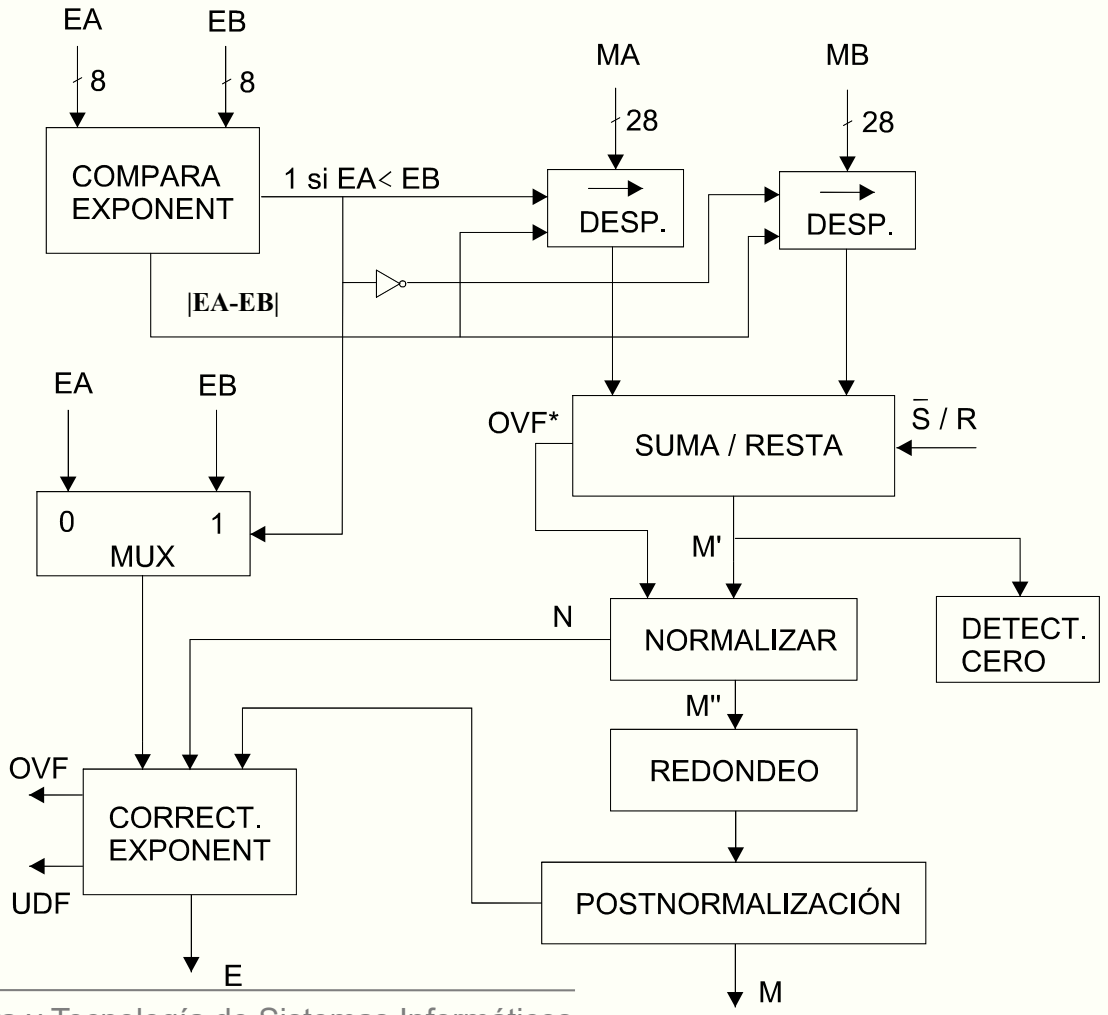
  $A \pm B = (MA \times r^{-d} \pm MB) \times r^{EB}$

Pasos a seguir:

1. Comparar exponentes
2. Desplazar mantisa de exponente menor
3. Sumar / Restar mantisas
4. Detectar resultado cero
5. Normalizar (si redondeo postnormalizar)
6. Corregir exponente
7. Detectar desbordamiento

SUMA Y RESTA EN COMA FLOTANTE (2)

Esquema del sumador/restador en coma flotante:



SUMA Y RESTA EN COMA FLOTANTE (3)

1. Comparar exponentes
   - Identificar mantisa a desplazar
   - Determinar el número de desplazamientos = |EA-EB|
   - Utiliza un restador (puede haber OVF en esta resta)
2. Desplazar mantisa de exponente menor
   - Desplaza |EA-EB| dígitos
   - Desplazamientos aritméticos
3. Sumar / Restar mantisas
   - Depende de la representación de las mantisas
   - Depende del operador que se utilice
   - Puede haber OVF* → hay que normalizar
   - La resta no es conmutativa
4. Detectar resultado cero
   - Se detecta con el flag, Z=1
   - Se devuelve la representación definida para el cero

SUMA Y RESTA EN COMA FLOTANTE (4)

5. Normalización (mantisa signo y p bits de magnitud)
   - OVF*=1: desplaza dcha. M' y E ← E+1
   - OVF*=0: desplaza izda. M' y E ← E+x (x=0,1,...,p-1)
   - N=1,0,-1,...,-(p-1)=cantidad a sumar al exponente mayor
   - Si redondeo y postnormalización : desplaza dcha. M' y E ← E+1
6. Corregir exponente
   - Seleccionar el exponente mayor
   - Sumar N (de la fase de normalización)
   - Sumar 1 si hay postnormalización tras el redondeo
7. Detectar desbordamiento
   - Si E > Exponente mayor, hay overflow (OVF)
   - Si E < Exponente menor, hay underflow (UDF)

REDONDEO

- $A = \pm M \times 2^E$ donde M está representada por 6 bits. Se ha obtenido un resultado de 10 bits M=,100100 1011 que ha de ajustarse a 6 bits mediante técnicas de redondeo:
  - **Truncamiento**: Suprimir los bits sobrantes. M=,100100. Error absoluto $\varepsilon_a < 2^{-6}$ siempre por defecto
  - **Forzado a 1**: Truncamiento dejando siempre a 1 el bit menos significativo. M=100101. Mismo error absoluto que en truncamiento, pero por defecto y por exceso
  - **Redondeo al más próximo**: Ajustar al extremo M_{i-1}=,100100 ó al M_i=,100101 más próximo sumando la mitad del intervalo, ½(M_i-M_{i-1}) = 000000 1000. M=,100101. Error absoluto $\varepsilon_a \leq 2^{-7}$ por defecto y por exceso
  - **Redondeos a cero, a +∞ y a -∞** : Ajustar al extremo M_i ó M_{i-1} que corresponda en la dirección (M a 0), (M a +∞) y (M a -∞), respectivamente

DÍGITOS DE GUARDA Y BIT RETENEDOR (1)

- **Dígitos de guarda**: dígitos añadidos a la mantisa para obtener la precisión máxima. En el caso de mantisa en signo-magnitud se necesitarían dos bits de guarda, uno para normalizar el resultado y otro para redondeo

- **Bit retenedor**: bit que se añade para propagar el borrow en la resta. Al realizar los desplazamientos en la mantisa de menor exponente en la operación suma/resta, el bit retenedor se pone a 1 en el momento que pase un 1 y permanece ese valor independientemente de los bits que pasen después

- **Ejemplo**: mantisa normalizada en signo magnitud (1 bit de signo y 6 de magnitud) y exponente de 5 bits en exceso a 16.

  $A = ,100001 \times 2^{7}$ $B = ,100101 \times 2^{3}$,

  realizar A-B usando todos los bits necesarios para absorber todos los desplazamientos, con dos bits de guarda y con los dos bits de guarda más bit retenedor

DÍGITOS DE GUARDA Y BIT RETENEDOR (2)

- Resultado con 4 bits adicionales:

```
  A = ,100001 0000 ×2^7
  B = ,000010 0101 ×2^7
A-B = ,011110 1011 ×2^7
Nor.  ,111101 011  ×2^6
Red. +        1
A-B = ,111101      ×2^6 = D'61
```

- Resultado con 2 bits de guarda:

```
  A = ,100001 00 ×2^7
  B = ,000010 01 ×2^7
A-B = ,011110 11 ×2^7
Nor.  ,111101 1  ×2^6
Red. +        1
A-B = ,111110    ×2^6 – D'62
```

DÍGITOS DE GUARDA Y BIT RETENEDOR (3)

- Resultado con 2 bits de guarda y bit retenedor:

  A = ,100001 00 0 $\times 2^7$

  B = ,000010 01 1 $\times 2^7$

  A-B = ,011110 10 1 $\times 2^7$

  Nor. ,111101 01 $\times 2^6$

  Red. + 1

  A-B = ,111101 $\times 2^6$ = D'61

- Resultado exacto y errores:

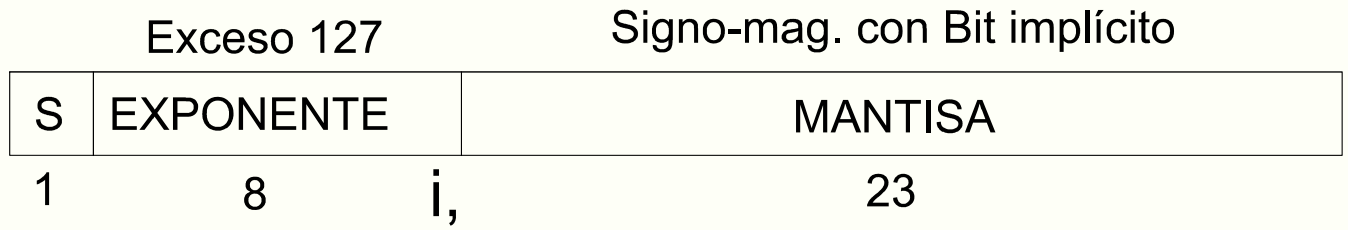
  A = ,100001 $\times 2^7$ =D'66 B = ,100101 $\times 2^6$ =D'4,625

  A-B = D'61,375

  - Error con 2 bits de guarda = |61,375-62|=0,625
  - Error con bit retenedor = |61,375-61|=0,375

ESTÁNDAR IEEE 754 DE COMA FLOTANTE (1)

- Simple precisión



00000000 → "+0" ó "-0" con M = 00 ... 00.
números NO normalizados
con M distinta de 00 ... 00.

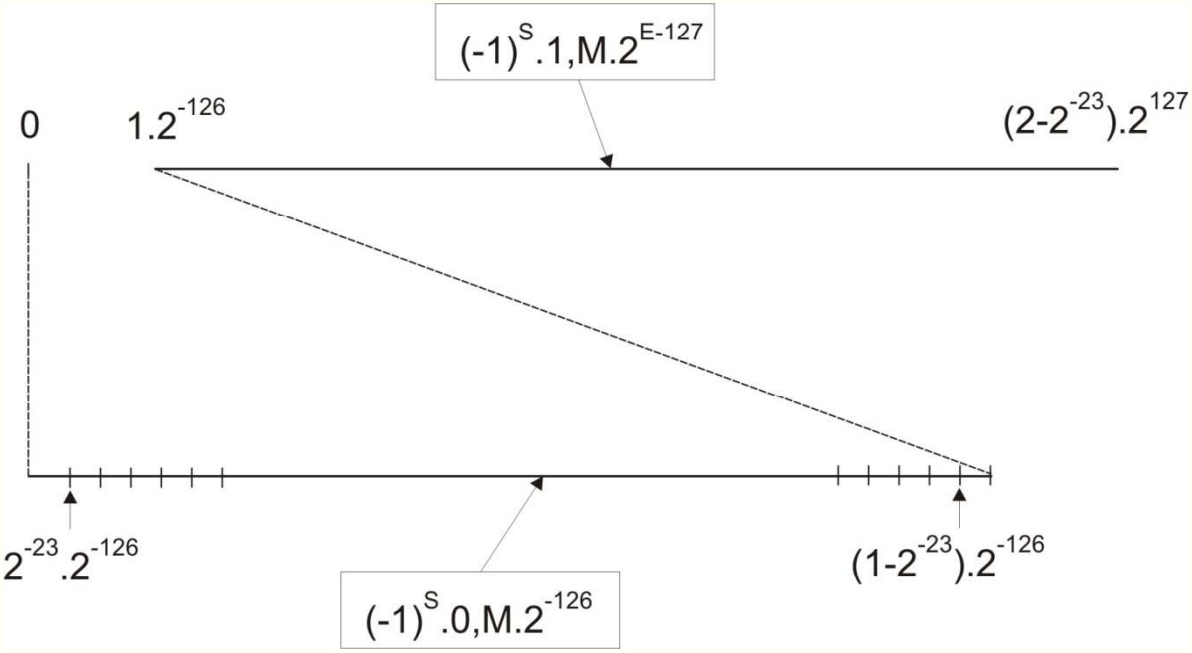
00000001 = -126
00000010 = -125
.....

01111111 = 0
10000000 = 1
.....

11111101 = 126
11111110 = 127
11111111 → "+∞" ó "-∞" con M = 00 ... 00.
Not a Number
con M distinta de 00 ... 00.

ESTÁNDAR IEEE 754 DE COMA FLOTANTE (2)

- Rango de representación:



- Precisión:
  - 3 Bits adicionales (2 de guarda y 1 retenedor)
  - Redondeos al más próximo, a +∞ , a –∞ y truncamiento