<table>
<tr><td>Estructuras Algebraicas
Segundo examen parcial</td><td rowspan="2">1er Apellido: ____________________
2º Apellido: ____________________
Nombre: ____________________
Número de matrícula: | | | | | | | |</td><td rowspan="2">3 de junio de 2021
Tiempo 2 h
Calificación:</td></tr>
<tr><td>Dpt. Matemática Aplicada a las T.I.C.
E.T.S. de Ingenieros Informáticos
Universidad Politécnica de Madrid</td></tr>
</table>

Para que sean consideradas como válidas, todas las respuestas deben estar adecuadamente justificadas.
No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.

Ejercicio 1. (2 puntos)

Enunciar y demostrar la caracterización de los elementos algebraicos sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

Ejercicio 2. (2 puntos)

1. Estudiar si $(\mathbb{Z}_5[i], +_5, \cdot_5)$ es dominio de integridad.
2. Estudiar si $g = x^2 + 2$ es polinomio primitivo en $\mathbb{Z}_5[x]$.

Ejercicio 3. (2 puntos)

Sea $R = \left\{ \begin{pmatrix} x & 3y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{Z}_5 \right\}$. Se define la aplicación $\varphi : \mathbb{Z}_5[x] \to R$ tal que $\forall\, g = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}_5[x]$ es $\varphi(g) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Estudiar si $(R, +_5, \cdot_5)$ es cuerpo.
2. Demostrar que φ es homomorfismo de anillos y calcular su núcleo.

Ejercicio 4. (2 puntos)

1. Sean $a, b \in \mathbb{Z}_2[x]$, con $a = x^5 + x^4 + x^3 + x^2$, $b = x^4 + x^3 + x + 1$. Usando el algoritmo de Euclides, obtener el polinomio $d = \mathrm{mcd}(a, b) \in \mathbb{Z}_2[x]$ y polinomios $u, v \in \mathbb{Z}_2[x]$ tales que $d = ua + vb$.
2. Estudiar si $\mathbb{Z}_2[x]/(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ es cuerpo, y en caso afirmativo indicar el número de elementos que tiene y obtener el resultado de la siguiente operación, expresándolo en forma reducida:

$$(x^2 + 1)^{-1} x^2 + x$$

Ejercicio 5. (2 puntos)

Se considera el grupo de unidades módulo 8: $(U_8, \cdot_8)$ actuando sobre el conjunto $\mathbb{Z}_8$ mediante la operación producto módulo 8: $\cdot : U_8 \times \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_8$ tal que $(a, n) \mapsto a \cdot_8 n$.

1. Determinar las órbitas de dicha acción.
2. Obtener, para cada $a \in U_8$, el conjunto de puntos fijos.
3. Verificar el teorema de Burnside para esta acción.

Soluciones

1. Consultar apuntes.
2. *a*) $(\mathbb{Z}_5[i], +_5, \cdot_5)$ no es dominio de integridad: $\quad (1+2i)(2+i) = 0$

   b) El polinomio g no es primitivo en $\mathbb{Z}_5$, porque x no es generador del grupo de unidades de $\mathbb{Z}_5[x]/(g)$.
3. *a*) $(R, +_5, \cdot_5)$ es cuerpo

   b) φ es homomorfismo. $\ker(\varphi) = (x^2+2)$
4. *a*) $d = x^2+1 = a(x+1) + b(x^2+x+1)$

$a = x^5+x^4+x^3+x^2$		$(1,0)$
$b = x^4+x^3+x+1$		$(0,1)$
x^3+x	x	$(1,x)$
x^2+1	$x+1$	$(x+1, x^2+x+1)$
0	x	

   b) $\mathbb{Z}_2[x]/(x^4+x^3+x^2+x+1)$ es cuerpo por ser $x^4+x^3+x^2+x+1$ polinomio irreducible en $\mathbb{Z}_2[x]$.
   $(x^2+1)^{-1}x^2 + x = (x^2+x)x^2 + x = x^2+1$
5. *a*) $[0] = \{0\},\ [1] = \{1,3,5,7\},\ [2] = \{2,6\},\ [4] = \{4\}.$

   b) $X_1 = \mathbb{Z}_8,\ X_3 = \{0,4\},\ X_5 = \{0,2,4,6\},\ X_7 = \{0,4\}.$

   c) $N = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X_g|$: $\qquad 4 = \frac{1}{4}(8+2+4+2)$