Ejercicio 1 PROBLEMAS:

a) Obtener con la <u>fórmula de Newton generalizada</u> el polinomio de grado 2, p(x), que verifica que p'(0)=0 e interpola los datos de la Tabla 1:

xi	0	2
yi	1	5

La función pedida es un polinomio p(x) de grado dos que tiene que verificar que p(0)=1, p'(0)=0 y p(2)=5. Para dar la expresión de dicho polinomio siguiendo la Fórmula de Newton generalizada, primero construimos la tabla de diferencias divididas generalizada con los datos dados:

$$\begin{array}{cccc} x_k & p(x_k) & p[.,.] & p[.,.,.] \\ x_0=0 & 1 & p[0,0]=p'(0)=0 & p[0,0,2]=1 \\ x_0=0 & 1 & p[0,2]=2 & \\ x_1=2 & 5 & & \end{array}$$

Por tanto, la expresión del polinomio pedido con la <u>Fórmula Newton generalizada</u> es:

$$\boxed{p(x)=p[0]+p[0,0]x+p[0,0,2]x^2=1+x^2.}$$

b) Construir la función spline cuadrado s(x) en los nodos {-1,0,2} con s'(0)=0 y que interpole los datos de la Tabla 2:

xi	-1	0	2
yi	-2	1	5

La función s(x) es una función spline cuadrático sobre los nodos señalados, entonces:

$$s(x)=\begin{cases} r(x) & x\in[-1,0] \\ t(x) & x\in[(0,2] \end{cases}$$

donde:

- r(x) y t(x) son polinomios de grado 2.
- r(0) = t(0) para cumplir la condición de continuidad de s(x) en el intervalo (-1,2).
- r'(0)= t'(0) para cumplir la condición de continuidad de s'(x) en el intervalo (-1,2).
  -

Además s(x) debe verificar las condiciones de interpolación dadas y s'(0)=0.

<u>Cálculo de r(x)</u>: De las condiciones anteriores se deriva que r(x) es el polinomio de grado 2 tal que r(0)=s(0)=1, r(2)=s(2)=5 y r'(0)= s'(0) =0. De ello se concluye (por el Apartado (a)) que r(x)= p(x)=1+x^2.

<u>Cálculo de t(x)</u>: De t(x) sabemos que es un polinomio de grado 2 tal que t(-1)=s(-1)=-2, t(0)=s(0)=1 y t'(0)=r'(0)= s'(0) =0. Haciendo los cálculos convenientemente, resulta t(x)=1-3x^2.

Por tanto la función spline pedida tienen la siguiente expresión: $s(x)=\begin{cases}1+x^2 & x\in[-1,0]\\ 1-3x^2 & x\in[(0,2]\end{cases}$

c) Se quiere calcular un polinomio q(x) de grado 2 con q'(0)=0, que ajuste lo mejor posible (en el sentido mínimos cuadrados) los datos de la Tabla 3:

x_i	-1	0	1	2
y_i	-2	1	3.5	5

Se pide:

- **¿De cuántos parámetros libres se disponen para el ajuste de la Tabla?**
- **Dar matriz H de coeficientes y el vector B de términos independientes del sistema lineal H·C=B que resulta de ajustar los datos dados, siendo C el vector de incógnitas ¿Cuál es la dimensión del vector C?**
- **Sin calcular explícitamente los errores, razonar qué función p(x), s(x) o q(x) producirá una peor estimación del valor dado en x=2.**

La función aproximante es un polinomio de grado dos $q(x)=c_0+c_1x+c_2x^2$ con q'(0)=0. Por tanto c1=0 y la función aproximante queda: $\underline{q(x)=c_0+c_2x^2}$,

y se dispone por tanto de dos parámetros para ajustar la tabla de datos dada. Evaluando q(x) en los datos dados se llega al sistema lineal sobredeterminado

$$q(x_i) = c_o + c_2 x_i^2 = y_i, \quad i = 1,\dots,4.$$

Escribiendo el sistema en forma matricial HC=B, resulta:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_0\\ c_2\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 3.5\\ 5\end{pmatrix}$$

Se observa que el vector C de incógnitas tiene dimensión 2x1 (2 parámetros libres para ajustar los 4 datos por el tipo de función aproximante indicada).

Las funciones p(x) y s(x) interpolan en x=2, por tanto la estimación que proporcionan en ese punto es exacta y el error es 0. De lo que se deduce:

$$|p(2)-5| = |s(2)-5| = 0 < |q(2)-5|$$

Por tanto, q(x) produce la peor estimación en el punto x=2.

Ejercicio 2 PROBLEMAS: Dada la ecuación $x^3 + 3x^2 - 3x - 9 = 0$

a) Demostrar que tiene una única solución s en el intervalo [1.5, 2].

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 9$ f(1.5) = -3.375<0 f(2) = 5 > 0

Al ser f(x) continua garantiza al menos 1 raíz.

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 3 = 3\cdot(x^2 + 2x - 1)$

$f''(x) = 3\cdot(2x + 2) = 6\cdot(x + 1)$ f''>0 en el intervalo

Al ser f''>0, f' es creciente y como f'(1.5)=12.75>0 eso garantiza que f'>0 en todo el intervalo, lo que asegura que f creciente y la función no puede retroceder para volver a cruzar el cero --> raíz única.

b) Demostrar que el método de Newton-Raphson converge empezando en cualquier punto x0 de dicho intervalo.

$$M = \frac{\max|f''(x)|}{2\cdot\min|f'(x)|} = \frac{\max|6\cdot(x+1)|}{2\cdot\min|3\cdot(x^2+2x-1)|} = \frac{\max|(x+1)|}{\min|(x^2+2x-1)|}$$

Al ser f'' y f' crecientes, el máximo de f'' está en x=2 y el mínimo de f' en x=1.5.

$$M = \frac{\max|(x+1)|}{\min|(x^2+2x-1)|} = \frac{|(2+1)|}{|(1.5^2+2\cdot 1.5-1)|} = \frac{3}{4.25} \approx 0.706$$

El error inicial e0 no puede ser mayor que el ancho del intervalo, e0<0.5, por lo que M·e0~0.353 < 1 y el método de Newton converge para cualquier x0 en el intervalo.

c) Partiendo del punto medio x0 = 1.75, dar el resultado de la primera iteración del método. A partir de este único cálculo, estimar el error de la hipótesis inicial x0.

x0=1.75, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^3 + 3x_0^2 - 3x_0 - 9}{3x_0^2 + 6x_0 - 3}$ = 1.7322 e0 ~|x0-x1| = 0.0178

Conociendo la solución s (siguiente apartado) comprobamos que |x0-s| = 0.0179, un resultado muy similar a la estimación.

d) Sabiendo que la solución exacta es $s = \sqrt{3}$, ¿cuál es el error relativo de la aproximación? ¿Cuántas cifras decimales significativas se han obtenido?

Erel=|x1-s|/|s|= |1.7322-s|/s = 9.1758·10^-5 ~ 10^-4 -> ~ 4 cifras significativas

En efecto, x1= 1.7322 y s = 1.7321, las cuatro primeras cifras son correctas.

Ejercicio 1 COMPUTACIONAL:

Dada la siguiente tabla de datos (x_i,y_i):

x_i	2.6	2.9	3.1	3.5
y_i	2.3	4.1	5.3	6.6

a) Interpolar los datos de la tabla por un polinomio de grado mínimo p(x). Plantear y resolver el sistema lineal H·c=b correspondiente al problema de interpolación pedido. Indicar claramente los valores de los coeficientes del polinomio resultante.

```
xi=[2.6 2.9 3.1 3.5]'
yi=[2.3 4.1 5.3 6.6]'
H=[xi.^0 xi.^1 xi.^2 xi.^3]

c=inv(H)*yi
c = [105.7343 -119.2269   43.7963   -5.0926]'
```

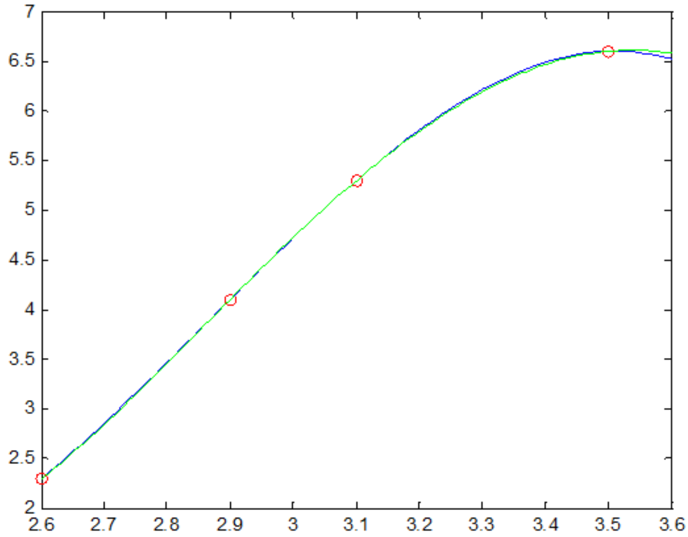
b) Volver a interpolar los datos de la tabla pero ahora con una función del tipo $u(\mathrm{x}) = A + \frac{B}{x} + C\log(\mathrm{x}) + Dx^2$. Plantear y resolver el sistema lineal H·c=b correspondiente al nuevo problema de interpolación pedido. Indicar claramente, los valores de los coeficientes (A, B, C y D) de la función resultante.

```
H2=[xi.^0 1./xi log(xi) xi.^2]
c2=inv(H2)*yi
A=c2(1)
B=c2(2)
C=c2(3)
D=c2(4)

A= -738.9129
B=  895.3746
C=  479.2303
D=  -9.0343
```

c) Dibujar en una misma gráfica, los datos de la tabla (‘ro’), el polinomio p(x) del apartado a) en azul (‘b’) y la función interpoladora u(x) del apartado b) en verde ('g') en el intervalo [2.6, 3.6].

```
xx=[2.6:0.01:3.6];
yy=c(1)+c(2).*xx+c(3).*xx.^2+c(4).*xx.^3;
yy2=c2(1)+c2(2).*1./xx+c2(3).*log(xx)+c2(4).*xx.^2;
```



d) Ajustar en el sentido de mínimos cuadrados los datos de la tabla por una función del tipo: $v(x) = a_0 + \frac{a_1}{x}$. Plantear y resolver el sistema sobredeterminado H·c=b resultante. Indicar claramente los valores de los coeficientes (a_0 y a_1) de la función resultante. Calcular el error global del ajuste (suma de los residuos al cuadrado).

```
H3=[xi.^0 1./xi]
c3=H3\yi,            a0=  19.3016,  a1= -44.0344

residuo = yi-(c3(1)+c3(2).*1./xi)    -0.0653, -0.0173, 0.2030, -0.1204

error_ajuste=sum(residuo.^2),   error_ajuste =  0.0603
```

e) ¿Cuál es el valor proporcionado por las dos funciones de interpolación y el ajuste en x=3.3? Si el valor exacto es y=5.99, calcular el error relativo que se cometería al emplear cada una de las funciones de los apartados anteriores.

```
xp=3.3; yp=5.99;

yp1=c(1)+c(2)*xp+c(3)*xp^2+c(4)*xp^3
error1=abs(yp-yp1)/yp
6.2148    0.0375

yp2=c2(1)+c2(2)*1/xp+c2(3)*log(xp)+c2(4)*xp^2
error2=abs(yp-yp2)/yp
6.1928    0.0339

yp3=c3(1)+c3(2)*1/xp
error3=abs(yp-yp3)/yp
5.9579    0.0054
```

Ejercicio 2 COMPUTACIONAL (*Algoritmo para calcular la raíz cúbica*)

Se considera el método iterativo $x_{k+1} = \dfrac{2x_k + A / x_k^{\,2}}{3}$ para calcular la raíz de la función $f(x) = x^3 - A$, siendo A un **número real** cualquiera.

a) Sea $A = \pi$. Implementar la iteración anterior para calcular la raíz cúbica de A.

Almacenar en un vector x las 20 primeras iteraciones, partiendo de x(1)=1. Considerad que s**=**x(end).

Dibujar la gráfica de x respecto de las iteraciones, con el formato adecuado.

¿Es convergente la sucesión?. ¿A qué valor converge?. Comprobar que s es la raíz cúbica de A.

A partir del vector x y del valor de s, calcular el vector Erel de los errores relativos. Dibujar la gráfica de Erel, respecto de las iteraciones, con el formato adecuado.

A partir del vector Erel, calcular el vector Ncifras del número de cifras de precisión. Dibujar la gráfica de Ncifras, respecto de las iteraciones, con el formato adecuado.

¿Cuántas cifras de precisión se obtienen con 4, 5 y 6 iteraciones?.

¿Qué clase de convergencia (lineal, cuadrática,...) se ha producido?. Justificar.

b) Modificar el script anterior obtener con el mismo método iterativo la raíz cúbica de todos los elementos de un **vector**.

Calcular la raíz cúbica del vector A=0:0.01:2 realizando 6 iteraciones, a partir del valor 1. Sea s el resultado de la última iteración.

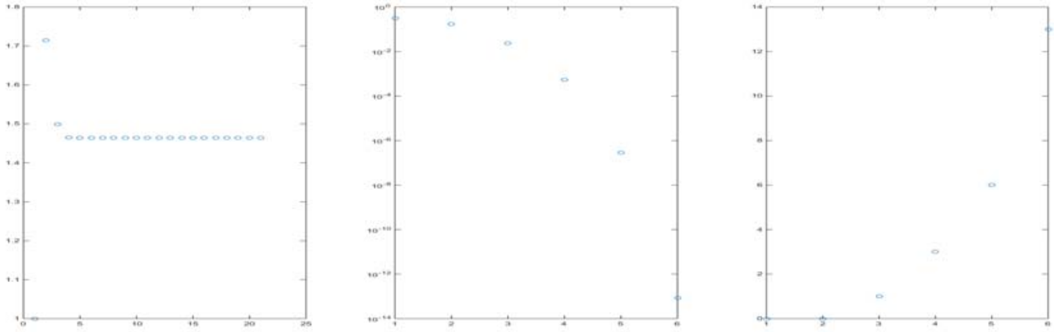
Calcular el error relativo y Ncifras, el número de cifras de precisión, de s respecto del vector A.^(1/3). Dibujar las gráficas de s y de Ncifras, con el formato adecuado. ¿Para qué valor del vector de A se obtiene menos precisión numérica?

Apartado a)

```
clear
A=pi;
x=zeros(1,21);
x(1)=1;
for k=1:20,
    x(k+1)=(2*x(k)+A/x(k)^2)/3;
end
subplot(131);plot(x,'o');
s=x(end),s-A^(1/3)
Erel=abs(x-s)/abs(s);
```

```
subplot(132);semilogy(Erel,'o');
Ncifras=floor(-log10(Erel));
subplot(133);plot(Ncifras,'o');
```

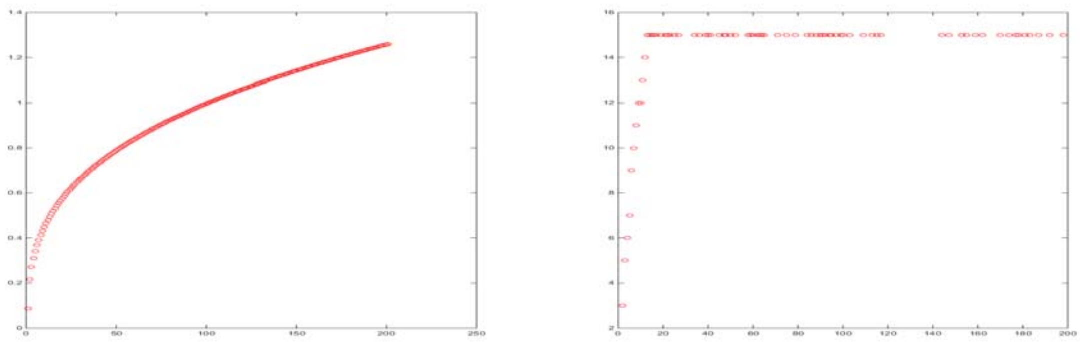
```
s = 1.4646
ans =    0
```



La sucesión es convergente al valor s = 1.4646. s-A^(1/3)= 0.
Con 4, 5 y 6 iteraciones se obtienen 3, 6 y 13 cifras de precisión, respectivamente. El número de cifras se duplica en cada iteración, por tanto, la convergencia es cuadrática.

Apartado b)

```
clear all
A=0:0.01:2;A=A';x=zeros(length(A),21);
x(:,1)=1;
for k=1:6,
    x(:,k+1)=(2*x(:,k)+A./x(:,k).^2)/3;
end
s=x(:,7);
subplot(121);plot(s,'ro')
Erel=abs(s-A.^(1/3))./abs(A.^(1/3));Ncifras=floor(-log10(Erel));
subplot(122);plot(Ncifras, 'ro')
```



Se obtiene menor precisión numérica para el valor 0.01.