3.3. Ideales y anillos cocientes

Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo y sea $\mathtt{I} \subseteq R$ un subanillo de $(R, +, \cdot)$.
Se dice que $\mathtt{I}$ es **ideal** si para todos $r \in R$ y $a \in \mathtt{I}$ se verifica que

$$r \cdot a \in \mathtt{I} \ \text{ y } \ a \cdot r \in \mathtt{I}$$

- $\mathtt{I}_0 = \{0_R\}$ se dice que es el ideal **trivial** de $(R, +, \cdot)$.
- Un ideal $\mathtt{I} \subseteq R$ de $(R, +, \cdot)$ se dice que es **propio** si $\mathtt{I} \neq R$.
- El mínimo ideal que contiene a $a_1, \cdots, a_n \in R$ se denomina ideal **generado por** $\{a_1, \cdots, a_n\}$, se nota $(a_1, \cdots, a_n)$ y es la intersección de todos los ideales que contienen a $\{a_1, \cdots, a_n\} \subseteq R$.
- Un ideal $\mathtt{I} \subseteq R$ de $(R, +, \cdot)$ se dice que es **principal** si existe $a \in R$ tal que $\mathtt{I} = (a)$.

Caracterización de ideal

Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo. Un subconjunto no vacío $\emptyset \neq \mathtt{I} \subseteq R$ es ideal de $(R, +, \cdot)$ si y sólo si

1. Para todos $a, b \in \mathtt{I}$ se verifica que $a - b \in \mathtt{I}$
2. Para todos $a \in \mathtt{I}$, $r \in R$ se verifica que $ar \in \mathtt{I}$ y $ra \in \mathtt{I}$

Propiedades

1. Sea $(R, +, \cdot)$ anillo conmutativo con identidad $\Rightarrow (a_1, \cdots, a_n) = \{r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n : r_k \in R\}$
2. Sea $(R, +, \cdot)$ anillo con identidad e $\mathtt{I} \subseteq R$ un ideal que contiene a $1_R \in R \Rightarrow \mathtt{I} = R$
3. Un cuerpo no tiene ideales propios no triviales.

Todo ideal de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es principal

En el anillo de los enteros $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, todo ideal es principal.

Anillo cociente

Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo y $\mathtt{I} \subseteq R$ subanillo de R. Se considera la relación de equivalencia módulo $\mathtt{I}$: $a, b \in R$, $a \sim_{\mathtt{I}} b \Leftrightarrow -a + b \in \mathtt{I}$. En el conjunto cociente $R/\mathtt{I} = \{[r]_{\mathtt{I}} = r + \mathtt{I} : r \in R\}$ se definen las operaciones de suma y producto módulo $\mathtt{I}$: $[r]_{\mathtt{I}} +_{\mathtt{I}} [s]_{\mathtt{I}} = [r + s]_{\mathtt{I}}$ y $[r]_{\mathtt{I}} \cdot_{\mathtt{I}} [s]_{\mathtt{I}} = [rs]_{\mathtt{I}}$.
$(R/\mathtt{I}, +_{\mathtt{I}}, \cdot_{\mathtt{I}})$ es un anillo, denominado **anillo cociente** $\Leftrightarrow$ $\mathtt{I}$ es un ideal de $(R, +, \cdot)$.

Ideales maximales

Un ideal propio $M \subset R$ de un anillo conmutativo $(R, +, \cdot)$ se dice que es un **ideal maximal** si para todo ideal I tal que $M \subseteq \mathtt{I} \subseteq R$ se verifica que $M = \mathtt{I}$ o $\mathtt{I} = R$

Caracterización de ideales maximales en $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

Sea $p \in \mathbb{Z}^+$. En $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ el ideal $(p) = p\mathbb{Z}$ es maximal $\Leftrightarrow$ p es primo

Ideales maximales y cuerpos

Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con identidad y sea M un ideal de R, entonces
M es maximal en R si y sólo si $(R/M, +_M, \cdot_M)$ es cuerpo.

3.3.17. Problemas

1. En el anillo $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ estudiar si los siguientes conjuntos son ideales y en caso afirmativo encontrar un sólo generador $a \in \mathbb{N}$ para cada uno de ellos. $\{2n + 3m : n, m \in \mathbb{Z}\}$, $\{3n + 6m : n, m \in \mathbb{Z}\}$, $\{an + bm : n, m \in \mathbb{Z}\}$, $\{5n + 10m + 15s : n, m, s \in \mathbb{Z}\}$, $\{3 \cdot 9m : m \in \mathbb{Z}\}$

2. Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo conmutativo. Para cada $a \in R$ se define $N(a) = \{r \in R : r \cdot a = 0_R\}$. Demostrar que $N(a)$ es un ideal de R.

3. Demostrar que $S = \{a + 2bi : a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$ es un subanillo de $\mathbb{Z}[i]$ pero no es ideal.

4. En el cuerpo de $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ determinar el menor subanillo que contiene a $\frac{1}{2}$ y el menor subanillo que contiene $\frac{2}{3}$. ¿Es alguno de ellos ideal?

5. Sabiendo que si $(R, +_1, \cdot_1)$ y $(S, +_2, \cdot_2)$ son anillos con identidad, entonces los ideales del anillo producto directo $(R \times S, +, \cdot)$ son de la forma $A \times B$ siendo A ideal de R y B ideal de S, hallar todos los ideales de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ y de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_4$.

6. Estudiar si el conjunto cociente $2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ tiene estructura de anillo. En caso afirmativo dar las tablas de las operaciones y determinar si es un anillo conmutativo, con identidad, de división y si es cuerpo.

7. Encontrar todos los ideales I de $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12}, \cdot_{12})$ y estudiar para cada uno de ellos si el anillo cociente $(\mathbb{Z}_{12}/I,\ +_{12_I}, \cdot_{12_I})$ es cuerpo.

8. Determinar el número de elementos que hay en cada uno de los siguientes anillos cocientes. Obtener la característica:

   a) $\mathbb{Z}[i]/\left(3 + i\right)$
   b) $\mathbb{Z}[i]/\left(2 + i\right)$
   c) $\mathbb{Z}[i]/\left(2 + 2i\right)$

9. Encontrar todos los ideales maximales de los siguientes anillos: $(\mathbb{Z}_8, +_8, \cdot_8)$, $(\mathbb{Z}_{10}, +_{10}, \cdot_{10})$, $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12}, \cdot_{12})$, $(\mathbb{Z}_{36}, +_{36}, \cdot_{36})$,$(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$.

10. Se considera el anillo $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$

    a) Encontrar un subanillo que no sea ideal.
    b) Demostrar que $M = \{(3x, y) : x, y \in \mathbb{Z}\}$ es un ideal maximal
    c) Demostrar que el ideal $I = \{(a, 0) : a \in \mathbb{Z}\}$ no es maximal

11. Obtener todos los ideales maximales del anillo $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{30}$ con las operaciones usuales componente a componente. Para cada ideal M calculado indicar el número de elementos del anillo cociente $(R/M, +_M, \cdot_M)$ ¿Se puede concluir que hay cuerpos con un número de elementos que no sea un número primo?