PRÁCTICA I. MÉTODO DE EULER

GRUPO FORMADO POR:

- Pablo Tesoro García DNI:50335327B Matrícula:20M062
- Sergio Heras Álvarez DNI:50648996Y Matrícula:20M025

Usaremos el DNI de Sergio Heras --> N=6

```
> restart;
> with(DEtools) :
> with(plots) :
> with(Student[NumericalAnalysis]) :
```

EJERCICIO 1

a)

---f1---

> $e1 := diff(y(x), x) = 6\cdot x^2 \cdot \exp(-2x) - y(x);$

$$e1 := \frac{d}{dx}\, y(x) = 6\, x^2\, e^{-2x} - y(x) \tag{1}$$

---f2---

> $e2 := diff(y(x), x) = 1 + \frac{6}{x^3} - \frac{1}{x}\cdot y(x);$

$$e2 := \frac{d}{dx}\, y(x) = 1 + \frac{6}{x^3} - \frac{y(x)}{x} \tag{2}$$

> $s1 := dsolve(\{e1,\ y(0) = 1\}, y(x));$

$$s1 := y(x) = \left(-6\left(x^2 + 2x + 2\right) e^{-x} + 13\right) e^{-x} \tag{3}$$

> $s2 := dsolve(\{e2,\ y(1) = 1\}, y(x));$

$$s2 := y(x) = \frac{x}{2} - \frac{6}{x^2} + \frac{13}{2x} \tag{4}$$

> $sol1 := unapply(rhs(s1), x);$

$$sol1 := x \mapsto \left(-6\cdot\left(x^2 + 2\cdot x + 2\right)\cdot e^{-x} + 13\right)\cdot e^{-x} \tag{5}$$

> $sol2 := unapply(rhs(s2), x);$

$$sol2 := x \mapsto \frac{x}{2} - \frac{6}{x^2} + \frac{13}{2\cdot x} \tag{6}$$

> $f1 := unapply(6\cdot x^2\cdot \exp(-2x) - y,\ (x, y));$

$$f1 := (x, y) \mapsto 6\cdot x^2\cdot e^{-2\cdot x} - y \tag{7}$$

> $f1(0, 1);$

$$-1 \tag{8}$$

> $f2 := unapply\left(1 + \frac{6}{x^3} - \frac{1}{x}\cdot y,\ (x, y)\right);$

$$f2 := (x, y) \mapsto 1 + \frac{6}{x^3} - \frac{y}{x} \tag{9}$$

> $f2(1, 1);$

$$6 \tag{10}$$

> $EULER :=$ **proc**$(f,\ x0, y0, h, x1)$

```
local n, x, y, k;
 x[0] := x0; y[0] := y0;
n := ceil((x1 - x0)/h);
 for k from 0 to n do
 x[k+1] := x[k] + h;
y[k+1] := y[k] + f(x[k], y[k])·h od;
y[n]
 end proc:
```

> $Digits := 4;$

$$Digits := 4 \tag{11}$$

---f1---

> $array(1..13, 1..2, [[h=0.1, 'Euler'], [x, y], seq([i, EULER(f1, 0, 1, 0.1, i)], i=0..1, 0.1)]);$

$$\begin{bmatrix} h=0.1 & Euler \\ x & y \\ 0 & 1 \\ 0.1 & 0.9 \\ 0.2 & 0.8149 \\ 0.3 & 0.7495 \\ 0.4 & 0.7042 \\ 0.5 & 0.6769 \\ 0.6 & 0.6644 \\ 0.7 & 0.6630 \\ 0.8 & 0.6692 \\ 0.9 & 0.6798 \\ 1.0 & 0.6922 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Calculamos las distintas aproximaciones para x∈[0,1], con saltos de 0.1, a través del método de Euler calculado anteriormente

---f2---

> $array(1..13, 1..2, [[h=0.1, 'Euler'], [x, y], seq([i, EULER(f2, 1, 1, 0.1, i)], i=1..2, 0.1)])$

(13)

$$\begin{bmatrix} h=0.1 & Euler \\ x & y \\ 1 & 1 \\ 1.1 & 1.6 \\ 1.2 & 2.005 \\ 1.3 & 2.285 \\ 1.4 & 2.482 \\ 1.5 & 2.623 \\ 1.6 & 2.726 \\ 1.7 & 2.802 \\ 1.8 & 2.859 \\ 1.9 & 2.903 \\ 2.0 & 2.938 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Calculamos las distintas aproximaciones para x∈[1,2], con saltos de 0.1, a través del método de Euler calculado anteriormente

b)

```
> EULERf :=proc( f,  x0, y0, h, x1)
   local  n, x, y, k;
    x[0] := x0; y[0] := y0;
   n := ceil( (x1 - x0)/h );
   for k  from 0 to n  do
    x[k + 1] := x[k] + h;
   y[k + 1] := y[k] + f(x[k], y[k])·h  od;
     array(1 ..n + 2, 1 ..3, [['x','y', 'h·f(x, y)'], seq([x[k], y[k], h·f(x[k], y[k])], k = 0 ..n)])
   end proc:
```

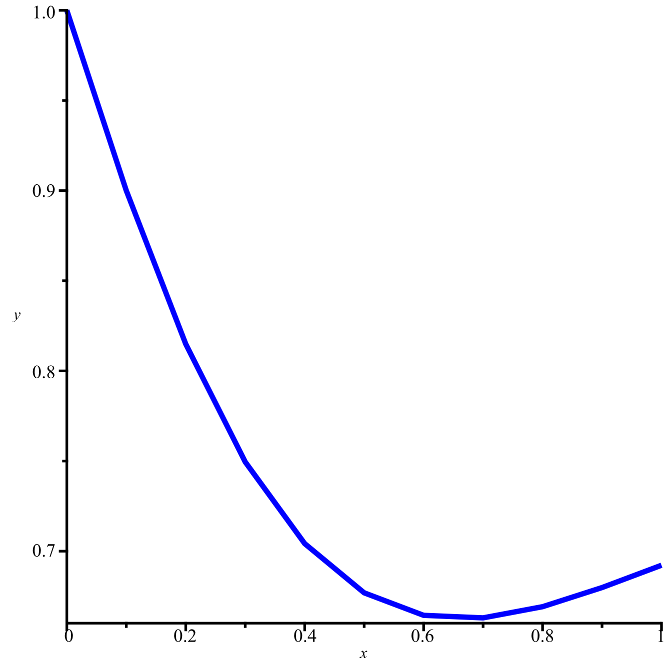
```
> EULERp :=proc( f,  x0, y0, h, x1)
   local  n, x, y,  t, k;
   x[0] := x0; y[0] := y0;
   n := ceil( (x1 - x0)/h );
    t := EULERf(f,  x0, y0, h, x1);
    seq([t[k, 1], t[k, 2]], k = 2 ..n + 2);
   end proc:
```

```
> EULERgraf :=proc( f, x0, y0, h, x1)
   local  n, p, m, M, i, g1, g2;
    p := EULERp( f, x0, y0, h, x1);
   n := ceil( (x1 - x0)/h );
   m := min(seq( p[i, 2], i = 1 ..n));
   M := max(seq( p[i, 2], i = 1 ..n));
```

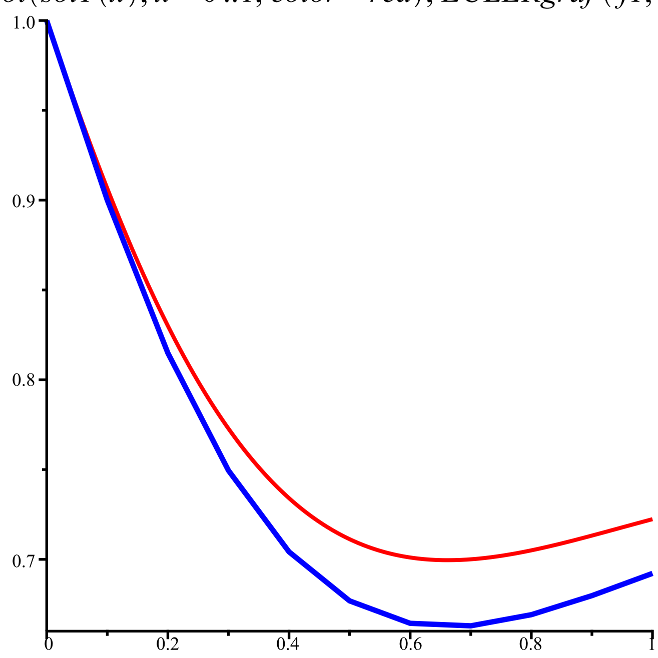
$g1 := plot([p], style = point);$
$g2 := plot([p], x = x0..x1, y = m..M, color = blue, thickness = 2);$
end proc:

---f1---

> $EULERgraf(f1, 0, 1, 0.1, 1);$



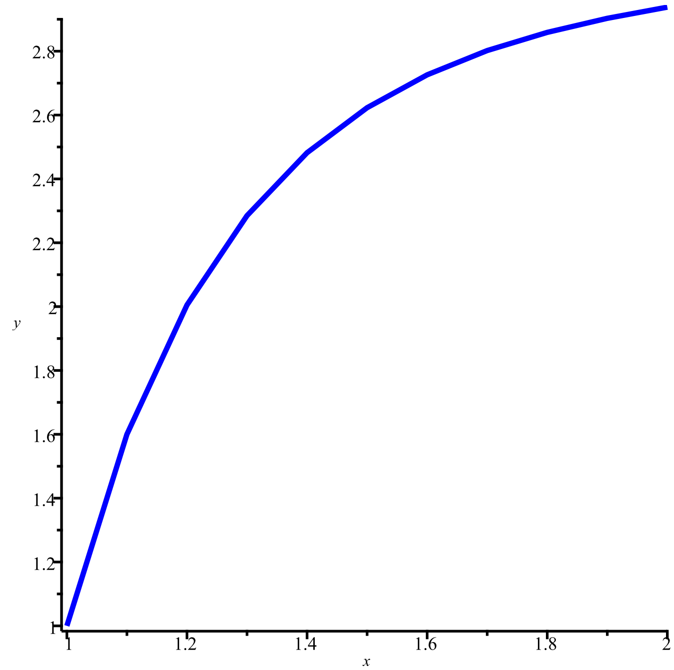
> $plots[display](\{plot(sol1(x), x = 0..1, color = red), EULERgraf(f1, 0, 1, 0.1, 1)\});$



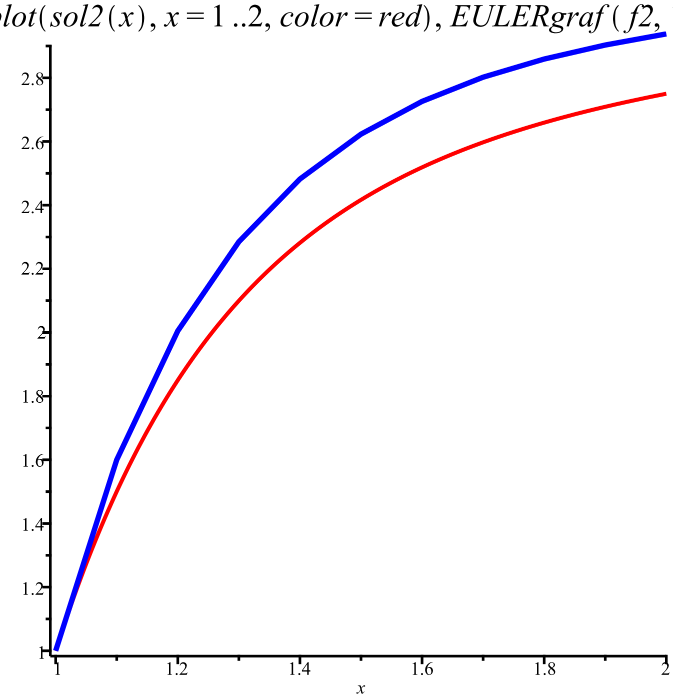
Observamos que para los primeros valores de x, el error en las aproximaciones es menor comparado con los errores que se obtienen cuando aumenta la x.

---f2---

> $EULERgraf(f2, 1, 1, 0.1, 2);$



> $plots[display](\{plot(sol2(x), x = 1..2, color = red), EULERgraf(f2, 1, 1, 0.1, 2)\});$



De igual manera que para la funcion f1, observamos que para los primeros valores de x, el error en las aproximaciones es menor comparado con los errores que se obtienen cuando aumenta la x.

c)

> $EULERerror := \textbf{proc}(f, x0, y0, h, x1)$
 local $n, p, ed, r, sol, k;$
 $n := \mathrm{ceil}\left(\frac{(x1 - x0)}{h}\right);$
 $p := EULERp(f, x0, y0, h, x1) :$
 $r := dsolve(\{diff(y(x), x) = f(x, y(x)), y(x0) = y0\}, y(x));$
 $sol := unapply(rhs(r), x);$
 $Digits := 5;$

```
array(1..n + 2, 1..4, [['x','yaprox','Sol','Error'], seq([p[k, 1], p[k, 2], sol(p[k, 1]),
    abs( sol(p[k, 1]) − p[k, 2])], k = 1..n + 1)]) ;
 end proc:
```

---f1---

```
> EULERerror(f1, 0, 1, 0.1, 1)
```

x	yaprox	Sol	Error
0	1	1	0
0.1	0.9	0.90665	0.00665
0.2	0.8149	0.83019	0.01529
0.3	0.7495	0.77268	0.02318
0.4	0.7042	0.73400	0.02980
0.5	0.6769	0.71146	0.03456
0.6	0.6644	0.70083	0.03643
0.7	0.6630	0.70019	0.03719
0.8	0.6692	0.70500	0.03580
0.9	0.6798	0.71312	0.03332
1.0	0.6922	0.72252	0.03032

(14)

Calculamos el error de las aproximaciones del método de Euler para $x \in [0,1]$ y, como bien vimos en la gráfica del apartado b, los errores en las aproximaciones aumentan a medida que aumenta la x.

```
> EULERerror(f2, 1, 1, 0.1, 2)
```

x	yaprox	Sol	Error
1	1	1	0
1.1	1.6	1.5004	0.0996
1.2	2.005	1.8500	0.1550
1.3	2.285	2.0997	0.1853
1.4	2.482	2.2817	0.2003
1.5	2.623	2.4168	0.2062
1.6	2.726	2.5188	0.2072
1.7	2.802	2.5975	0.2045
1.8	2.859	2.6593	0.1997
1.9	2.903	2.7090	0.1940
2.0	2.938	2.7500	0.1880

(15)

De igual manera que para la función f1, calculamos el error de las aproximaciones del método de Euler para $x \in [1,2]$ y, como bien vimos en la gráfica del apartado b, los errores en las aproximaciones aumentan a medida que aumenta la x.

d)

---f1---

> $array(1..12, 1..5, [[x, EULER\ h=0.1, EULER\ h=0.05, EULER\ h=0.025,'exacta'], seq([i, EULER(f1, 0, 1, 0.1, i), EULER(f1, 0, 1, 0.05, i), EULER(f1, 0, 1, 0.025, i), sol1(i)], i=0..1, 0.1)]);$

x	$EULER\ h=0.1$	$EULER\ h=0.05$	$EULER\ h=0.025$	$exacta$
0	1	1	1	1
0.1	0.9	0.9032	0.9048	0.9048
0.2	0.8149	0.8225	0.8261	0.8269
0.3	0.7495	0.7613	0.7670	0.7704
0.4	0.7042	0.7194	0.7267	0.7373
0.5	0.6769	0.6944	0.7028	0.7096
0.6	0.6644	0.6831	0.6921	0.7025
0.7	0.6630	0.6820	0.6910	0.7002
0.8	0.6692	0.6875	0.6962	0.7054
0.9	0.6798	0.6969	0.7051	0.7156
1.0	0.6922	0.7076	0.7151	0.7211

(16)

Al calcular la aproximaciones con el método de Euler, observamos que a medida que disminuye la h, las aproximaciones se acercan cada vez mas al valor exacto de la función.

---f2---

> $array(1..12, 1..5, [[x, EULER\ h=0.1, EULER\ h=0.05, EULER\ h=0.025,'exacta'], seq([i, EULER(f2, 1, 1, 0.1, i), EULER(f2, 1, 1, 0.05, i), EULER(f2, 1, 1, 0.025, i), sol2(i)], i=1..2, 0.1)]);$

x	$EULER\ h=0.1$	$EULER\ h=0.05$	$EULER\ h=0.025$	$exacta$
1	1	1	1	1
1.1	1.6	1.547	1.523	1.501
1.2	2.005	1.923	1.885	1.850
1.3	2.285	2.187	2.142	2.100
1.4	2.482	2.376	2.327	2.282
1.5	2.623	2.514	2.464	2.418
1.6	2.726	2.617	2.566	2.518
1.7	2.802	2.694	2.645	2.597
1.8	2.859	2.754	2.707	2.659
1.9	2.903	2.801	2.755	2.709
2.0	2.938	2.839	2.795	2.750

(17)

De igual manera que en la función f1, al calcular la aproximaciones con el método de Euler, observamos que a medida que disminuye la h, las aproximaciones se acercan cada vez mas al valor exacto de la función.

e)

```
> EULERMEJORADO := proc(f, x0, y0, h, x1)
   local n, x, y, k;
   x[0] := x0; y[0] := y0;
  n := ceil((x1 - x0)/h);
   for k from 0 to n do
   x[k + 1] := x[k] + h;
  y[k + 1] := y[k] + ((f(x[k], y[k]) + f(x[k] + h, y[k] + h·f(x[k], y[k])))·h)/2  od;
  y[n]
   end proc:
```

---f1---

```
> array(1..13, 1..2, [[ h = 0.1,'Euler'], [x, y], seq([i, EULERMEJORADO(f1, 0, 1, 0.1, i)], i = 0
      ..1, 0.1)])
```

$h = 0.1$	*Euler*
x	y
0	1
0.1	0.9074
0.2	0.8314
0.3	0.7744
0.4	0.7357
0.5	0.7128
0.6	0.7024
0.7	0.7012
0.8	0.7060
0.9	0.7140
1.0	0.7229

(18)

Calculamos las distintas aproximaciones para x∈[0,1], con saltos de 0.1, a través del método de Euler mejorado calculado anteriormente.

```
> array(1..12, 1..5, [[ x, MEJORADO h = 0.1, MEJORADO h = 0.05, MEJORADO h = 0.025,
      'exacta'], seq([i, EULERMEJORADO(f1, 0, 1, 0.1, i), EULERMEJORADO(f1, 0, 1, 0.05,
      i), EULERMEJORADO(f1, 0, 1, 0.025, i), sol1(i)], i = 0..1, 0.1)]);
```

x	$MEJORADO\ h=0.1$	$MEJORADO\ h=0.05$	$MEJORADO\ h=0.025$	$exacta$
0	1	1	1	1
0.1	0.9074	0.9068	0.9066	0.9048
0.2	0.8314	0.8304	0.8302	0.8269
0.3	0.7744	0.7732	0.7730	0.7704
0.4	0.7357	0.7345	0.7343	0.7373
0.5	0.7128	0.7117	0.7115	0.7096
0.6	0.7024	0.7014	0.7012	0.7025
0.7	0.7012	0.7003	0.7001	0.7002
0.8	0.7060	0.7052	0.7050	0.7054
0.9	0.7140	0.7133	0.7131	0.7156
1.0	0.7229	0.7224	0.7223	0.7211

(19)

Al calcular la aproximaciones con el método de Euler mejorado, de igual manera que con el método de Euler observamos que a medida que disminuye la h, las aproximaciones se acercan cada vez mas al valor exacto de la función.

---f2---

> $array(1..13, 1..2, [[\ h=0.1,'Euler'], [x, y], seq([i, EULERMEJORADO(f2, 1, 1, 0.1, i)], i=1..2, 0.1)])$

$h=0.1$	$Euler$
x	y
1	1
1.1	1.502
1.2	1.853
1.3	2.103
1.4	2.285
1.5	2.420
1.6	2.522
1.7	2.601
1.8	2.663
1.9	2.713
2.0	2.754

(20)

Calculamos las distintas aproximaciones para x∈[1,2], con saltos de 0.1, a través del método de Euler mejorado calculado anteriormente

> $array(1..12, 1..5, [[\ x, MEJORADO\ h=0.1, MEJORADO\ h=0.05, MEJORADO\ h=0.025, 'exacta'], seq([i, EULERMEJORADO(f2, 1, 1, 0.1, i), EULERMEJORADO(f2, 1, 1, 0.05, i), EULERMEJORADO(f2, 1, 1, 0.025, i), sol2(i)], i=1..2, 0.1)]);$

x	MEJORADO $h=0.1$	MEJORADO $h=0.05$	MEJORADO $h=0.025$	exacta
1	1	1	1	1
1.1	1.502	1.501	1.500	1.501
1.2	1.853	1.851	1.849	1.850
1.3	2.103	2.101	2.099	2.100
1.4	2.285	2.283	2.281	2.282
1.5	2.420	2.418	2.416	2.418
1.6	2.522	2.520	2.518	2.518
1.7	2.601	2.599	2.597	2.597
1.8	2.663	2.661	2.659	2.659
1.9	2.713	2.711	2.709	2.709
2.0	2.754	2.752	2.750	2.750

(21)

Al calcular la aproximaciones con el método de Euler mejorado, de igual manera que con el método de Euler observamos que a medida que disminuye la h, las aproximaciones se acercan cada vez mas al valor exacto de la función.

f)

---f1---

```
> array(1..12, 1..6, [[x, EULER h = 0.1, EULER h = 0.05, MEJ h = 0.1, MEJ h = 0.05,'exacta'],
    seq([i, EULER(f1, 0, 1, 0.1, i), EULER(f1, 0, 1, 0.05, i), EULERMEJORADO(f1, 0, 1, 0.1,
    i), EULERMEJORADO(f1, 0, 1, 0.05, i), sol1(i)], i = 0..1, 0.1)]);
```

x	EULER $h=0.1$	EULER $h=0.05$	MEJ $h=0.1$	MEJ $h=0.05$	exacta
0	1	1	1	1	1
0.1	0.9	0.9032	0.9074	0.9068	0.9048
0.2	0.8149	0.8225	0.8314	0.8304	0.8269
0.3	0.7495	0.7613	0.7744	0.7732	0.7704
0.4	0.7042	0.7194	0.7357	0.7345	0.7373
0.5	0.6769	0.6944	0.7128	0.7117	0.7096
0.6	0.6644	0.6831	0.7024	0.7014	0.7025
0.7	0.6630	0.6820	0.7012	0.7003	0.7002
0.8	0.6692	0.6875	0.7060	0.7052	0.7054
0.9	0.6798	0.6969	0.7140	0.7133	0.7156
1.0	0.6922	0.7076	0.7229	0.7224	0.7211

(22)

Al comparar las aproximaciones del método de Euler con las del método de Euler mejorado, podemos afirmar que los resultados obtenidos son los esperados, ya que los valores obtenidos a través del método de Euler mejorado son más precisos (se acercan más a la solución exacta) que los obtenidos a través del método de Euler.

---f2---

> $array(1..12, 1..6, [[x, EULER\ h=0.1, EULER\ h=0.05, MEJ\ h=0.1, MEJ\ h=0.05, 'exacta'],$
> $seq([i, EULER(f2, 1, 1, 0.1, i), EULER(f2, 1, 1, 0.05, i), EULERMEJORADO(f2, 1, 1, 0.1, i), EULERMEJORADO(f2, 1, 1, 0.05, i), sol2(i)], i=1..2, 0.1)]);$

x	EULER h = 0.1	EULER h = 0.05	MEJ h = 0.1	MEJ h = 0.05	exacta
1	1	1	1	1	1
1.1	1.6	1.547	1.502	1.501	1.501
1.2	2.005	1.923	1.853	1.851	1.850
1.3	2.285	2.187	2.103	2.101	2.100
1.4	2.482	2.376	2.285	2.283	2.282
1.5	2.623	2.514	2.420	2.418	2.418
1.6	2.726	2.617	2.522	2.520	2.518
1.7	2.802	2.694	2.601	2.599	2.597
1.8	2.859	2.754	2.663	2.661	2.659
1.9	2.903	2.801	2.713	2.711	2.709
2.0	2.938	2.839	2.754	2.752	2.750

(23)

De igual manera que para la función f1, al comparar las aproximaciones del método de Euler con las del método de Euler mejorado, podemos afirmar que los resultados obtenidos son los esperados, ya que los valores obtenidos a través del método de Euler mejorado son más precisos (se acercan más a la solución exacta) que los obtenidos a través del método de Euler.

Método de Runge-Kutta

> $interface(rtablesize=20)$

$$[10, 10] \quad (24)$$

---f1---

> $RungeKutta(e1, y(0)=1, x=1, submethod=rk4, numsteps=10, output=information)$

(25)

x	[Maple's numeric solution]	[Runge-Kutta 4th Order]	[Error]
0.	1.	1.	0.
0.1000	0.9065	0.9065	0.00001696
0.2000	0.8300	0.8300	0.00001489
0.3000	0.7728	0.7728	0.00001785
0.4000	0.7341	0.7341	0.00002087
0.5000	0.7112	0.7113	0.00005050
0.6000	0.7010	0.7010	0.00004397
0.7000	0.7000	0.7000	0.00003687
0.8000	0.7050	0.7050	0.00003014
0.9000	0.7132	0.7132	0.00003929
1.	0.7224	0.7224	0.00002488

(25)

Al observar los resultados obtenidos, podemos afirmar que el método de Runge-Kutta es mucho más preciso que el método de Euler mejorado, y por tanto mucho más preciso también que el método de Euler, ya que los errores obtenidos son mucho menores que los anteriores.

---f2---

> $RungeKutta(e2, y(1) = 1, x = 2, submethod = rk4, numsteps = 10, output = information)$

x	[Maple's numeric solution]	[Runge-Kutta 4th Order]	[Error]
1.	1.	1.	0.
1.100	1.500	1.500	0.0004149
1.200	1.850	1.850	$2.466\ 10^{-6}$
1.300	2.100	2.100	0.0002931
1.400	2.282	2.282	0.0003645
1.500	2.417	2.417	0.0003305
1.600	2.519	2.519	0.0002472
1.700	2.597	2.597	0.0004076
1.800	2.659	2.659	0.0002619
1.900	2.709	2.709	$5.272\ 10^{-6}$
2.	2.750	2.750	$2.400\ 10^{-6}$

(26)

De igual manera que para función f1,al observar los resultados obtenidos, podemos afirmar que el método de Runge-Kutta es mucho más preciso que el método de Euler mejorado, y por tanto mucho más preciso también que el método de Euler, ya que los errores obtenidos son mucho menores que los anteriores.

EJERCICIO 2

a)

> $e3 := diff(\, y(x), x) = \dfrac{(2\,x+6)}{5\cdot y(x)^4+2\cdot y(x)}$;

$$e3 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y(x) = \frac{2\,x+6}{5\,y(x)^4+2\,y(x)} \tag{27}$$

> $s3 := dsolve(\{e3,\ y(2)=1\}, y(x), implicit)$;

$$s3 := \frac{x^2}{2} + 3\,x - \frac{y(x)^5}{2} - \frac{y(x)^2}{2} - 7 = 0 \tag{28}$$

> $sol3 := unapply(lhs(s3), x)$;

$$sol3 := x \mapsto \frac{x^2}{2} + 3\cdot x - \frac{y(x)^5}{2} - \frac{y(x)^2}{2} - 7 \tag{29}$$

Calculamos la solución implícita de Phi(x,y)=0.

b)

> $f3 := unapply\left(\dfrac{(2\,x+6)}{5\cdot y^4+2\cdot y}, (x,y)\right)$;

$$f3 := (x,y) \mapsto \frac{2\cdot x+6}{5\cdot y^4+2\cdot y} \tag{30}$$

> $f3(2,1)$

$$\frac{10}{7} \tag{31}$$

> $array(1..12, 1..7, [[\,x, h=0.1, h=0.05, h=0.025, MEJ\,h=0.1, MEJ\,h=0.05, MEJ\,h=0.025\,],$
$seq([i, EULER(f3, 2, 1, 0.1, i), EULER(f3, 2, 1, 0.05, i), EULER(f3, 2, 1, 0.025, i),$
$EULERMEJORADO(f3, 2, 1, 0.1, i), EULERMEJORADO(f3, 2, 1, 0.05, i),$
$EULERMEJORADO(f3, 2, 1, 0.025, i)\,], i=2..3, 0.1)\,]);$

x	$h=0.1$	$h=0.05$	$h=0.025$	$MEJ\,h=0.1$	$MEJ\,h=0.05$	$MEJ\,h=0.025$
2	1	1	1	1	1	1
2.1	1.143	1.129	1.124	1.119	1.119	1.119
2.2	1.237	1.221	1.215	1.208	1.208	1.208
2.3	1.310	1.294	1.288	1.280	1.281	1.281
2.4	1.371	1.356	1.349	1.341	1.342	1.342
2.5	1.424	1.410	1.403	1.395	1.396	1.396
2.6	1.471	1.457	1.450	1.443	1.444	1.444
2.7	1.514	1.500	1.493	1.486	1.487	1.487
2.8	1.553	1.539	1.533	1.526	1.527	1.527
2.9	1.589	1.576	1.569	1.563	1.564	1.563
3.0	1.623	1.610	1.604	1.598	1.599	1.598

(32)

Podemos observar que, al igual que en el apartado f) del ejercicio 1, el método de Euler mejorado es más preciso que el método de Euler. Además, podemos concretar que la solución exacta será próxima a 1.598, ya que al ser la aproximación obtenida con la h más pequeña (h=0.025) y al haberla obtenido a través del método de Euler mejorado, será la más precisa.

c)

> $sol3 := unapply(lhs(s3), (x, y));$

$$sol3 := (x, y) \rightarrow \frac{1}{2} x^2 + 3x - \frac{1}{2} y(x)^5 - \frac{1}{2} y(x)^2 - 7 \tag{33}$$

> $array(1..12, 1..3, [[x, EULER\ Residuos, EULERMEJORADO\ Residuos], seq([i, \mathrm{abs}(sol3(i, EULER(f3, 2, 1, 0.1, i))), \mathrm{abs}(sol3(i, EULERMEJORADO(f3, 2, 1, 0.1, i)))], i = 2..3, 0.1)])$

(34)

x	*EULER Residuos*	*EULERMEJORADO Residuos*
2	0	0
2.1	0.123	0.002
2.2	0.193	0.004
2.3	0.242	0.008
2.4	0.282	0.013
2.5	0.322	0.005
2.6	0.346	0.011
2.7	0.384	0.013
2.8	0.403	0.018
2.9	0.427	0.014
3.0	0.447	0.013

Calculamos los residuos de las aproximaciones calculadas en el apartado b), y podemos observar que los residuos del método de Euler mejorado son menores que los del método de Euler, lo que era de esperar ya que es un método más preciso.