1. **(2 puntos)**

(a) En un juego de rol hay 6 dados dodecaédricos de distintos colores. Halla la función generatriz para el número de formas en que se puede obtener suma n cuando se lanzan los 6 dados. Calcula el número de formas en que se puede obtener la suma 40.

(b) Halla la función generatriz de la sucesión definida por la siguiente relación de recurrencia:

$a_n = 3a_{n-1} + 2^n \quad n \geq 2, \qquad a_0 = 3,\ a_1 = 1$

SOL.:

(a) La función generatriz es $A(x) = (x+x^2+x^3 + \ldots + x^{12})^6 = \dfrac{x^6(1-x^{12})^6}{(1-x)^6}$

Ahora se debe calcular el coeficiente de x^{40} en A(x), es decir, el coeficiente de x^{34} en $(1 - x^{12})^6 w$, siendo $w = (1+ x+ x^2 + \ldots)^6$

Como $(1 - x^{12})^6 = 1 - 6x^{12} + \binom{6}{2}x^{24} - \cdots$ resulta que

a_{34} = (coef. de x^{34} en w) – 6(coef. de x^{22} en w) + 15(coef. de x^{10} en w) =

$$= \binom{34+6-1}{34} - 6\binom{22+6-1}{22} + \binom{6}{2}\binom{10+6-1}{10} = \binom{39}{5} - 6\binom{27}{5} + \binom{6}{2}\binom{15}{5}$$

(b) Sea $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la función generatriz de la sucesión solución

Aplicamos el procedimiento general de construcción de la función generatriz a la relación

Primero multiplicamos por x^n $\qquad a_n\ x^n = 3\ a_{n-1}\ x^n + 2^n x^n \qquad n\geq 2$

Sumamos para los valores de n $\qquad \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 3\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 2^n x^n$

Por tanto,

$$A(x) = 3 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 3 + x + 3x\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k + \sum_{n=2}^{\infty}(2x)^n = 3 + x + 3x(A(x) - 3) + \sum_{n=2}^{\infty}(2x)^n =$$

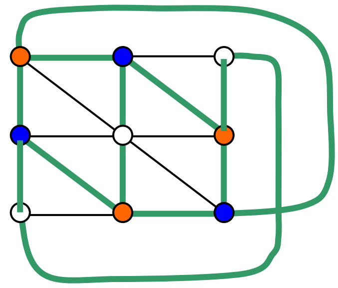
$$= 3 - 8x + 3xA(x) + \frac{1}{1-2x} - 1 - 2x \qquad \text{Luego} \qquad A(x) = \frac{3 - 14x + 20x^2}{(1-2x)(1-3x)}$$

2. **(2 puntos)**

a) Enuncia la fórmula de Euler de los grafos planos. Demuestra la fórmula correspondiente para grafos no conexos.
b) Justifica cuál es el número de aristas de un grafo planar maximal de orden n.
c) Utiliza el apartado anterior para demostrar que un grafo planar maximal con $\Delta \leq 5$ tiene a lo sumo 12 vértices.
d) Averigua si es planar el grafo de la figura.

SOL.:
La fórmula para grafos planos conexos es: $n - q + r = 2$
Para grafos planos con c componentes conexas es: $n - q + r = c + 1$
Un grafo planar maximal de orden n tiene $3n - 6$ aristas
Si $\Delta \leq 5$ entonces el número de aristas cumple que $2q = \Sigma d(v) \leq 5n$, luego $n \leq 12$

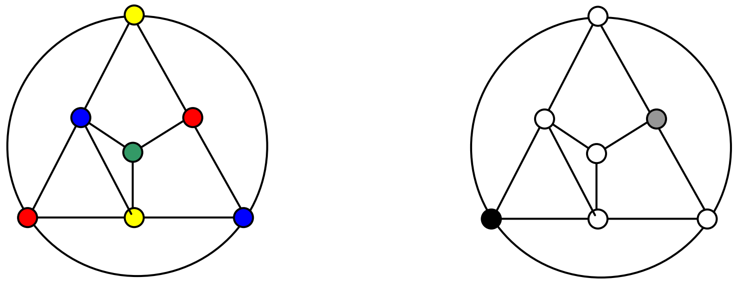
El grafo no es planar porque contiene una subdivisión de $K_{3,3}$



3. **(2 puntos)**

(a) Define conjunto independiente, número de independencia y número cromático de un grafo.

(b) ¿Qué relaciones conoces entre independencia, número cromático y grado máximo? Demuestra una de ellas. Comprueba que se cumplen en el grafo H de la figura.



A la izquierda tenemos una 4-coloración, luego $\chi \leq 4$
La elección del vértice negro (cualquiera de los 3 del ciclo exterior) como elemento en un conjunto independiente I deja solo dos candidatos conectados por una arista para ampliar I. Luego $|I| = 2$
Si el elegido es el vértice central quedan los tres del ciclo exterior para ampliar I. Luego $|I| = 2$
Y si el elegido fuera el vértice gris quedan los tres del triángulo inferior izquierdo. Y también $|I| = 2$

Por tanto, $\chi \geq 7/2$, es decir, $\chi = 4$

4. **(2 puntos)**

Sean $T_1 = (V_1, A_1)$ y $T_2 = (V_2, A_2)$ dos árboles de n y $n + 2$ vértices, respectivamente, donde $V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $V_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_n, w_{n+1}, w_{n+2}\}$. Se considera el conjunto de aristas $A_3 = \{\{v_1, w_1\}, \ldots, \{v_n, w_n\}\}$, que unen vértices de T_1 con vértices de T_2, quedando dos vértices de T_2 sin unir a T_1. Se define el grafo $H = (V, A)$, donde $V = V_1 \cup V_2$ y $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.
En los apartados a), b), c), construye un grafo H utilizando el método anterior que además satisfaga:

(a) H tiene 6 vértices, es euleriano y hamiltoniano.

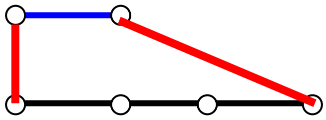
(b) H tiene 8 vértices, es hamiltoniano y no es euleriano.

(c) H tiene 10 vértices, es euleriano y no es hamiltoniano.

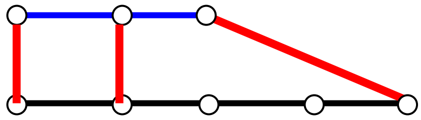
(d) Demuestra que si H es un grafo, obtenido utilizando el método descrito, con $2n + 2$ vértices, siendo $n \geq 3$ número impar, entonces H no es euleriano.

SOL.:

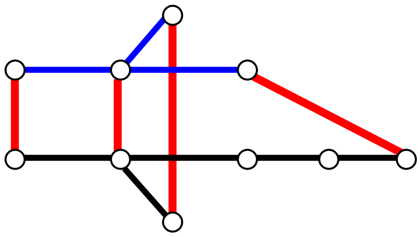
(a)



(b)



(c)



T_1 en **azul**
T_2 en **negro**
Las aristas de A_3 en **rojo**

(d) En el árbol T_1 habrá un número par de vértices impares. Estos se convierten en vértices pares en H. Luego siempre habrá al menos un vértice par en T_1 que se convierte en vértice impar en H. Por tanto H no es euleriano.

5. **(2 puntos)**

Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Todo grafo bipartido y euleriano tiene un número par de aristas.

(b) Existen grafos no planares de 8 vértices y 18 aristas.

(c) Un algoritmo 2-aproximado obtiene dos soluciones aproximadas a un problema.

SOL.: (a) y (b) ciertas, (c) falsa