0.1. Lección 1: Introducción a la formalización matemática.

En esta lección haremos una breve introducción a la formalización matemática.
En primer lugar usaremos el conjunto de los números naturales, que denotamos por $\mathbb{N}$ y consiste en los números con los que podemos contar 1,2,......, es decir,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

El número 0 no es un número natural (∞ no es ningún número).
En el conjunto de los números naturales distinguimos los números naturales pares y los números naturales impares. Más precisamente,

1. Un número natural n es par si se puede escribir de la forma $n = 2k$ para algún número natural k.

2. Un número natural n es impar si se puede escribir de la forma $n = 2k - 1$ para algún número natural k.

Todo número natural es par o impar, no pudiendo ser las dos cosas a la vez.
Recordamos algunas nociones sencillas de conjuntos.

0.1.1. Formas de definir un conjunto:

Los conjuntos se pueden definir por extensión o por compresión:

1. **Por extensión:** (*o enumeración*) enumerando los elementos del conjunto, por ejemplo, $A = \{1, 2, 3\}$

2. **Por comprensión**: (*o caracterización*) mediante una propiedad que verifican todos los elementos del conjunto, es decir de la siguiente forma:

$$A = \{a \mid \quad a \, \text{verifica la propiedad P}\}$$

Por ejemplo, el conjunto de los números naturales impares se define como el conjunto de números naturales que tienen la propiedad de ser impares

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \quad n \, \text{es impar}\}.$$

Un mismo conjunto puede ser definido de muy diversas formas, por ejemplo,

$A = \{1, 2, 3\} = \{n \in \mathbb{N} | \quad n \leq 3\} = \{n \in \mathbb{N} | \quad n < 4\} = \{n \in \mathbb{N} | \quad n^2 \leq 9\}.$

Ejemplos: Define por comprensión (caracterización) los siguientes conjuntos:

1. $A = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28\}$=

2. $B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...\}$=

3. $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ...\}$=

4. $D = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...\}$=

0.1.2. Pertenencia, unión, intersección, contenido y complementario

1. Con el símbolo $\in$ denotamos la **pertenencia** o no al conjunto; así $a \in A$ significa que a pertenece al conjunto A, es decir, es un elemento de dicho conjunto, y con el símbolo $\notin$ denotamos la no pertenencia, así $a \notin A$ significa que a no es un elemento del conjunto A. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ se tiene que $1 \in A$ pero $4 \notin A$.

2. **Unión** de dos conjuntos: Dados dos conjuntos A y B la unión es

   $$A \cup B = \{x| \quad x \in A \text{ o } x \in B\}$$

   De forma general se puede definir la unión de dos, tres o más conjuntos.

3. **Intersección** de dos conjuntos : Dados dos conjuntos A y B la intersección es

   $$A \cap B = \{x| \quad x \in A \text{ y } x \in B\}$$

   De forma general se puede definir la intersección de dos, tres o más conjuntos.

4. **Subconjunto**: un conjunto B es un subconjunto de A si todo elemento de B es elemento de A y se denota como $B \subset A$, es decir, B está contenido en A.

5. **Complementario:** Dado un conjunto A y un subconjunto suyo B, el complementario de B denotado como B^c es el conjunto de los elementos de A que no pertenecen a B; es importante saber el conjunto ambiente cuando usamos la notación de complementario para evitar confusión. Por ello usaremos la notación $A \setminus B$ que significa A *menos* B y denota el conjunto de los elementos de A que no pertenecen a B, es decir,

   $$A \setminus B = \{a| \quad a \in A \text{ y } a \notin B\}$$

0.1.3. Proposiciones y cuantificadores lógicos : Para todo y Existe

$\forall$ que significa *para todo* o *para cada*.
$\exists$ que significa *existe* o *hay algún*.
Enlace de cuantificadores $|$, o : que significa *tal que*.
Interesante: el cuantificador $\exists a \in A$ significa que hay algún elemento en A; para afirmar que *sólo hay un elemento* utilizamos el cuantificador lógico $\exists! a \in A$ que significa *existe un único elemento de* A.
Afirmación 1 : Todos los bolígrafos de esta clase son azules.
Expresemos este enunciado utilizando el lenguaje matemático: si A es el conjunto de todos los bolígrafos de la clase y P es la propiedad de ser de color azul diríamos:
Afirmación 1: Para todo $a \in A$ se tiene que a verifica P; es decir,
$\boxed{\forall a \in A,\ a \text{ verifica } P}$
La negación de $\forall$ es $\exists$. De hecho, la negación de 1 es
Negación de 1: Hay algún bolígrafo en la clase que NO es azul.
Lo cual en lenguaje matemático sería:
Negación de afirmación 1: Existe $a \in A$ tal que a no verifica P; es decir, a verifica no P.
$\boxed{\exists a \in A \mid \text{a verifica no } P}$

Veamos ahora una afirmación con *existe* y su *negación*. Supongamos que en la clase hay al menos un bolígrafo rojo, lo cual expresamos como
Afirmación 2: Hay algún bolígrafo rojo en la clase.
De la misma forma que antes, utilizando la notación matemática esto lo expresaríamos como:
Afirmación 2: Existe $a \in A$ tal que a verifica P, es decir
$\boxed{\exists a \in A \mid a \text{ verifica } P}$
Para la negación de la afirmación 2 uno diría que ningún bolígrafo de la clase es rojo, o lo que es lo mismo, que todos los bolígrafos de la clase no son rojos, es decir,
Negación de afirmación 2: Para todo $a \in A$, a no verifica P, es decir,
$\boxed{\forall a \in A,\ a \text{ no verifica } P}$
De forma más general:

$\boxed{\exists a \in A \mid a \text{ verifica } P}$ **Negación** $\longrightarrow$ $\boxed{\forall a \in A,\ a \text{ verifica no } P}$

$\boxed{\forall a \in A,\ a \text{ verifica } P}$ **Negación** $\longrightarrow$ $\boxed{\exists a \in A \mid a \text{ verifica no } P}$

0.1.4. Ejemplos:

Vemos ejemplos de afirmaciones y negaciones y cuál es cierta de las dos:

1: $\forall x \in (0, \infty)$ se tiene que $x^2 - x > 0$.

2: $\exists x \in (0, \infty)$ tal que $x^2 - x > 0$.

3 Para todo número natural n se tiene que $n < n^2$.

1 $\equiv$ Para todo número natural n se tiene que $n < n^2$.

No 1 $\equiv$

2 $\equiv$ Para todo número natural n se tiene que $n > 2$.

No 2 $\equiv$

3 $\equiv$ Para cada número natural par n hay un número natural impar k tal que $k < n$.

No 3 $\equiv$