2.2. Subgrupos normales y grupos cocientes

Sea $(G, *)$ un grupo y $N \leq G$. La clase lateral izquierda de a es $[a]_N = aN = \{a * h : h \in N\}$.
Se denomina **clase lateral derecha** de $a \in G$ al conjunto

$$Na = \{h * a : h \in N\}$$

El subgrupo $N \leq G$ se dice que es **normal** en G, y se escribe $N \trianglelefteq G$, si para todo $a \in G$ se verifica

$$[a]_N = aN = Na$$

Teorema del grupo cociente

Sea $(G, *)$ un grupo y $N \trianglelefteq G$. Entonces $(G/N, *_N)$ es un grupo de orden $|G/N| = [G : N]$, siendo $G/N = \{gN : g \in G\}$ el conjunto de las clases laterales de N en G con la operación $aN *_N bN = (a*b)N$. Dicho grupo recibe el nombre de **grupo cociente** de G sobre N.

Caracterización de subgrupos normales

Sea $(G, *)$ un grupo y $N \leq G$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) Para todo $a \in G$ se verifica que $aN = Na$.

ii) Para todo $a \in G$ se verifica que $aNa^{-1} \subseteq N$.

iii) Para todo $a \in G$ se verifica que $aNa^{-1} = N$.

Los subgrupos de un grupo abeliano son normales

Si $(G, *)$ es un grupo abeliano y $H \leq G$, entonces $H \trianglelefteq G$

Los subgrupos de índice 2 son normales

Si $(G, *)$ es un grupo finito y $H \leq G$ tal que $[G : H] = 2$, entonces $H \trianglelefteq G$

Los subgrupos únicos con su orden son normales

Si $(G, *)$ es un grupo finito y $H \leq G$ es el único subgrupo de G cuyo orden es $|H|$ entonces $H \trianglelefteq G$

Factorización de un grupo

Sea $(G, \cdot)$ grupo y $H, K \trianglelefteq G$ tales que $G = HK$ y $H \cap K = \{e_G\}$, entonces $G \approx H \times K$.
Además $G/H \approx K$ y $G/K \approx H$.

Definición de grupo simple

Un grupo no trivial $(G, *)$ se dice que es **simple** si no tiene subgrupos normales propios no triviales.

Observaciones

- Para todo $p \in \mathbb{N}$ primo, el grupo $(\mathbb{Z}_p, +_p)$ es simple.
- Para todo $n \geq 5$, el grupo alternado $(A_n, \circ)$ es simple.
- Grupos tipo Lie y 26 esporádicos.
- Todo grupo simple no abeliano, tiene orden par.

2.2.14. Problemas

1. Estudiar si H es un subgrupo normal de $(G,*)$ en cada caso:

   a) $H = \{(1), (1,2)\}$, $G = S_3$

   b) $H = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $ac \neq 0\}$, $G = GL_2(\mathbb{R})$

   c) $H = SL_2(\mathbb{R})$, $G = GL_2(\mathbb{R})$

   d) $H = A_4$, $G = S_4$

   e) $H = \{(1), (1,2,3), (1,3,2)\}$, $G = A_5$

   f) $H = D_4$, $G = S_4$

   g) $H = \{1, -1, i, -i\}$ en $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ grupo de los cuaterniones, que verifica: $(-1)^2 = 1$, $(-1)a = -a = a(-1)$ para todo $a \in Q_8$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$

2. Sea $(G,*)$ un grupo, demostrar que $Z(G)$ es un subgrupo normal de G, siendo $Z(G)$ el centro de G: $Z(G) = \{g \in G : g * a = a * g$ para todo $a \in G\}$.

3. Sea $(G,*)$ un grupo y sea $H = \langle a * b * a^{-1} * b^{-1} : a, b \in G\rangle$. Demostrar que H es un subgrupo normal de G. H recibe el nombre de **subgrupo conmutador de** G. Demostrar que G/H es abeliano.

4. Dados el grupo $(G,*)$ y el subgrupo $H \leq G$, demostrar que $H \trianglelefteq G$, construir la tabla de Cayley del grupo cociente G/H y encontrar un grupo isomorfo a G/H.

   a) $(G,*) = (\mathbb{Z}, +)$ y $H = 5\mathbb{Z}$

   b) $(G,*) = (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4, (+_4, +_4))$ y $H = \{([0]_4, [0]_4), ([2]_4, [0]_4), ([0]_4, [2]_4), ([2]_4, [2]_4)\}$

   c) $(G,*) = (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4, (+_4, +_4))$ y $H = \langle([1]_4, [2]_4)\rangle$

   d) $(G,*) = (\mathbb{Z}_4 \times U_4, (+_4, \cdot_4))$ y $H = \langle([2]_4, [3]_4)\rangle$

   e) $(G,*) = (\mathbb{Z}_4 \times U_4, (+_4, \cdot_4))$ y $H = \langle([2]_4, [1]_4)\rangle$

   f) $(G,*) = (Q_8, \cdot)$ y $H = \{1, -1\}$

5. *a)* Encontrar todos los subgrupos de D_4 y estudiar cuales son normales.

   b) Calcular, salvo isomorfismos, todos los posibles grupos cocientes con el grupo D_4 y sus subgrupos normales.