PRIMERA ENTREGA INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Miembros del grupo: Pablo Tesoro García, Nicolas Alcaide Fernández y Sergio Heras Álvarez

EJERCICIO 1

^T: significa que el vector es traspuesto

a) Como las variables x1 y x2 son las variables básicas, los vectores columna y1 e y2 forman la matriz identidad y sus costes reducidos toman el valor 0. Luego b=1, c=0, d=0, e=1 y f=0.

   z3-c3 = (a 2) (-1/2 1) ^T -1 = -a/2 +2-1=2 ➔ a=-2

   z4-c4 = (-2 2) (1 2) ^T -0 = -2+4=h ➔ h=2

   z = (-2 2) (1 g) ^T = -2+2g=10.5 ➔ g=6.25

b) Los precios sombra de las variables x1 y x2 son

   y1*= |(z4-c4) + c4|=2 y2*= |(z5-c5) + c5|=0

   Luego el incremento en el beneficio producido por las unidades adicionales del primer y segundo recurso es (2x1) + (0x3) = 2 unidades de beneficio. Como el coste de los recursos es 3+2x2=7 unidades, no sale rentable.

c) z3-c3 = (a 2) (-1/2 1) ^T -1 = -a/2 +1>=0
   z4-c4 = (a 2) (1 2) ^T -0 = a+4>=0 ➔ a ∈ [-2,2]
   z5-c5 = (a 2) (1 1) ^T -0 = a+2>=0

   Como a=-1 ∈ [-2,2] la tabla sigue óptima para ese valor siendo la solución óptima:

   x1*=1, x2*=6.25, x3*=x4*=x5*=0 con z* = (-1,2) (1 6.25) ^T = 11.5

d) La restricción del problema dual es 2y1+2y2>=15. Como 2y1*+2y2*=4 no es mayor que 15 luego la solución óptima del dual no satisface la restricción. Debemos añadir la variable xN en la tabla óptima primal y resolver de nuevo.

   yN= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} (2\ \ 2)^\wedge T = (4\ 6)^\wedge T$

$z_N-c_N= (-2\ 2)\ (4\ 6)^T -15 = 4-15=-11$

La tabla del simplex ampliada será:

		-2	2	1	15	0	0	
CB	VB	X1	X2	X3	XN	X4	X5	XB
-2	X1	1	0	-1/2	4*	1	1	1
2	X2	0	1	1	6	2	1	25/4
	zj-cj	0	0	2	-11	2	0	10.5

Como el coste reducido más negativo es -11 y la mínima razón es ¼, el elemento pivote es y_{1N}.

		-2	2	1	15	0	0	
CB	VB	X1	X2	X3	XN	X4	X5	XB
15	XN	1/4	0	-1/8	1	1/4	1/4	1/4
2	X2	-3/2	1	7/4	0	1/2	-1/2	4.75
	zj-cj	11/4	0	5/8	0	19/4	11/4	13.25

$x_N^*= 0.25$, $x_2^*=4.74$, $x_1^*=x_3^*=x_4^*=x_5^*=0$ con $z^*=13.25$

EJERCICIO 2.

X1 → Cantidad de unidades de energía eléctrica

X2 → Cantidad de calentadores de agua

X3 → Cantidad de calentadores de ambiente

Función objetivo: min z = 350x1 + 210x2 + 160x3

s.a.

x1 >= 30

x1 + x2 + x3 >= 20 -> Esta es redundante con la siguiente (x1 + x2 + x3 >= 50), por lo que será eliminada en el siguiente paso

x1 + x2 + x3 >= 50

x3 <= 30

x1,x2,x3 >= 0

Para poder resolverlo mediante el método del simplex, la función objetivo debe ser de maximización:

Función objetivo: máx z' = - 350x1 - 210x2 - 160x3

Además, hay que poner el problema en la forma estándar:

máx z' = - 350x1 - 210x2 - 160x3 + 0x4 - Mx5 + 0x6 + 0x7

s.a.

x1 – x4 + x5 = 30

x1 + x2 + x3 – x6 = 50

x3 + x7 = 30

x1,x2,x3,x4,x5,x6 >= 0

Siendo x4,x6,x7 variables de holgura y x5 variable artificial.

Las variables básicas son: x5, x2 y x7, ya que sus coeficientes forman la matriz identidad, por lo tanto, B = I.

		-350	-210	-160	0	-M	0	0	
CB	VB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	XB
-M	X5	1*	0	0	-1	1	0	0	30
-210	X2	1	1	1	0	0	-1	0	50
0	X7	0	0	1	0	0	0	1	30
	zj-cj	140-M	0	-50	M	0	210	0	-10500-30M

Como z1-c1 es el menor de los costes reducidos, la nueva variable básica será x1. La variable que debe salir de la base será x5, ya que el mín{30/1, 50/1} = 30, y esa fila corresponde a x5.

		-350	-210	-160	0	-M	0	0	
CB	VB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	XB
-350	X1	1	0	0	-1	1	0	0	30
-210	X2	0	1	1*	1	-1	-1	0	20
0	X7	0	0	1	0	0	0	1	30
	zj-cj	0	0	-50	140	M-140	210	0	-14700

Como z3-c3 es el menor de los costes reducidos, la nueva variable básica será x3. La variable que debe salir de la base será x2, ya que el mín{20/1, 30/1} = 20, y esa fila corresponde a x2.

		-350	-210	-160	0	-M	0	0	
CB	VB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	XB
-350	X1	1	0	0	-1	1	0	0	30
-160	X3	0	1	1	1	-1	-1	0	20
0	X7	0	-1	0	-1	1	1	1	10
	zj-cj	0	50	0	190	M-190	160	0	-13700

Como M es mucho mayor que los coeficientes de la función objetivo, M-190 será positivo.

Así, todos los costes reducidos son no negativos, por lo que hemos hallado la solución óptima.

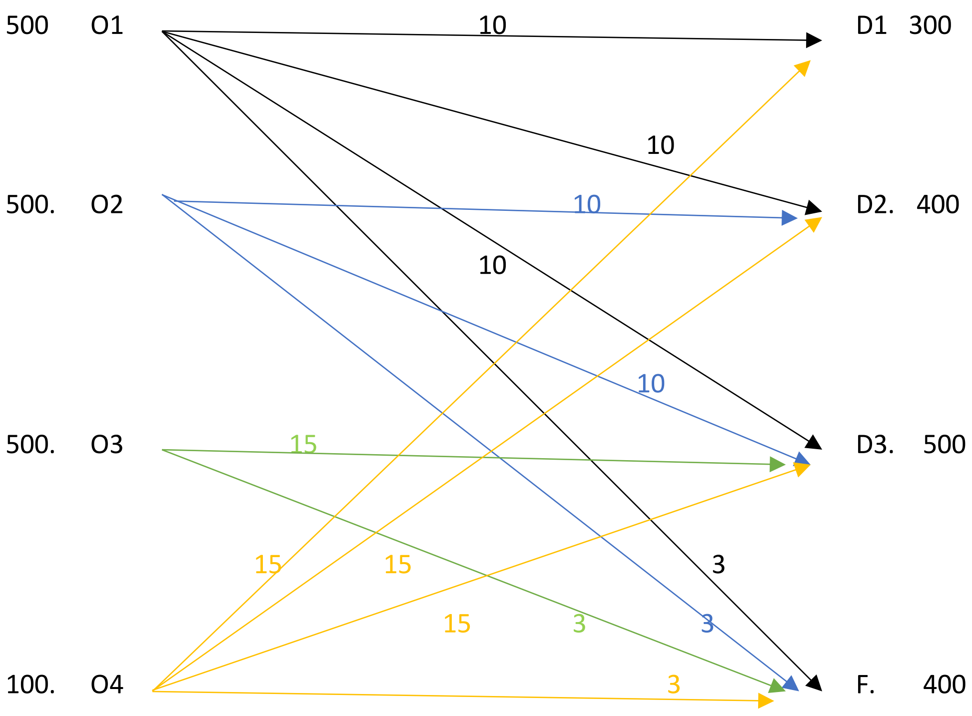
Solución:

XB = (x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7) = (30, 0, 20, 0, 0, 0, 10) → Serán necesarios 30 unidades de electricidad, 20 calentadores de ambiente

El mínimo coste será: z = - z' = - (-13700) = 13700

EJERCICIO 3.

a) Este problema se puede representar en forma de red de la siguiente forma:



La columna Oi representa la producción de chips en el mes-i , siendo i { 1,2,3} y la columna Di representa el destino de los chips en el mes-i. Por otro lado, O4 representa las horas extra de producción en el primer mes con un coste de 15. Cada flecha simboliza la relación de la fábrica con los destinatarios y sus respectivos valores son el coste de producción en cada mes. O2 no se puede relacionar con D1 y O3 no se puede relacionar con D2 ni D1 porque lo producido en el segundo o tercer mes no puede ser enviado a un mes anterior. Por ello, estas relaciones se representan con un coste muy elevado comparado con el resto de los costes llamado "M". Sin embargo, si puedes hacer uso de los chips del primer mes en el segundo o en el tercero.

Para que el problema esté equilibrado las demandas y las disponibilidades deben ser iguales. Luego para equilibrar el problema añadimos un destino ficticio llamado “F” con el valor 400 que es la diferencia en valor absoluto entre el sumatorio de las disponibilidades y el sumatorio de las demandas. A continuación, representamos el problema mediante la table de transporte.

	D1	D2	D3	F	DISPONIBILIDAD
O1	10	10	10	3	500
[1]O2	M	10	10	3	500
O3	M	M	15	3	500
O4	15	15	15	3	100
DEMANDA	300	400	500	400	

b) Vamos a resolver el problema y para ello vamos a hallar una solución básica factible utilizando el método de aproximación de Vogel y luego comprobaremos que es óptima, y si no lo es deberemos hallar una solución nueva que sea óptima utilizando el método MODI.

<u>Método Vogel</u>

Calculamos las penalizaciones de cada fila y columna. De todas ellas elegimos la que tenga mayor penalización y situamos el mayor número de unidades en la posición de menor coste de dicha fila o columna.

	D1	**D2**	**D3**	**F**	**DISPONIBILIDAD**	**PFi**
O1	10	10	10	3	500	7
[2]O2	M	10	10	3	500	7
O3	M	M	15	400 3	500	12
O4	15	15	15	3	100	12
DEMANDA	300	400	500	400		
PCj	5	0	0	0		

La mayor penalización es PF3 o PF4 y elegimos arbitrariamente PF3. Disminuimos la disponibilidad de la fila 3 en la cantidad asignada a la casilla (3,4). Suprimimos la fila y/o columna cuya disponibilidad o demanda haya pasado a ser 0. En nuestro caso, eliminamos la columna F

	D1	D2	D3	DISPONIBILIDAD	PFi
O1	$\boxed{10}$	$\boxed{10}$	$\boxed{10}$	500	0
[3]O2	$\boxed{M}$	$\boxed{10}$	$\boxed{10}$	500	0
O3	$\boxed{M}$	$\boxed{M}$	100 $\boxed{15}$	100	M-15
O4	$\boxed{15}$	$\boxed{15}$	$\boxed{15}$	100	0
DEMANDA	300	400	500		
PCj	5	0	0		

Ahora la mayor penalización es PF3. Disminuimos la demanda de la columna D3 en la cantidad asignada a la casilla (3,3). Suprimimos la fila y/o columna cuya disponibilidad o demanda haya pasado a ser 0. En nuestro caso, eliminamos la fila O3

	D1	D2	D3	DISPONIBILIDAD	PFi
O1	300 $\boxed{10}$	$\boxed{10}$	$\boxed{10}$	500	0
O2	$\boxed{M}$	10	$\boxed{10}$	500	0
O4	$\boxed{15}$	$\boxed{15}$	$\boxed{15}$	100	0
DEMANDA	300	400	400		
PCj	5	0	0		

La mayor penalización es PC1. Disminuimos la disponibilidad de la fila O1 en la cantidad asignada a la casilla (1,1). Suprimimos la fila y/o columna cuya disponibilidad o demanda haya pasado a ser 0. En nuestro caso, eliminamos la columna D1

	D2	D3	DISPONIBILIDAD	PFi
O1	200 $\boxed{10}$	$\boxed{10}$	200	0
O2	10	$\boxed{10}$	500	0
O4	$\boxed{15}$	$\boxed{15}$	100	0
DEMANDA	400	400		
PCj	0	0		

Todas las penalizaciones tienen el mismo valor, así que elegimos arbitrariamente PF1. Disminuimos la demanda de la columna D2 en la cantidad asignada a la casilla (1,2). Suprimimos la fila y/o columna cuya disponibilidad o demanda haya pasado a ser 0. En nuestro caso, eliminamos la fila O1

	D2	D3	DISPONIBILIDAD	PFi
O2	200 10	10	500	0
O4	15	15	100	0
DEMANDA	200	400		
PCj	5	5		

La mayor penalización es PC2 y PC3, elegimos PC2. Disminuimos la disponibilidad de la fila O2 en la cantidad asignada a la casilla (2,2). Suprimimos la fila y/o columna cuya disponibilidad o demanda haya pasado a ser 0. En nuestro caso, eliminamos la columna D2

	D3	DISPONIBILIDAD
O2	300 10	300
O4	100 15	100
DEMANDA	400	

Esta iteración es trivial ya que sólo tenemos una columna en la tabla. Por lo tanto, asignaremos a las casillas los valores de sus correspondientes disponibilidades, es decir, $x23 = 300$ y $x43 = 100$.

El problema de transporte queda representado en la siguiente tabla, en la que se incluye una solución básica factible obtenida con el Método de aproximación de Vogel o MAV.

	D1	D2	D3	F	DISPONIBILIDAD
O1	300 $\boxed{10}$	200 $\boxed{10}$	$\boxed{10}$	$\boxed{3}$	500
[4]O2	$\boxed{M}$	200 $\boxed{10}$	300 $\boxed{10}$	$\boxed{3}$	500
O3	$\boxed{M}$	$\boxed{M}$	100 $\boxed{15}$	400 $\boxed{3}$	500
O4	$\boxed{15}$	$\boxed{15}$	100 $\boxed{15}$	$\boxed{3}$	100
DEMANDA	300	400	500	400	

La solución básica factible es no degenerada ya que tenemos m+n-1=4+4-1=7 valores positivos (posiciones básicas o localizadas).

A continuación, vamos a comprobar si la solución es óptima utilizando el método MODI.

Utilizamos este método porque queremos saber si la solución básica factible y no degenerada que hemos obtenido es óptima y, si no lo es, construir una nueva solución con menor coste que la actual.

	D1	D2	D3	F	DISPONIBILIDAD	Si
O1	300 $\boxed{10}$	200 $\boxed{10}$	$\boxed{10}$	$\boxed{3}$	500	S1
[5]O2	$\boxed{M}$	200 $\boxed{10}$	300 $\boxed{10}$	$\boxed{3}$	500	S2
O3	$\boxed{M}$	$\boxed{M}$	100 $\boxed{15}$	400 $\boxed{3}$	500	S3
O4	$\boxed{15}$	$\boxed{15}$	100 $\boxed{15}$	$\boxed{3}$	100	S4
DEMANDA	300	400	500	400		
Tj	T1	T2	T3	T4		

Para ello, elegimos arbitrariamente un Si o Tj y lo igualamos a cero, por ejemplo, S1 = 0.

Resolvemos las ecuaciones Si + Tj + Cij para las posiciones localizadas y obtenemos los valores de los números MODI

S1 + T1 + C11 = 0 → T1 = -10

S1 + T2 + C12 = 0 → T2 = -10

S2 + T2 + C22 = 0 → S2 = 0

S2 + T3 + C23 = 0 → T3 = -10

S3 + T3 + C33 = 0 → S3 = -5

S3 + T4 + c34 = 0 → T4 = 2

S4 + T3 + c43 = 0 → S4 = -5

Ahora hallamos el valor indicador $\alpha_{ij} = S_i + T_j + C_{ij}$ para las posiciones no básicas.

$\alpha_{13} = S_1 + T_3 + 10 = 0$

$\alpha_{14} = S_1 + T_4 + 3 = 5$

$\alpha_{21} = S_2 + T_1 + M = M - 10$

$\alpha_{24} = S_2 + T_4 + 3 = 5$

$\alpha_{31} = S_3 + T_2 + M = M - 15$

$\alpha_{32} = S_3 + T_2 + M = M - 15$

$\alpha_{41} = S_4 + T_1 + 15 = 0$

$\alpha_{42} = S_4 + T_2 + 15 = 0$

$\alpha_{44} = S_4 + T_4 + 3 = 0$

Como todos los valores indicadores son no negativos, podemos afirmar que la solución encontrada es óptima, aunque podría haber otras soluciones ya que existe algún α_{ij} nulo.

Por tanto, el mínimo coste es:

$(300 \times 10) + (200 \times 10) + (200 \times 10) + (300 \times 10) + (100 \times 15) + (400 \times 3) + (100 \times 15) = 14200$

Interpretación de la solución:

El primer mes se producen 500 chips en horario normal y 100 en horas extra. De los 500 producidos en horario normal ,300 se reciben el primer mes y 200 se reciben el segundo mes. El segundo mes se producen otros 500 chips, 200 de ellos se reciben el segundo mes y los 300 restantes se reciben en el tercer mes. Por último, el tercer mes se producen 500 chips más, de los cuales solo se venden 100, quedándose 400 chips sin vender.

c)

Modelizamos el problema general de transporte como un problema de programación lineal.

x_{ij} son las variables de decisión y representan el número de unidades transportadas desde O_i hasta D_j (o F).

$\min z = 10 x_{11} + 10 x_{12} + 10 x_{13} + 3 x_{14} + 10 x_{22} + 10 x_{23} + 3 x_{24} + 15 x_{33} + 3 x_{34} + 10 x_{41} + 10 x_{42} + 10 x_{43} + 3 x_{44}$

s.a

$$
\begin{array}{llllll}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & & & & \le 500 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & & & \le 500 \\
& & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & & \le 500 \\
& & & x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} & \le 100 \\
x_{11} + & & & x_{41} & \ge 300 \\
x_{12} + & x_{22} + & & x_{42} & \ge 400 \\
x_{13} + & x_{23} + & x_{33} + & x_{43} & \ge 500 \\
x_{14} + & x_{24} + & x_{34} + & x_{44} & \ge 400
\end{array}
$$

$x_{ij} \ge 0 \quad \forall i, j$