Solución de algunos ejercicios adicionales

2. Primero realizamos algunos cálculos a partir de los datos.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 67.2 \quad V(X) = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = 6.36$$
$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = 68.4 \quad V(Y) = \frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2 = 3.24$$
$$Cov(X,Y) = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x}\bar{y} = 2.92$$

a) Ajustamos la recta de regresión:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i = \bar{Y} + \hat{\beta}_1(X_i - \bar{X})$$

donde

$$\hat{\beta}_1 = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = 0.459$$

con lo que la Recta de Regresión será:

$$\hat{Y}_i = 68.4 + 0.459(X_i - 67.2) = 0.459 X_i + 37.55$$

El coeficiente de correlación lineal es

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = 0.643$$

b) El intervalo de confianza para una predicción es

$$\hat{Y}_h \mp t_{n-2,\,\frac{\alpha}{2}} \hat{S}_R \sqrt{1 + V_{hh}}$$

con

$$V_{hh} = \frac{1}{n} + \frac{(X_h -)^2}{\sum\sum(X_i -)^2} = \frac{1}{n} + \frac{(X_h -)^2}{nV(X)} = 0.176$$

Como $X_h = 65$, la estimación puntual es $Y_h = 67.39$.
La varianza residual es

$$\hat{S_R^2} = \frac{(1 - r^2) n V(Y)}{n-2} = 2.374$$

El nivel de significación es $\alpha = 0.1$ y $t_{8,\,0.05} = 1.86$.

El intervalo de confianza que se obtiene es:

$$(64.28,\ 70.5)$$

3. Ajustamos la recta de regresión:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i = \bar{Y} + \hat{\beta}_1 (X_i - \bar{X})$$

Hacemos algunos cálculos a partir de los datos que nos dan:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 0.495 \quad V(X) = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = 0.003875$$
$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = 11.876 \quad V(Y) = \frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2 = 0.531024$$
$$Cov(X,Y) = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x}\bar{y} = 0.04208$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = 10.859$$

con lo que la Recta de Regresión será:

$$\hat{Y}_i = 11.876 + 10.859(X_i - 0.495) = 10.859 X_i + 6.5008$$

La pendiente del modelo es β_1, así que calculamos un IC al 95 % para el parámetro β_1:

$$\left(\hat{\beta}_1 \pm t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{S_R^2}}{nV(X)}} \right)$$

Buscando en las tablas $t_{8,0.025} = 2.306$, además $n = 10$, $\hat{\beta}_1 = 10.859$, $V(X) = .003875$, con lo que tenemos que calcular la varianza residual $\hat{S_R^2}$.

Utilizando la fórmula que relaciona el coeficiente de correlación r con la varianza residual, calculamos r:

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = 0.927689$$

De la relación

$$r^2 = 1 - \frac{(n-2)\hat{S_R^2}}{nV(Y)}$$

despejamos $\hat{S_R^2}$

$$\hat{S_R^2} = \frac{(1-r^2)nV(Y)}{n-2} = 0.092531$$

También se puede calcular la varianza residual a partir de los elementos de la Tabla ANOVA.

El IC que se obtiene es:

$$(7.29593, 14.42277)$$