ALGORÍTMICA NUMÉRICA **1^er^ Parcial (15/11/2018)**

Ejercicio 1 Se considera una representación en coma flotante en base 2, utilizando el redondeo al número más próximo. Cada palabra utiliza en memoria los siguientes 8 bits: 4 bits para el exponente, $e=(e_1\, e_2\, e_3\, e_4)$, y 4 bits para la mantisa, $m=(b_1\, b_2\, b_3\, b_4)$. Los números máquina $\hat{x}$ representados son los siguientes:

$$\hat{x}=m\times 2^{e-8}=(1.b_1b_2b_3b_4)_2\times 2^{(e_1e_2e_3e_4)_2-8}$$

En esta representación:

- ¿Cuántos números máquina hay?
- Calcular el rango de valores (en formato decimal) de la mantisa (valor mínimo y valor máximo):
$$m=(1.b_1b_2b_3b_4)_2$$
- Calcular el rango de valores (en formato decimal) del exponente (valor mínimo y máximo):
$$(e_1e_2e_3e_4)_2-8$$
- Calcular Vmin (menor número máquina) y Vmax (mayor número máquina).
- Calcular los números máquina (en formato decimal) y el contenido de los 8 bits a almacenar en memoria para los números que se indican.

	Nº máquina (dec)	$e_1\, e_2\, e_3\, e_4$	$b_1\, b_2\, b_3\, b_4$
1			
0.05			
1+0.05			
1.05			

- ¿Cuántos números máquina verifican $\hat{x}<1$? ¿Cuántos números máquina verifican $\hat{x}\geq 1$?

Ejercicio 2 Dada la función

$$S(x)=\begin{cases} p(x) & x\in[-1,0] \\ a+bx & x\in[0,1] \\ c+d(x-1)+e(x-1)^2 & x\in[1,2] \end{cases}.$$

Queremos que S(x) sea una función spline de grado 2 tal que S´(-1) = 0 y que interpole los datos de la tabla:

x_k	-1	0	1	2
$S(x_k)$	2	5	λ	14

Para lo cual se pide calcular la solución en cada subintervalo en el siguiente orden:

1) Calcular el polinomio p(x).

2) Calcular los parámetros a, b y determinar el valor de λ .

3) Calcular los parámetros c, d, y e.

Ejercicio 3

Se considera la tabla de datos:

xi	1	2	3
yi	6	12	32

a) Se van a ajustar los datos de la tabla por un polinomio p(x) de grado 2 con p(0)= 2 y p’(0)=0:

- Dar la expresión general de los polinomios que cumplen las condiciones anteriores.
- Plantear el sistema lineal H·C=B resultante de ajustar los datos por el tipo de función señalado. Dar la matriz H de coeficientes y el vector B de términos independientes del sistema lineal.
- Dar las ecuaciones normales del sistema y la expresión del polinomio pedido.

b) Se van a ajustar los datos de la tabla por una función del tipo $u(x)=2e^{ax^2}$. Linealizar el problema de ajuste y escribir matricialmente el sistema lineal. Dar la expresión de la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes de dicho sistema lineal.

<u>Soluciones</u>

Ejercicio 1

Hay $2^8 = 256$ números máquina.

El rango de valores de la mantisa es $m \in \left[(1.0000)_2 = 1, (1.1111)_2 = 2 - 2^{-4} = 1.9375\right]$

El rango de valores del exponente es $(e_1 e_2 e_3 e_4)_2 - 8 \in \left[(0000)_2 - 8 = -8, (1111)_2 - 8 = 2^{-4} - 1 - 8 = 7\right]$

Los valores mínimo y máximo son

$v_{\min} = (1.0000)_2 \times 2^{(00000)_2 - 8} = 2^{-8} = 0.0039, \quad v_{\max} = (1.1111)_2 \times 2^{(1111)_2 - 8} = (2 - 2^{-4}) \times 2^7 = 248$

La representación de los números reales dados en la siguiente

$\text{Sea } x = 1, \quad \hat{x} = \hat{1} = (1.0000)_2 \times 2^{(1000)_2 - 8} = 1 \times 2^0 = 1$

Sea $x = 0.05$, $\quad 0.05 \in \left[2^{-5} = 0.0313,\ 2^{-4} = 0.0625\right]$, $\hat{x} = (1.b_1b_2b_3b_4)_2 \times 2^{e-8} = m \times 2^{-5}$

Por tanto, $e = (0011)_2 = 3$, y $m = 0.05 \times 2^{-5} = 1.6$.

El valor $m = 1.6$ se encuentra entre las siguientes mantisas consecutivas

$(1.1001)_2 = 1.5625 < 1.6 < (1.1010)_2 = 1.6250$

Utilizando el redondeo tenemos,

$\hat{x} = \widehat{0.05} = (1.1010)_2 \times 2^{(0011)_2-8} = 1.6250 \times 2^{-5} = 0.0508$

Sea $x = 1 + 0.05$, $\quad \hat{x} = \widehat{\hat{1} + \widehat{0.05}} = \overline{(1.0000)_2 \times 2^0 + (1.1010)_2 \times 2^{-5}} =$

$= \overline{(1.0000)_2 \times 2^0 + (0.0000)_2 \times 2^0} = (1.0000)_2 \times 2^0 = 1$

Sea $x = 1.05$.

El número $x = 1.05$ se encuentra entre los siguientes números máquina consecutivos

$(1.0000)_2 \times 2^0 = 1 < 1.05 < (1.0001)_2 \times 2^0 = 1.0625$.

Utilizando el redondeo tenemos,

$\hat{x} = \widehat{1.05} = (1.0001)_2 \times 2^{(1000)_2-8} = 1.0625 \times 2^0 = 1.0625$

	Nº máquina	$e_1\ e_2\ e_3\ e_4$	$b_1\ b_2\ b_3\ b_4$
1	1	1000	0000
0.05	0.0508	0011	1010
1+0.05	1	1000	0000
1.05	1.0625	1000	0001

¿Cuántos números máquina verifican $\hat{x} < 1$? ¿Cuántos números máquina verifican $\hat{x} \geq 1$?

$\hat{x} = m \times 2^{e-8}$, $\quad m \in [1, 2) \quad \Rightarrow \quad m2^{-1} < 1, \quad m2^0 \geq 1$

Luego, $\hat{x} = m \times 2^{e-8} \quad < \quad 1$ si $e - 8 \leq -1$. Hay 8 exponentes que verifican $e - 8 \leq -1$.

$\hat{x} = m \times 2^{e-8} \quad \geq \quad 1$ si $e - 8 \geq 0$. Hay 8 exponentes que verican $e - 8 \geq 0$.

Por tanto, hay $2^7 = 128$ números máquina que verifican $\hat{x} < 1$,

y hay 128 números máquina que verifican $\hat{x} \geq 1$.

Ejercicio 2

a) p(x) es un polinomio de grado 2 que tiene que cumplir las condiciones

p(-1)=2, p(0)=5 y p' (-1)=0.

Tabla de diferencias divididas generalizada:

-1	2		
-1	2	0	
0	5	3	3

Luego el polinomio es:

$$p(x)=2+3(x+1)^2$$

b) Los parámetros a, b y λ:

Imponemos las condiciones de interpolación y continuidad:

S(0)=5 → a = 5

$S'(0^-)=S'(0^+)$ → 6=b

S(1)=5+6= λ → λ=11

c) Los parámetros c,d, y e:

Resolvemos por el método de Newton para que nos sea más fácil obtener los parámetros. Necesitamos primero calcular $S'(1^-)=6$ (del subintervalo anterio).

Tabla de diferencias divididas generalizada:

1	11		
1	11	6	
2	14	3	-3

Polinomio de grado 2; $q(x) = 11 + 6\ (x-1) -3(x-1)^2$

Y los parámetros pedidos: c=11 d=6 e=-3

Ejercicio 3

a) En primer lugar se busca la expresión general de los polinomios de grado 2 que verifican las condiciones p(0)= 2 y p'(0)=0. Para ello se considera un polinomio general de grado dos $p(x) = ax^2 + bx + c$ y se imponen las condiciones p(0)= 2 y p'(0)=0, resultando c=2 y b=0. Por tanto la expresión general del tipo de polinomios aproximantes es:

$$\boxed{p(x) = ax^2 + 2}$$

Se observa que se dispone de un parámetro (a) para ajustar los datos de la tabla.

- Se plantea el sistema lineal sobredeterminado resultante

$$p(x_i) = ax_i^2 + 2 \approx y_i \leftrightarrow ax_i^2 \approx y_i - 2, \text{ i=1,2,3.}$$

Escrito en formato matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}}_{H} a = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}}_{B}$$

- Las ecuaciones normales del sistema vienen dadas por H'Ha= H'*b*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}}_{H} a = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}}_{B} \rightarrow 98a = 314 \rightarrow a = 3{,}2014$$

Por lo tanto, el polinomio pedido tiene la expresión: $\boxed{p(x) = 3.2014x^2 + 2}$

b) Se considera el ajuste de los datos dados por una función del tipo $u(x) = 2e^{ax^2}$, resultando el sistema no lineal

$$u(x_i) = 2e^{ax_i^2} = y_i, \text{ i=1,2,3.}$$

Se aplican logaritmos para linealizar las ecuaciones anteriores, resultando el sistema lineal sobredeterminado:

$$ax_i^2 = \log(y_i / 2), \text{ i=1,2,3.}$$

Escrito en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}}_{H} a = \underbrace{\begin{pmatrix} \log(3) \\ \log(6) \\ \log(16) \end{pmatrix}}_{B}.$$