

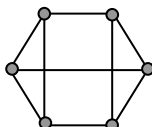
## SOLUCIONES

### 1. (1,5 puntos)

- (a) Diseña una red 3-regular que tolere el fallo de dos de sus nodos y de dos de sus aristas. (El orden y el tamaño de la red deben ser tan pequeños como se pueda)
- (b) Demuestra que un grafo simple  $G$  es 2-conexo si y sólo si para cada par de aristas  $e$  y  $e'$  existe un ciclo de  $G$  que contiene a ambas.

Sol.:

(a) Se pide un grafo 3-regular, 3-conexo y 3-aristoconexo. Por ejemplo el de la figura



(b) Nos piden que demos una caracterización (condición necesaria y suficiente) para que un grafo sea 2-conexo. Así que debemos hacer dos demostraciones.

$\Rightarrow$ ) Si  $G$  es un grafo 2-conexo entonces para cada par de aristas  $e$  y  $e'$  de  $G$  existe un ciclo de  $G$  que contiene a ambas aristas. (Condición necesaria)

Construimos  $G'$  insertando un vértice  $u$  de grado dos en la arista  $e$  y otro vértice  $v$  en la arista  $e'$ .  $G'$  sigue siendo un grafo 2-conexo. Por el teorema de Whitney existen dos caminos disjuntos en  $G'$  de  $u$  a  $v$ . Es decir, un ciclo  $C'$  en  $G'$  que contiene a los vértices  $u$  y  $v$ . Suprimiendo los vértices  $u$  y  $v$  tenemos un ciclo  $C$  en  $G$  pasando por  $e$  y  $e'$

$\Leftarrow$ ) Si en un grafo  $G$  para cada par de aristas  $e$  y  $e'$  de  $G$  existe un ciclo de  $G$  que contiene a ambas aristas, entonces el grafo  $G$  es 2-conexo. (Condición suficiente)

Lo demostramos por reducción al absurdo. Supongamos que  $G$  no es 2-conexo. Entonces hay en  $G$  un vértice-corte  $a$ . Elegimos una arista  $e$  en una componente conexa de  $G - a$  y otra arista  $e'$  en la otra componente. Así NO existe ningún ciclo que contenga a ambas aristas, en contradicción con la hipótesis de partida.

### 2. (1 punto)

¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Demuéstralas o encuentra un contraejemplo.

- (a) Todo grafo euleriano es orientable
- (b) Si  $G$  es un grafo euleriano en el que las aristas  $a$  y  $b$  son incidentes en el mismo vértice, entonces  $G$  tiene un recorrido euleriano en el que las aristas  $a$  y  $b$  aparecen consecutivamente.

Sol.:

- (a) CIERTA.

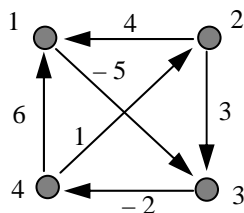
Todo grafo euleriano  $G$  es conexo y no tiene puentes, por tanto es orientable (Teorema de Robbins). Además cada recorrido euleriano cerrado en  $G$  proporciona una orientación que convierte a  $G$  en digrafo fuertemente conexo. Basta orientar cada arista en el sentido del recorrido.

- (b) FALSA.

El grafo de la pajarita es un contraejemplo. Si  $u$  es el vértice corte, las dos aristas incidentes en  $u$  y de un mismo 3-ciclo nunca pueden aparecer consecutivamente en un recorrido euleriano cerrado.

3. (1,5 puntos)

Describe el algoritmo de Floyd-Warshall. Analiza su complejidad. Aplícalo al digrafo de la figura obteniendo la tercera iteración a partir de la segunda.



$$W^2 = \begin{pmatrix} 0 & \infty & -5 & \infty \\ 4 & 0 & -1 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol.:

Se pide una descripción del algoritmo de Floyd-Warshall, ¿qué significa esto? Que con las frases que escribamos quede bien claro para qué sirve este algoritmo, a qué grafos se aplica y cuáles son los elementos básicos de su estrategia.

El algoritmo de Floyd-Warshall responde a este problema: Dado un grafo (o digrafo) con pesos en las aristas hallar el camino mínimo (y su peso) entre dos vértices cualesquiera del grafo. El algoritmo permite que haya pesos negativos y detecta ciclos de peso negativo si los hubiera.

El algoritmo construye  $n$  matrices  $W^0, W^1, \dots, W^n$  de forma que en la matriz  $W^k$  aparecen los pesos de los caminos mínimos entre cada par de vértices permitiendo sólo los vértices  $1, 2, \dots, k$  como vértices intermedios.

Así en la iteración 3 del algoritmo se calcula el peso del camino mínimo entre cada par de vértices permitiendo sólo los vértices 1, 2 y 3 como vértices intermedios.

Los elementos de la matriz  $W^3$  se calculan a partir de la matriz  $W^2$  así:

$$w_{ij}^3 = \min\{w_{ij}^2, w_{i3}^2 + w_{3j}^2\}$$

$$W^2 = \begin{pmatrix} 0 & \infty & -5 & \infty \\ 4 & 0 & -1 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

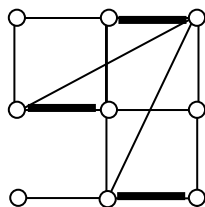
$$W^3 = \begin{pmatrix} 0 & \infty & -5 & -7 \\ 4 & 0 & -1 & -3 \\ \infty & \infty & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Como aparece un término negativo en la diagonal principal, se ha detectado un ciclo de peso negativo. Es el ciclo 4-2-1-3-4

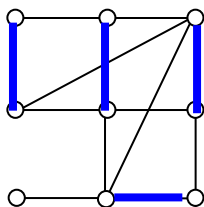
4. (2 puntos)

(a) Define emparejamiento y recubrimiento por vértices en un grafo.

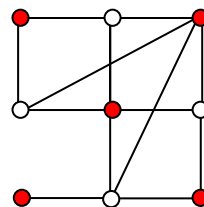
(b) Construye un emparejamiento maximal no máximo, un emparejamiento máximo, un recubrimiento minimal no mínimo y un recubrimiento mínimo en el grafo de la figura, justificando todas las construcciones.



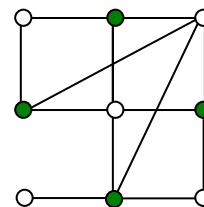
Emparejamiento maximal  
(las restantes aristas son  
adyacentes a una arista negra)



Emparejamiento máximo  
Su cardinal es 4 y hay 9  
vértices



Recubrimiento minimal  
Si eliminamos algún vértice rojo  
ya no es recubrimiento.



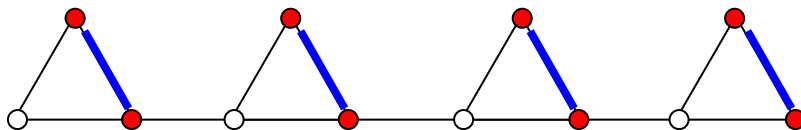
Recubrimiento mínimo  
Hay un emparejamiento  
con el mismo cardinal.

- (c) Demuestra que si  $K^*$  es un recubrimiento por vértices mínimo y  $M$  un emparejamiento maximal en un grafo  $G$ , entonces  $|M| \leq |K^*| \leq 2|M|$ . Dibuja un grafo con un emparejamiento maximal  $M$  y un recubrimiento mínimo  $K^*$  tales que  $|K^*| = 2|M|$

Sol.:

Para cubrir las aristas de  $M$  se necesita un vértice distinto para cada una de ellas. Luego  $|M| \leq |K^*|$

Por otra parte si tomamos los dos extremos de cada arista de  $M$ , tendremos un recubrimiento  $K$  de cardinal  $|K| = 2|M|$ , ya que cualquier arista que no está en  $M$  tendrá un extremo en  $K$  por la maximalidad de  $M$ . Por tanto si  $K^*$  es mínimo  $|K^*| \leq |K| = 2|M|$



Las aristas azules forman un emparejamiento maximal y los vértices rojos un recubrimiento mínimo. Sus cardinales cumplen la condición requerida.

5. (1 punto)

Construye dos emparejamientos estables para los conjuntos  $X=\{x,y,z,w,t\}$  y  $A=\{a,b,c,d,e\}$ , siendo las preferencias:

x: $c > b > a > d > e$	a: $y > z > w > t > x$
y: $d > c > e > a > b$	b: $z > w > x > t > y$
z: $e > c > a > d > b$	c: $t > x > y > z > w$
w: $a > b > e > d > c$	d: $x > t > z > w > y$
t: $a > d > b > c > e$	e: $x > y > w > z > t$

Solución:

x	c	c	c	c	c	c	c
y	d	d	d	e	e	e	e
z	e	e	e	e	d	a	a
w	a	a	a	a	a	a	b
t	a	d	d	d	d	d	d

a	y	y	z	z
b	z	z	z	w
c	t	t	t	t
d	x	x	x	x
e	x	y	y	y

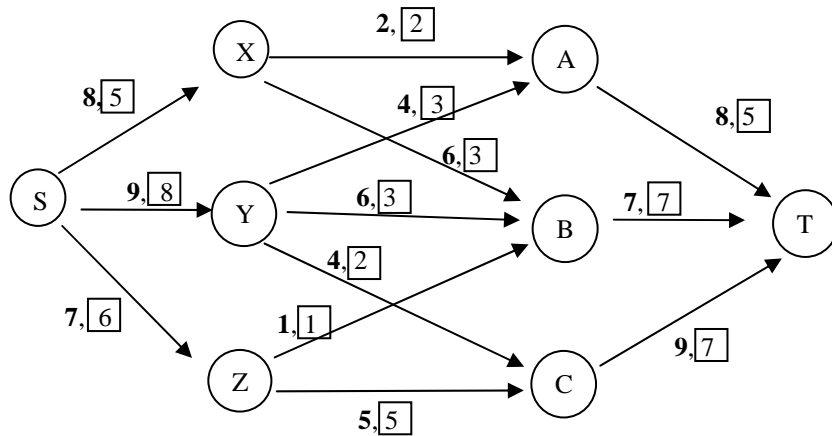
Los emparejamientos estables son:  $\{xc, ye, za, wb, td\}$  y  $\{az, bw, ct, dx, ey\}$

6. (3 puntos)

Enuncia el Teorema de Ford-Fulkerson definiendo los conceptos que aparecen en el enunciado. **Demuestra el teorema de Ford-Fulkerson.**

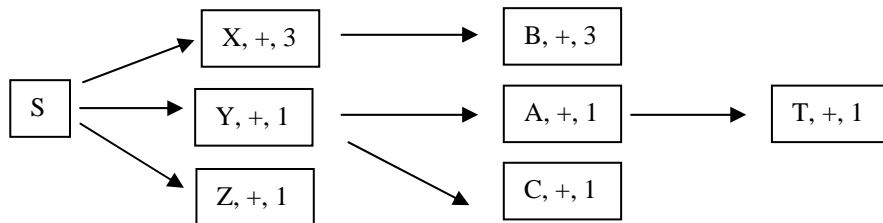
La red de la figura modeliza el proceso de distribución para la venta al público de las tabletas electrónicas de la empresa TODOTAB. La empresa posee la fábrica S, los almacenes X, Y y Z y las tiendas A, B y C. La etiqueta de cada arco de la red indica (en centenas) la capacidad mensual de distribución del tramo (en negrita) y el movimiento en la actualidad (en recuadro). Los puntos de venta se diseñaron para unas ventas mensuales totales de 2400 unidades, correspondiendo 800 al punto A, 700 al punto B y 900 al punto C. Sin embargo las ventas actuales se reducen a 500 unidades en la tienda A y 700 en B y C. ¿Cuál es el número máximo de tabletas que puede vender la empresa en un mes?

Aplica el algoritmo de etiquetado para responder a la pregunta y comprueba el enunciado del teorema en esta red.

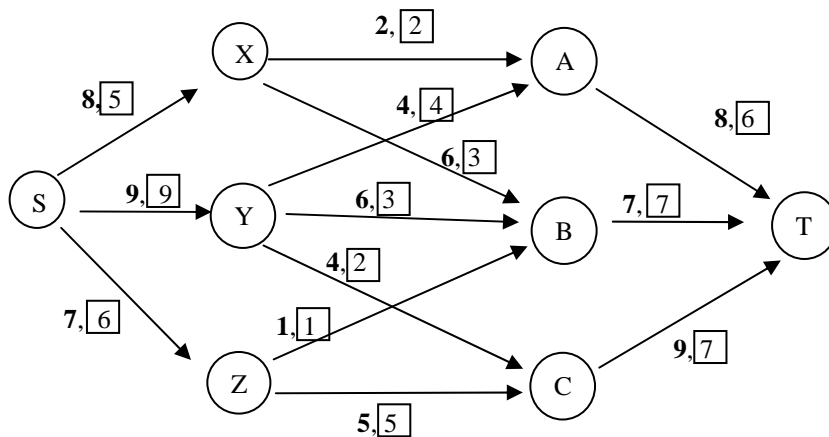


Completamos la red con los datos correspondientes a los puntos de venta y añadiendo el vértice T, destino final de las ventas.

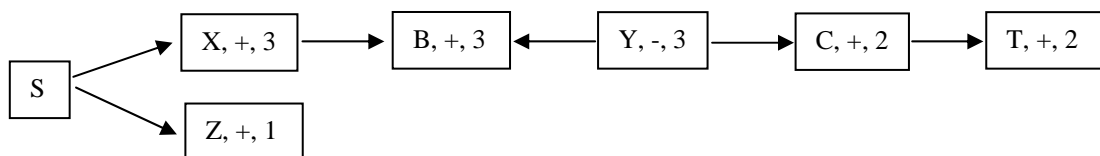
El algoritmo empieza construyendo un árbol de búsqueda en anchura desde S hasta alcanzar T, con las etiquetas correspondientes:



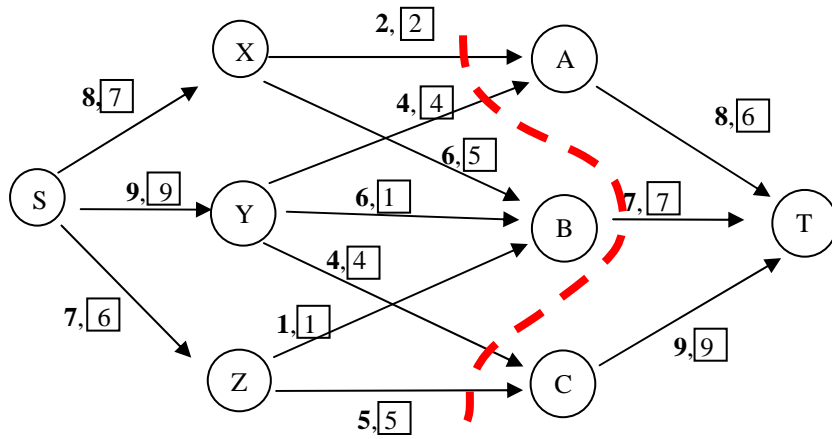
Así construimos el camino de f-aumento SYAT con capacidad residual (o residuo) 1. Aumentamos el flujo en una unidad a lo largo de este camino y obtenemos el flujo  $f_1$  de valor 20 que se muestra en la siguiente figura.



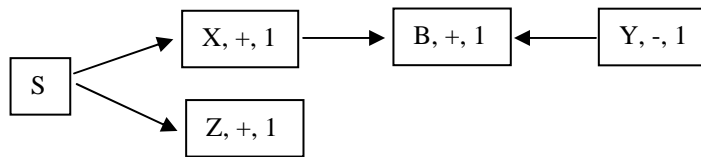
El siguiente árbol de búsqueda es:



Así construimos el camino de f-aumento SXBYCT con capacidad residual (o residuo) 2 y un arco de retroceso BY. Aumentamos el flujo en una unidad a lo largo de este camino y obtenemos el flujo  $f_2$  de valor 22 que se muestra en la siguiente figura. Los arcos saturados en este momento son sa, ba y de.



El siguiente árbol de búsqueda es:



Que no alcanza el destino T. Por tanto, el flujo  $f_2$  es de valor máximo 22. Los vértices alcanzados en este último árbol de búsqueda indican un corte de capacidad mínima. El corte es  $(\{S, X, Z, B, Y\}, \{A, C, T\})$  cuya capacidad es 22 igual al valor máximo de un flujo. Con esto comprobamos el teorema de Ford-Fulkerson en la red.