2.5. Acción de un grupo sobre un conjunto

Una **acción de un grupo** $(G, *)$ sobre un conjunto X es una aplicación $\rho : G \to S_X$, de $(G, *)$ sobre X, que verifica las siguientes condiciones:

1. $e_G \cdot x = x$ para todo $x \in X$
2. $(g_1 * g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$ para todos $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$

Relación de $G-$equivalencia

Sea $(G, *)$ grupo actuando sobre el conjunto $X \Rightarrow$ la siguiente relación es de equivalencia, y se denomina **relación de $G-$equivalencia en X**

$$\forall\, x, y \in X,\ x \sim_G y \ \Leftrightarrow\ \exists\, g \in G \ \text{ tal que } \ g \cdot x = y$$

Para cada $x \in X$ se llama **órbita de** x a la clase de equivalencia del elemento x:

$$O_x = \{y \in X : x \sim_G y\}$$

Subgrupo estabilizador de un elemento

Sea $(G, *)$ grupo actuando sobre el conjunto X. Para cada $x \in X$ se llama **estabilizador de** x a

$$G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$$

y se verifica que $G_x \leq G$ para todo $x \in X$

El tamaño de una órbita

Si $(G, *)$ es un grupo que actúa sobre el conjunto X, para todo $x \in X$ es

$$|O_x| = [G : G_x]$$

Orden de subgrupos estabilizadores

Si $(G, *)$ es un grupo que actúa sobre el conjunto X entonces

$$\forall\, x, y \in X \ \text{ tales que } \ x \sim_G y \ \text{ se verifica que } \ |G_x| = |G_y|$$

Teorema de Burnside. El número de órbitas

Sea $(G, *)$ un grupo finito que actúa sobre el conjunto X.
Para cada $g \in G$ el **conjunto de puntos fijos por** g se nota por

$$X_g = \{x \in X : g \cdot x = x\} \subseteq X$$

Sea $N = |X/\sim_G|$ el número total de órbitas de X, entonces

$$N = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X_g|$$

2.5. Problemas

1. Se considera cada uno de los siguientes grupos de permutaciones actuando sobre el conjunto X indicado. Calcular los conjuntos X_g y los subgrupos G_x:

   a) Grupo $S_3 = \{e = (1), \rho = (1,2,3), \rho^2 = (1,3,2), \mu = (1,2), \rho\mu = (1,3), \rho^2\mu = (2,3)\}$ sobre $X = \{1,2,3\}$

   b) Grupo $G = \{e = (1), \mu = (1,2), \sigma = (3,4,5), \sigma^2 = (3,5,4), \mu\sigma = (1,2)(3,4,5),$ $\mu\sigma^2 = (1,2)(3,5,4)\}$ sobre $X = \{1,2,3,4,5,6\}$

2. Obtener las clases de $G-$equivalencia para cada uno de los casos del ejercicio anterior y verificar que $|G| = |O_x||G_x|$

3. Considerando la acción del grupo $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ sobre el conjunto $\mathbb{R}^n$ como el producto escalar usual, calcular las órbitas, los subgrupos estabilizadores y los puntos fijos por cada elemento del grupo.

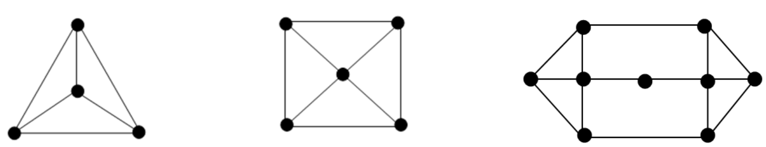
4. Se pretende fabricar tarjetas identificadoras sobre la base de un triángulo equilátero con idénticos anverso y reverso, para ello se elegirá perforar o no cada uno de los vértices de dicho triángulo. Determinar el número de tarjetas distintas que pueden obtenerse.

5. Responder a las preguntas del ejercicio anterior para tarjetas identificadoras sobre la base de un pentágono regular.

6. *a*) ¿De cuántas formas se pueden pintar las casillas de un tablero de ajedrez 3×3 usando pintura azul y roja? (el dorso del tablero es de color negro)

   b) ¿De cuántas formas se puede construir un tablero 3×3 uniendo cuadros de plástico transparente de tamaño 1×1, de colores rojo y azul, si hay un mínimo de 9 cuadros de cada color?

7. Encontrar el número de $4-$coloraciones no equivalentes de los vértices de las figuras siguientes, suponiendo que dichas figuras no pueden voltearse.



8. Repetir el ejercicio anterior, si las figuras son transparentes y pueden moverse libremente en el espacio