CÁLCULO III Matemáticas e Informática Curso 2018/2019	1^{er} Apellido: ________________ 2^o Apellido: ________________	04/07/2019 Tiempo: 3h
Dpto. Matemática Apl. a las TIC Facultad de Informática Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: ________________ Número de matrícula:	Calificación:

EXAMEN CONVOCATORIA DE JULIO

1. **(1 punto)** Calcula la integral de la función $f(x,y) = x$ sobre el recinto acotado limitado por la parábola $y = 3x - x^2$ y por la recta $y = x$.

2. **(1,5 puntos)** La temperatura en cada uno de los puntos del círculo $x^2 + y^2 \leq 2y$ viene dada por la función $T(x,y) = x^2 + y^2$.
   (a) ¿Cuál es el valor medio de la temperatura en el círculo?
   (b) ¿En qué puntos del círculo la temperatura coincide con el valor medio?

3. **(1,5 puntos)** Calcula el volumen del recinto acotado $D \subset \mathbb{R}^3$ limitado por los paraboloides de ecuaciones $4x^2 + y^2 = z$ y $x^2 + 4y^2 = 10 - z$.

4. **(1 punto)** Un alambre tiene la forma de la hélice parametrizada por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t^2/2)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Calcula la masa del alambre sabiendo que su densidad puntual viene dada por la función $\rho(x,y,z) = (x^2 + y^2)\sqrt{2z}$.

5. **(2 puntos)** Calcula la integral de línea del campo vectorial $F(x,y) = (x-y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ sobre:
   (a) La parte γ de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ del primer cuadrante orientada positivamente.
   (b) El segmento ℓ que va del punto $(0, 1)$ al punto $(1, 0)$.
   Usando las integrales de línea calculadas, halla razonadamente el área del recinto comprendido entre γ y ℓ.

6. **(1 punto)** Sea S la superficie del paraboloide $x^2+y^2 = 2-z$ que hay dentro del cono $x^2+y^2 = z^2$ en el semiespacio $z \geq 0$. Usando el teorema de Stokes, calcula la integral curvilínea del campo vectorial $F(x,y,z) = \left(e^{x^2} + 2yz, 4x, xy\right)$ sobre la frontera de S.

7. **(1 punto)** Calcula la integral de superficie del campo vectorial $F(x,y,z) = (y - xz, yz, xy + z^2)$ sobre la superficie S formada por la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ comprendido entre los planos $z = 0$ y $z = 1$ junto con sus tapas, con orientación hacia afuera.

8. **(1 punto)** Calcula la serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{si } -\pi < x < 0 \\ x & , \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

y dibuja la gráfica de su función suma en el intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

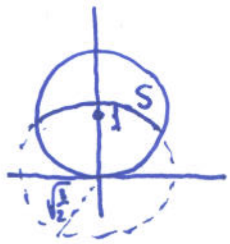
SOLUCIONES

(1) $\left.\begin{array}{l} y = 3x - x^2 \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow 3x - x^2 = x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 2$

$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2,\ x \leq y \leq 3x - x^2\}$

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_x^{3x-x^2} x\,dy = \int_0^2 x[(3x - x^2) - x]\,dx = \ldots\ldots = \frac{4}{3}$$

(2)



$$x^2+y^2=2y \underset{\text{Polares}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \rho=0 \\ \rho=2\sin\theta \end{cases}, \quad 0\le\theta\le\pi$$

a) $A(S)=\pi$

$$VM(T)=\frac{1}{\pi}\iint_S (x^2+y^2)\,dx\,dy=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^2\cdot\rho\,d\rho =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\rho=0}^{\rho=2\sin\theta}d\theta=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,d\theta=\frac{4}{\pi}\cdot 2\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\,d\theta=\frac{4}{\pi}\beta\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

b) Sobre los puntos que están en la placa y en la circunferencia $x^2+y^2=\frac{3}{2}$

---

(3)
$$\begin{cases} 4x^2+y^2=z \\ x^2+4y^2=10-z \end{cases} \Rightarrow z=4x^2+y^2=10-x^2-4y^2 \Rightarrow x^2+y^2=2$$

$$D=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le 2,\ 4x^2+y^2\le z\le 10-x^2-4y^2\}$$

$$V(D)=\iiint_D dx\,dy\,dz=\iint_{x^2+y^2\le 2}\left[(10-x^2-4y^2)-(4x^2+y^2)\right]dx\,dy=\iint_{x^2+y^2\le 2}5\left[2-(x^2+y^2)\right]dx\,dy$$

$$=5\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-\rho^2)\rho\,d\rho=\ldots\ldots=10\pi$$

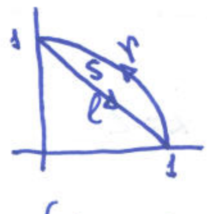
---

(4) $\alpha(t)=(\cos t,\sin t,t^2/2)\Rightarrow \alpha'(t)=(-\sin t,\cos t,t)\Rightarrow \|\alpha'(t)\|=\sqrt{1+t^2}$

$$m=\int_{\gamma}\rho\,ds=\int_0^{2\pi}\rho(\alpha(t))\cdot\|\alpha'(t)\|\,dt=\int_0^{2\pi}t\sqrt{1+t^2}\,dt=\left[\frac{(1+t^2)^{3/2}}{3}\right]_{t=0}^{t=2\pi}=\frac{(1+4\pi^2)^{3/2}-1}{3}$$

---

(5)



$\gamma \to \alpha(t)=(\cos t,\sin t)$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$

$\ell \to \beta(t)=(t,1-t)$, $0\le t\le 1$

a) $$\int_{\gamma}(x-y)\,dx+x\,dy=\int_0^{\pi/2}\left[(\cos t-\sin t)(-\sin t)+\cos t\cdot\cos t\right]dt=\int_0^{\pi/2}(1-\sin t\cos t)\,dt=\frac{\pi-1}{2}$$

b) $$\int_{\ell}(x-y)\,dx+x\,dy=\int_0^{1}\left[(t-1+t)\cdot 1+t\cdot(-1)\right]dt=\int_0^{1}(t-1)\,dt=\frac{-1}{2}$$

c)

c) $F=(x-y,x) \Longrightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=2$ y $\mathcal{S}=\gamma\cup\ell$ es cerrada.

$$\oint_{S} F\,ds \overset{\text{Green}}{=} \iint_{S}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = 2A(S) \Longrightarrow A(S)=\frac{1}{2}\oint_{S} F\,ds=\frac{1}{2}\left(\int_{\gamma} F\,ds+\int_{\ell} F\,ds\right)=\boxed{\frac{\pi-2}{4}}$$

---

6) El paraboloide y el cono se cortan en el plano $z=1$ en la circunferencia $x^2+y^2=1$ y, por tanto, la superficie S se puede parametrizar como:

$$\Phi(u,v)=(u,v,2-u^2-v^2) \quad \text{con } (u,v)\in D=\{(u,v): u^2+v^2\le 1\}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial u}&=(1,0,-2u)\\ \frac{\partial\Phi}{\partial v}&=(0,1,-2v)\end{aligned}\right\}\quad \frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}=(2u,2v,1)$$

$$F(x,y,z)=(e^{x^2}+2yz,\,4x,\,xy) \Longrightarrow \operatorname{rot}(F)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ e^{x^2}+2yz & 4x & xy\end{vmatrix}=(x,y,4-2z)$$

$$\oint_{\partial S} F\,ds \overset{\text{Stokes}}{=} \iint_{S}\operatorname{rot}(F)\,d\sigma=\iint_{D}(u,v,4-2(2-u^2-v^2))\cdot(2u,2v,1)\,du\,dv=$$

$$=\iint_{D}4(u^2+v^2)\,du\,dv=\text{----}=\boxed{2\pi}$$

---

7) La superficie S es la frontera de $\Omega=\{(x,y,z): x^2+y^2\le 4,\ 0\le z\le 1\}$, por lo que se puede aplicar el teorema de Gauss:

$$\iint_{S=\partial\Omega} F\,d\sigma \overset{\text{Gauss}}{=} \iiint_{\Omega}\operatorname{div}(F)\,dx\,dy\,dz \quad \text{y} \quad \operatorname{div}F=\operatorname{div}(y-xz,\,yz,\,xy+z^2)=2z$$

$$\| $$

$$\iiint_{\Omega}2z\,dx\,dy\,dz=\iint_{x^2+y^2\le 4}dx\,dy\int_0^1 2z\,dz=\iint_{x^2+y^2\le 4}dx\,dy=\boxed{4\pi}$$

8. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x, & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$

Se calculan los coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \dots = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\cos nx\,dx = \dots = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}, \quad n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \dots = \frac{-(-1)^n}{n}, \quad n \geq 1$$

La serie de Fourier es:

$$\boxed{f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos nx - \frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right)}$$