Departamento Inteligencia Artificial

POLITÉCNICA

LÓGICA - 1º Grado en Ingeniería Informática

Facultad de Informática

Universidad Politécnica de Madrid

Lógica de Primer Orden: Sintaxis

David Pérez del Rey

dperezdelrey@fi.upm.es

Despacho 2104

Tel: +34 91 336 74 45

Formalización

1. Aprendes lógica si y sólo si estudias. Estudias. Por tanto, aprendes lógica.

$$p \leftrightarrow q,\ q \models p$$

2. A todos los hombres les gusta que les rasquen detrás de las orejas. Hobbes es un hombre. Por tanto, a Hobbes le gusta que le rasquen detrás de las orejas.

$$p,\ q \models r$$

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)),\ P(a) \models Q(a)$$

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Elementos de un Lenguaje de Primer Orden

- Símbolos de constante $\{a, b, c, a_1, \ldots a_n \ldots\}$
- Símbolos de variable $\{x, y, z, x_1, \ldots x_n \ldots\}$
- Símbolos de función $\{f^1 \ldots f^n, g^1 \ldots g^n, h^1 \ldots h^n \ldots\}$
  - Notación alternativa {f(_), f(_,_) … g(_), g(_,_) …}
  - Notación infija 7+5 en lugar de +75 ó +(7,5)
- Símbolos de predicado $\{P^0, P^1 \ldots P^n, Q^0, \ldots Q^n, R^0, \ldots R^n\}$
  - Notación alternativa P, P(_), P(_,_) … Q, Q(_), Q(_,_)
  - Notación infija x=y en lugar de =xy ó =(x,y)

- Cada uno de estos conjuntos es disjunto del resto
  - No existen símbolos comunes entre constantes y variables
  - No existen símbolos comunes entre funciones y predicados

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Elementos de un Lenguaje de Primer Orden

- Conectivas lógicas $\{\neg, \vee, \rightarrow, \wedge, \leftrightarrow\}$
- Cuantificador $\{\exists, \forall\}$
- Símbolos de puntuación paréntesis, coma
  - Innecesarios si utilizáramos notación prefija
  - Mejoran la legibilidad `P(a,f(x,g(b))` en lugar de $\mathtt{P}^2\mathtt{af}^2\mathtt{xg}^1\mathtt{b}$
  - Reducibles a un mínimo en notación infija (predecencia):
    - $\{\forall, \exists, \neg\}$ son de menor alcance que $\{\wedge, \vee\}$, que son de menor alcance que $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Expresiones de un Lenguaje L de Primer Orden

- **Expresión**: Cualquier concatenación de símbolos

- Subconjuntos de expresiones que nos interesan (definición recursiva)

  - **Términos** de L son las siguientes expresiones:
    - Un símbolo de constante o variable
    - Una expresión del tipo: $f(t_1, \ldots, t_n)$ donde f es un símbolo de función n-ádico de L y $t^1 \ldots t^n$ son términos de L

  - **Átomos** de L son las expresiones del tipo:
    - $P(t_1, \ldots, t_n)$ donde P es un símbolo de predicado n-ádico de L y $t^1 \ldots t^n$ son términos de L

  - **Literal**. Son literales de L los átomos de L y las expresiones del tipo:
    - $\neg P(t_1, \ldots, t_n)$ donde ***P*** es un símbolo de predicado n-ádico de L y $t^1 \ldots t^n$ son términos de L

  - **Fórmulas Bien Formadas (FBF)** de L son las expresiones del tipo:
    - Átomos de L
    - $\neg A$, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$ y $A \leftrightarrow B$ son fórmulas de L sii A y B son FBF de L
    - $\exists x A(x)$ y $\forall x A(x)$ es una FBF de L sii A(x) es una FBF de L en la que x es un símbolo de variable libre (ver más adelante)

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Formalización: Estructuras Básicas

- Todos los hombres son mortales
  - $\forall x(H(x) \rightarrow M(x))$
- No todo hombre es mortal
  - $\neg \forall x(H(x) \rightarrow M(x))$ o $\exists x(H(x) \wedge \neg M(x))$
- Al menos un hombre es mortal
  - $\exists x(H(x) \wedge M(x))$
- Ningún hombre es mortal
  - $\neg \exists x(H(x) \wedge M(x))$ o $\forall x(H(x) \rightarrow \neg M(x))$
- Sólo los hombres son mortales
  - $\forall x(M(x) \rightarrow H(x))$
- (Típicamente, $\forall$ se usa con implicación y $\exists$ con conjunción)

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Formalización en LPO

- Seleccione los predicados, constantes y funciones necesarios para definir un LPO en el que formalizar las siguientes oraciones:

  1. *Vicente es mejicano*
  2. *Mi casa es roja*
  3. *Luisa y María son brasileñas pero Vicente es mejicano*
  4. *Jorge adora a Juan*
  5. *Jorge adora a su padre*
  6. *Juan ama a Rosa pero ella no le corresponde*
  7. *Pedro sujetó a Juan y María le atizó*
  8. *Homero escribió la Ilíada y la Odisea*
  9. *Nieves se peina a sí misma y también peina a Juan*
  10. *Titán es satélite de Saturno pero Europa no lo es*
  11. *O Pedro o María (pero no ambos) son hermanos míos*
  12. *Si Colón descubrió América, merece un lugar en la Historia*
  13. *El asesino de mi padre es Juan o Pedro, pero no Alberto*
  14. *María ama a mi padre mientras que Julia me ama a mi*
  15. *Cela leía a Borges aunque éste lo detestaba públicamente*

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Formalización en LPO

16. *María está enamorada de alguien*
17. *Hay al menos un número primo*
18. *Cualquier crimen será castigado*
19. *No todos los crímenes merecen la pena capital*
20. *Las novelas de Cela me fascinan*
21. *Hay profesores que no saben explicar*
22. *Sólo los suecos entienden a Bergman*
23. *Todo ciudadano tiene derecho a una vivienda*
24. *Hay genios, pero no todos los poetas lo son*
25. *No todos los satélites de Júpiter tienen atmósfera*
26. *Todos los estudiantes de tercer curso ayudan a al menos uno de primero*
27. *Nadie respeta a quien no se respeta a sí mismo*
28. *Hay un pintor a quien todo el mundo admira*

Alcance de los cuantificadores

- Alcance (ámbito) de un cuantificador es la menor sub-fórmula posible tras el cuantificador
  - $\exists \mathbf{x} P(\mathbf{x},y) \vee Q(x,y)$; $\exists \mathbf{x}(P(\mathbf{x},y) \vee Q(\mathbf{x},y))$; $\forall \mathbf{y} \exists \mathbf{x} P(\mathbf{x},\mathbf{y}) \vee Q(x,y)$; $\forall \mathbf{y} \exists \mathbf{x}(P(\mathbf{x},\mathbf{y}) \vee Q(\mathbf{x},\mathbf{y}))$

- Variables libres y ligadas
  - **Ligada** cuando esta bajo el alcance de un cuantificador
  - **Libre** cuando no se encuentra bajo el alcance de ningún cuantificador
  - Una variable puede estar libre y ligada en una misma fórmula

Fórmulas abiertas y cerradas

- Las **fórmulas cerradas** no tienen variables libres:
- Las **fórmulas abiertas** tienen al menos una variable libre:
- **Ejercicio.** Señalar las variables libres y ligadas:
  1. $\exists x(P(x,f(y)) \to \exists yQ(x,y))$
  2. $\exists xP(x) \to \forall yQ(x,f(y))$
  3. $\exists x\exists y(P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge R(a,y)$
  4. $\exists x\exists y((P(x,y) \vee Q(x,y) \wedge R(x,y))$
  5. $\forall x(x=y \to \exists zP(x,z))$
  6. $\exists x\forall yP(x,f(x,y)) \to \exists yQ(x,y)$
  7. $x = y + z \to x \leq y + z$
  8. $\forall x(x + 0 = x)$
  9. $\forall x(N(x) \to N(s(x)))$
  10. $\forall x\exists y(P(g(x,a),y) \vee \neg Q(x) \vee \neg R(z,b)) \wedge \exists zS(x,y,z)$

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Sustituciones - Notación

- La sustitución es una ***operación sintáctica*** sobre fórmulas y términos que devuelve nuevas fórmulas y términos:

  A – *sustitución* → A'   t – *sustitución* → t'

  - Esta operación se aplica *única y exclusivamente* sobre variables *libres* presentes en A o en t. De no haberlas, la sustitución rinde la expresión inicial.

- Siendo **A** una fórmula y **x** una variable de un LPO
  - A(x) indica la aparición de al menos una ocurrencia **libre** de x en A
  - A { x / t } representa a la fórmula obtenida a partir de A sustituyendo **todas** las apariciones de la variable libre x por el término t.

- Ejemplos:
  - $A(x)$: $P(x,f(y)) \rightarrow \exists y Q(x,y)$; $A\{x/a\}$: $P(a,f(y)) \rightarrow \exists y Q(a,y)$
  - $A(y)$: $\exists x((P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge R(x,y))$; $A\{y/f(z)\}$: $\exists x((P(x,f(z)) \vee Q(x,f(z))) \wedge R(x,f(z)))$
  - $A(x)$: $\exists x(P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge R(x,y)$; $A\{x/g(a,b)\}$: $\exists x((P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge R(g(a,b),y)$

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Sustituciones - Condiciones

- Condiciones para la sustitución de una variable **libre** por un término:
  - Reemplazo de ***todas y sólo*** las ocurrencias de la variable *libre* en la fórmula por el término
    - $(\exists x(P(x,f(y)) \rightarrow \exists yQ(x,y))) \{y/a\} = \exists x(P(x,f(a)) \rightarrow \exists yQ(x,y))$
  - $(\exists xA)\{y/t\} = \exists xA\{y/t\}$ sii t ***no*** contiene apariciones de ***x***
    - $\exists x(\neg(x=y))\{y/z\} = \exists x(\neg(x=z))$
    - $\exists x(\neg(x=y))\{y/x\} =? \exists x(\neg(x=x))$
  - $(\forall xA)\{y/t\} = \forall xA\{y/t\}$ sii t ***no*** contiene apariciones de ***x***
    - $\forall x Padre(x,y)\{y/primogénito(x)\} =? \forall x Padre(x,primogénito(x))$
  - $(\exists xA)\{y/t\}$ = **$\exists z(A\{x/z\})$**$\{y/t$ sii t ***contiene*** apariciones de ***x*** pero ***z no aparece en A***
    - $\exists x(\neg(x=y))\{y/x\} = \exists z(\neg(x=y)\{x/z\}))\{y/x\} = \exists z(\neg(z=y))\{y/x\} = \exists z(\neg(z=x))$
  - $(\forall xA)\{y/t\}$ = **$\forall z(A\{x/z\})$**$\{y/t\}$ sii t ***contiene*** apariciones de ***x*** pero ***z no aparece en A***
    - $\forall x Padre(x,y)\{y/primogénito(x)\} = \forall z(Padre(x,y)\{x/z\})\{y/primogénito(x)\} = \forall z Padre(z,y)\{y/primogénito(x)\} = \forall z Padre(z,primogénito(x))$

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Ejercicios de Sustituciones

1. $(\exists x(P(x,f(y)) \rightarrow \exists y Q(x,y)))\{y/g(z)\}$
2. $(\forall x \forall y(P(x,y) \rightarrow Q(x,y)))\{y/a\}$
3. $(\forall x(\forall y P(x,y) \rightarrow Q(x,y)))\{y/a\}$
4. $(\exists x(\forall y(P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge R(x,y)))\{y/b\}$
5. $(\exists x(\forall y(P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge R(x,y))\{x/b\}$
6. $(\exists x \forall y(P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge R(x,y))\{x/a, y/b\}$
7. $(\forall x(P(x,y) \rightarrow Q(x,y)))\{y/f(x,a)\}$
8. $(\forall y P(x,y) \rightarrow \forall x Q(x,y))\{y/f(x,a)\}$
9. $(x = y + z \rightarrow x \leq y + z)\{x/1, y/2\}$
10. $(x = y + z \rightarrow x \leq y + z)\{x/s(x)\}$
11. $(x = y + z \rightarrow x \leq y + z)\{x/s(y)\}$
12. $(\forall x(x + 0 = x))\{x/1\}$

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es