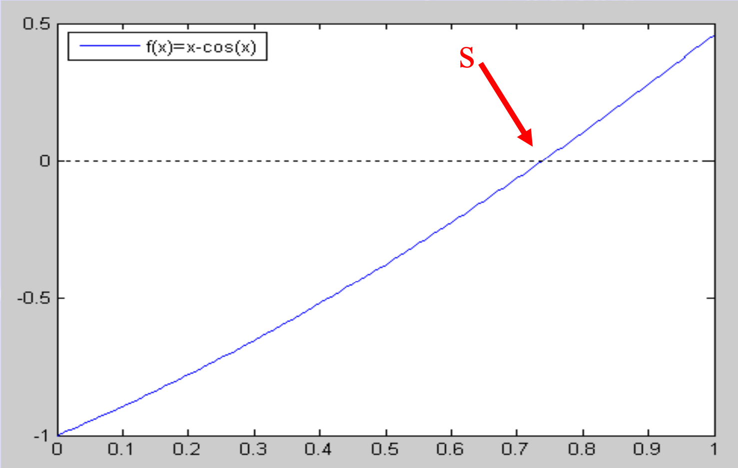
Repaso Ecuaciones No Lineales

- PROBLEMA: dada f(x), hallar s tal que f(s)=0



- Necesitaremos una idea aproximada de la solución s:

  Hipótesis inicial x0 o intervalo [a,b] que la contenga

- Usaremos métodos iterativos para refinar ese punto de partida.

REPASO

Métodos iterativos $\{x_n\} \rightarrow s$

- Hipótesis inicial: x_0 o [a,b]
- Regla para actualizar $x_n \rightarrow x_{n+1}$

Definimos el error de la n-ésima iteración como e(n) = |x(n) – s|.

MÉT. LINEALES: $e_{n+1} \approx K e_n$ con K<1. Aplicando logaritmos

cifras (n+1) = cifras (n) + $\log_{10}(1/K)$

Velocidad "constante": $\log_{10}(1/K)$ cifras por iteración

MÉT. CUADRÁTICOS: $e_{n+1} \approx K e_n^2$

cifras (n+1) = 2 $*$ cifras (n) + $\log_{10}(1/K)$

Básicamente duplicamos las cifras por iteración

Debemos saber estimar el error e_n para saber cuando parar.

Código bisección como una función

```
function f=fun(x) % Función a resolver (en un .m aparte)
  f = x.^2-2;
return
```

```
function s=bisecc(f,I,tol)
% Entrada: f  puntero a la función cuyo cero buscamos
%          I  intervalo [a b] con la raíz, tol precisión deseada.
% Salida : s, estimación de la raíz
N=50; % Máximo número de iteraciones
a=I(1); b=I(2); fa=f(a); fb=f(b); % Evaluación de f en extremos
if (fa*fb>0), fprintf('ERROR: NO HAY CAMBIO SIGNO\n'); return; end

n=1; % contador de iteraciones
while ( ((b-a)/2 >tol) && (n<=N) )  % Condiciones salida
  m = (a+b)/2; fm=f(m);% Evaluación de f en punto medio m
  if (fm*fa <0), b=m; fb=fm; else a=m; fa=fm; end % Subintervalo
  n = n+1;
end
s = (a+b)/2;  % Mejor hipotesis = centro del intervalo final [a,b]
return;
```

```
% En un script o desde la ventana de comandos
I=[1 2]; tol=1e-8;  s=bisecc(@fun,I,tol);
```


Código básico de Newton como una función

```
function [f,fp]=fun(x)
  f = x.^2 -2;   % Valor de función en x
  fp= 2*x;       % Valor de derivada en x
return
```

```
function s=newton(f,x0,N)
% Entrada: f puntero a la función cuyo cero buscamos
%          x0 hipótesis inicial cerca de raíz
%          N número iteraciones.
% Salida : s, estimación de la raíz tras N iteraciones
  s=x0; % arrancamos en x0
  for k=1:N  % N iteraciones
    [f fp]=f(s);  % Evaluación función y derivada
    s = s - f/fp; % Iteración de Newton
  end
end  % Al terminar la mejor estimación está en s
```

```
% en un script o ventana de comandos
x0=1.5; N=5; s=newton(@fun,x0,N)
```

Problema 1

Resolver la ecuación x=cos(x) usando método de la bisección.

a) Determinar nº de iteraciones necesarias para estimar solución con un error absoluto menor de 10^{-8}, partiendo de [0, 1].

b) Calcular a mano las 3 primeras iteraciones del método.

Primero: rápida estimación: quiero llegar a 8 decimales correctos, a unas 3.3 iteraciones por cifra decimal → ~ 26-27 iteraciones

$$e_n \leq \frac{1}{2^n}(b-a) < 10^{-8} \Rightarrow \frac{1}{2^n} < 10^{-8}$$

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2^n}\right) = n \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) < -8$$

$$\text{n} > \frac{8}{\log_{10}(2)} = \frac{8}{0.30} = 26.57 \qquad \boxed{n \geq 27 \quad iteraciones}$$

Problema 1

b) Calcula a mano las tres primeras iteraciones del método:

Intervalo inicial [0,1] f(0)=-1 (-) f(1) = 1-cos(1)>0 (+)

1ª) [0,1] (- , +) → punto medio 0.5 → f(0.5)=-0.37 <0 (-)

2ª) [0.5,1] (- , +) → punto medio 0.75 → f(0.75)=0.018>0 (+)

3ª) [0.5, 0.75] (- , +) → punto medio 0.625 ¿cota de error?

El error está por debajo de 1/8=0.125, al ser 0.625 el punto medio de un intervalo (de ancho ¼) donde está la solución.

Solución correcta es s = 0.73908513

Error real = |0.625 - s| = 0.1141 < 1/8

Problema 3: $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1 = 0$

1. Determinar que existe al menos una solución en el intervalo [1.6, 2]
2. Calcular 3 primeras iteraciones (x_0=1.8) dadas por $x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + x_n + x_n^2}$
3. Sabiendo que la solución es s =1.83928675521416 calcular el error cometido en cada iteración.
4. ¿Qué tipo de convergencia (lineal o cuadrática) muestra el método?
5. Sabiendo que en un método de convergencia lineal se verifica que $e_{n+1} / e_n \sim K$, determinar el valor de K para esta iteración.
6. A partir del valor de K estimar la velocidad de convergencia del método (en iteraciones necesarias para ganar una cifra decimal).

Aplicar 3 iteraciones del método de Newton a esta f(x).
Comparar resultados.

Problema 3

Dada la ecuación $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1 = 0$, se pide:

1. ¿Solución en el intervalo [1.6 , 2]?
2. Calcular 3 primeras iteraciones (x_0=1.8) de $x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + x_n + x_n^2}$
3. Si es s =1.83928675521416 calcular el error de cada iteración.

1) f(1.6)=-1.06<0 f(2)=1>0 y f(x) continua → existe solución

2,3)
```
s=1.83928675521416; x=1.8;
for k=1:3,  x=(1+x+x^2)^(1/3), e=abs(x-s), end
```

1.8	e_0= 0.0393
1.8211	e_1= 0.0182
1.8309	e_2= 0.0084
1.8354	e_3= 0.0039

Según las circunstancias podemos necesitar manejar más decimales.

Problema 3

4. ¿Tipo de convergencia (lineal o cuadrática) del método?

5. Sabiendo que en un método lineal se verifica que $e_{n+1} / e_n \sim K$, hallar el valor de K para esta iteración.

6. A partir de K estimar la velocidad de convergencia del método en iteraciones necesarias para ganar una cifra decimal.

4, 5) Calculamos ratio $\frac{e_{n+1}}{e_n} \to \frac{0.0182}{0.0393}, \frac{0.0084}{0.0182}, \frac{0.0039}{0.0084} \approx$ 0.463, 0.462, 0.464

y vemos que tiende a una constante, luego la convergencia es lineal, con un valor de K ~ 0.464 (un poco más rápido que la bisección)

6. Método lineal: el aumento de cifras en cada iteración es $\log_{10}(1/K)$

$\log_{10}(1/K) = 0.333$ cifras/iter → 1/0.333 ~ 3 iteraciones para una cifra

Problema 3 (aplicar Newton)

Aplicar 3 iteraciones de Newton a $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1 = 0$, y comparar con los resultados del método anterior.

$$f(x) = x^3 - x^2 - x - 1 \qquad f'(x) = 3x^2 - 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\left(x_n^3 - x_n^2 - x_n - 1\right)}{\left(3x_n^2 - 2x_n\right)} = \frac{2x_n^3 - x_n^2 + x_n + 1}{3x_n^2 - 2x_n}$$

x0 = 1.8 → e0 = 3.9e-002
x1 = 1.840625000000000 → e1 = 1.3e-003
x2 = 1.839288231894023 → e2 = 1.5e-006
x3 = 1.839286755215962 → e3 = 1.8e-012

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} \approx 0.0341,\ 0.0011,\ 0.0000 \qquad \frac{e_{n+1}}{e_n^2} \approx 0.8670,\ 0.8245,\ 0.8263$$

Métodos robustos vs Métodos rápidos

- Representante de métodos robustos: BISECCIÓN.
- Representante de métodos rápidos: NEWTON.

Con la bisección estaba claro que:

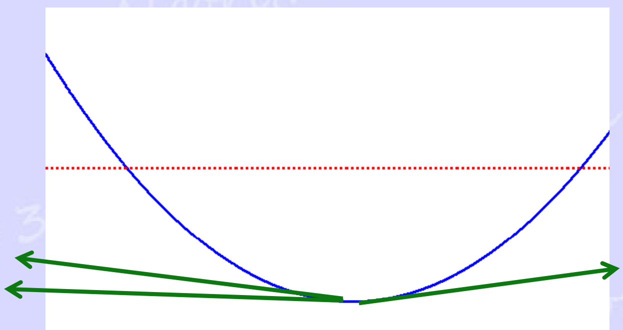
(1) Dado un intervalo con cambio de signo va a haber convergencia.

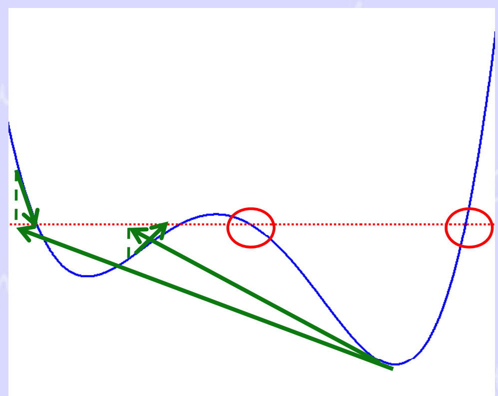
(2) El error se reduce un factor 2 por iteración: es fácil saber cuando parar para cumplir unas expectativas del usuario (error máximo)

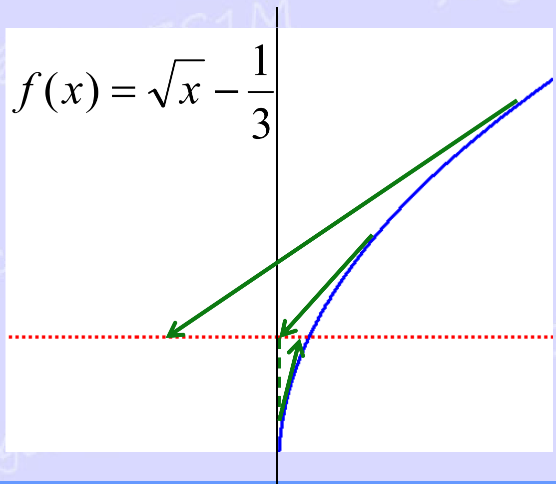
Método robusto (seguro que funciona) pero lento (1 bit por iteración)

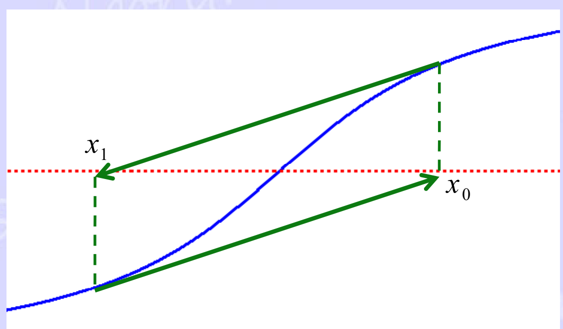
Newton es un método mucho más rápido CUANDO funciona.

Posibles problemas con Newton









Estudio de convergencia en Newton-Raphson

• Primero veremos algunos resultados sobre el comportamiento del método **cuando converge** que nos servirán para confirmar que es cuadrático y qué posibles criterios de parada usar.

• Luego estudiaremos si es posible (a priori) saber si Newton va a converger en función de lo lejos que esté la hipótesis inicial x_0 de la solución s (menos importante en la práctica).

• Con unas condiciones mínimas sobre f(x), Newton SIEMPRE converge si x_0 está lo suficientemente cerca de la solución.

• En la práctica esto nos permite combinar un método seguro (tipo bisección) para acercarnos a la solución junto con un método rápido (tipo Newton) para refinarla.

Como se comporta Newton CUANDO converge

Si Newton funciona y la sucesión $\{x_n\}$ empieza a acercarse a la solución s se cumple que:

$$1) \quad |x_{n+1} - s| \approx C \cdot |x_n - s|^2 \qquad con \quad C \approx \frac{f''(s)}{2f'(s)}$$

Si Newton funciona su convergencia es cuadrática: $e_{n+1} \sim C \cdot e_n^2$

$$2) \quad |x_n - s| \approx |x_n - x_{n+1}|$$

Nos permite estimar el error $|x_n – s|$ (que es desconocido) con $|x_n – x_{n+1}|$ (que siempre es calculable).

Muy útil en la práctica para saber cuando detener la iteración.

Letra pequeña: para que lo anterior pueda demostrarse es preciso que:
- existan f′ y f″ en un entorno de la solución s
- la derivada en la raíz f′(s) no se anule.

Demostración (1)

$$f(s) = f(x_n) + f'(x_n)(s - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2}(s - x_n)^2 + \ldots = 0$$

$$\frac{1}{f'(x_n)}$$

$$0 \approx \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (s - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2 \cdot f'(x_n)}(s - x_n)^2$$

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - s \approx \frac{f''(x_n)}{2 \cdot f'(x_n)}(s - x_n)^2$$

$$x_{n+1} - s \approx \frac{f''(x_n)}{2 \cdot f'(x_n)}(s - x_n)^2$$ y si $x_n \rightarrow s$ ➔ $\frac{f''(x_n)}{2 \cdot f'(x_n)} \rightarrow \frac{f''(s)}{2 f'(s)} = C$

En el ejercicio anterior $\begin{cases} f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 \\ f''(x) = 6x - 2 \end{cases}$ y la solución era s ≅ 1.84

Evaluando f′ y f″ en s ~1.84 tenemos que $C = \frac{f''(1.84)}{2 \cdot f'(1.84)} \approx \frac{9.03}{2 \cdot 5.47} = 0.826$

valor similar al K deducido "experimentalmente"

Demostración (2)

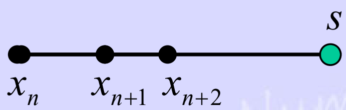
$$f(s) = f(x_n) + f'(x_n)(s - x_n) + \ldots = 0$$

$$\frac{1}{f'(x_n)}$$

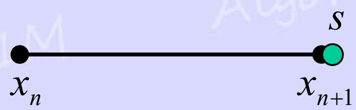
$$0 \approx \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (s - x_n)$$

$$(x_n - s) \approx \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (x_n - x_{n+1})$$

Una vez que Newton se pone a converger es tan rápido que desde el punto de vista de x_n, el siguiente punto de la sucesión x_{n+1} es como si prácticamente fuese la solución s.



Método lineal



Método cuadrático

Control de parada en método Newton-Raphson

```
Nmax = 15;     % Número máximo de iteraciones
TOL = 1e-8;    % Error máximo TOLerado por usuario
x0 = ...       % Punto inicial de iteración

while (iter<Nmax) AND (error>TOL)
 {
  [f, fp]=fun(x0);     % Evaluamos f(x0) y f'(x0)
  x1 = x0 - f/fp;      % Siguiente paso iteración

  error = | x1 - s |; % Error de x1 (para salir)

  x0 = x1;   % Actualizar punto de partida.
 }
```

Problema obvio: en un caso real no conocemos la solución s.

SOLUCIÓN: cambiar la condición |x1 – s | (no calculable) por algo similar (que si podamos calcular).

Control de parada en método Newton-Raphson

```
Nmax = 15;     % Número máximo de iteraciones
TOL = 1e-8;    % Error máximo TOLerado por usuario
x0 = ...       % Punto inicial de iteración

while (iter<Nmax) AND (error>TOL)
 {
  [f, fp] = fun(x0);     % f(x0) y f'(x0)
  x1 = x0 - f/fp;        % Siguiente iteración

  error = |x0 - x1|; % Error de x0 (para salir)

  x0 = x1;   % Actualizar punto de partida.
 }
```

PEGA: $|x_{n-1} - x_n|$ es la estimación del error en x_{n-1} no en x_n.

Para estimar el error en x_n habría que hacer una iteración más.

RESUMEN: convergencia Newton

CUANDO la sucesión $\{x_n\}$ se acerca a la solución s se cumple que:

$$1)\quad |x_{n+1}-s| \approx C\cdot|x_n - s|^2 \qquad con \quad C \approx \frac{f''(s)}{2f'(s)}$$

$$2)\quad |x_n - x_{n+1}| \approx |x_n - s|$$

1) Nos indica que la convergencia es cuadrática: $e_{n+1} \approx C\cdot e_n^2$

2) Permite estimar error $|x_n - s|$ a través de la diferencia $|x_n - x_{n+1}|$

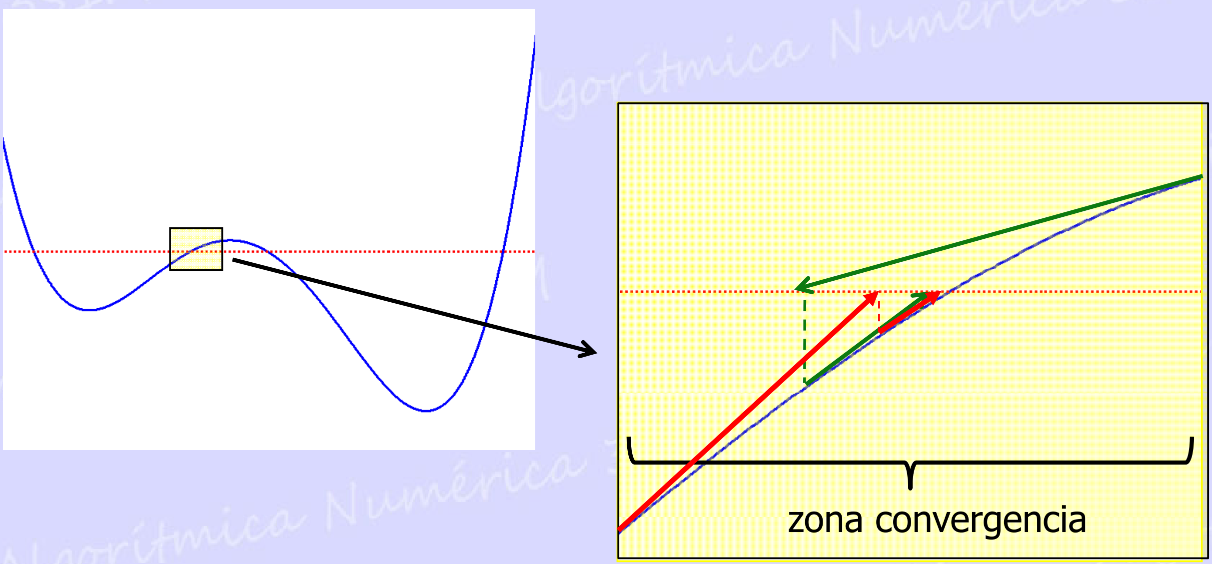
TODO ESTO ES MUY ÚTIL, pero no responde a la pregunta:

¿Si empiezo en un x_0, puedo saber a priori si va a funcionar?

(en realidad esta pregunta no es demasiado interesante en la práctica)

Convergencia local (cerca de la solución)

Alrededor de TODA solución siempre existe un intervalo de forma que si el punto inicial x_0 está dentro de esa intervalo tendremos garantizada la convergencia del método de Newton.



Convergencia a-priori de Newton

Si f(x) es C^2 en un entorno de la solución s y se cumple que la derivada de f no es cero en la raíz, $f'(s)\neq 0$, siempre será posible hallar M, una cota superior de $|f''(x)/(2\cdot f'(x))|$ en ese entorno de s:

$$\frac{|f''(x)|}{2|f'(x)|} \leq M = \frac{\max\{|f''(x)|\}}{2\min\{|f'(x)|\}}$$

Como $|e_n| \approx \dfrac{f''(x_{n-1})}{2\cdot f'(x_{n-1})} e_{n-1}^2 \leq M\cdot e_{n-1}^2$ entonces $M|e_n| \leq \left(M\cdot|e_{n-1}|\right)^2$

$$M|e_n| \leq \left(\left(M|e_{n-2}|\right)^2\right)^2 = \left(M|e_{n-2}|\right)^4 \leq \left(\left(M|e_{n-3}|\right)^2\right)^4 = \left(M|e_{n-3}|\right)^8 \leq \ldots$$

...

$$M|e_n| \leq \left(M|e_{n-2}|\right)^4 \leq \ldots \leq \left(M|e_0|\right)^{2^n}$$

$$\boxed{|e_n| \leq \frac{1}{M}\left|M\cdot e_0\right|^{2^n}}$$

Acotación del error en Newton

Esta cota: $e_n \leq \dfrac{1}{M}\left|M\cdot e_0\right|^{2^n}$

1. Garantiza que si empezamos con un error inicial e_0 que verifique que $|M\cdot e_0|<1$, el error tiende a cero al aumentar n.

   Newton converge si la hipótesis inicial x_0 verifica:

   $$\mathrm{M}\cdot \mathrm{e}_0 = \mathrm{M}|\mathrm{x}_0 - \mathrm{s}| < 1 \qquad \text{con} \qquad \mathrm{M} = \frac{\max\{|\mathrm{f}''(\mathrm{x})|\}}{2\min\{|\mathrm{f}'(\mathrm{x})|\}}$$

2. Dado un error TOL que estoy dispuesto a aceptar si impongo que:

   $$e_n \leq \frac{1}{M}\left|M\cdot e_0\right|^{2^n} < TOL$$

   puedo hallar las iteraciones n necesarias para que e_n < TOL.

3. La potencia del término |M·e0|<1 va con 2^n (2, 4, 8,…) → el error decrece rápidamente (convergencia cuadrática).

De cara a los problemas:

Newton "sobre la marcha": Aplicar Newton 2 o 3 veces: x_0, x_1, x_2, …

A partir de los resultados estimamos los errores, decidimos si parar, …

Nos basamos en $e_n = |x_n - s| \approx |x_n - x_{n+1}|$ y $e_{n+1} \approx K \cdot e_n^2$

Newton "a-priori" (sin iterar): probar que hay convergencia a partir de un x_0 dado o para todo punto perteneciente a un intervalo. Se trata de acotar M y el error e_0 del punto inicial:

e_0 = máximo valor posible de $|x_0 - s|$ $\qquad M = \dfrac{\max\{|f''(x)|\}}{2\min\{|f'(x)|\}}$

Una vez determinados M y e_0 habrá convergencia si $M \cdot e_0 < 1$

¿Número de iteraciones para una cierta tolerancia? $e_n \le \dfrac{1}{M}(M \cdot e_0)^{2^n} < TOL$

Problema 4

Proponer iteración basada en el método de Newton para calcular la raíz cúbica de un número c positivo.

Calcular las 3 primeras iteraciones para de c=7 (con x_0=2)

¿Qué error tenemos en la tercera iteración?

a) Newton resuelve ecuaciones del tipo f(x)=0.

Pensar en una f(x) tal que su solución sea la raíz cúbica de c.

Recordando el ejemplo de la raíz cuadrada: $f(x) = x^3 - c$

Iteración resultante: $\left.\begin{array}{r} f(x) = x^3 - c \\ f'(x) = 3x^2 \end{array}\right\} \rightarrow x = x - \dfrac{x^3 - c}{3x^2} = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{c}{3x^2}$

Formalmente sería:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - c}{3x_n^2}$$

Problema 4

b) Calcular las 3 primeras iteraciones para c=7, usando x_0=2.

¿Qué error tenemos en la tercera iteración?

```
c=7;
x=2;
for k=1:3,
  x = x - (x^3-c)/(3*x^2);
  fprintf('%.16f\n',x);
end
s = c^(1/3);
fprintf('s=%.16f\n',s);
E = abs(x-s);
fprintf('Eabs = %.2e\n',E);
```

2.0
1.9166666666666667
1.9129384583070783
1.9129311828000604

1.9129311827723889 ← s

E_{abs} = 2.77·10^{-11} (entre 10^{-11} y 10^{-10})

~ 10-11 decimales correctos

Problema 4

Estimar errores **sin usar la solución** con: $\begin{cases} e_n = |x_n - s| \approx |x_n - x_{n+1}| \\ e_{n+1} \approx K \cdot e_n^2 \end{cases}$

x0=2.000000000000 → $e_0 \cong |x_0 - x_1|$ = 8.33·10^{-2}

x1=1.916666666667 → $e_1 \cong |x_1 - x_2|$ = 3.73·10^{-3}

x2=1.912938458307 → $e_2 \cong |x_2 - x_3|$ = 7.28·10^{-6}

x3=1.912931182800 $e_3 \cong K \cdot e_2^{\,2}$ = 2.77·10^{-11}

$$K \approx \frac{e_2}{e_1^2} = 0.5234$$

Como comparación los errores reales (usando la verdadera solución s) son:

$e_0 = |x_0 - s|$ = 8.71·10^{-2}

$e_1 = |x_1 - s|$ = 3.74·10^{-3}

$e_2 = |x_2 - s|$ = 7.28·10^{-6}

$e_3 = |x_3 - s|$ = 2.77·10^{-11}

Problema 6

Dada f(x) = 3x-cos(x), demostrar que:

a) El método de Newton converge si el error inicial es menor que 4.

b) Con x_0=0.5, el método converge y el error en la iteración n está acotado por:

$$e_n \leq 4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{2^n}$$

c) Determinar el nº de iteraciones para asegurar que error < 10^{-8}

----

a) Habrá convergencia si: $Me_0 < 1 \rightarrow e_0 < \frac{1}{M}$ con $M = \frac{\max\{|f''(x)|\}}{2\min\{|f'(x)|\}}$

$$f(x) = 3x - \cos x$$

$$f'(x) = 3 + \sin x \longrightarrow |f'(x)| \geq 2$$

$$f''(x) = \cos x \longrightarrow |f''(x)| \leq 1$$

$$M = \frac{\max\{|f''(x)|\}}{2\min\{|f'(x)|\}} = \frac{1}{4}$$

Convergencia si M·e_0 < 1 → e0 < 1/M = 4

Problema 6

b) Si empezamos en x_0=0.5, el método converge y el error está la acotado por:

$$e_n \leq 4\left(\frac{1}{8}\right)^{2^n}$$

¿Error inicial? f(0) = - cos(0) = -1 < 0
f(1) = 3 - cos(1) >0 → Solución en [0, 1]

Para x_0=0.5, el error inicial no puede ser mayor de 0.5, por lo que e_0<0.5<4 → hay convergencia.

Además sabemos que:

$$e_n \leq \frac{1}{M}(M \cdot e_0)^{2^n} \qquad M = \frac{1}{4}, e_0 \leq \frac{1}{2} \quad \rightarrow e_n \leq 4\left(\frac{1}{8}\right)^{2^n}$$

Problema 6

c) Determinar nº de iteraciones para asegurar que error < 10^{-8}

$$e_n \le 4\left(\frac{1}{8}\right)^{2^n} < 10^{-8} \longrightarrow \log_2\left(4\left(\frac{1}{8}\right)^{2^n}\right) < \log_2\left(10^{-8}\right) \Rightarrow 2 + 2^n(-3) < -8\log_2(10)$$

$$2^n > \frac{8\log_2(10)+2}{3} = 9.52$$ → 4 o más iteraciones ($2^3=8$, $2^4=16$)

Tanteando: n=2 → $e_n \le 4\left(\frac{1}{8}\right)^4 = 9.76\cdot 10^{-4}$

n=3 → $e_n \le 4\left(\frac{1}{8}\right)^8 = 2.38\cdot 10^{-7}$

n=4 → $e_n \le 4\left(\frac{1}{8}\right)^{16} = 1.42\cdot 10^{-14}$

Problema 6 (iterando sin más)

Iteración de Newton: $$x_{n+1} = x_n - \frac{3x_n - \cos(x_n)}{3+\sin(x_n)}$$

$x_0=0.50000000$ → $e_0 \sim |x_0-x_1| = 1.79\cdot 10^{-1}$

$K \sim e_1/e_0^2 \sim 0.136$

$x_1=0.32111488$ → $e_1 \sim |x_1-x_2| = 4.36\cdot 10^{-3}$

$K \sim e_2/e_1^2 \sim 0.143$

$x_2=0.31675356$ → $e_2 \sim |x_2-x_3| = 2.73\cdot 10^{-6}$

$e_2 \sim K\cdot e_1^2 = 2.59\cdot 10^{-6}$

$x_3=0.31675083$ $e_3 \sim K\cdot e_2^2 \sim 1.06\cdot 10^{-12}$

En solo 3 iteraciones superamos (de sobra) la precisión deseada

¿Hasta donde se extienden estas zonas de convergencia alrededor de las soluciones?

La condición $|M \cdot e_0|<1$ indica la existencia de un intervalo $[s - e_0 , s + e_0]$ donde hay convergencia hacia la solución s.

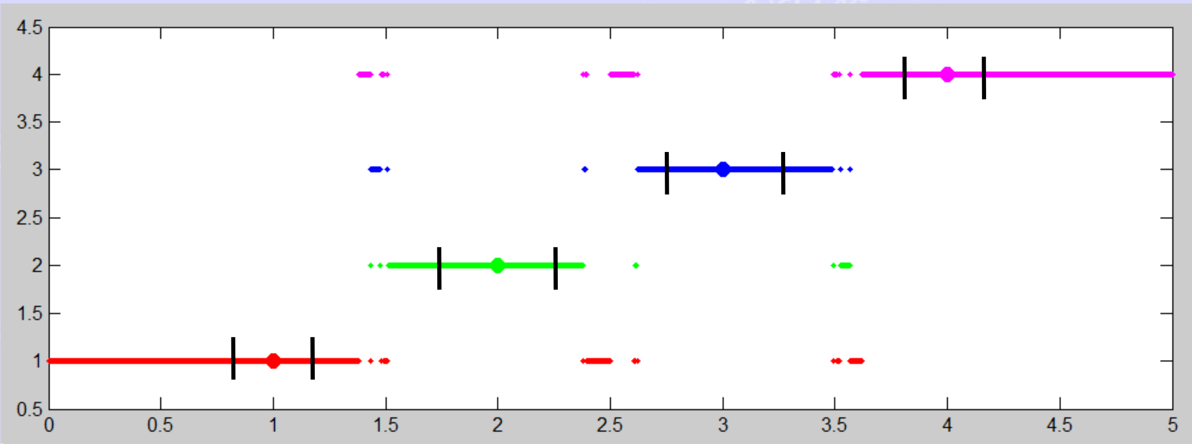
La condición es suficiente, pero no necesaria: es muy posible que se puedan extender más esos intervalos y seguir teniendo convergencia.

Podemos estudiar “experimentalmente” este asunto:

EJEMPLO: polinomio $p(x)=x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$ (raíces = 1,2,3,4)

- Parto de una malla fina de puntos entre por ejemplo 0 y 5
- Aplico el método de Newton a TODOS esos puntos.
- Tras N iteraciones veo a donde ha ido a parar los puntos de partida

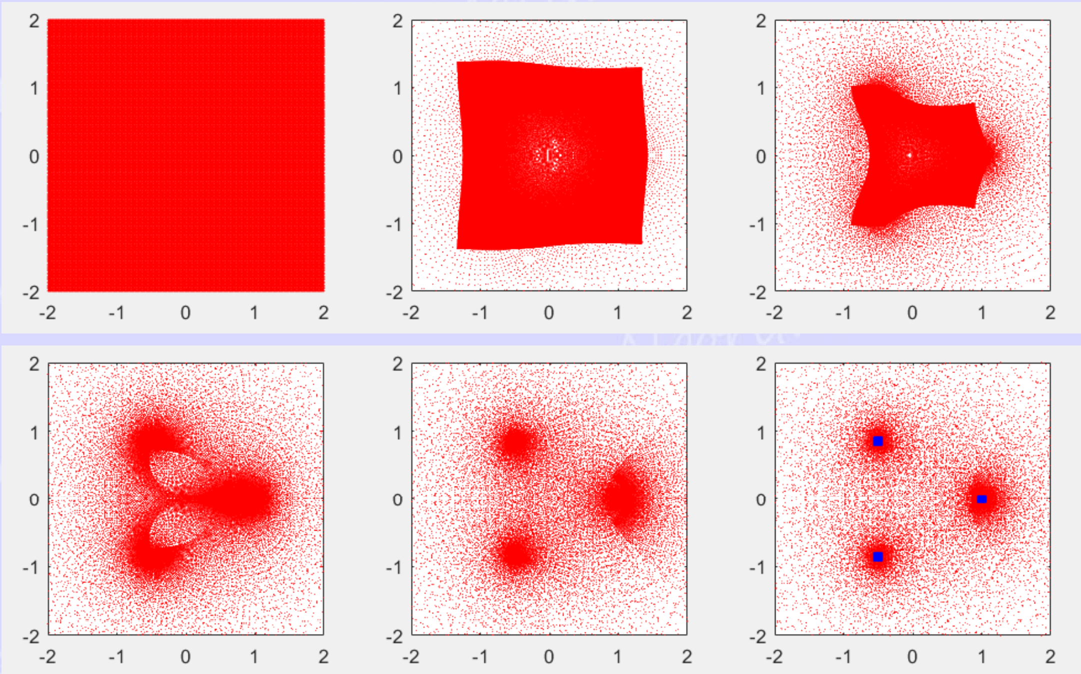
Estudio regiones de convergencia



| | → Zona de convergencia deducida de $M \cdot e0<1$

Generalizable al plano complejo

p(z)=z^3-1. Newton: $z_{n+1} = z_n - \dfrac{p(z_n)}{p'(z_n)} = z_n - \dfrac{z_n^3 - 1}{3z_n^2}$



Trabajando en el plano complejo