REPASO EXAMEN TEORÍA

Tema 1: Errores. Coma Flotante

JULIO17

Se considera una representación en coma flotante en base 2. Cada palabra utiliza en memoria los siguientes 6 bits: 3 bits para el exponente, $e = (e_1\ e_2\ e_3)$, y 3 bits para la mantisa, $m = (b_1\ b_2\ b_3)$. Los números máquina $\hat{x}$ representados y su denominación son los siguientes:

Si $e = (0\,0\,0)_2 = 0$, $\hat{x} = (0.b_1 b_2 b_3)_2 \times 2^{-3}$ Número denormalizado

Si $e = (e_1\ e_2\ e_3)_2 \neq 0$, $\hat{x} = (1.b_1 b_2 b_3)_2 \times 2^{e-4}$ Número normalizado

En esta representación:

- ¿Cuántos números denormalizados hay?, ¿cuántos normalizados? y, ¿cuántos números máquina?
- Calcular los números máquina (en formato decimal) cuando se almacena en memoria el contenido de la siguiente tabla. Completar la tabla, expresando el número en formato decimal (p.e., 0.00123, 2.45, etc.).

$e_1\ e_2\ e_3$	$b_1\ b_2\ b_3$	Nº máquina
000	000	
000	001	
000	111	
001	000	
111	111	
100	000	
111	001	

- A partir de los datos de la tabla anterior, calcular el $\text{eps}\left(\dfrac{7.5}{64}\right)$.
- Calcular los números máquina (en formato decimal) y los valores a almacenar en memoria de los valores que se indican. Completar la siguiente tabla.

	Nº máquina	$e_1\ e_2\ e_3$	$b_1\ b_2\ b_3$
0.1			
$1+0.1$			

Nota: No debéis entregar el enunciado. Copiar las dos tablas en la hoja de respuestas y completarlas. Debéis entregar también vuestro desarrollo del ejercicio, cálculos, etc.

Tenemos para los números desnormalizados un total de $2^3 = 8$ números máquina posibles; para los normalizados tenemos 2^3(mantisa) x $(2^3 - 1)$ (exponente) $8 \times 7 = 56$ números máquina posibles. Por lo que en total hay $56 + 8 = 64$ números máquina.

e1e2e3	b1b2b3	Nº máquina	
000	000	$(0.000) \times 2^{-3} = 0$	desnormalizado
000	001	$(0.001) \times 2^{-3} = 2^{-3} \times 2^{-3} = 2^{-6} = 0.015625$	desnormalizado
000	111	$(0.111) \times 2^{-3} = (2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}) \times 2^{-3} = 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6} = 0.0625 + 0.03125 + 0.015625 = 0.109375$	desnormalizado
001 = 1	000	$(1.000) \times 2^{(1-4)} = 1 \times 2^{-3} = 0.125$	normalizado
111 = 7	111	$(1.111) \times 2^{(7-4)} = (1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}) \times 2^3 = 2^3 + 2^2 + 2 + 2^0 = 15$	normalizado
100 = 4	000	$(1.000) \times 2^{(4-4)} = 1 \times 2^0 = 1$	normalizado
111 = 7	001	$(1.001) \times 2^{(7-4)} = (1 + 2^{-3}) \times 2^3 = 2^3 + 2^0 = 9$	normalizado

Dado que vmin_norm = 0.125 y vmax_denorm = 0.109375 y que
vmax_denorm < 7.5/64 = 0.1171875 < vmin_norm, entonces el eps de dicho número será el del salto de los números denormalizados a los normalizados.

eps(7.5/64) = 0.125 - 0.109375 = 0.015625

Para calcular 0.1:
(1) Nos fijamos el exponente:

Si e = 000 = 0 → vmin = 0 ← este es mi exponente

Si e = 001 = 1 → vmin = 0.125

(2) Partiendo del exponente e = (000) = 0, nos fijamos la mantisa que mejor se aproxime a 0.1:

$$\hat{x} = (0.b_1b_2b_3) \times 2^{-3} = (b_1 \cdot 2^{-1} + b_2 \cdot 2^{-2} + b_3 \cdot 2^{-3}) \times 2^{-3} = b_1 \cdot 2^{-4} + b_2 \cdot 2^{-5} + b_3 \cdot 2^{-6} =$$
$$= 1 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + 0 \cdot 2^{-6} = 0.0625 + 0.03125 = 0.09375$$

Para hacer 1 + 0.1: $\hat{x} = (1.000) \times 2^0 + (0.110) \times 2^{-3}$ = pasamos al de mayor exponente =
$= (1.000) \times 2^0 + (0.000) \times 2^0 = (1.000) \times 2^0 = 1$

	Nº máquina	e1e2e3	b1b2b3
0.1	$(0.110) \times 2^{-3} = 0.09375$	000	110
1+0.1	$(1.000) \times 2^0$	100	000

$2^{-1} = 0.5$	$2^{-3} = 0.125$	$2^{-5} = 0.03125$	$2^{-7} = 0.0078125$
$2^{-2} = 0.25$	$2^{-4} = 0.0625$	$2^{-6} = 0.015625$	$2^{-8} = 0.00390625$

JULIO20

a) Un ordenador usa la siguiente representación de números en coma flotante en base 2 (con redondeo al número más próximo):

$$\begin{cases} (1.b_1b_2)_2 \cdot 2^{e-2} & si \quad e = 1,2,3 \\ (0.b_1b_2)_2 \cdot 2^{-1} & si \quad e = 0 \end{cases}$$

En dicho ordenador ejecutamos: a=2.2; b=0.15; c = a + b;

Rellenad la siguiente tabla con los números máquina contenidos en a, b, c tras la ejecución del código anterior. Indicad sus valores en decimal, sus exponentes e y los valores de los bits de su mantisa (b_1b_2).

	Valor en decimal	Valor exponente e	Bits mantisa (b_1b_2)
a			
b			
c			

¿Cuál es la distancia mínima y máxima entre números máquina consecutivos en esta representación?

Distancia mínima	
Distancia máxima	

Para a=2.2:

(1) Nos fijamos el exponente:

Si e = 1 ⟶ vmin = (1.00) x 2^(1-2) = 2^-1 = 0.5

Si e = 2 ⟶ vmin = (1.00) x 2^(2-2) = 2^0 = 1

Si e = 3 ⟶ vmin = (1.00) x 2^(3-2) = 2^1 = 2 ⟵ este es mi exponente

(2) A partir de e = 3, nos fijamos la mantisa que más se aproxime a 2.2:

$\hat{x}$ = (1.b1b2) x 2^1 = (1 + b1*2^-1 + b2*2^-2) x 2 = 2 + b1*2^0 + b2*2^-1 = 2 + 0*2^0 + 0*2^-1 = 2

Para b=0.15:

(1) Nos fijamos el exponente:

Si e = 0 ⟶ vmin = (0.00) x 2^-1 = 0 ⟵ este es mi exponente

Si e = 1 ⟶ vmin = 0.5

(2) A partir de e = 0, nos fijamos la mantisa que más se aproxime a 0.15:

$\hat{x}$ = (0.b1b2) x 2^-1 = (b1*2^-1 + b2*2^-2) x 2^-1 = b1*2^-2 + b2*2^-3 = 0*2^-2 + 1*2^-1 = 0.125

Para c = a + b = (1.00) x 2^1 + (0.01) x 2^-1 = (1.00) x 2^1 + (0.00) x 2^1 = (1.00) x 2^1 = 2

	Valor decimal	Exponente (e)	Mantisa (b1b2)
a=2.2	2	3	00
b=0.15	0.125	0	01
c=a+b	2	3	00

Para calcular la distancia máxima entre dos números máquina consecutivos debemos situarnos en los números máquina que tienen el máximo exponente posible; mientras que para la distancia mínima, debemos situarnos en los números máquina que tienen el mínimo exponente posible.

min_dist = (0.01) x 2^-1 - (0.00) x 2^-1 = 0.01 x 2^-1 = 2^-2 x 2^-1 = 2^-3 = 0.125
max_dist = (1.01) x 2^1 - (1.00) x 2^1 = 0.01 x 2^1 = 2^-2 x 2^1 = 2^-1 = 0.5

REPASO EXAMEN TEORÍA
Tema 2: Interpolación
Tema 3: Ajuste. Mejor Aproximación

JULIO20

b) Justificad el grado mínimo del polinomio p(x) que verifique:

$$p(2)=1 \quad p'(2)=1 \quad p(1)=1$$

y calculad dicho polinomio.

Disponemos de una tabla con 5 datos. Se desea encontrar el polinomio de grado 3 que pase exactamente por uno de los puntos de la tabla y ajuste el resto de los puntos. **Justificad** cual sería la dimensión de la matriz H del sistema lineal sobredeterminado que habría que resolver.

Como tenemos 3 datos, entonces el grado del polinomio será 2.

Tabla de diferencias divididas:

x	p(x)	p(. , .)	p(. , . , .)
x0 = 1	A0 = p(1) = 1	A1 = (1 - 1) / (2 - 1) = 0	A2 = (1 - 0) / (2 - 1) = 1
x1 = 2	p(2) = 1	p'(2) = 1	
x2 = 2	p(2) = 1		

p(x) = 1 + 0 (x - 1) + (x - 1) (x - 2)
p(x) = 1 + (x - 1)(x - 2)

5 datos → 5 ecuaciones
polinomio grado 3 → p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 → 4 parámetros o coeficientes

Debe pasar EXACTAMENTE por uno de esos 5 datos de la tabla → 4 ecuaciones restantes y 3 parámetros o coeficientes libres

Luego, la dimensión de la matriz de coeficientes H sería 4x3

JULIO19

Ejercicio 1 PROBLEMAS:

a) Obtener con la fórmula de Newton generalizada el polinomio de grado 2, p(x), que verifica que p’(0)=0 e interpola los datos de la Tabla 1:

x_i	0	2
y_i	1	5

Tabla de diferencias divididas:

x	p(x)	p(. , .)	p(. , . , .)
$x_0 = 0$	$A_0 = p(0) = 1$	$A_1 = p'(0) = 0$	$A_2 = (2 - 0)/(2 - 0) = 1$
$x_1 = 0$	$p(0) = 1$	$(5 - 1)/(2 - 0) = 4/2 = 2$	
$x_2 = 2$	$p(2) = 5$		

$p(x) = 1 + x^2$

b) Construir la función spline cuadrado s(x) en los nodos {-1,0,2} con s’(0)=0 y que interpole los datos de la Tabla 2:

x_i	-1	0	2
y_i	-2	1	5

Estudiamos continuidad en la función y en la primera derivada (ya que es un spline cuadrado/cuadrático de grado 2)

$$s(x) = \begin{cases} a + bx + cx^2 & x \in [-1,0) \\ 1 + x^2 & x \in [0,2] \end{cases}$$

← como son los mismos puntos y el spline es cuadrático, entonces necesitamos que las funciones sean de grado 2. Aprovechamos el polinomio calculado en el apartado anterior

Estudiamos límites en el punto conflictivo, es decir, donde se podría producir el salto (x = 0):

- Para la función:

  $\lim_{x \to 0-} a + bx + cx^2 = a$ Luego, a = 1

  $\lim_{x \to 0+} 1 + x^2 = 1$

- Para la primera derivada:

  $\lim_{x \to 0-} b + 2cx = b$ Luego, b = 0

  $\lim_{x \to 0+} 2x = 0$

Sustituimos el valor que nos queda de la tabla:

$s(-1) = 1 + c(-1)^2 = -2 \to c = -3$

Luego, el spline cuadrático nos queda finalmente:

$$s(x) = \begin{cases} 1 - 3x^2 & x \in [-1,0) \\ 1 + x^2 & x \in [0,2] \end{cases}$$

c) Se quiere calcular un polinomio q(x) de grado 2 con q'(0)=0, que ajuste lo mejor posible (en el sentido mínimos cuadrados) los datos de la Tabla 3:

x_i	-1	0	1	2
y_i	-2	1	3.5	5

Se pide:

- **¿De cuántos parámetros libres se disponen para el ajuste de la Tabla?**
- **Dar matriz H de coeficientes y el vector B de términos independientes del sistema lineal H·C=B que resulta de ajustar los datos dados, siendo C el vector de incógnitas ¿Cuál es la dimensión del vector C?**
- **Sin calcular explícitamente los errores, razonar qué función p(x), s(x) o q(x) producirá una peor estimación del valor dado en x=2.**

Como q(x) es de grado 2, entonces es del tipo a + bx + cx^2, como tiene que cumplir una restricción adicional (en este caso q'(0) = 0), entonces desaparecerá uno de los parámetros (en este caso b = 0). Por lo que me quedan dos coeficientes libres.

Verificamos la restricción: q'(0) = b + 2c*0 = 0 → b = 0
Sustituyendo en el polinomio original nos queda: q(x) = a + cx^2

Planteamos el sistema sobredeterminado:
q(-1) = a + c = -2
q(0) = a = 1
q(1) = a + c = 3.5
q(2) = a + 4c = 5

Pasamos a forma matricial: H·C = B, donde H = {matriz de coeficientes}
B = {vector de términos independientes}

$$H = \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ 3.5 \\ 5 \end{matrix}$$

Como tenemos dos coeficientes y el vector de coeficientes es un vector columna (SIEMPRE), entonces la dimensión de C será 2x1.

Como tanto en p(x) como en s(x) estamos realizando una interpolación, nos aseguramos de que en ambos casos pasamos EXACTAMENTE por el punto x = 2, luego en ambos casos no se producirá error alguno.

Mientras que en q(x) estamos realizando una aproximación, entonces probablemente no llegará a pasar por el punto exacto, pudiendo producir un error en este caso.

REPASO EXAMEN TEORÍA
Tema 4: Ecuaciones No Lineales

SIMULACRO20

Problema 1: Sea la function f(x)= x^2+e^x-2.

a) Demostrar que tiene una raíz en el interval [0.5, 1].

b) Dar la expresión del método de Newton y calcular las iteraciones x1 y x2 para el punto inicial x0=0.5.

c) Con los valores de x0, x1 y x2 dar una estimación de sus errores e0, e1 y e2 sin calcular ningún término adicional de la iteración. ¿Cuántas iteraciones adicionales tendría sentido realizar si estamos trabajando en precision doble?

d) Demostrar que el método de Newton converge para cualquier otro punto inicial del intervalo [0.5, 1].

a) Tma Bolzano → f(0.5) * f(1) < 0
f(0.5) = 0.5^2 + exp(0.5) - 2 = -0.101278729
f(1) = 1^2 + exp(1) - 2 = 1.71828182
Como f(1) * f(0.5) < 0, entonces por el Tma Bolzano existe, al menos, una raíz en el intervalo [0.5, 1]

b) **Fórmula de Newton:** xn+1 = xn - f(xn)/f'(xn) → xn+1 = xn - (xn^2 + exp(xn) -2)/(2*xn + exp(xn))
x0 = 0.5
x1 = 0.5 - (0.5^2 + exp(0.5) -2)/(2*0.5 + exp(0.5)) = 0.538237
x2 = 0.538237 - (0.538237^2 + exp(0.538237) -2)/(2*0.538237 + exp(0.538237)) = 0.537275

c) Como desconocemos el valor exacto de la raíz del problema, entonces podemos aplicar la aproximación siguiente para calcular los errores: |en|≈ |xn+1 - xn|
|e0| ≈ |x1 - x0| = |0.538237 - 0.5| = 0.038237 = 3.8237e-2
|e1| ≈ |x2 - x1| = |0.537275 - 0.538237| = 0.000962 = 9.62e-4

Como no disponemos de la información de x3 y la necesitamos para hallar e2, y además el error de convergencia es cuadrático, entonces podemos aplicar la siguiente aproximación: en+1≈Ken^2

K ≈ en+1 / en^2 = e1/e0^2 = 9.62e-4/3.8237e-2^2 = 0.657972

e2 ≈ K*e1^2 = 0.657972* 9.62e-4^2 = 6.0892e-07

Sabemos que en precisión doble se alcanzan 15 cifras significativas de precisión correctas, por lo que probablemente con una única iteración más alcanzaríamos dicha precisión. Aunque con dos iteraciones nos podemos asegurar al 100% haber alcanzado la precisión de la máquina.

d) El método de Newton converge si $|Ce0| \leq 1$, donde

$e0 = |1 - 0.5| = 0.5$

$C = M/(2m)$, con $M = \max|f''(x)|[0.5,1]$ y $m = \min|f'(x)|[0.5,1]$

Calculamos las derivadas 1ª y 2ª de la función:

$f'(x) = 2x + \exp(x) \rightarrow$ $f'(0.5) = 1 + \exp(0.5) = 2.64872127\ldots$ min

$f'(1) = 2 + \exp(1) = 4.7182818281\ldots$

$f''(x) = 2 + \exp(x) \rightarrow$ $f''(0.5) = 2 + \exp(0.5) = 3.64872127\ldots$

$f''(1) = 2 + \exp(1) = 4.7182818281\ldots$ max

$C = 4.7182818281 / (2*2.64872127) = 0.890672$

Como $|Ce0| = 0.890672*0.5 = 0.445336 < 1$, el método de Newton converge para cualquier $x0 \in [0.5,1]$qq