Estructuras Algebraicas Primer examen parcial	1^{er} Apellido: ______________________	3 de abril de 2019
	2^{o} Apellido: ______________________	Tiempo 1 h 30'
Depto. Matemática Aplicada T.I.C. E.T.S. de Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: ______________________ Número de matrícula:	**Calificación:**

Para que sean consideradas como válidas, todas las respuestas deben estar adecuadamente justificadas.

1. (2 puntos) En el conjunto $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se define la siguiente operación:
   $(a, b) * (c, d) = (a + (-1)^b c, b + d)$. Estudiar si $(G, *)$ es un grupo.
   En caso afirmativo estudiar si es abeliano y si es isomorfo a $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$.

2. (2 puntos) En el grupo $(S_6, \circ)$, se considera el elemento: $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

   a) Obtener, en forma de producto de ciclos disjuntos, todos los elementos del subgrupo $K = \langle \alpha \rangle$ e indicar el inverso de cada uno de los elementos de K.

   b) Estudiar si el conjunto $\alpha A_6 \alpha^{-1}$ es un subgrupo de $(S_6, \circ)$, y en caso afirmativo, estudiar si se trata de un subgrupo normal. (A_6 es el subgrupo arternado de S_6)

3. (2 puntos)

   a) Sean $(G, \cdot)$ un grupo y $a \in G$. Estudiar si la aplicación $f : G \to G$ definida por $f(x) = axa^{-1}$ es un homomorfismo de grupos, en caso afirmativo calcular la imagen.

   b) Si $|G| = 8$ y $g : G \to D_2$ es un homomorfismo suprayectivo, obtener, salvo isomorfismos, el núcleo de g.

4. (2 puntos)

   a) En el grupo $(U_9 \times \mathbb{Z}_4\,,\ \cdot_9 \times +_4)$, se considera el subgrupo $H = \langle 4 \rangle \times \langle 2 \rangle$.
   Obtener el grupo cociente $U_9 \times \mathbb{Z}_4 / H$ y sus factores invariantes.

   b) Sea $(G, *)$ un grupo abeliano tal que $G = A \times B \times C$ siendo $|A| = 15$, $|B| = 10$ y $|C| = 4$.
   Obtener todos los posibles los factores invariantes de G.
   Estudiar en qué casos el grupo $(G, *)$ contiene al menos un elemento de orden 8 o al menos uno de orden 4.

5. (2 puntos)

   a) En $(S_6, \circ)$, se consideran los elementos $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.
   Calcular $\beta^{41} \circ \gamma^{42}$.

   b) Encontrar todos los homomorfismos que existen del grupo $(\mathbb{Z}_{10}, +_{10})$ en el grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$.
   Para los casos no triviales obtener el núcleo, la imagen y establecer el isomorfismo dado por el primer teorema de isomorfía.

Soluciones

1. Es grupo: La operación está claramente bien definida.

   a) Es asociativa: $((a,b)*(c,d))*(e,f) = (a+(-1)^b+(-1)^{b+d}c, b+d+f) = (a,b)*((c,d)*(e,f))$

   b) Tiene elemento neutro: $e = (0,0)$

   c) Todo elemento tiene un opuesto: $(a,b)^{-1} = ((-1)^{1-b}a, -b)$

   El grupo no es abeliano: $(1,2)*(4,3) = (5,5) \neq (3,5) = (4,3)*(1,2)$
   $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, +)$ es un grupo abeliano, por tanto no es isomorfo a $(G,*)$.

2. *a*) $\alpha = (1,4,3)(5,6) \Rightarrow$
   $K = \{e = (1), a_1 = (1,4,3)(5,6), a_2 = (1,3,4), a_3 = (5,6), a_4 = (1,4,3), a_5 = (1,3,4)(5,6)\}$,
   $a_1^{-1} = a_5, a_5^{-1} = a_1,\ a_2^{-1} = a_4, a_4^{-1} = a_2,\ a_3^{-1} = a_3, e^{-1} = e.$

   b) $\alpha A_6 \alpha^{-1} \subseteq A_6$ y $|A_6| = |\alpha A_6 \alpha^{-1}|$ por ser $g : A_6 \to \alpha A_6 \alpha^{-1}$ definida por $g(h) = \alpha h \alpha^{-1}$ una aplicación biyectiva $\Rightarrow \alpha A_6 \alpha^{-1} = A_6 \Rightarrow \alpha A_6 \alpha^{-1} \trianglelefteq S_6$

3. *a*) La aplicación está bien definida, ya que si $a, x \in G \Rightarrow a^{-1} \in G$ y $axa^{-1} \in G$.
   Es un homomorfismo de grupos: $f(x)f(y) = (axa^{-1})(aya^{-1}) = a(xy)a^{-1} = f(xy)$.
   Además, para todo $h \in G$, se verifica que $a^{-1}ha \in G$ y se tiene que $f(a^{-1}ha) = h \Rightarrow f$ es suprayectiva $\Rightarrow \mathrm{im}(f) = G$.

   b) Por el primer teorema de isomorfía: $G/\ker(g) \approx D_2 \Rightarrow |\ker(g)| = 2 \Rightarrow \ker(g) \approx \mathbb{Z}_2$

4. *a*) $U_9 \times \mathbb{Z}_4/H = \{(1,0)H, (1,1)H, (2,0)H, (2,1)H\}$, siendo:
   $(1,0)H = \{(1,0),(1,2),(4,0),(4,2),(7,0),(7,2)\}$,
   $(1,1)H = \{(1,1),(1,3),(4,1),(4,3),(7,1),(7,3)\}$,
   $(2,0)H = \{(2,0),(2,2),(8,0),(8,2),(5,0),(5,2)\}$,
   $(2,1)H = \{(2,1),(2,3),(8,1),(8,3),(5,1),(5,3)\}$.
   $U_9 \times \mathbb{Z}_4/H \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

   b) G puede ser isomorfo a uno de los siguientes grupos:
   $\mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{10}$ que sí tiene elementos de orden 4, pero no tiene de orden 8.
   $\mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_2$ que no tiene elementos de orden 4 ni de orden 8.

5. *a*) $\beta = (2,3)(4,5), \gamma = (1,2,3,4)(5,6).$ $\quad \beta^{41} \circ \gamma^{42} = \beta \circ \gamma^2 = (1,2,5,4,3)$

   b) $\varphi : \mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_6$, definida por $\varphi([a]_{10}) = [ka]_6$, siendo $k \in \{0,3\}$.
   Para $k = 3 \Rightarrow$ $\ker(\varphi) = \langle [2]_{10} \rangle = \{[0]_{10}, [2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}\}$ y
   $\mathbb{Z}_{10}/\langle [2]_{10} \rangle \approx \mathrm{im}(\varphi) = \langle [3]_6 \rangle$, mediante el isomorfismo:
   $\phi : \mathbb{Z}_{10}/\ker(\varphi) \to \langle [3]_6 \rangle$ definido por: $\phi([a]_{10} \ker(\varphi)) = [3a]_6$