Estructuras Algebraicas Primer examen parcial	1^{er} Apellido: ____________ 2^{o} Apellido: ____________ Nombre: ____________ Número de matrícula:	3 de abril de 2020 Tiempo 2 h
Dpt. Matemática Aplicada a las T.I.C. E.T.S. de Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid		**Calificación:**

Yo, (escribe tu nombre), declaro que no daré ni recibiré ninguna ayuda no autorizada en este examen, que todo el trabajo será mío, y que conozco las consecuencias que pueden resultar del incumplimiento de estas reglas.

1. (3 puntos)

   a) Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$. Estudiar si $(G, \cdot)$, con la operación producto usual de matrices, es grupo.

   b) Sea $(G, *)$ grupo con $|G| < 100$ y tal que tiene subgrupos $H, K \leq G$ con $|H| = 10$ y $|K| = 25$. Obtener el orden de G.

   c) Estudiar razonadamente si puede existir un grupo que tenga exactamente 2 elementos de orden 2.

2. (2 puntos)

   a) Sea $\alpha \in S_7$ tal que $\alpha^4 = (1, 4, 3, 5, 6, 2, 7)$. Determinar α.

   b) Sean $\beta, \gamma \in S_4$ tales que $\gamma(1) = 1$, $\beta \circ \gamma = (1, 4, 3, 2)$ y $\gamma \circ \beta = (1, 2, 4, 3)$. Obtener β y γ.

3. (2,5 puntos) Se considera la aplicación $f : \mathbb{R} \to GL_2(\mathbb{R})$ definida entre $(\mathbb{R}, +)$ y $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$, por:

$$f(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

   Estudiar si se trata de un homomorfismo de grupos, y en caso afirmativo calcular el núcleo y la imagen.

4. (2,5 puntos) Se considera el grupo $(U_{25}, \cdot_{25})$, y sea $H = \{a \in U_{25} : a \equiv 1 \mod 5\}$.
   Demostrar que $H \leq U_{25}$ y justificar que $H \trianglelefteq U_{25}$.
   Obtener la tabla de Cayley de U_{25}/H y calcular sus factores invariantes.

Para que sean consideradas como válidas, todas las respuestas deben estar adecuadamente justificadas.
No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.

Soluciones

1. *a)* 1) $\forall\ A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} \in G$, $AB = \begin{pmatrix} 2ab & 2ab \\ 2ab & 2ab \end{pmatrix} \in G$.

   2) El producto es asociativo, por ser el producto usual de matrices.

   3) $e = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in G$ es el elemento neutro.

   4) $\forall\ A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \in G$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \\ \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \end{pmatrix} \in G$

   b) $|G| = 50$

   c) Si $a \neq b$ y $|a| = |b| = 2 \Rightarrow aba \neq e_G, aba \neq a$. $\begin{cases} \text{si} \quad aba = b \Rightarrow \quad ab = ba \notin \{e_G, a, b\} \text{ y } |ab| = 2 \\ \text{si} \quad aba \neq b \Rightarrow \quad aba \notin \{e_G, a, b\} \text{ y } |aba| = 2 \end{cases}$

2. *a)* $\alpha^4 = (1,4,3,5,6,2,7)$, $|\alpha^4| = 7 = \frac{|\alpha|}{\text{mcd}(|\alpha|,4)} \Rightarrow |\alpha| = 7\text{mcd}(|\alpha|,4) \in \{7,14,28\} \Rightarrow |\alpha| \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12\} \cap \{7,14,28\} = \{7\} \Rightarrow \alpha^8 = \alpha = (1,3,6,7,4,5,2)$

   b) $\beta = (1,4,3,2)\gamma^{-1} \Rightarrow \gamma(1,4,3,2)\gamma^{-1} = (1,2,4,3) \Rightarrow \gamma(1) = 1$, $\gamma(4) = 2$, $\gamma(3) = 4$, $\gamma(2) = 3 \Rightarrow \gamma = (2,3,4) \Rightarrow \beta = (1,4,3,2)(4,3,2) = (1,4,2,3)$

3. $f(x+y) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) & -\sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x) \\ \sin(x)\cos(y) + \sin(y) & \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(y) & -\sin(y) \\ \sin(y) & \cos(y) \end{pmatrix} = f(x) \cdot f(y)$, por tanto es un homomorfismo de grupos.

   $\ker(f) = \{2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ $\qquad$ $\text{im}(f) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \ : \ A^tA = I, \ \det(A) = 1\}$

4. *a)* 1) $1 \in H \Rightarrow H \neq \emptyset$

   2) $a, b \in H \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 1 \mod 5 \\ b \equiv 1 \mod 5 \end{cases} \Rightarrow ab \equiv 1 \mod 5 \Rightarrow ab \in H$

   3) $a \in H \subset U_{25} \Rightarrow \exists b \in U_{25}$ tal que $ab \equiv 1 \mod 25 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 1 \mod 5 \\ ab \equiv 1 \mod 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 + 5t \\ ab = 1 + 25h \end{cases}$

   $\Rightarrow (1+5t)b = 1 + 25h \Rightarrow b = 1 + 5(5h - bt) \Rightarrow b \equiv 1 \mod 5 \Rightarrow b = a^{-1} \in H$

   Además $(U_{25}, \cdot_{25})$ es abeliano $\Rightarrow H \trianglelefteq U_{25}$

   b) $[1]_H = \{1,6,11,16,21\}$, $[2]_H = \{2,12,22,7,17\}$, $[3]_H = \{3,18,8,23,13\}$, $[4]_H = \{4,24,19,14,9\}$,

$\cdot_H$	$[1]_H$	$[2]_H$	$[3]_H$	$[4]_H$
$[1]_H$	$[1]_H$	$[2]_H$	$[3]_H$	$[4]_H$
$[2]_H$	$[2]_H$	$[4]_H$	$[1]_H$	$[3]_H$
$[3]_H$	$[3]_H$	$[1]_H$	$[4]_H$	$[2]_H$
$[4]_H$	$[4]_H$	$[3]_H$	$[2]_H$	$[1]_H$

$U_{25}/H \approx \mathbb{Z}_4$