Departamento Inteligencia Artificial

POLITÉCNICA

LÓGICA - 1º Grado en Ingeniería Informática

Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid

Lógica de Primer Orden: Semántica

David Pérez del Rey
dperezdelrey@fi.upm.es

Despacho 2104
Tel: +34 91 336 74 45

Introducción

- **Objetivo de la semántica formal**: dado un LPO, definir de modo preciso el significado de sus fórmulas. Para ello hay que dar significado al:
  - Vocabulario extra-lógico (constantes, predicados y funciones) del lenguaje.
  - Vocabulario lógico (variables, conectivas y cuantificadores)

- **Conceptos semánticos** empleados en semántica formal:
  - **Dominio** de interpretación ***D***: conjunto no vacío de objetos
  - **Predicados n**-ádicos: subconjuntos de Dominio^{n}
  - **Funciones n**-ádicas: **n**-tuplas de objetos del dominio $\mapsto$ objetos del dominio

  - **Función** de interpretación ***i()***:
    - Fórmulas $\mapsto$ {V, F}
    - Términos $\mapsto$ objetos del dominio
    - Predicados y funciones $\mapsto$ relaciones y funciones sobre objetos del dominio
  - **Interpretación** $\mathbf{I}$: *<D, i()>*

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Lenguajes de primer orden. Interpretaciones

- Las expresiones de un lenguaje ***significan*** cuando ***refieren*** a algo, cuando ***hablan de*** algo

1. Elección de un dominio no vacío de interpretación D
   - Ej. D = {Sol, Tierra, Luna}; D={1, 2, 3}; D = $\mathbb{N}$; D = { ☐, o, ♦ }; …

2. Asignación de significado al vocabulario extra-lógico de L:
   - Para toda constante $a_i \in L$: $i(a_i) = d_i \in D$
     - Todo individuo de D tiene una constante asociada (distinta) en L
     - Si L no posee suficientes constantes, se amplía a L(D)
   - Toda función $f^n \in L$: $i(f^n) = \langle d_1,\ldots,d_n \rangle \Rightarrow d$ (aplicación de D^n en D)
   - Todo predicado $P^n \in L$: $i(P^n) = \langle d_1,\ldots,d_n \rangle \Rightarrow \{V, F\}$ (aplicación de D^n en {V, F})
     - Alternativamente $i(P^n) \subseteq D^n$ ($i(P^n)$ es un subconjunto del producto cartesiano D^n)

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Función vs. Predicado

- Funciones (sobre D = N)
  - i(5 + 3) = 8
  - i(5 – 3) = 2
  - i(a) = 3; i(b) = 5; i(f(a, b)) = 15 donde f(x, y): x * y
- Predicados (sobre D = N)
  - i(5 > 3) = V
  - i(5 < 3) = F
  - i(3 = 5 - 2) = V
  - i(a) = 3; i(b) = 5; i(P(a, b)) = F donde P(x, y): x menor o igual que y

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es
David Pérez del Rey

Interpretación de términos

- Así pues, definimos una **interpretación I** como un par <D, i()>:
  - Un dominio no vacío de individuos, D
  - Una función i() de individuos de D, funciones y relaciones sobre D a todas las constantes, funciones y predicados de L.

- Asignación de significado a las **Fórmulas Bien Formadas (FBFs)** de un LPO:
  - Asignación de significado a las fórmulas ***atómicas básicas***
  - Asignación de significado a las fórmulas ***moleculares*** mediante inducción

Interpretación de fórmulas atómicas básicas

- Asignación de significado a términos

  $f^n(t_1,\ldots,t_n)$ significa un sólo término sii $t_1,\ldots,t_n$ no contienen variables

  - $i(f^n(t_1,\ldots, t_n)) = d \in D$ sii $i(t_1) = d_1,\ldots, i(t_n) = d_n$ y $<d_1,\ldots, d_n> \Rightarrow d \in i(f^n)$

- Asignación de valor de verdad a las **fórmulas atómicas básicas** de L:

  $P^n(t_1,\ldots,t_n)$ es una fórmula atómica básica sii $t_1,\ldots,t_n$ no contienen variables

  - $i(P^n(t_1,\ldots, t_n))= V/F$ sii $i(P^n)(i(t_1),\ldots, i(t_n)) = V/F$

  Alternativamente, si hemos definido $i(P^n)$ como una relación sobre D^n

  - $i(P^n(t_1,\ldots, t_n)) = V/F$ sii $<i(t_1),\ldots, i(t_n)> \in/\notin P^n{}_D$

  Cada interpretación concreta asignará **un y sólo un valor de verdad** a cada fórmula atómica de L. Dos interpretaciones sobre un mismo dominio y para un mismo lenguaje difieren entre sí en el valor de verdad que asignan.

  En el caso del predicado **$=^2$**, su semántica es **fija**, sin variación entre interpretaciones:

  - $i(t_1 = t_2) = V/F$ sii $i(t_1)$ es idéntico a / no es idéntico a $i(t_2)$

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Interpretación de fórmulas moleculares

- Asignación de valor de verdad a las **fórmulas moleculares**:
  - $i(\neg A) = V$ sii $i(A) = F$; $i(\neg A) = F$ sii $i(A) = V$
  - $i(A \wedge B) = V$ sii $i(A) = V$ y $i(B) = V$; $i(A \wedge B) = F$ sii $i(A) = F$ o $i(B) = F$
  - $i(A \vee B) = V$ sii $i(A) = V$ o $i(B) = V$; $i(A \vee B) = F$ sii $i(A) = F$ y $i(B) = F$
  - $i(A \rightarrow B) = V$ sii $i(A) = F$ o $i(B) = V$; $i(A \rightarrow B) = F$ sii $i(A) = V$ y $i(B) = F$
  - $i(A \leftrightarrow B) = V$ sii $i(A) = i(B)$; $i(A \leftrightarrow B) = F$ sii $i(A) \neq i(B)$;
  - $i(\exists xA) = V$ sii $i(A\{x/a\}) = V$ para al menos una sustitución x/a, ***a*** constante de L(D)
  - $i(\exists xA) = F$ sii $i(A\{x/a\}) = F$ para toda sustitución x/a, ***a*** constante de L(D)
  - $i(\forall xA) = V$ sii $i(A\{x/a\}) = V$ para toda sustitución x/a, ***a*** constante de L(D)
  - $i(\forall xA) = F$ sii $i(A\{x/a\}) = F$ para al menos una sustitución x/a, ***a*** $\in$ L(D)

- Nótese que estas asignaciones son *invariables para toda función de interpretación* i().

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Ejemplo de Interpretaciones

Consideremos las afirmaciones:

La Tierra orbita en torno al Sol. La Luna orbita en torno a la Tierra. La Tierra es un planeta. La Luna es un satélite

- Podemos interpretarlas sobre el dominio D = {Sol, Tierra, Luna} y con una función de interpretación que plasme el significado intuitivo de *orbitar*, *planeta* y *satélite*:
- Dadas las fórmulas: {O(a,b), O(c,a), P(a), S(c)}
- i(a) = Tierra; i(b) = Sol; i(c) = Luna
- i(P^1) = {<Tierra>}
  - Alternativamente i(P^1) = {<Tierra> ⇒ V, <Sol> ⇒ F, <Luna> ⇒ F }
- i(S^1) = {<Luna>}
  - Alternativamente i(S^1) = {<Tierra> ⇒ F, <Sol> ⇒ F, <Luna> ⇒ V }
- i(O^2) = {<Tierra,Sol>,<Luna,Tierra>}
  - Alternativamente i(O^2) = {<Tierra,Tierra> ⇒ F, <Tierra,Sol> ⇒ V, <Tierra,Luna> ⇒ F, <Sol,Sol> ⇒ F, <Sol,Tierra> ⇒ F, <Sol,Luna> ⇒ F, <Luna,Tierra> ⇒ V, <Luna,Luna> ⇒ F, <Luna,Sol> ⇒ F }

POLITÉCNICA
Departamento Inteligencia Artificial

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Ejercicios de Interpretaciones

- Construir interpretaciones que hagan verdaderas las formalizaciones (fórmulas de un LPO) de las oraciones siguientes:

    1. *Luisa y María son brasileñas pero Vicente es mejicano*
    2. *Jorge adora a Juan*
    3. *Jorge adora a su hermano Juan*
    4. *Juan ama a Rosa pero ella no le corresponde*
    5. *Pedro sujetó a Juan y María le atizó*
    6. *Homero escribió la Iliada y la Odisea*
    7. *Nieves se peina a sí misma y también peina a Juan*
    8. *Titán es satélite de Saturno pero Europa no lo es*
    9. *O Pedro o María (pero no ambos) son hermanos míos*
    10. *Si Colón descubrió América, merece un lugar en la Historia*
    11. *El asesino de mi padre es Juan o Pedro, pero no Alberto*
    12. *María ama a mi padre mientras que Julia me ama a mi*
    13. *Cela leía a Borges aunque éste lo detestaba públicamente*

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Ejercicios de Interpretaciones

1. Dadas las fórmulas: {O(a,b), O(c,a), P(a), S(c)}, interpretar su vocabulario extra-lógico en el dominio {■, ⊙, ∆} asignando a los predicados O(_,_), P(_) y S(_) los significados "más grande que", "cuadrado" y "redondo"
2. Dadas las fórmulas: {N(a), s(a)=b, N(b)}, interpretar su vocabulario extra-lógico en el dominio de las letras del alfabeto, siendo N(_) la propiedad de ser una vocal, =(_,_) la relación de identidad y s(_) la función sucesor en el orden lexicográfico usual.
3. Dadas las fórmulas: {P(a,b), H(b,c), p(c)=e, R(d,e), A(a,e), A(a, p(b))}, interpretar su vocabulario extra-lógico en el dominio {Juan Carlos, Elena, Felipe, Froilán, Leonor} asignando a P(_,_), H(_,_), R(_,_), A(_,_) y p(_) los significados de "padre", "hermano", "primo", "abuelo" y "primogénito" que se ajusten a la realidad. Decidir entonces si satisfacen las fórmulas o no.
4. Dadas las fórmulas: {C(a), C(a,b), P(b), C(c), C(c,d), P(d), M(a,c), M(b,d)}, interpretar su vocabulario extra-lógico en el dominio {Nueva York, Estados Unidos, Madrid, España, París}, asignando a los predicados C(_), C(_,_), P(_) y M(_,_) los significados "ciudad", "ser la capital de", "país" y "ser mayor que".
5. Interpretar el vocabulario extra-lógico de las fórmulas del ejercicio anterior en un dominio diferente, asignando a predicados y constantes una interpretación acorde con el dominio elegido.

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Interpretaciones de Fórmulas (Desarrollo)

- Formalizar con los predicados y constantes $\{O^2, P^1, S^1, a, b, c\}$ sobre el dominio {Tierra, Sol, Luna)

La Tierra orbita alrededor del Sol. La Luna orbita alrededor de la Tierra. La Tierra es un Planeta y la Luna es un Satelite. Todo objeto que orbita alrededor del Sol es un planeta. Todo objeto que orbita alrededor de un planeta es un satélite.

$$\{\ O(a,b),\ O(c,a),\ P(a) \wedge S(c),\ \forall x(O(x,b) \rightarrow P(x)),\ \forall x \forall y(O(x,y) \wedge P(y) \rightarrow S(x))\ \}$$

- $i(a)$ = Tierra; $i(b)$ = Sol; $i(c)$ = Luna
- $i(P^1) = \{<\text{Tierra}>\}$ $i(S^1) = \{<\text{Luna}>\}$ $i(O^2) = \{<\text{Tierra,Sol}>,<\text{Luna,Tierra}>\}$

- Interpretación de las fórmulas para ésta interpretación
- $i(O(a,b)) = V$ sii $<i(a),i(b)> \in i(O^2)$ sii $<\text{Tierra,Sol}> \in \{<\text{Tierra,Sol}>,<\text{Luna,Tierra}>\}$
- $i(O(c,a)) = V$ sii $<i(c),i(a)> \in i(O^2)$ sii $<\text{Luna,Tierra}> \in \{<\text{Tierra,Sol}>,<\text{Luna,Tierra}>\}$
- $i(P(a) \wedge S(c)) = V$ sii $i(P(a)) = V$ y $i(S(c)) = V$
  - $i(P(a)) = V$ sii $<i(a)> \in i(P^1)$ sii $<\text{Tierra}> \in \{<\text{Tierra}>\}$
  - $i(S(c)) = V$ sii $<i(c)> \in i(S^1)$ sii $<\text{Luna}> \in \{<\text{Luna}>\}$
- $i(\forall x(O(x,b) \rightarrow P(x))) = V$ sii
  - $i((O(x,b) \rightarrow P(x))\{x/a\}) = i(O(a,b) \rightarrow P(a)) = V$ sii $i(O(a,b))=F$ o bien $i(P(a))=V$

y
    - $i(P(a)) = V$ sii $<i(a)> \in i(P^1)$ sii $<\text{Tierra}> \in \{<\text{Tierra}>\}$
  - $i((O(x,b) \rightarrow P(x))\{x/b\}) = i(O(b,b) \rightarrow P(b)) = V$ sii $i(O(b,b))=F$ o bien $(P(b))=V$

y
    - $i(O(b,b)) = F$ sii $<i(b),i(b)> \notin i(O^2)$ sii $<\text{Sol,Sol}> \notin \{<\text{Tierra,Sol}>,<\text{Luna,Tierra}>\}$
  - $i((O(x,b) \rightarrow P(x))\{x/c\}) = i(O(c,b) \rightarrow P(c)) = V$ sii $i(O(c,b)) = F$ o bien $i(P(c)) = V$
    - $i(O(c,b)) = F$ sii $<i(c),i(b)> \notin i(O^2)$ sii $<\text{Luna,Sol}> \notin \{<\text{Tierra,Sol}>,<\text{Luna,Tierra}>\}$

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Interpretaciones de Fórmulas (Desarrollo)

- $i(a) = \text{Tierra};$ $i(b) = \text{Sol};$ $i(c) = \text{Luna}$
- $i(P^1) = \{<\text{Tierra}>\}$ $i(S^1) = \{<\text{Luna}>\}$ $i(O^2) = \{<\text{Tierra,Sol}>,<\text{Luna,Tierra}>\}$
- $i(\forall x \forall y(O(x,y) \wedge P(y) \rightarrow S(x))) = V$ sii
  - $i((\forall y(O(x,y) \wedge P(y) \rightarrow S(x)))\{x/a\}) = i(\forall y(O(a,y) \wedge P(y) \rightarrow S(a))) = V$ sii
    - $i((O(a,y) \wedge P(y) \rightarrow S(a))\{y/a\}) = i(O(a,a) \wedge P(a) \rightarrow S(a)) = V$ sii $i(O(a,a) \wedge P(a)) = F$ o $i(S(a)) = V$

      y
    - $i((O(a,y) \wedge P(y) \rightarrow S(a))\{y/b\}) = i(O(a,b) \wedge P(b) \rightarrow S(a)) = V$ sii $i(O(a,b) \wedge P(b)) = F$ o $i(S(a)) = V$

      y
    - $i((O(a,y) \wedge P(y) \rightarrow S(a))\{y/c\}) = i(O(a,c) \wedge P(c) \rightarrow S(a)) = V$ sii $i(O(a,c) \wedge P(c)) = F$ o $i(S(a)) = V$

y

  - $i((\forall y(O(x,y) \wedge P(y) \rightarrow S(x)))\{x/b\}) = i(\forall y(O(b,y) \wedge P(y) \rightarrow S(b))) = V$ sii
    - $i((O(b,y) \wedge P(y) \rightarrow S(b))\{y/a\}) = i(O(b,a) \wedge P(a) \rightarrow S(b)) = V$ sii $i(O(b,a) \wedge P(a)) = F$ o $i(S(b)) = V$

      y
    - $i((O(b,y) \wedge P(y) \rightarrow S(b))\{y/b\}) = i(O(b,b) \wedge P(b) \rightarrow S(b)) = V$ sii $i(O(b,b) \wedge P(b)) = F$ o $i(S(b)) = V$

      y
    - $i((O(b,y) \wedge P(y) \rightarrow S(b))\{y/c\}) = i(O(b,c) \wedge P(c) \rightarrow S(b)) = V$ sii $i(O(b,c) \wedge P(c)) = F$ o $i(S(b)) = V$

y

  - $i((\forall y(O(x,y) \wedge P(y) \rightarrow S(x)))\{x/c\}) = i(\forall y(O(c,y) \wedge P(y) \rightarrow S(c))) = V$ sii
    - $i((O(c,y) \wedge P(y) \rightarrow S(c))\{y/a\}) = i(O(c,a) \wedge P(a) \rightarrow S(c)) = V$ sii $i(O(c,a) \wedge P(a)) = F$ o $i(S(c)) = V$

      y
    - $i((O(c,y) \wedge P(y) \rightarrow S(c))\{y/b\}) = i(O(c,b) \wedge P(b) \rightarrow S(c)) = V$ sii $i(O(c,b) \wedge P(b)) = F$ o $i(S(c)) = V$

      y
    - $i((O(c,y) \wedge P(y) \rightarrow S(c))\{y/c\}) = i(O(c,c) \wedge P(c) \rightarrow S(c)) = V$ sii $i(O(c,c) \wedge P(c)) = F$ o $i(S(c)) = V$

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Ejercicios de Interpretaciones

- Construir interpretaciones e interpretar las siguientes formalizaciones:
  1. *María está enamorada de alguien*
  2. *Algunas cantantes de ópera no están gordas*
  3. *No todos los crímenes merecen la pena capital*
  4. *Las novelas de Cela me fascinan*
  5. *Hay profesores que no saben explicar*
  6. *Sólo los suecos entienden a Bergman*
  7. *Todo ciudadano tiene derecho a una vivienda*
  8. *Hay genios, pero no todos los poetas lo son*
  9. *No todos los satélites de Júpiter tienen atmósfera*
  10. *Todos los estudiantes de quinto curso ayudan a al menos uno de primero*
  11. *Los caballeros las prefieren rubias pero se casan con las morenas*
  12. *Nadie respeta a quien no se respeta a sí mismo*
  13. *Hay un pintor a quien todo el mundo admira*

Ejercicios de interpretaciones

Dadas las fórmulas:

$\{ N(a), \forall x(N(x) \rightarrow N(s(x))), \forall x(N(x) \rightarrow x+a = x), \forall x \forall y(N(x) \wedge N(y) \rightarrow x+s(y) = s(x+y) \}$

Construir una interpretación e interpretar en el dominio de los números naturales, siendo N(_) la propiedad de ser un número natural, =(_,_) la relación de identidad y s(_) y +(_,_) las funciones sucesor y suma respectivamente

Prof. David Pérez-Rey dpérezdelrey@fi.upm.es
David Pérez del Rey

Modelos y Contra-modelos

- **Modelo**: una interpretación I es modelo de una fórmula A sii A es verdadera en I
  - i(A) = V

- **Contra-modelo**: una interpretación I es contra-modelo de una fórmula A sii es falsa en I
  - i(A) = F

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Ejercicios de Modelos y Contra-modelos

- Ejercicio. Definir un modelo y un contra-modelo para cada una de las siguientes fórmulas en D = {1, 2}:
  1. $\forall x(P(x,a) \rightarrow Q(x))$
  2. $\exists x P(x) \wedge P(a)$
  3. $\forall x P(x) \wedge \neg P(a)$
  4. $\exists x(P(x,a) \rightarrow Q(x))$
  5. $\exists x(\forall y P(x,y) \rightarrow Q(x)) \vee \forall x P(x,x)$
  6. $\forall x \neg(\forall y P(x,y) \rightarrow Q(f(x))) \wedge \exists x \neg P(x,x)$
- en D = N (números naturales)
  1. $\exists x \forall y \forall z(x = y+z)$
  2. $\exists y \forall x(x = y)$
  3. $\forall x \exists y(x = y)$
  4. $\forall y \forall z \exists x(x = y+z)$

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Satisfacción

Satisfacción de fórmulas

- Una interpretación $\mathbf{I}$ = <D, i()> **satisface** una fórmula A $\in$ L sii i(A) = V
- Una fórmula A $\in$ L es **satisfacible** sii *existe al menos una* interpretación $\mathbf{I}$ tal que i(A) = V
- Una fórmula A $\in$ L es **insatisfacible** sii *no existe ninguna* interpretación $\mathbf{I}$ tal que i(A) = V
- Extensión a conjuntos de fórmulas $\{A_1,\ldots,A_n\}$, $A_i \in L$ $(1 \leq i \leq n)$:
  - Una interpretación $\mathbf{I}$ **satisface** $\{A_1,\ldots,A_n\}$ sii $i(A_i) = V$ para *todo* $i: 1 \leq i \leq n$
  - $\{A_1,\ldots,A_n\}$ es **satisfacible** sii existe al menos una interpretación $\mathbf{I}$ tal que $i(A_i) = V$ para *todo* $i: 1 \leq i \leq n$
  - $\{A_1,\ldots,A_n\}$ es **insatisfacible** sii no existe ninguna interpretación $\mathbf{I}$ tal que $i(A_i)=V$ para *algún* $i: 1 \leq i \leq n$

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Validez y consecuencia lógicas

Validez lógica

- Una fórmula $A \in L$ es **lógicamente válida** sii es verdadera en toda interpretación: $\models A$

Consecuencia lógica

- Dado un conjunto de fórmulas $\Gamma = \{A_1,\ldots,A_n\}$ $(A_i \in L)$ y una fórmula $B \in L$, $\Gamma \models B$ (B es consecuencia lógica de Γ) sii:
  - **TODO** modelo de Γ es también modelo de B (toda interpretación que satisfaga Γ satisface también B)
  - i.e. No existe ninguna interpretación que satisfaga a Γ y que *no satisfaga* a B

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Ejercicios de demostración semántica

- Sea el argumento: ***Hay individuos inteligentes o que saben hablar. Juan no sabe hablar. Luego Juan no es inteligente***.

- Y su formalización: $\{ \exists x(I(x) \vee H(x)), \neg H(a) \} \models \neg I(a)$

- Para determinar la validez de este argumento por medios semánticos, tratemos de definir una interpretación que:
  1. Verifique las premisas: $i(\exists x(I(x) \vee H(x))) = V$ y $i(\neg H(a)) = V$
  2. False la pretendida conclusión: $i(\neg I(a)) = F$

- Elijamos para ello un dominio de interpretación, p .ej. D = { Juan, Pedro }

- Y ampliemos el lenguaje en el que hemos formalizado el argumento con una segunda constante: b

- La interpretación:
  1. i(a) = Juan, i(b) = Pedro
  2. $i(I^1)$ = {<Juan>, <Pedro>}, $i(H^1)$ = {<Pedro>},

- Verifica las premisas y falsa la conclusión, luego el argumento no es válido.

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Ejercicios de demostración semántica

- Veamos en detalle verificación de las premisas y falsación de la conclusión:

1. $i(\exists x(I(x) \vee H(x))) = V$ sii
   - $i(\ (I(x) \vee H(x))\{x/c\}\ ) = V$ para alguna constante ‘c’ de L.
     - Sea ‘a’ esa constante: $i(I(a) \vee H(a)) = V$ sii
     - $i(I(a))=V$ o bien $i(H(a))=V$.
     - $i(I(a))=V$ sii $<i(a)> \in i(I^1)$, y es el caso que $<\text{Juan}> \in \{<\text{Juan}>, <\text{Pedro}>\}$

2. $i(\neg H(a))) = V$ sii
   - $i(H(a))=F$ sii $<i(a)> \notin i(H^1)$, y es el caso que $<\text{Juan}> \notin \{<\text{Pedro}>\}$

3. $i(\neg I(a)) = F$ sii
   - $i(I(a))=V$ sii $<i(a)> \in i(I^1)$, y sucede que $<\text{Juan}> \in \{<\text{Juan}>, <\text{Pedro}>\}$

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Ejercicios de demostración semántica

- Sea el argumento: *Todo elemento químico es oxidante o reductor. El carbono es un elemento químico no oxidante. Luego el carbono es reductor.*

- Y su formalización: $\{ \forall x(E(x) \rightarrow (O(x) \vee R(x))), E(a) \wedge \neg O(a) \} \models R(a)$

- Para determinar la validez de este argumento por medios semánticos, tratemos de definir una interpretación que:
  1. Verifique las premisas: $i(\forall x(E(x) \rightarrow (O(x) \vee R(x)))) = V$ y $i(E(a) \wedge \neg O(a)) = V$
  2. False la pretendida conclusión: $i(R(a)) = F$

- Elijamos para ello un dominio de interpretación, p .ej. D = { carbono, oxígeno }
- Ampliemos el lenguaje de formalización del argumento con una nueva constante: b
- La interpretación:
  1. i(a) = carbono, i(b) = oxígeno
  2. $i(E^1) = ?$, $i(O^1) = ?$, $i(R^1) = ?$

- **No puede** verificar las premisas y falsar la conclusión:
  1. $i(\forall x(E(x) \rightarrow (O(x) \vee R(x))))= V$ sii
     1. $i(E(a) \rightarrow (O(a) \vee R(a))) = V$ sii $\mathbf{i(E(a))=F}$ **o** $\mathbf{i(O(a) \vee R(a))=V}$ y
     2. $i(E(b) \rightarrow (O(b) \vee R(b))) = V$ sii $i(E(b))=F$ o $i(O(b) \vee R(b))=V$
  2. $i(E(a) \wedge \neg O(a)) = V$ sii
     1. $i(E(a))=V$ sii $\mathbf{<i(a)> \in i(E^1)}$. Y sucede que <carbono>$\in${<carbono>, <oxígeno>} y
     2. $i(\neg O(a))=V$ sii $i(O(a))=F$ sii $\mathbf{<i(a)> \notin i(O^1)}$. Y sucede que <carbono>$\notin${<oxígeno>}
  3. $i(R(a)) = F$ sii $\mathbf{<i(a)> \notin i(R^1)}$. Y sucede que <carbono> $\notin$ {}

- Lo que impide crear el contra-modelo ***no depende de I***, luego **el argumento es válido.**

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Validez lógica

¿ $\models \exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$?

$D = \{1, 2\}$ $L(D) = \{ P^2 \} \cup \{ a, b \}$

$i(\exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y)) = F$ sii

$i(\exists x \forall y P(x,y)) = V$ sii

$i(\forall y P(a,y)) = V$ sii

o bien $i(P(a,a)) = V$ y $i(P(a,b)) = V$

$i(\forall y P(b,y)) = V$ sii

$i(P(b,a)) = V$ y $i(P(b,b)) = V$

$i(\forall y \exists x P(x,y)) = F$ sii

$i(\exists x P(x,a)) = F$ sii

o bien $i(P(a,a)) = F$ y $i(P(b,a)) = F$

$i(\exists x P(x,b)) = F$ sii

$i(P(a,b)) = F$ y $i(P(b,b)) = F$

Es imposible crear una interpretación que haga falsa esta fórmula.
Verificar el antecedente es incompatible con falsar el consecuente.

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Ejercicios de demostración semántica

Demostrar por medios semánticos para D = {0, 1}:

1. $\{\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)), P(a)\} \models Q(a)$
2. $\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), P(a)\} \models Q(a)$
3. $\{\forall x(P(x) \rightarrow R(x)), \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))\} \models \forall x(R(x) \wedge \neg Q(x))$
4. $\models \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow \forall x(\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$
5. $\models \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$
6. $\models \exists x\forall yP(x,y) \rightarrow \forall y\exists xP(x,y)$
7. $\models \forall y\exists xP(x,y) \rightarrow \exists x\forall yP(x,y)$

Ejercicios de demostración semántica

Determina por medios semánticos la validez de los siguientes argumentos:

1. *0>1. 1>2. La relación '>' es transitiva. Por tanto, 0>2.*
2. *Robin Hood es generoso. Todos los ladrones son generosos. Por tanto, Robin Hood es un ladrón.*
3. *Siempre que Pedro discute con María, ésta se enfada con su padre. Una persona que se enfade con otra no la invita a su boda. Por tanto, si Pedro discute con María, ésta no invitará a su padre a su boda.*
4. *Todos los ladrones son generosos. Sólo los ricos son generosos. Robin Hood es un ladrón. Por tanto, Robin Hood no es rico.*
5. *Juan Carlos ama a Sofía. Quienes trabajan con Juan Carlos no conocen a fondo a Sofía. Si se ama a alguien, se le conoce a fondo. Sabino trabaja con Juan Carlos. Por tanto, Sabino ama a Sofía.*
6. *Hay un ladrón generoso. Por tanto, hay un ladrón y hay alguien generoso.*
7. *Hay un ladrón y hay alguien generoso. Por tanto, hay un ladrón generoso.*
8. *Todo elemento pesado es metálico. Por tanto, ningún no metal es un elemento pesado.*
9. *No es cierto que todo sea blanco o negro. Por tanto, no hay algo que no es ni blanco ni negro.*

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Ejercicios de demostración semántica

Formalización y soluciones:

1. $\{ M(a,b), M(b,c), \forall x \forall y \forall z(M(x,y) \wedge M(y,z) \rightarrow M(x,z)) \} \models M(a,c)$
2. $\{ G(a), \forall x(L(x) \rightarrow G(x)) \} \not\models L(a)$
3. $\{ D(a,b) \rightarrow E(b,f(b)), \forall x \forall y(E(x,y) \rightarrow \neg I(x,y)) \} \models D(a,b) \rightarrow \neg I(b,f(b))$
4. $\{ \forall x(L(x) \rightarrow G(x)), \forall x(G(x) \rightarrow R(x)), L(a) \} \not\models \neg R(a)$
5. $\{ A(a,b), \forall x(T(x,a) \rightarrow \neg C(x,b)), \forall x \forall y(A(x,y) \rightarrow C(x,y)), T(c,a) \} \not\models A(c,b)$
6. $\exists x(L(x) \wedge G(x)) \models \exists x L(x) \wedge \exists x G(x)$
7. $\exists x L(x) \wedge \exists x G(x) \not\models \exists x(L(x) \wedge G(x))$
8. $\forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \models \forall x(\neg M(x) \rightarrow \neg P(x))$
9. $\neg \forall x(B(x) \vee N(x)) \not\models \neg \exists x(\neg B(x) \wedge \neg N(x))$

Significado de fórmulas con cuantificadores

Decir si son válidas o no (y ese caso si en algún sentido de la implicación lo son) las siguientes FBF

1. $\forall x\, P(x) \rightarrow P(a)$
2. $P(a) \rightarrow \exists x\, P(x)$
3. $P(a) \rightarrow \forall x\, P(x)$
4. $\neg\forall x\, P(x) \leftrightarrow \exists x\, \neg P(x)$
5. $\neg\exists x\, P(x) \leftrightarrow \forall x\, \neg P(x)$
6. $\forall x\, \neg P(x) \leftrightarrow \neg\forall x\, P(x)$
7. $\neg\exists x\, P(x) \leftrightarrow \exists x\, \neg P(x)$
8. $\forall x\, P(x) \leftrightarrow \neg\exists x\, \neg P(x)$
9. $\exists x\, P(x) \leftrightarrow \neg\forall x\, \neg P(x)$
10. $(\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)) \leftrightarrow \forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$
11. $(\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)) \leftrightarrow \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$
12. $(\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)) \leftrightarrow \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$
13. $(\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)) \leftrightarrow \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$
14. $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow (\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x))$
15. $\forall x \forall y\, R(x,y) \leftrightarrow \forall y \forall x\, R(x,y)$
16. $\exists x \exists y\, R(x,y) \leftrightarrow \exists y \exists x\, R(x,y)$
17. $\exists y \forall x\, R(x,y) \leftrightarrow \forall x \exists y\, R(x,y)$
18. $\exists x \forall y\, R(x,y) \leftrightarrow \forall y \exists x\, R(x,y)$
19. $\exists x \forall y\, (P(x) \wedge Q(y)) \leftrightarrow \forall y \exists x\, (P(x) \wedge Q(y))$

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Fórmulas abiertas y cerradas

- Dada una fórmula abierta $A(x_1,...,x_n)$, definimos:
  - **Cierre existencial** de $A(x_1,...,x_n)$: $\exists x_1,...,x_n A$
  - **Cierre universal** de $A(x_1,...,x_n)$: $\forall x_1,...,x_n A$

- Interpretación de fórmulas abiertas y cerradas:
  - En ambas se emplea la operación de sustitución de variables por constantes.
  - En las fórmulas cerradas, la sustitución es requerida por la función de interpretación cuando su argumento es una fórmula cuantificada.
  - Para interpretar fórmulas cerradas, basta con <D, i()>
  - En las fórmulas abiertas, la sustitución es requerida antes de que podamos aplicar la función de interpretación.
  - Para interpretar fórmulas abiertas, además de <D, i()>, debe indicarse explícitamente θ.

- Relaciones semánticas entre fórmulas abiertas y cerradas:
  - $A(x_1,...,x_n)$ es satisfacible / insatisfacible sii $\exists x_1,...,x_n A$ lo es.
  - $A(x_1,...,x_n)$ es verdadera en $\mathbf{I}$ / válida sii $\forall x_1,...,x_n A$ lo es.

POLITÉCNICA
Departamento Inteligencia Artificial
Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es