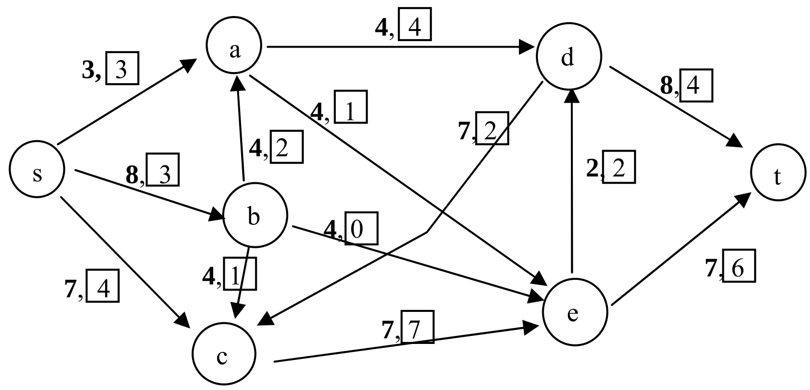
SOLUCIONES COMENTADAS

1. **(3 puntos)**

Enuncia el Teorema de Ford-Fulkerson definiendo, con detalle, los conceptos que aparecen en el enunciado. **Demuestra el teorema de Ford-Fulkerson**. En la red de la figura circula un flujo f de valor 12. Las etiquetas de cada arista indican su capacidad (en negrita y en primer lugar) y el valor actual del flujo (en segundo lugar y en recuadro). Indica un camino de f-aumento en la red con arista de retroceso. Aplica el algoritmo de etiquetado para obtener un flujo de valor máximo. Comprueba el teorema en esta red.



La demostración del teorema de Ford-Fulkerson se había anunciado como pregunta del examen, así que no habrá habido sorpresa, pero algunos alumnos no saben leer el enunciado de las preguntas que se hacen.

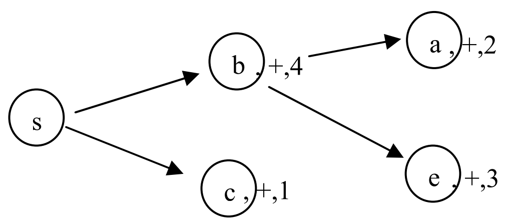
En el enunciado dice expresamente: "Enuncia el Teorema de Ford-Fulkerson definiendo, **con detalle, los conceptos que aparecen** en el enunciado". Algunos alumnos no han leído las palabras resaltadas en negrita y no han definido los conceptos de red, flujo, corte ni capacidad.

Por otra parte, el teorema afirma que el máximo de unos valores (flujos) coincide con el mínimo de otros (capacidades de cortes). Casi todos los alumnos han demostrado que dado un flujo de valor máximo se puede construir un corte cuya capacidad coincida con dicho valor. Pero esto NO demuestra completamente el teorema. Se necesita demostrar previamente que el valor de cualquier flujo es menor o igual que la capacidad de cualquier corte. Y esto solo lo han indicado muy pocos alumnos.

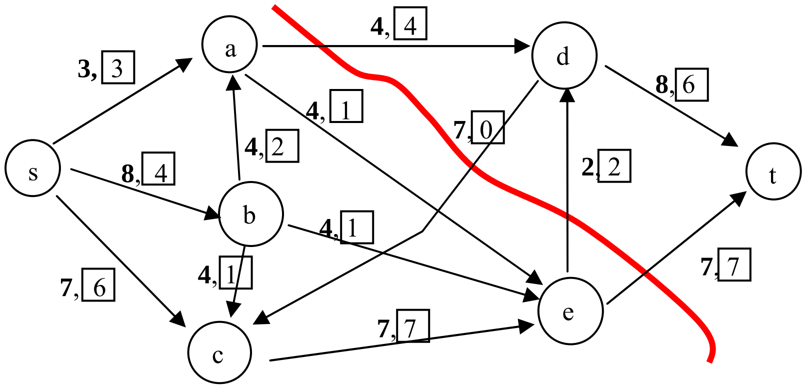
Pasamos ahora a la red de la figura. Un camino de f-aumento con una arista de retroceso es: s – c – d – t con residuo 2. Así tenemos un nuevo flujo f' que aumenta dos unidades en los arcos sc y dt y disminuye dos unidades en el arco dc.

Ahora un camino de f'-aumento es: s – b – e – t con residuo 1. Así se construye otro flujo f'' en el que se aumenta una unidad el flujo en los arcos sb, be y et.

Al construir el árbol BFS para encontrar caminos de f''-aumento NO se puede alcanzar el destino t. Los vértices SÍ alcanzados son S = {s,a,b,c,e}



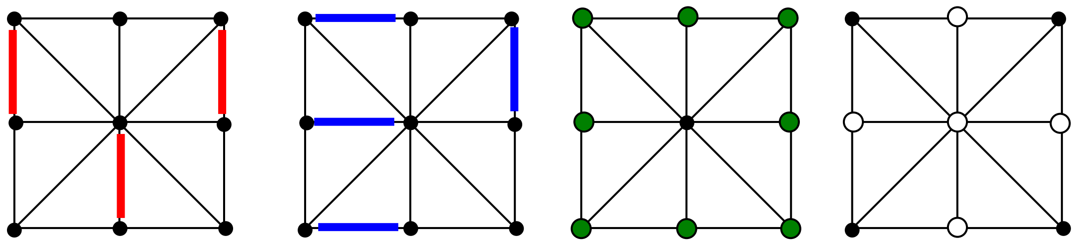
Por tanto el flujo de valor máximo es f'', su valor es 13 y el corte de capacidad mínima es S = {s,a,b,c,e} indicado en rojo y con capacidad 13.



2. **(2,5 puntos)**
   (a) Define emparejamiento y recubrimiento por vértices en un grafo.
   (b) Construye un emparejamiento maximal (no máximo) y un emparejamiento de cardinal máximo en el grafo de la figura.
   (c) Construye un recubrimiento minimal (no mínimo) y un recubrimiento de cardinal mínimo en el grafo de la figura.
   (d) Enuncia el teorema de König.
   (e) Aplícalo para resolver el siguiente problema: Entre los participantes en un rally se pueden formar 50 parejas de piloto-copiloto. Además cada participante sólo puede emparejarse con a lo sumo otros cinco participantes. Demostrar que puede celebrarse la competición con al menos 10 vehículos, cada uno de ellos con su pareja de piloto-copiloto.

Pondré en negrita las definiciones para que algunos alumnos se enteren de una vez por todas.

Un emparejamiento **es un conjunto M de aristas** tal que ……
Un recubrimiento por vértices **es un conjunto K de vértices** tal que … …
… espero que seáis capaces de completar las frases.



Emparejamiento maximal | Emparejamiento máximo | Recubrimiento minimal | Recubrimiento mínimo

El grafo de la figura es la rueda W_8

El emparejamiento de la izquierda es maximal porque no se puede añadir ninguna arista más sin que deje de cumplirse la condición para que un conjunto de aristas sea emparejamiento.

El emparejamiento azul es de cardinal máximo porque el grafo tiene 9 vértices, por lo que cualquier emparejamiento tiene a lo sumo 4 aristas.

El recubrimiento verde es minimal porque al eliminar cualquier vértice del recubrimiento siempre queda alguna arista sin recubrir.

Finalmente, el recubrimiento de la derecha es mínimo porque para cubrir las aristas del ciclo "exterior" se necesitan al menos cuatro vértices de dicho ciclo. Como cada uno de ellos sólo cubre su "radio", se necesita el vértice central para garantizar un conjunto recubridor.

(e) Construimos un grafo bipartido con los datos del problema. Los vértices de un nivel son los pilotos, los del otro nivel son los copilotos. Las 50 parejas posibles son las 50 aristas del grafo. La condición sobre emparejarse se traduce en que el grado máximo es 5. Se pide probar que hay un emparejamiento con al menos 10 aristas.

Lema. (Demostrado en un ejercicio en clase)
Un grafo bipartido de q aristas y grado máximo Δ tiene un emparejamiento con al menos q/Δ aristas.
Dem.:
Un vértice v cubre a lo más Δ aristas, luego se necesitan como mínimo q/Δ vértices para cubrir todas las aristas. Por tanto, $\beta \geq q/\Delta$.

Como G es bipartido, $\alpha' = \beta \geq q/\Delta$, luego hay un emparejamiento en G con al menos q/Δ aristas.

Aplicando el lema se obtiene el resultado que se pedía.

3. **(1,5 puntos)**

(a) Halla la función generatriz para el número de formas en que se puede obtener suma n cuando se lanzan 9 dados de distintos colores. Calcula el número de formas en que se puede obtener la suma 34.

(b) Halla la función generatriz de la sucesión definida por la siguiente relación de recurrencia:

$$a_n = 9a_{n-2} + 5^n \quad n \geq 2, \quad a_0 = 2,\ a_1 = 3$$

SOLUCIÓN

(a) La función generatriz es $A(x) = (x+x^2+x^3 + \ldots + x^6)^9 = \dfrac{x^9(1-x^6)^9}{(1-x)^9}$

Ahora se debe calcular el coeficiente de x^{34} en A(x), es decir, el coeficiente de x^{25} en $(1 - x^6)^9 w$, siendo $w = (1+ x+ x^2 + \ldots)^9$

Como $(1 - x^6)^9 = 1 - 9x^6 + \binom{9}{2}x^{12} - \binom{9}{3}x^{18} + \binom{9}{4}x^{24} - \cdots$ resulta que

a_{34} = (coef. de x^{25} en w) – 9(coef. de x^{19} en w) + 36(coef. de x^{13} en w) – $\binom{9}{3}$(coef. de x^7 en w) +

+ $\binom{9}{4}$(coef. de x en w) =

$$= \binom{25+9-1}{25} - 9\binom{19+9-1}{19} + \binom{9}{2}\binom{13+9-1}{13} - \binom{9}{3}\binom{7+9-1}{7} + \binom{9}{4}\binom{1+9-1}{1} =$$

$$= \binom{33}{8} - 9\binom{27}{8} + \binom{9}{2}\binom{21}{8} - \binom{9}{3}\binom{15}{8} + \binom{9}{4}\binom{9}{8}$$

(b) Sea $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la función generatriz de la sucesión solución

Aplicamos el procedimiento general de construcción de la función generatriz a la relación

Primero multiplicamos por x^n $\qquad a_n x^n = 9\, a_{n-2}\, x^n + 5^n x^n \quad n\geq 2$

Sumamos para los valores de n $\qquad \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 9\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 5^n x^n$

Por tanto,

$$A(x) = 2 + 3x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 2 + 3x + 9x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{n=2}^{\infty} (5x)^n =$$

$$= 2 + 3x + 9x^2 A(x) + \frac{1}{1-5x} - 1 - 5x$$

Luego $$A(x) = \frac{2 - 7x + 10x^2}{(1-9x^2)(1-5x)}$$

4. **(0,5 puntos)**

Demuestra, utilizando los diagramas de Ferrers que el número de particiones de n+3 en dos sumandos distintos coincide con el número de particiones de n en que cada sumando es 1 ó 2. Comprueba el resultado para n = 7.

n+3

				××	n
×××××××	$\Longleftrightarrow$	×××××××	$\Longleftrightarrow$	××	
××××		××××		××	
				×	
				×	

Expliquemos las operaciones indicadas en los diagramas anteriores.

En n+3 podemos eliminar la primera y última columnas, una con 2 equis y la otra con una. La partición conjugada será de n y sólo con doses y unos.

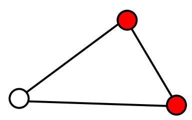
Recíprocamente, si se parte de una partición de n en la que todos los sumandos son unos y doses, el diagrama tendrá dos columnas. Al conjugar tendremos sólo dos filas. Si se añade una columna inicial con dos equis y otra final con una equis, tendremos una partición de n+3 en dos sumandos necesariamente distintos (por el añadido de una columna con una equis)

Particiones de 10 con dos sumandos distintos: 9 1, 8 2, 7 3, 6 4
Particiones 7 con sumandos 1 ó 2: 2221, 22111, 211111, 1111111

5. **(1,5 puntos)**
Indica razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Si un grafo no es planar entonces su número cromático es mayor que 4.
(b) Si I es un conjunto independiente maximal en un grafo G = (V,A) entonces K = V – I es un recubrimiento.
(c) Todo recubrimiento minimal es un conjunto independiente.

(a) Es falso. Por ejemplo $K_{3,3}$ no es planar y su número cromático es 2
(b) Es cierto.
Si K no es recubrimiento entonces existe e=ab tal que a,b $\notin$K, luego a, b son vértices de I que son adyacentes, lo que es contradictorio.
(c) Es falso. Por ejemplo, en C_3 todo recubrimiento minimal está formado por dos vértices. Y estos no constituyen un conjunto independiente por ser adyacentes.



6. **(0,5 puntos)**
Construye un emparejamiento estable para los conjuntos X={x,y,z,w} y A={a,b,c,d}, siendo las preferencias:

x: b>c>a>d	a: z>x>y>w
y: b>c>d>a	b: z>w>y>x
z: c>d>b>a	c: x>w>y>z
w: c>b>a>d	d: y>x>z>w

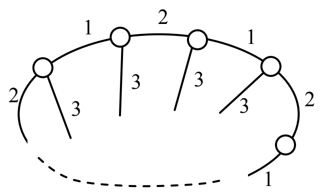
Aplicamos el algoritmo de Gale-Shapley

	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª
x	~~b~~	c	c	c	c	c	c
y	b	b	~~b~~	~~c~~	d	d	d
z	~~c~~	d	d	d	~~d~~	b	b
w	c	~~c~~	b	b	b	~~b~~	a

El emparejamiento estable obtenido es: xc, yd, zb, wa

7. **(0,5 puntos)**
Calcula el índice cromático de un grafo hamiltoniano y 3-regular.

Observación: Se pide **índice cromático**, no el número cromático



Las aristas del ciclo hamiltoniano se colorean con los colores 1 y 2, alternadamente. Y el resto de aristas, que son disjuntas, con el color 3.
Luego $\chi'(G) = 3$

En esta demostración falta justificar que las aristas del ciclo hamiltoniano pueden colorearse con solo dos colores, esto es, que tiene longitud **PAR,** es decir, que el número de vértices de un grafo 3-regular es siempre PAR. Pensad cuál es la explicación (elemental).

8. **(1 punto)**
Demuestra el teorema de los seis colores para grafos planos.

Parece que hay demasiados alumnos con “alergia” a las demostraciones. Que cada uno piense si su elección del Grado de Matemáticas e Informática es adecuada para su futuro académico si sufre ese tipo de alergia.
Por otra parte la demostración de este resultado se hizo en clase y es breve y muy sencilla.