0.1. Lección 8

0.1.1. Propiedades artiméticas de los límites.

Proposición 1. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = M$ *entonces:*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = L + M$.
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = LM$.
3. *Si* $M \neq 0$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$.

Observación 2. *Todas las propiedades aritméticas se siguen verificando si consideramos límites laterales* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

Observación: Utilizando el resultado $\lim\limits_{x\to a} x = a$ y aplicando las propiedades anteriores se sigue que en el caso de funciones $f(x)$ que sean polinomios, o más generalmente funciones racionales, se tiene que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ siempre que a pertenezca al dominio. Más generalmente,

▷ Todos los límites de las funciones elementales: racionales, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, existen *en los puntos del dominio de la función.*

0.1.2. Composición de funciones

(*Composición de funciones:*) Sea $f : A \to B$ y $g : B \to C$, de modo que $Im(f) \subset B$ definimos la función composición de f con g, denotada por $g \circ f$ a la función

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Observación 3. *Nótese que para que la composición de f con g esté bien definida $Im(f) \subset Dom(g)$.*

Observación 4. *En general no es cierto que $f \circ g = g \circ f$. Para verlo, consideramos el siguiente ejemplo $f(x) = x^2$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$; es claro que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \operatorname{sen} x^2$ y $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \operatorname{sen}^2 x$ y no coinciden.*

☒ Calcula $f \circ g$ y $g \circ f$ si:

$$f(x) = \begin{cases} x \ si \ x \geq 0 \\ 0; si \ x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x \geq 0 \\ -x^2; si \ x < 0 \end{cases}$$

Sobre la composición de funciones tenemos el siguiente resultado:

Proposición 5. *Sean f, g funciones, f definida en $(a - r, a + r) \setminus \{a\}$ y g definida en $(L - s, L + s) \setminus \{L\}$ y de modo que $f(x) \neq L$ para todo x. Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to L} g(x) = M$ entonces $\lim_{x \to a} g \circ f(x) = M$.*

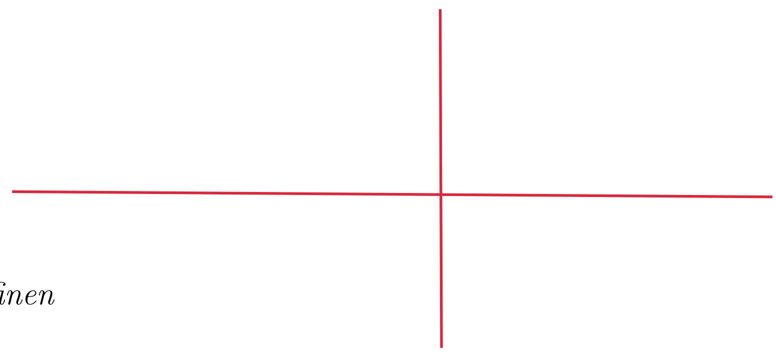
0.1.3. Límites infinitos y en el infinito.

En esta sección analizaremos los límites infinitos.

Sea f definida en $(a-r,a+r)\setminus\{a\}$.

1. Diremos que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ si para todo $R>0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<|x-a|<\delta$ se tiene que
$$f(x)>R.$$
2. Diremos que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ si $\lim\limits_{x\to a} -f(x)=\infty$, es decir, si para todo $R<0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<|x-a|<\delta$ se tiene que
$$f(x)<R$$

Interpretación gráfica: Dado $R>0$, consideramos la recta horizontal $y=R$ y tenemos que encontrar $\delta>0$ de modo que si $x\in(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}$ se tiene que la gráfica de función en dicho conjunto tiene que estar contenido en el semiplano superior limitado por la recta horizontal.



Observación 6. *De forma análoga se definen*

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty(\text{ o } -\infty, \lim_{x\to a^-} f(x)=\infty(\text{ o } -\infty$$

$\triangleright$ *El resultado que afirma que si* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L\neq M=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ *sigue siendo cierto cuando estos límites son* ∞ *o* $-\infty$.

Por lo tanto: No existe $\quad \lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ Esto es debido a que:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty\neq-\infty=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}.$$

0.1.4. Indeterminaciones del tipo $[\frac{K}{0}]$, $K \neq 0$

Pregunta: Supongamos que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, ¿ es cierto que $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{f(x)}$?

Cuando consideramos $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)}$ con $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ no podemos afirmar, en general, que dicho límite sea ∞ o $-\infty$. Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{1}{x}$ *no* tiene límite ∞ ni $-\infty$ en 0.

⊛ Busca el error en la siguiente demostración:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{f(x)} = \infty???$$

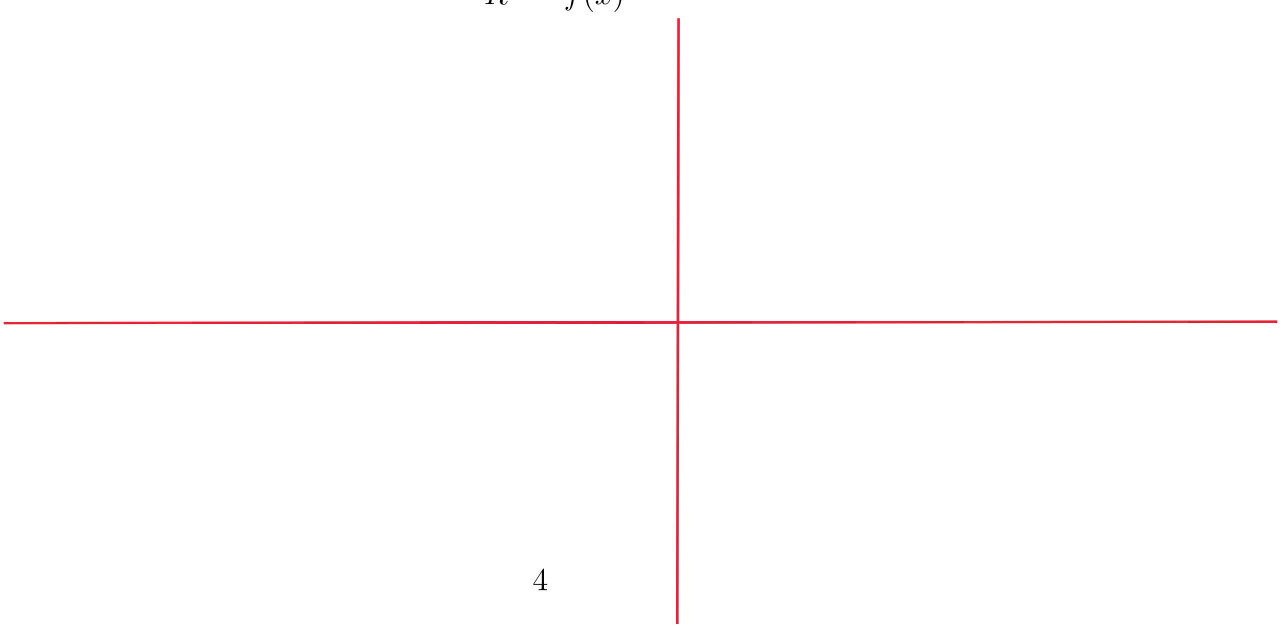
Suponemos que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$: dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x| < \delta$ entonces $|f(x)| < \epsilon$.

Tenemos que probar que dado $R > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x| < \delta$ entonces

$$\frac{1}{f(x)} > R \Leftrightarrow f(x) < \frac{1}{R}$$

Eligiendo $\epsilon = \dfrac{1}{R} > 0$ existirá $\delta > 0$ tal que si $0 < |x| < \delta$ se tiene que

$$f(x) < \frac{1}{R} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} > R.$$



0.1.5. Límites del tipo $[\frac{1}{0^+}], [\frac{1}{0^-}]$

.

Proposición 7. *Supongamos que*

1. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$
2. *existe algún* $r > 0$ *tal que* $f(x) > 0$ *para todo* $x \in (a - r, a + r) \setminus \{a\}$.

Entonces,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{f(x)} = \infty.$$

Demostración. Partimos de que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x)| < \epsilon$. Puesto que $f(x) > 0$ si $x \in (a - r, a + r)$, eligiendo $\delta < r$ podemos suponer que $0 < f(x) < \epsilon$.
Sea ahora $R > 0$, tenemos que encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ se tenga que $f(x) > R$. Ahora bien, siempre que consideremos $\delta < r$ sabemos que $f(x) > 0$ por lo que

$$f(x) > R \Longleftrightarrow \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{R} \qquad [\text{ todos positivos}]$$

Por lo tanto, basta aplicar la definición de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a $\epsilon = \dfrac{1}{R} > 0$ y para dicho $\epsilon > 0$ tendremos $\delta > 0$ (que podemos elegir menor que r) de modo que $f(x) < \dfrac{1}{R}$ y por tanto $f(x) > R$.

□

Observación 8. *De forma análoga, si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *y* $f(x) < 0$ *en algún intervalo* $(a - r, a + r) \setminus \{a\}$ *con* $r > 0$ *se tiene que* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

☒ Estudia si existe $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$

0.1.6. Límite cuando x tiende a infinito.

Sea f definida en $[r, \infty)$ para algún $r \in \mathbb{R}$. Diremos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que para todo $x > R$ se tiene que

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

De forma análoga se define $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L, L \in \mathbb{R}$.

Interpretación gráfica: Dado $\epsilon > 0$, consideramos la banda horizontal limitada por las rectas $y = L - \epsilon$ y $y = L + \epsilon$; podemos encontrar un $R > 0$ tal que la gráfica de la función en $[R, \infty)$ queda contenida en la banda horizontal.
Nótese que $[\frac{K}{\infty}] = 0$ en el siguiente sentido:

Proposición 9. *Supongamos que* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, *entonces* $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

⊛⊛ Prueba utilizando la definición de límite la proposición anterior.

0.1.7. Asintótas horizontales, verticales y oblícuas.

Recordamos las nociones de asíntotas:

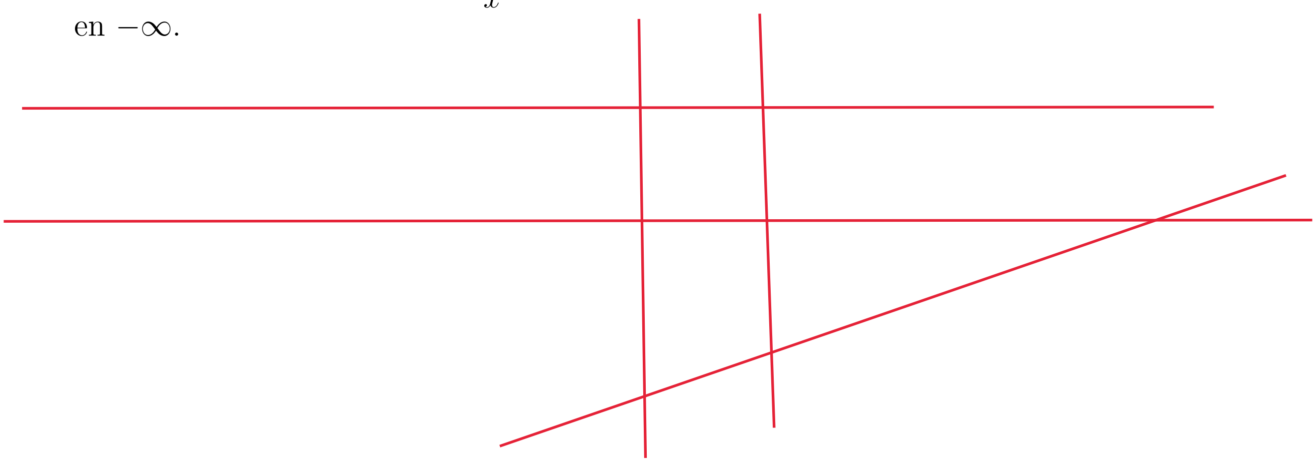
1. Diremos que f tiene en $x = a$ una *asíntota vertical* si **alguno** de los límites laterates de f en a es ∞ o $-\infty$, es decir, $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ o $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ para $L = \infty$ o $-\infty$.

2. Diremos que $y = L$ es una *asíntota horizontal* de f si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

3. Diremos que la recta $y = Ax + B$ (con $A \neq 0$) es una asíntota oblícua de f (en ∞ o $-\infty$) si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - (Ax + B) = 0 \text{ o } \lim_{x\to-\infty} f(x) - (Ax + B) = 0$$

   Esto ocurre cuando $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = A$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) - Ax = B$, y análogamente en $-\infty$.



0.2. Cálculo práctico de límites: Indeterminaciones.

0.2.1. Indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$

Algunas indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$, es decir, $\lim_{x\to a} f(x) - g(x)$ en las que aparecen raíces cuadradas se resuelven multiplicando y dividiendo por la expresión por $g(x) + g(x)$ para convertirla en una indeterminación de tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Veamos ejemplos:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+2})(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+2}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-(x^2+2)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{2}.$$

0.2.2. Indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$.

En los casos $[\frac{0}{0}], [\frac{\infty}{\infty}]$ algunas de ellas se pueden resolver pasando al límite cuando $x \to \infty$ y utilizando técnicas como la regla de L'Hopital (en lecciones posteriores se justificará el uso de esta regla).

$\triangleright$ La indeterminación $[0.\infty]$ se puede convertir en una del tipo $[\frac{0}{0}], [\frac{\infty}{\infty}]$ manipulando la expresión. Vemos algunos ejemplos:

Ejemplo 10. *Vemos dos ejemplos de indeterminaciones de este tipo:*

1. *Para calcular* $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x}$ *que presenta una indeterminación del tipo* $\frac{\infty}{\infty}$*, utilizamos L'Hopital:*
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0,$$

2. *Para calcular* $\lim_{x\to\infty} x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x})$ *que presenta una indeterminación del tipo* $\infty\, 0$ *podemos convertirla en una indeterminación de tipo* $\frac{0}{0}$ *como* $\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{sen}(\frac{1}{x})}{1/x}$ *y utilizar la regla de L'Hopital.*

0.2.3. Indeterminaciones $[0^0], [\infty^0]$.

$\triangleright$ En el estudio de los límits del tipo $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$ con $f(x)>0$, utilizando la identidad $x=e^{\log(x)}$ cuando $x>0$, :

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\log(f(x))}$$

puede resolverse la indeteminación. El caso más sencillo sería si $a>0$:

$$\lim_{x\to\infty} a^x=\begin{cases} 0 \ si \ 0<a<1 \\ 1 \ si \ a=1 \\ \infty \ si \ a>1 \end{cases}$$

$\triangleright$ *Indeterminación del tipo* ∞^0: Del tipo $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$ con $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$.

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\log(f(x))}$$

donde $\lim\limits_{x\to a} g(x)\log(f(x))$ presenta una indeterminación del tipo $[0.\infty]$ tratada anteriormente.
Por ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$$

Se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log x}=e^0=1$$

$\triangleright$ *Indeterminación del tipo* 0^0

Son las del tipo: $\lim\limits_{x\to a} (f(x))^{g(x)}$ con $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

Utilizando la identidad $\boxed{x = e^{\log(x)}}$ cuando $x > 0$, tenemos que:

$$\lim_{x\to a} (f(x))^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\log(f(x))}$$

donde $\lim\limits_{x\to a} g(x)\log(f(x))$ presenta una indeterminación del tipo $0.\infty$ tratada anteriormente. Vemos un ejemplo:

Ejemplo 11. *Calculemos* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x^2+5}}$ *que presenta una indeterminación de tipo* 0^0.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x^2+5}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+5}\log(\frac{1}{x})} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-\log(x)}{x^2+5}} = e^0 = 1$$

puesto que $\lim_{x\to\infty}\frac{-\log(x)}{x^2+5} = 0$ *ya que utilizando L'Hopital:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-\log(x)}{x^2+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x(2x)} = 0.$$

0.2.4. Indeterminación del tipo 1^∞.

Una de las formas de definir el número e es como

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Para la resolución de esta indeterminación tenemos la siguiente fórmula que es muy útil.

Proposición 12. *Sea* $f(x)$ *una función tal que* $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, *entonces:*

$$\boxed{\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1)}}$$

☒ Calcula $a \in \mathbb{R}$ para que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = 6$$

☒ En cada uno de los límites siguientes indica el tipo de indeterminación y calcula el límite, si existe.

1. $$\lim_{x\to\infty}\left(tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x})\right)^{3x}$$

2. $$\text{lím}\, x \to \infty \left(\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x})\right)^{1/x}$$

3. $$\lim_{x\to\infty}\left(\log(1+\frac{1}{x})+1\right)^{x+3}$$

4. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x}{x+1}\right)^{\frac{x+3}{3x^2+2}}$$

5. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x}{x+1}\right)^{\frac{3x^2+2}{x+3}}$$

6. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x}{x+1}\right)^{\frac{x+3}{3x+2}}$$