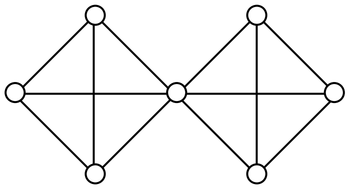
SOLUCIONES

1. **(1,5 puntos)**
   (a) Define grafo 2-conexo y grafo 3-aristoconexo.
   (b) Dibuja un grafo simple con al menos 7 vértices que sea 3-aristoconexo pero no sea 2-conexo. Justifica que el grafo dibujado cumple las condiciones pedidas.
   (c) Demuestra que un grafo simple G es 2-conexo si y sólo si para cada terna de vértices u, v y z de G existe un camino de u hasta v que pasa por z.



(c) Por doble reducción al absurdo

- Si existe una terna {u,v,z} tal que ningún camino de u a v pasa por z, entonces, o bien el grafo no es conexo o bien existe un vértice w común a todos los caminos de u a z y de v a z. Este vértice w es un vértice-corte, luego G no es 2-conexo.
- Si G no es 2-conexo, existe al menos un vértice-corte x. Elegimos dos vértices s,t de diferentes componentes conexas de G – x. Es claro que no existe ningún camino de x a s pasando por t.

2. **(1,5 puntos)** Una red euleriana de 18 computadoras admite fallos en 5 cualesquiera de ellas sin que la red deje de funcionar. Cada una de ellas está conectada a lo sumo con otras 10 y el número total de conexiones entre computadoras es múltiplo de 25. Comprueba que la red no se puede representar en un plano sin cruces en las conexiones e indica cuál es la sucesión de grados de la red sabiendo que hay un número primo de nodos de cada uno de los grados posibles.

Aplicaremos la fórmula de los grados y la condición de 6-conexo.

Un grafo k-conexo de n vértices tiene, al menos, kn/2 aristas. Por tanto, el grafo G tiene, al menos, 54 aristas. Como $q \geq 3n$ el grafo no es planar

Sustituyamos ahora los valores que nos dan ($d(v) \leq 10$) en la fórmula de los grados: $\Sigma d(v) = 2q$

$2q = \Sigma d(v) \leq \Sigma\, 10 = 10 \cdot 18$, luego $q \leq 90$

El único múltiplo de 25 entre 54 y 90 es 75, que será por tanto el número de aristas del grafo.

La red es euleriana, luego sólo tiene vértices de grados 6, 8 y 10. Si contiene a vértices de grado 6, b de grado 8 y c de grado 10, tendremos que

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c = 18 \\ 6a + 8b + 10c = 150 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a + b + c = 18 \\ 3a + 4b + 5c = 75 \end{array}\right\} \quad b + 2c = 21$$

Y la única solución prima es $a = 2$, $b = 11$, $c = 5$

3. **(1,5 puntos)**
   (a) Enuncia la fórmula de Euler para grafos planos y conexos.
   (b) Demuestra que si G es un grafo plano de n vértices y q aristas entonces $q \leq 3n - 6$.
   (c) Si G es un grafo plano, conexo, con 27 aristas y tal que el grado de cada vértice es al menos tres, ¿qué se puede decir del número de regiones de G?

Fórmula de Euler para grafos planos y conexos.
Si G es un grafo plano y conexo con n vértices, q aristas y r caras, entonces

$$n - q + r = 2$$

Si el grado de cada vértice es al menos tres, entonces contando las aristas que salen de todos los vértices tenemos que $3n \le 2q = 54$, luego $n \le 18$. Sustituyendo en la fórmula
$r = 2 - n + q \ge 2 - 18 + 27 = 11$

Luego el grafo tiene al menos 11 regiones.

Por otra parte, $q \le 3n - 6$, luego $3n \ge 33$, es decir, $n \ge 11$.
Sustituyendo, $r = 2 - n + q \le 2 - 11 + 27 = 18$

Luego el número r de regiones del grafo cumple que $11 \le r \le 18$

4. **(1 punto)** El análisis de la complejidad de un algoritmo nos lleva a la relación de recurrencia

$$f(n) = 2f(n/2) + n^2$$

¿De qué orden es la complejidad del algoritmo?

Resolvamos cuando $n = 2^k$

$f(2^k) = 2f(2^{k-1}) + 2^{2k}$		$f(2^k) = 2f(2^{k-1}) + 2^{2k}$
$f(2^{k-1}) = 2f(2^{k-2}) + 2^{2k-2}$	mult. por 2	$2f(2^{k-1}) = 2^2 f(2^{k-2}) + 2^{2k-1}$
$f(2^{k-2}) = 2f(2^{k-3}) + 2^{2k-4}$	mult. por 2^2	$2^2 f(2^{k-2}) = 2^3 f(2^{k-3}) + 2^{2k-2}$
-------------------------------		-------------------------------
$f(2) = 2f(1) + 2^2$	mult. por 2^{k-1}	$2^{k-1} f(2) = 2^k f(2^0) + 2^{k+1}$

Sumando las igualdades de la derecha resulta:
$f(2^k) = 2^k \cdot f(1) + 2^{2k} + 2^{2k-1} + 2^{2k-2} + \ldots + 2^{k+1} =$
$= 2^k \cdot f(1) + (2^{2k} + 2^{2k-1} + 2^{2k-2} + \ldots + 2^{k+1} + 2^k + 2^{k-1} + \ldots + 1) - (2^k + 2^{k-1} + \ldots + 1) =$
$= 2^k \cdot f(1) + (2^{2k+1} - 1) - (2^{k+1} - 1) = n\, f(1) + 2n^2 - 1 - 2n + 1$

Es decir, $f(n) \in O(n^2)$

5. **(1,5 puntos)**
El diagrama de la figura corresponde a las salas que se deben desinfectar en una fábrica. Los nodos representan las salas y las conexiones los pasillos utilizables. El equipo de desinfección precinta las salas una vez desinfectadas porque no se puede entrar en ellas en 24 horas. La entrada (y salida) de la fábrica está indicada por la letra E. Se pide:

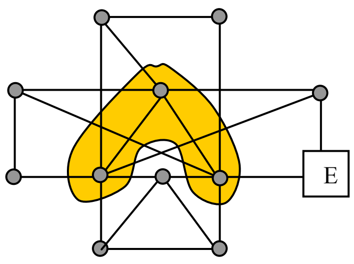
(a) Interpreta si la desinfección es posible (en un solo día) en términos de grafos.
(b) ¿Se puede dibujar el diagrama sin que se corten las líneas correspondientes a los pasillos?
(c) ¿El diagrama es un grafo orientable? En caso afirmativo indica una orientación.

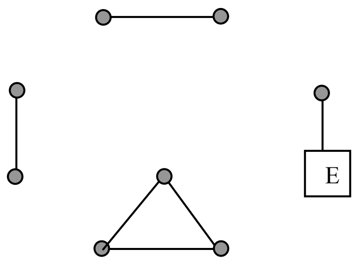
(a) La desinfección es posible si el grafo es hamiltoniano. Pero no lo es. Si se suprime el conjunto de vértices S (naranja), el grafo G – S tiene 4 componentes conexas. Recordamos una condición necesaria que cumple todo grafo hamiltoniano:

Si G es un grafo hamiltoniano entonces para todo conjunto $S \subset V(G)$ se debe cumplir que

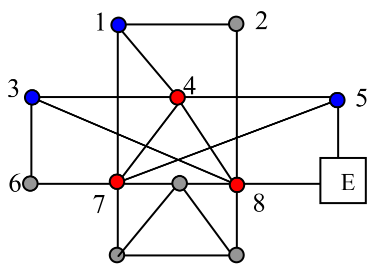
$$|\text{componentes de } G - S| \leq |S|$$

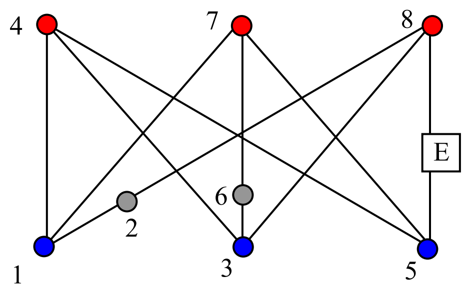
Esta condición NO se cumple para el conjunto S, luego el diagrama NO es hamiltoniano





(b) El diagrama NO es un grafo planar porque contiene a una subdivisión de $K_{3,3}$

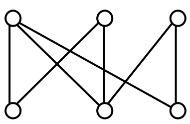
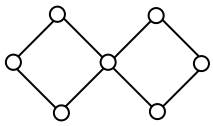
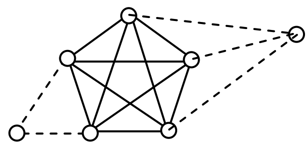




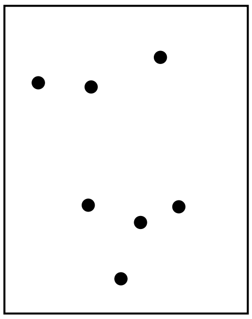
6. **(1,5 puntos)** ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Demuéstralas o encuentra un contraejemplo.

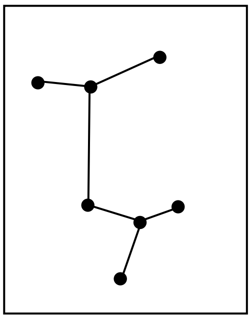
   (a) Todo grafo bipartido hamiltoniano tiene un número par de aristas.
   (b) Todo grafo bipartido euleriano es 2-conexo.
   (c) Todo grafo de 7 vértices y 15 aristas $(15 = 3 \cdot 7 - 6)$ es planar.

Las tres afirmaciones son falsas.

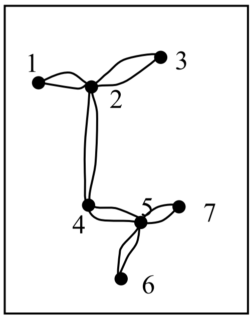




7. **(1,5 puntos)** ¿Qué significa que un algoritmo garantice una solución 2-aproximada para un problema de optimización? Describe una aproximación con ese factor para el "Problema del Viajante" utilizando las siguientes viñetas. Los vértices del grafo G aparecen en la primera viñeta, las aristas de G son todos los segmentos que unen cada par de vértices y el peso de cada arista es la distancia euclídea entre sus extremos. En la segunda viñeta aparece el árbol generador mínimo. Dibuja los pasos siguientes en las viñetas sucesivas y descríbelos brevemente. Demuestra que el algoritmo descrito es una 2-aproximación.

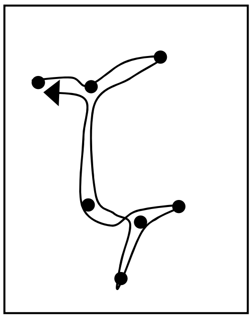




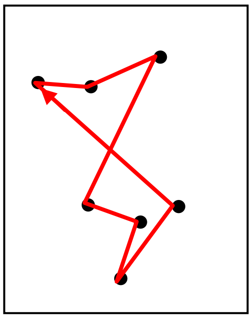
MST



Se duplica el árbol para obtener un grafo euleriano G*



Recorrido euleriano en G* empezando en una hoja de MST



Ciclo hamiltoniano alcanzando los vértices en el orden del recorrido euleriano y sin repetir ninguno