SOLUCIONES

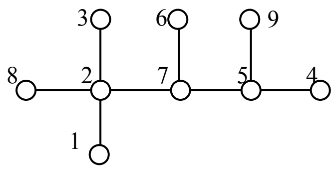
1. **(2 puntos)**
(a) Un árbol T de orden 40 tiene vértices de grados 1, 3 y 6. ¿Es posible que tenga 20 hojas? ¿Y 27?
(b) El código de Prüfer de un árbol es [2, 2, 5, 7, 2, 7, 5]. Construye un árbol etiquetado T con ese código.
(c) ¿Cuántos árboles etiquetados de 9 vértices existen con un vértice de grado 4, dos vértices de grado 3 y 6 hojas? ¿Y cuántos no etiquetados con las mismas condiciones?

(a) Sean **x** el número de hojas, **y** el número de vértices de grado 3 y z el número de vértices de grado 6. Por tanto,
$x + y + z = 40$ (*)
La fórmula de Euler de los grados en T es $x + 3y + 6z = 2(40 - 1) = 78$

Si $x = 20$, esta ecuación es $3y + 6z = 58$, que no tiene solución porque el primer miembro es múltiplo de 3 y el segundo no.

Si $x = 27$, la ecuación es $3y + 6z = 51$, que junto con (*) (ahora $y + z = 13$) tiene la solución válida $y = 9$, $z = 4$

(b) El árbol etiquetado correspondiente al código dado es el de la figura



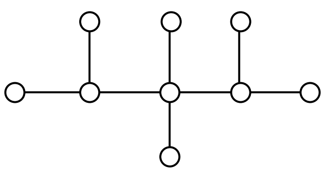
(c) Contemos **árboles etiquetados** con la sucesión de grados [4,3,3,1,1,1,1,1,1], contando los correspondientes códigos de Prüfer (que tendrán longitud 7)

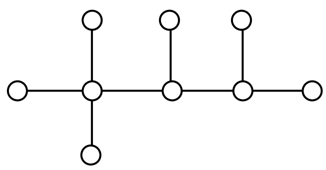
El símbolo del vértice de grado 4, para el que hay 9 posibles, se debe colocar en 3 posiciones del código. Por tanto, tenemos $9\binom{7}{3}$ opciones.

Para el símbolo del primer vértice de grado 3 hay 8 posibles y se coloca en 2 posiciones de las 4 restantes. Por tanto, $8\binom{4}{2}$ opciones.

Finalmente elegimos entre 7 el símbolo para el segundo vértice de grado 3. y Lo colocamos en las dos posiciones restantes.
En total hay $9\binom{7}{3}8\binom{4}{2}7$ árboles etiquetados con la sucesión de grados prescrita.

Árboles no etiquetados: Solo hay dos, porque los vértices de grados 3 y 4 solo se pueden disponer de dos formas distintas





2. **(2 puntos)**

(a) Define excentricidad de un vértice y diámetro de un grafo.

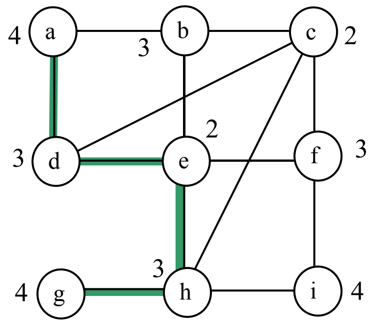
En el grafo G de la figura se piden las siguientes cuestiones:

(b) Calcula la excentricidad de cada vértice, el diámetro de G, su centro y su periferia.

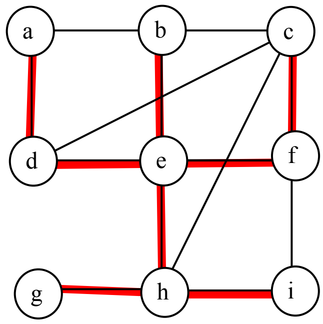
(c) Dibuja un camino diametral de G.

(d) Dibuja dos árboles generadores de G, uno de diámetro 4 y otro de diámetro 6.

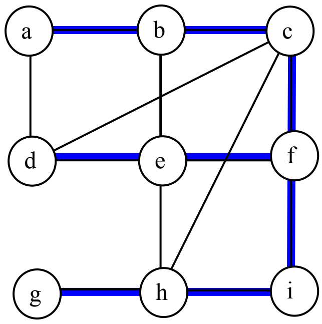
G



G



G



La excentricidad de cada vértice se indica en la figura

Centro de G, {c, e}

Periferia de G, {a,g,i}

Diam(G) = 4

Camino diametral en verde

Árbol rojo de diámetro 4

Árbol azul de diámetro 6

3. **(1 punto)** Probar o refutar las siguientes afirmaciones:

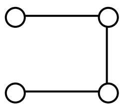
(a) Si G es un grafo en el que todos los vértices son pares entonces G no tiene puentes.

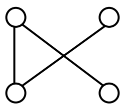
(b) Si G es un grafo conexo entonces el grafo complementario G' es no conexo.

(a) CIERTO. Por reducción al absurdo:

Si e = ab fuera una arista puente en la componente conexa de G – e que contiene al vértice a solo tendríamos un vértice impar, el propio a. Y eso es imposible porque el número d evértices impares debe ser par.

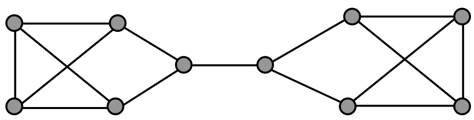
(b) FALSO. Un contraejemplo es:

G 

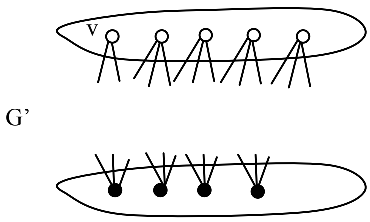
 G'

4. **(1 punto)** Demuestra que si G es un grafo 3-regular, conexo y bipartido entonces no tiene vértices-corte.

Este ejercicio se había propuesto en la primera entrega y lo resolví en clase. En la mayoría de las respuestas del examen se "demuestra" el resultado sin utilizar la hipótesis de que el grafo sea bipartido. Esta condición es esencial. El grafo de la figura es 3-regular, conexo, no bipartido y tiene vértices corte.



Demostración:
Por reducción al absurdo. Supongamos que G tiene un vértice-corte v. Como hay 3 aristas incidentes en v, necesariamente una de ellas es una arista puente e. Llamemos G' y G'' a las componentes de G – e, siendo G' la que contiene a v.

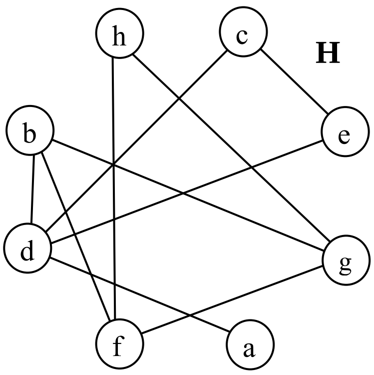


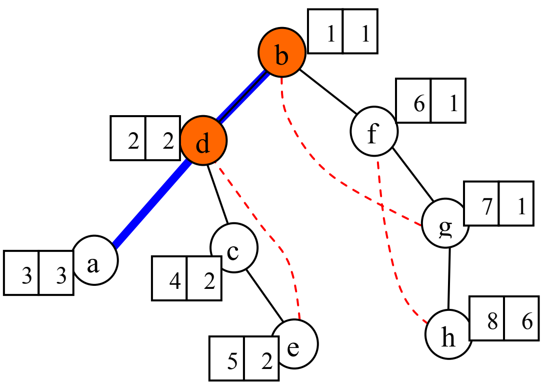
G' es bipartido y todos sus vértices son de grado 3 salvo v que es de grado 2.

Contemos las aristas del grafo G'. Si miramos desde la parte que no contiene a v (k vértices negros), hay 3k. Si miramos desde la parte que contiene a v (vértices blancos) hay 3j + 2. Contradicción porque un entero no puede ser $\equiv 0 \pmod 3$ y $\equiv 2 \pmod 3$ simultáneamente.

Ejercicio para quien desee revisar esta pregunta del examen: Construir un grafo 4-regular y conexo con un vértice-corte.

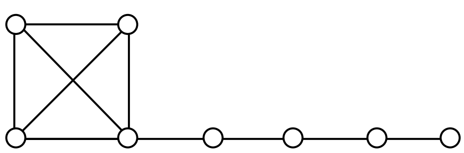
5. **(2 puntos)** Aplica al grafo H de la figura el algoritmo de búsqueda en profundidad, indicando el doble etiquetado de cada vértice. Detecta los vértices-corte y las aristas puente de H a partir del doble etiquetado indicando la condición sobre las etiquetas que los caracteriza. (La búsqueda en profundidad debe empezar en el vértice **b** y los vértices se eligen siguiendo el orden alfabético) Construye otro grafo H* con la misma sucesión de grados que H y no isomorfo a él.





(Las aristas en rojo discontinuo son aristas de retroceso. No pertenecen al árbol de búsqueda)
El vértice raíz b es corte porque tiene dos hijos.
La condición en las etiquetas para que un vértice v sea corte es que exista un hijo z de v tal que: 2^a etiq(z) $\geq$ 1^a etiq(v).
Por tanto, los vértices **b** y **d** son corte.
Una arista uv del árbol es puente si v es hijo de u y 2^a etiq(v) > 1^a etiq(u). Por tanto las aristas **bd** y **da** son aristas puente.

Se puede construir un grafo H*, con la misma sucesión de grados que H, utilizando el algoritmo de detección de sucesiones gráficas.
Un ejemplo de H* es el siguiente grafo que no es isomorfo a H porque el vértice de grado 1 es adyacente a un vértice de grado 4 en H y a un vértice de grado 2 en H*.



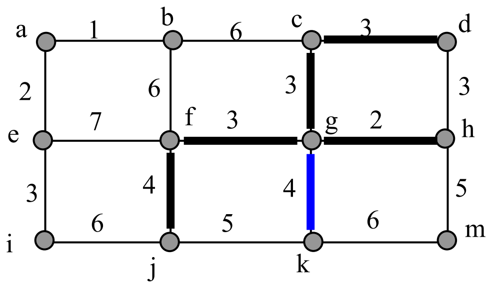
6. **(2 puntos)**
   (a) Demuestra que la arista de menor peso de un conjunto corte en un grafo ponderado G (con pesos diferentes en las aristas) siempre pertenece al árbol generador mínimo de G.
   (b) Describe con una frase la estrategia que sigue el algoritmo de Prim para construir el árbol generador de peso mínimo de un grafo ponderado. En el grafo de la figura aparece la situación tras aplicar parcialmente este algoritmo. Indica razonadamente cuáles son los dos pasos siguientes, utilizando un dibujo para cada uno de ellos.

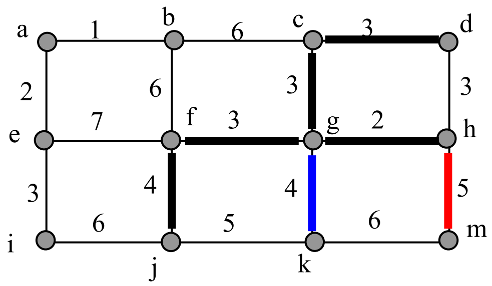
(a) Demostrado en clase. Y la demostración se puede encontrar en cualquier libro de grafos.

(b) Estrategia del algoritmo de Prim.

La idea básica de este algoritmo consiste en añadir, en cada paso, un nuevo vértice a un árbol T previamente construido. Este nuevo vértice (de V – V(T)) se une a T por la arista de menor peso que conecta un vértice de T con otro que no está en T. En el inicio del algoritmo, T es el árbol formado por un único vértice elegido arbitrariamente.

En el grafo de la figura se muestra los dos pasos siguientes: En el primero (azul) se captura el vértice k con la arista gk. En el segundo (rojo) se captura el vértice m por la arista hm.





Observaciones:

1) Algunos alumnos insisten en que hay que comprobar que ¡no se forman ciclos! En la estrategia seguida por el algoritmo de Prim eso es IMPOSIBLE, porque siempre se captura desde T un nuevo vértice que NO está en T.

2) En la demostración del apartado (a) muchos alumnos (el 80% de los que han respondido a esta cuestión) razonan incorrectamente de la siguiente forma:

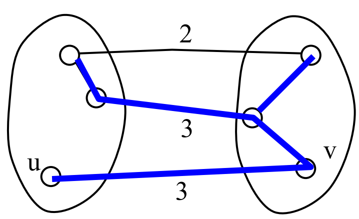
Sea e la arista de menor peso de un conjunto-corte F = (V’, V’’). Supongamos que e no es una arista del árbol generador de peso mínimo T = MST(G).

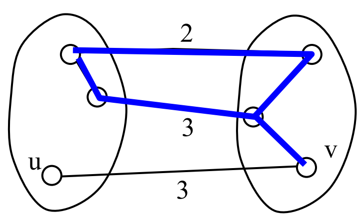
Como en T debe haber alguna arista de F, por ejemplo e*, se considera T – e* + e. Este **grafo** tiene menor peso que T, por lo que llegan a una contradicción ya que T es el MST(G).

¿Dónde está el fallo? He marcado en negrita la palabra grafo al referirme a T – e* + e porque no necesariamente es un árbol. Mirad en el dibujo siguiente.

Si en T (azul) no está la arista de peso 2 (mínima del corte) y elegimos como arista e* del conjunto corte la arista uv, obtenemos T – e* + e, un grafo ¡que no es conexo y tiene ciclos!

T





T – e* + e

El razonamiento correcto es:

Añadimos al árbol T la arista e. Así en T + e se forma un ciclo C*. Este ciclo contiene una única arista del conjunto corte (además de e) porque tiene vértices de V’ y de V’’, las dos partes de la partición definida por el conjunto corte. Esa única arista es la e* que se debe considerar para construir el árbol T – e* + e, que ahora sí es efectivamente un árbol generador de G.