Matemática Discreta I

Tema 6. Relaciones de Recurrencia

Luis Magdalena Layos
luis.magdalena@upm.es

Departamento de Matemática Aplicada a las TIC
E.T.S. Ingenieros Informáticos
Universidad Politécnica de Madrid

Grado en Ciencia de Datos e Inteligencia Artificial
Grado en Matemáticas e Informática
Curso 2020/21

Contenidos

Relaciones de Recurrencia

Definición

Dada una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, una relación o fórmula de recurrencia de orden $k \geq 1$ es una expresión que relaciona el término general de dicha sucesión con sus k términos precedentes:

$$a_n = f(a_{n-1}, \ldots, a_{n-k}),\ \forall n \geq k.$$

Definición

A los k primeros términos de la sucesión se les denomina condiciones iniciales.

Ejemplo

El número de palabras de longitud n formadas con los dígitos $\{0, 1\}$, que no tienen dos ceros consecutivos, es $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.
Estas palabras se obtienen, o bien añadiendo un 1 al final de una palabra de $n-1$ dígitos, o bien añadiendo la secuencia 10 al final de una palabra de $n-2$ dígitos.
En este caso las condiciones iniciales son $a_1 = 2$ y $a_2 = 3$.

Sucesión recurrente

Definición

Se denomina sucesión recurrente al conjunto formado por una relación de recurrencia de orden k, junto con unas condiciones iniciales (k primeros términos de la sucesión).

Definición

Resolver una sucesión recurrente consiste en obtener, a partir de la relación de recurrencia y de las condiciones iniciales, una función explicita que exprese cualquier término de la sucesión:

$$a_n = F(n), \forall n.$$

Ejemplo (Factorial)

El factorial es una relación de recurrencia de orden 1, definida por $a_n = n \cdot a_{n-1}$. Su condición inicial es $a_1 = 1$.

Su solución es $a_n = \prod_{k=1}^{n} k = n!$.

Recurrencias lineales

Definición

Una relación de recurrencia lineal de orden k es una relación de la forma:

$$a_n = c_1(n) \cdot a_{n-1} + c_2(n) \cdot a_{n-2} + \cdots + c_k(n) \cdot a_{n-k} + g(n),$$

donde $g, c_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Además, si $g(n) = 0$ para todo n, se dice que la relación de recurrencia es homogénea.

Definición

Una relación de recurrencia lineal de orden k se denomina de coeficientes constantes cuando tiene la forma:

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \cdots + c_k \cdot a_{n-k} + g(n).$$

Ejemplo (Progresión aritmética)

La progresión aritmética es una relación de recurrencia lineal, no homogénea, de coeficientes constantes, de orden 1, definida por $a_n = a_{n-1} + d$.
Su solución es $a_n = a_0 + n \cdot d$.

Relaciones de Recurrencia lineales homogéneas

Definición

Se denomina polinomio característico de la relación de recurrencia lineal homogénea de coeficientes constantes

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \cdots + c_k \cdot a_{n-k},$$

al polinomio

$$f(x) = x^k - c_1 \cdot x^{k-1} - c_2 \cdot x^{k-2} - \cdots - c_k.$$

Ejemplo (Progresión geométrica)

La progresión geométrica de razón r es una relación de recurrencia lineal, homogénea, de coeficientes constantes, de orden 1, definida por $a_n = r \cdot a_{n-1}$.
Su polinomio característico es $f(x) = x - r$.

Definición

Las raices del polinomio característico se denominan raíces características.

Relaciones de Recurrencia lineales homogéneas

Teorema

Si α *es raíz del polinomio característico*

$$f(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k,$$

α^n *es solución de la recurrencia* $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \cdots + c_k \cdot a_{n-k}$.

Ejemplo (Progresión geométrica)

La progresión geométrica de razón r definida por $a_n = r \cdot a_{n-1}$, con polinomio característico $f(x) = x - r$, tiene raíz característica $x = r$. Por tanto r^n es solución de la recurrencia.
Si su condición inicial es $a_0 = A$, la solución de la recurrencia será $a_n = Ar^n$.

Relaciones de Recurrencia lineales homogéneas

Teorema

Si α es raíz característica con multiplicidad $r > 1$, entonces $\{\alpha^n, n\alpha^n, n^2\alpha^n, \ldots, n^{r-1}\alpha^n\}$ son soluciones de la relación de recurrencia.

Teorema

Si x_n, y_n son soluciones de la relación de recurrencia, entonces $\{Ax_n + By_n, \text{ con } A, B \in \mathbb{R}\}$ son soluciones de la misma relación de recurrencia.

Ejemplo

La relación de recurrencia definida por $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ tiene raíz característica $x = 1$ (doble). Por tanto $1^n = 1$ y $n \cdot 1^n = n$ son soluciones de la recurrencia.
En este caso $a_n = A + B \cdot n$ también será solución de la recurrencia.
Si las condiciones iniciales son $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$, tendremos una solución de la forma $a_n = 1 + n$.
Sin embargo, si las condiciones iniciales fueran $a_0 = 1$ y $a_1 = 1$, la solución resultaría ser $a_n = 1$.

Relaciones de Recurrencia lineales homogéneas

Observación:
Dada la relación de recurrencia

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \cdots + c_k \cdot a_{n-k},$$

si las raíces del polinomio característico ($f(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k$) son $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, con multiplicidades $r_1, r_2, \ldots, r_m$, la solución general de la relación de recurrencia será:

$$a_n = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{r_i-1} A_{i,j} n^j \alpha_i^n, \text{ con } A_{i,j} \in \mathbb{R}.$$

Si además de la relación de recurrencia, se dispone de un conjunto de k condiciones iniciales $(a_0, \ldots, a_{k-1})$, se podrán obtener los valores de $A_{i,j}$ que satisfacen dichas condiciones iniciales.

Relaciones de Recurrencia lineales homogéneas

Ejemplo (Sucesión de Fibonacci)

Se denomina sucesión de Fibonacci a la sucesión:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ para } n \geq 2, \\ a_0 = a_1 = 1. \end{cases}$$

Su polinomio característico es $x^2 - x - 1$, con raices $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
Por tanto la solución de la formula de recurrencia es:

$$a_n = K_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + K_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Y dadas las condiciones iniciales $a_0 = a_1 = 1$, la solución de la sucesión es:

$$a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

Ejercicios de recurrencias lineales homogéneas

Ejercicio 1.

Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia homogéneas, con sus condiciones iniciales:

b) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} \quad \forall n \geq 2$, con $a_0 = 2, a_1 = 1$.

e) $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad \forall n \geq 3$, con $a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$.

b) El polinomio característico es $f(x) = x^2 - 7x + 10$, con solución $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2}$ (raíces 5 y 2).
La relación de recurrencia tendrá como solución general $a_n = k_1 5^n + k_2 2^n$.
Incorporando ahora las condiciones iniciales resulta $k_1 = -1$, $k_2 = 3$, y por tanto la solución será $a_n = -5^n + 3 \cdot 2^n$.

e) El polinomio característico es $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, con raíces $x = \{1, 2, 3\}$.
La relación de recurrencia tendrá como solución general $a_n = k_1 1^n + k_2 2^n + k_3 3^n$.
Incorporando ahora las condiciones iniciales resulta $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = 2$ y por tanto la solución será $a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$.

Ejercicios de recurrencias lineales homogéneas

Ejercicio 1.

Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia homogéneas, con sus condiciones iniciales:

c) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \quad \forall n \geq 2$ con $a_0 = 4, a_1 = 1$.

g) $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad \forall n \geq 2$ con $a_0 = 1, a_1 = -6$.

c) El polinomio característico es $f(x) = x^2 - 2x + 1$, con solución $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$.
La relación de recurrencia tendrá como solución general $a_n = k_1 1^n + k_2 n 1^n$.
Incorporando ahora las condiciones iniciales resulta $k_1 = 4$, $k_2 = -3$, y por tanto la solución será $a_n = 4 - 3 \cdot n$.

g) El polinomio característico es $f(x) = x^2 + 6x^2 + 9$, con solución
$x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = -3$.
La relación de recurrencia tendrá como solución general $a_n = k_1(-3)^n + k_2 n(-3)^n$.
Incorporando ahora las condiciones iniciales resulta $k_1 = -1$, $k_2 = -1$,y por tanto la solución será $a_n = (1+n)(-3)^n$.

Ejercicios de recurrencias lineales homogéneas

Ejercicio 2.

Sea a_n el número de palabras de longitud n formadas con los dígitos $\{0,1\}$, que no tienen dos ceros consecutivos. Encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n y resuélvela.

Como ya hemos visto el problema responde a la relación de recurrencia

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \\ a_1 = 2, \;\; a_2 = 3, \end{cases}$$

que se corresponde con la definida en la sucesión de Fibonacci vista anteriormente, cuya solución general era:

$$a_n = K_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + K_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Incorporando ahora las condiciones iniciales, $a_1 = 2, \;\; a_2 = 3$, tenemos que la solución es

$$a_n = \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Ejercicios de recurrencias lineales homogéneas

Ejercicio 7.

Sea $M = \{A,\ B,\ C\}$ y sea S_n el conjunto de sucesiones de longitud n, formadas con las letras de M, en las que todas las cadenas de A-es son de longitud par. Encuentra una relación de recurrencia para calcular $a_n = |S_n|$ y resuélvela.

Estas sucesiones se obtienen, o bien añadiendo una B o una C al final de una sucesión de longitud $n-1$, o bien añadiendo la secuencia AA al final de una sucesión de longitud $n-2$.

Por tanto la relación de recurrencia será: $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}, \\ a_1 = 2,\ a_2 = 5. \end{cases}$

Su polinomio característico es $f(x) = x^2 - 2x - 1$, con raices $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Finalmente la solución de la formula de recurrencia es: $a_n = A \cdot \left(1+\sqrt{2}\right)^n + B \cdot \left(1-\sqrt{2}\right)^n$.

Incorporando ahora las condiciones iniciales, $a_1 = 2,\ a_2 = 5$, tenemos que la solución es

$$a_n = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right) \cdot \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right) \cdot \left(1-\sqrt{2}\right)^n.$$

Recurrencias lineales no homogéneas

Definición

Se denomina relación de recurrencia lineal no homogénea de coeficientes constantes y orden $k \geq 1$, a una relación de la forma:

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \cdots + c_k \cdot a_{n-k} + g(n).$$

A la relación

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \cdots + c_k \cdot a_{n-k},$$

se le denomina relación homogénea asociada. La relación no homogénea también se denomina relación completa.

Ejemplo

Un conjunto de n rectas trazadas en el plano de forma que cada recta corte a las restantes, pero que no haya tres coincidentes en un mismo punto, divide al plano en a_n regiones de las que b_n son regiones infinitas. Los valores de a_n y b_n son:

$$a_n = a_{n-1} + n \text{ y } b_n = b_{n-1} + 2.$$

Solución de la relación completa

Propiedades.

1. Dadas dos soluciones particulares de la relación completa (X_n e Y_n), su diferencia $(X_n - Y_n)$ es solución de la relación homogénea.
2. Si x_n es solución de la relación homogénea, y X_n es solución de la relación completa, $x_n + X_n$ será solución de la relación completa.
3. La solución general de la relación completa se obtiene como la suma de la solución general de la relación homogénea, más una solución particular de la relación completa.

Solución particular de la relación completa.

Dada una relación de recurrencia completa con $g(n) = R(n) \cdot b^n$, existe una solución particular de la relación completa, del tipo $Q(n) \cdot n^r \cdot b^n$, donde $Q(n)$ es un polinomio del mismo grado que $R(n)$ y r es la multiplicidad con la que b es raíz del polinomio característico (en particular, si b no es raíz, nos quedaría $n^0 = 1$).

Solución de la relación completa

Solución general de la relación completa.

1. Se obtiene la solución general de la homogénea asociada, $S(n)$.
2. Se obtiene una solución particular de la completa, $P(n)$.
3. La solución general de la completa es $a_n = P(n) + S(n)$.
4. Si se tienen condiciones iniciales, se exigen, para obtener el término general de la sucesión.

Ejercicio 4.

Sean n rectas trazadas en el plano de forma que cada recta corte a las restantes, pero que no haya tres coincidentes en un mismo punto. Para cada $n \geq 0$, sea a_n el número de regiones en que las n rectas dividen al plano y sea b_n el número de regiones infinitas.

1. Encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n y resuélvela.
2. Encuentra una relación de recurrencia para calcular b_n y resuélvela.

Ejercicios de recurrencias lineales no homogéneas

1. La relación de recurrencia es: $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n, \\ a_1 = 2. \end{cases}$

   Solución a la ecuación homogénea: $S(n) = A$.

   Solución particular de la completa: $P(n) = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}\ n$.

   Solución general de la completa: $a_n = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}\ n + A$.

   Solución final con las condiciones iniciales: $a_n = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}\ n + 1$.

2. La relación de recurrencia es: $\begin{cases} b_n = b_{n-1} + 2, \\ b_1 = 2. \end{cases}$

   Solución a la ecuación homogénea: $S(n) = B$.

   Solución particular de la completa: $P(n) = 2n$.

   Solución general de la completa: $b_n = 2n + B$.

   Solución final con las condiciones iniciales: $b_n = 2n$.

Ejercicios de recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 5.

Problema de las Torres de Hanoi (Ëdouard Lucas): Se tienen n discos y 3 estacas. Los discos están apilados en la estaca 1, ordenados de mayor a menor. El objetivo es pasar los discos uno por uno a otra estaca, colocados en el orden original. En el proceso no se permite que un disco mayor se coloque sobre otro menor. Si a_n es el número de movimientos que se requieren para hacer esto, encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n, y resuélvela.

La relación de recurrencia es: $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1, \\ a_1 = 1. \end{cases}$

Polinomio caraterístico: $f(x) = x - 2$, con raíz $x = 2$.

Solución a la ecuación homogénea: $S(n) = A \cdot 2^n$.

Solución particular de la completa: $P(n) = -1$.

Solución general de la completa: $a_n = -1 + A \cdot 2^n$.

Solución final con las condiciones iniciales: $a_n = -1 + 2^n$.

Ejercicios de recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 6.

Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia homogéneas, con sus condiciones iniciales:

a) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2n - 1, \\ a_1 = 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 3n^2, \\ a_0 = 7. \end{cases}$

a) Solución a la ecuación homogénea: $S(n) = C$.
Solución particular de la completa: $P(n) = n^2$.
Solución general de la completa: $a_n = n^2 + C$.
Solución final con las condiciones iniciales: $a_n = n^2$.

b) Solución a la ecuación homogénea: $S(n) = C$.
Solución particular de la completa: $P(n) = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}\, n$.
Solución general de la completa: $a_n = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}\, n + C$.
Solución final con las condiciones iniciales: $a_n = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}\, n + 7$.

Ejercicios de recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 6.

Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia homogéneas, con sus condiciones iniciales:

g) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} - 5 \cdot 4^n, \\ a_0 = 1, \; a_1 = 0. \end{cases}$

h) $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 1, \\ a_1 = 2, \; a_2 = 3. \end{cases}$

g) Solución a la ecuación homogénea: $S(n) = A \cdot 4^n + B \cdot (-1)^n$.
Solución particular de la completa: $P(n) = -n \cdot 4^{n+1}$.
Solución general de la completa: $a_n = -n \cdot 4^{n+1} + A \cdot 4^n + B \cdot (-1)^n$.
Solución final con las condiciones iniciales: $a_n = -n \cdot 4^{n+1} + \frac{17}{5} \cdot 4^n - \frac{12}{5} \cdot (-1)^n$.

h) Solución a la ecuación homogénea: $S(n) = A + Bn$.
Solución particular de la completa: $P(n) = \frac{1}{2} \cdot n^2$.
Solución general de la completa: $a_n = \frac{1}{2} \cdot n^2 + A + Bn$.
Solución final con las condiciones iniciales: $a_n = \frac{1}{2} \cdot n^2 + 2 - \frac{1}{2} \cdot n$.

Recurrencias no lineales

Definición

Una relación de recurrencia de orden k es no lineal cuando la expresión que relaciona su término n-ésimo con los k términos previos es no lineal:

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}).$$

Observación: En la resolución de recurrencias no lineales aplicamos métodos particulares para cada caso.

Definición

Se denominan números de Catalan a los términos de la sucesión recurrente:

$$\begin{cases} a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot a_{n-k-1} = a_0 \cdot a_{n-1} + a_1 \cdot a_{n-2} + a_2 \cdot a_{n-3} + \cdots + a_{n-1} \cdot a_0, \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

Números de Catalan

A partir de la definición previa podemos ver como los primeros términos de la sucesión serán:

$$\begin{gathered}
a_0 = 1, \\
a_1 = a_0 \cdot a_0 = 1, \\
a_2 = a_0 \cdot a_1 + a_1 \cdot a_0 = 2, \\
a_3 = a_0 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_0 = 5, \\
a_4 = a_0 \cdot a_3 + a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_1 + a_3 \cdot a_0 = 14, \\
a_5 = a_0 \cdot a_4 + a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_1 + a_4 \cdot a_0 = 42, \\
\vdots
\end{gathered}$$

La solución de esta sucesión recurrente se puede expresar de múltiples formas:

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \text{ para } n \geq 0,$$

o bien

$$a_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \text{ para } n \geq 1.$$

Números de Catalan

Los números de Catalan aparecen en un gran número de situaciones:

1. Triangulaciones de polígonos convexos de $n+2$ vértices.
2. Número de árboles binarios con $n+1$ hojas.
3. Formas de colocar paréntesis en un producto de $n+1$ factores.
4. Caminos ascendentes en una cuadrícula $n \times n$ que no superan la diagonal.

Números de Catalan

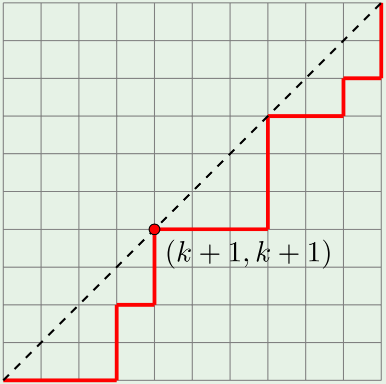
Los números de Catalan aparecen en un gran número de situaciones:

1. Triangulaciones de polígonos convexos de $n+2$ vértices.
2. Número de árboles binarios con $n+1$ hojas.
3. Formas de colocar paréntesis en un producto de $n+1$ factores.
4. Caminos ascendentes en una cuadrícula $n \times n$ que no superan la diagonal.

Números de Catalan

Ejemplo

Calculamos el número de caminos ascendentes en una cuadrícula $n \times n$, que llegan desde $(0,0)$ hasta (n,n) sin superar la diagonal.

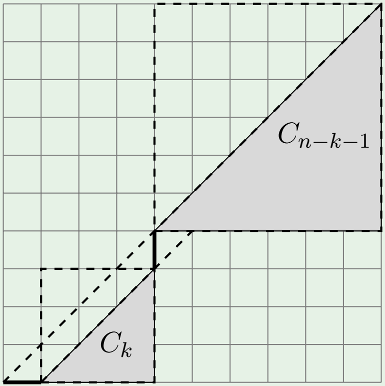


Consideramos el primer punto en que se alcanza nuevamente la diagonal ($(k+1, k+1)$) y dividimos el problema en dos de dimensiones k y $n-k-1$.

Números de Catalan

Ejemplo

Calculamos el número de caminos ascendentes en una cuadrícula $n \times n$, que llegan desde $(0,0)$ hasta (n,n) sin superar la diagonal.



Consideramos el primer punto en que se alcanza nuevamente la diagonal ($(k+1,k+1)$) y dividimos el problema en dos de dimensiones k y $n-k-1$.
Este punto puede ser cualquiera (sobre la diagonal) entre el $(1,1)$ y el (n,n), por lo que k podrá tomar valores entre 0 y $n-1$. Para cada valor de k, el número de caminos se corresponde con $C_k \cdot C_{n-k-1}$.
Si agregamos ahora todas las opciones en función de los valores de k: $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k-1}$.

Ejercicios de relaciones de recurrencia

Examen enero 2020.

a) En la ceremonia de Graduación de la ETSI Informáticos, al pasar los alumnos a recibir su diploma por la mesa de la Presidencia, deben hacerlo por orden alfabético, y en grupos de 2, 3 o 4 alumnos. Halla una relación de recurrencia para el número de formas a_n en que puede organizarse esta recepción, si se gradúan exactamente n estudiantes. Explica cómo la has obtenido.

b) Resuelve la siguiente relación de recurrencia con sus condiciones iniciales

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + 2 \cdot (-1)^n, \forall n \geq 2 \\ a_0 = 2, a_1 = -1 \end{cases}$$

a) $\begin{cases} a_n = a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4}, \\ a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 2. \end{cases}$

b) Solución general de la homogénea asociada: $S(n) = A \cdot 1^n + B \cdot (-1)^n = A + B \cdot (-1)^n$.
Solución particular de la completa: $P(n) = n(-1)^n$.
Solución general de la completa: $a_n = A + (B + n) \cdot (-1)^n$.
Imponiendo las condiciones iniciales: $a_n = 1 + (1 + n) \cdot (-1)^n$.

Ejercicios de relaciones de recurrencia

Examen diciembre 2019.

a) Halla una relación de recurrencia para el número de listas a_n de longitud $n \geq 1$, formadas con los elementos A, B, C, y D, en las que el elemento B no aparece en la posición inmediatamente posterior a una A.

b) Resuelve la siguiente relación de recurrencia con condiciones iniciales.

$$\begin{cases} a_n = 6 \cdot a_{n-1} - 9 \cdot a_{n-2} + 4 \cdot 5^n, \forall n \geq 2 \\ a_0 = 25, a_1 = 47 \end{cases}$$

a) Partimos del número de listas de longitud n sin restricciones ($a_n = 4 \cdot a_{n-1}$) y descontamos las que acaban en AB, que serán las listas de longitud $n-2$ a las que añadimos esa secuencia (a_{n-2}).

$$\begin{cases} a_n = 4 \cdot a_{n-1} - a_{n-2}, \\ a_1 = 4, a_2 = 15. \end{cases}$$

b) Solución general de la homogénea asociada: $S(n) = A \cdot 3^n + B \cdot n \cdot 3^n$.
Solución particular de la completa: $P(n) = 25 \cdot 5^n = 5^{n+2}$.
Solución general de la completa: $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot n \cdot 3^n + 5^{n+2}$.
Imponiendo las condiciones iniciales: $a_n = -26 \cdot n \cdot 3^n + 5^{n+2}$.

Ejercicios de relaciones de recurrencia

Examen junio 2019.

Resuelve la siguiente relación de recurrencia lineal no homogénea:

$$\begin{cases} a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2} + 2 \cdot 5^n, \forall n \geq 2 \\ a_0 = 3, \quad a_1 = 5 \end{cases}$$

Ecuación característica: $x^2 - 10x + 25 = 0$, con raíz doble $x = 5$.
Solución general de la relación homogenea asociada: $S(n) = (k_1 + k_2 n)5^n$.
Solución particular de la recurrencia inicial: $P(n) = An^2 5^n$, con $A = 1$.
Solución general de la relación no homogénea: $a(n) = S(n) + P(n) = (k_1 + k_2 n + n^2)5^n$.
Aplicando las condiciones iniciales: $k_1 = 3$ y $k_2 = -3$, por lo que la solución final es

$$a(n) = (3 - 3n + n^2)5^n.$$

Ejercicios de relaciones de recurrencia

Examen diciembre 2018.

a) En una probeta se detectan 5 bacterias. Transcurrida una hora el número de bacterias crece hasta 8. A partir de ese momento la población de bacterias crece cada hora una cantidad igual a dos veces la cantidad de bacterias que creció en la hora anterior.
Sea a_n la cantidad de bacterias cuando hayan transcurrido n horas, encuentra una relación de recurrencia para a_n.

a) Teniendo en cuenta que $a_{n-1} - a_{n-2}$ es el crecimiento en la hora $n-1$, en la hora n-enésima el crecimiento será el doble, por tanto $2(a_{n-1} - a_{n-2})$ será lo que han crecido las bacterias en la hora n-enésima. Así, el número de bacterias en la hora n será el número de bacterias que había en la hora anterior (a_{n-1}) más lo que hayan crecido.
Luego la sucesión de recurrencias queda de la forma:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2(a_{n-1} - a_{n-2}) = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, \forall n \geq 2 \\ a_0 = 5, a_1 = 8 \end{cases}$$

También son válidas las siguientes recurrencias:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1}, & \forall n \geq 1 \\ a_0 = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - 2, & \forall n \geq 1 \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Ejercicios de relaciones de recurrencia

Examen diciembre 2018.

b) Resuelve la siguiente relación de recurrencia con sus condiciones iniciales.

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n, \quad \forall n \geq 2 \\ a_0 = 3, a_1 = 11 \end{cases}$$

b) Polinomio característico: $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$, con soluciones $x = 2$ y $x = 1$.
Solución general de la relación homogenea asociada: $S(n) = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n$.
Solución particular de la relación completa: $P(n) = qn2^n$, con $q = 2$.
Solución general de la relación completa: $a(n) = A \cdot 1^n + (B + 2n) \cdot 2^n$.
Aplicando las condiciones iniciales: $A = -1$ y $B = 4$, por lo que la solución final es

$$a(n) = -1 + (4 + 2n) \cdot 2^n = (n + 2)2^{n+1} - 1$$