MATEMÁTICA DISCRETA II

SOLUCIONES

Ejercicio 1

a) **(0,5 ptos.)** ¿Cuántas aristas tiene el grafo complementario $K_{m,n}^c$ del grafo bipartido completo $K_{m,n}$? Describe las componentes conexas de $K_{m,n}^c$.

b) **(0,5 ptos.)** ¿Cuál es la altura de los árboles BEA y BEP del grafo $K_{r,r}$?

c) **(0,5 ptos.)** Dado el código de Prüfer $C = [6, 6, 7, 7, 9, 9, 9]$, dibuja el árbol etiquetado que determina.

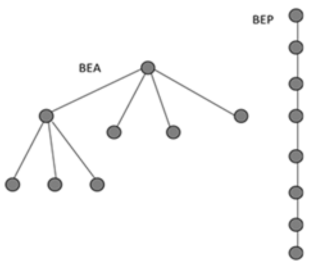
¿Cuántos árboles generadores distintos tiene el grafo completo etiquetado de 7 vértices?

Solución

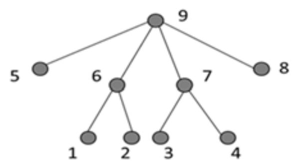
a) El grafo $K_{m,n}^c$ tiene todas las aristas del grafo completo K_{m+n} que no están en $K_{m,n}$. Por lo tanto, tiene $\binom{m+n}{2} - mn = \binom{m}{2} + \binom{n}{2}$ aristas.

Las componentes conexas de $K_{m,n}^c$ son los dos subgrafos completos K_m y K_n.

b) La altura de los árboles BEA y BEP del grafo $K_{r,r}$ es, respectivamente, 2 y 2r–1.



c)



El grafo completo etiquetado de 7 vértices tiene 7^5 árboles generadores distintos.

Ejercicio 2

Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) **(0,5 ptos.)** Si $G = (V, A)$ es un grafo simple no conexo que tiene exactamente dos vértices de grado impar, cada uno de ellos debe pertenecer a distinta componente conexa.

b) **(0,5 ptos.)** Si $2n \leq \sum_{v \in V} d(v)$, entonces G no es un árbol.

c) **(0,5 ptos.)** Si $G = (V, A)$ es un grafo simple de 16 vértices tal que el grado de cada vértice es al menos 9 entonces G no es bipartido.

d) **(0,5 ptos.)** Si T es un árbol con raíz de 250 vértices y 6–ario entonces la altura de T es ≥ 4.

Solución

a) FALSO. En cada componente conexa de G se verifica la fórmula de Euler $2q = \sum_{v \in V} d(v)$, luego el nº de vértices de grado impar, es una cantidad par. Si G tiene exactamente dos vértices de grado impar, ambos vértices están en la misma componente conexa.

b) VERDADERO. Si G es un árbol, entonces $\sum_{v \in V} d(v) = 2q = 2n - 2 < 2n$.

MATEMÁTICA DISCRETA II

SOLUCIONES

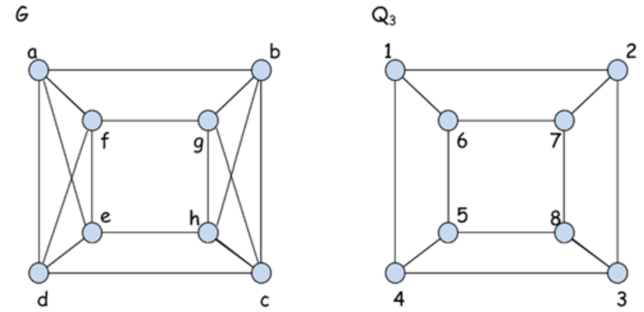
c) VERDADERO. Si $G = (V, A)$ es bipartido y la partición de vértices es $V = V_1 \cup V_2$ entonces los vértices de V_1 son únicamente adyacentes a vértices de V_2. Puesto que cada vértice del grafo G tiene al menos grado 9, entonces los conjuntos V_1 y V_2 deberían de tener al menos 9 vértices, pero esto no puede ocurrir puesto que el grafo tiene 16 vértices.

d) FALSO. Una cota inferior para la altura de T es 3, ya que $n \leq \frac{m^{h+1}-1}{m-1} \Rightarrow 1251 \leq 6^{h+1} \Rightarrow h \geq 3$.

Ejercicio 3

(1 pto.) Sean G y Q_3 los grafos representados por las figuras adjuntas, ¿es G isomorfo al grafo ${Q_3}^C$?

En caso negativo, justifica la respuesta. En caso afirmativo, define el isomorfismo $I: G \rightarrow {Q_3}^C$ existente.



Solución

- G es isomorfo a ${Q_3}^C$ ya que existe un isomorfismo $I: G \rightarrow {Q_3}^C$ tal que

I(a) = 4, I(b) = 7, I(c) = 3, I(d) = 6, I(e) = 8, I(f) = 2, I(g) = 5, I(h) = 1.

- G es isomorfo a ${Q_3}^C$ ya que existe un isomorfismo $I': G^C \rightarrow Q_3$ tal que

I(a) = 1, I(b) = 78, I(c) = 2, I(d) = 5, I(e) = 7, I(f) = 3, I(g) = 6, I(h) = 4.

Ejercicio 4

a) **(1 pto.)** Probar que si T es árbol con $q \geq 1$, entonces existen al menos dos vértices distintos u, v en T con grado 1.

b) **(1 pto.)** Una empresa tiene 80 ordenadores que quiere conectar en una red G tal que tolere el fallo de 8 ordenadores como máximo. ¿Cuál es el número mínimo de conexiones que hay que poner entre los ordenadores? ¿Cuál sería el procedimiento para construir la red G como un grafo de Harary?

Solución

a) Se tiene que $\sum_{v \in V} d(v) = 2q = 2(n-1)$

- Si no existe $v \in V$ con $d(v) = 1$ entonces $2n \leq \sum_{v \in V} d(v) = 2q = 2(n-1) \Rightarrow$ absurdo
- Si existe un único $v \in V$ con $d(v) = 1$ entonces $1 + 2(n-1) \leq \sum_{v \in V} d(v) = 2q = 2(n-1) \Rightarrow$ absurdo

Por tanto, en T hay al menos dos vértices distintos con grado 1.

b) G es 9–conexo y tiene al menos $q = \left\lceil \frac{nk}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{80.9}{2} \right\rceil = 360$ aristas.

El grafo G se construye como el grafo de Harary H(k = 9, n = 80): V = {0, 1, 2, …, 79}

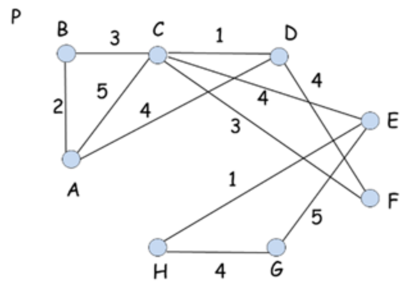
A = {{i, i + j mod 80}, i ∈ {0, 1, 2, …, 79}, j ∈ {1, 2, 3, 4}} ∪ {{i, i + 40 mod 80}, i ∈ {1, …, 40}}.

MATEMÁTICA DISCRETA II

SOLUCIONES

Ejercicio 5

En una plantación P definida por el grafo de la figura adjunta se ha detectado una enfermedad que se ha originado en la parcela **A** y que se puede propagar de una parcela a otra colindante. El tiempo, en días, que tarda la enfermedad en propagarse de una parcela a otra viene estimado por los pesos de las aristas del grafo.



Responde a las siguientes cuestiones y justifica las respuestas aplicando el algoritmo apropiado.

a) **(1 pto.)** ¿Cuantos días tardará en infectarse la parcela ***G***?

¿Qué parcelas estarán infectadas cuando la enfermedad alcance a la parcela ***G***?

b) **(1 pto.)** Para evitar que se propague la enfermedad de una parcela a otra vecina, se puede aplicar un producto en el acceso entre ellas. Sabiendo que solo se dispone de producto suficiente para un único acceso, ¿es posible aislar la enfermedad de forma que no se infecte toda la plantación?

Solución

a) Si se ha originado la enfermedad en la parcela *A*, el tiempo que tardará en infectarse la parcela *G* se obtiene aplicando el Algoritmo de Dijkstra para calcular el coste en tiempo del camino mínimo de *A* a *G*:

A	B	C	D	E	F	G	H	Vértices	Aristas
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A	
	(2,A)	(5,A)	(4,A)	∞	∞	∞	∞	B	AB
		(5,A)	(4,A)	∞	∞	∞	∞	D	AD
		(5,A)		∞	(8,D)	∞	∞	C	AC
				(9,C)	(8,D)	∞	∞	F	DF
				(9,C)		∞	∞	E	CE
						(14,E)	(10,E)	H	HE
						(14,E)		G	HG

El tiempo que tarda en infectarse la parcela *G* es 14 días.

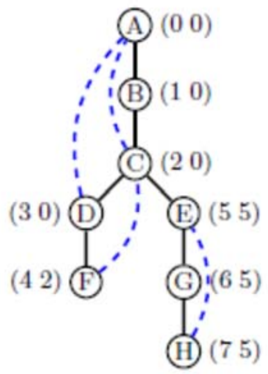
Además, como se desprende de la tabla anterior, cuando la enfermedad alcanza la parcela *G* se ha infectado toda la plantación.

b) Para aislar la enfermedad de forma que no se infecte toda la plantación, se puede aplicar un producto en el acceso entre parcelas que corresponda a una arista puente del grafo asociado. Para hallar una arista puente tenemos que aplicar el algoritmo del doble etiquetado.

Un árbol de búsqueda en profundidad con raíz en **A** y doble etiquetado:

MATEMÁTICA DISCRETA II

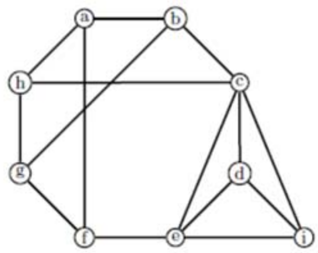
SOLUCIONES



La arista CE es la única arista del árbol que verifica que low(E) > df(C), por lo tanto, el acceso entre las parcelas C y E es el único donde podemos aislar la enfermedad.

Ejercicio 6

Sea *G* el grafo definido por la figura:



a) **(0,5 ptos.)** Halla la conectividad por vértices y aristas de *G*.

b) **(1 pto.)** Calcula el radio, el diámetro y el subgrafo centro de *G*.

Construye un árbol generador T de *G* de diámetro 4. ¿Cuál es el centro del árbol T?

Solución

a) *G* es 2-conexo. Eliminando los vértices {c, f} el grafo se desconecta.

G es 2–aristoconexo y es 3–aristoconexo. Eliminando las aristas {ab, af, ah} el grafo se desconecta.

Entonces $2 = k = \kappa(G) \leq \lambda(G) = \delta(G) = 3$.

b) Las excentricidades de los vértices se indican en la siguiente tabla:

v	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$\epsilon(\mathbf{v})$	3	2	2	3	2	2	3	2	3

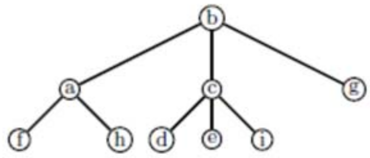
R(*G*) = 2 y D(*G*) = 3.

El centro de *G* es el subgrafo H = (V_H, A_H), donde V_H = {b, c, e, f, h} y A_H = {bc, ch,ce, ef}.

La máxima distancia entre dos vértices de un árbol se alcanza entre dos hojas del árbol. Sea T un árbol BEA con raíz en un vértice de excentricidad 2 (vértices del centro del grafo *G*), entonces la máxima distancia posible entre dos vértices de dicho árbol es 4. Para el grafo *G*, se tiene el siguiente árbol BEA con raíz en b:

MATEMÁTICA DISCRETA II

SOLUCIONES



Hay al menos dos hojas en el nivel 2 con distinto padre y, por consiguiente, la distancia entre ellas es 4 y, por lo tanto, el diámetro del árbol es 4. El árbol de la figura es un árbol generador de G de diámetro 4 y su centro es el vértice b.