Grado en Matemáticas e Informática Curso 17-18
ETSIInf, UPM **Matemática Discreta II (Grupo B)**
Control 3 **18-06-18**

SOLUCIONES

1. **(2,5 puntos)**
   (a) Demuestra el teorema de Euler para grafos planos.

   (b) ¿Cuál es la relación entre número cromático y número de independencia de un grafo? Demuéstrala.

En los apuntes

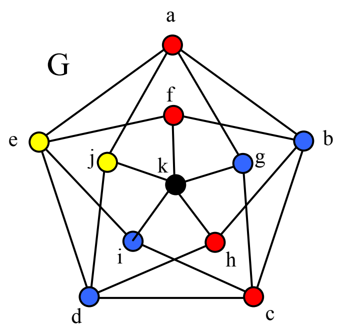
2. (2,5 puntos)

(a) Demuestra que si G es un grafo planar con menos de 12 vértices, entonces G tiene algún vértice de grado menor o igual a 4.

Si todos los vértices de G tienen grado al menos 5 entonces $2q = \Sigma d(v) \geq 5n$. Como G es planar $5n \leq 2q \leq 2(3n - 6) = 6n - 12$, luego $n \geq 12$

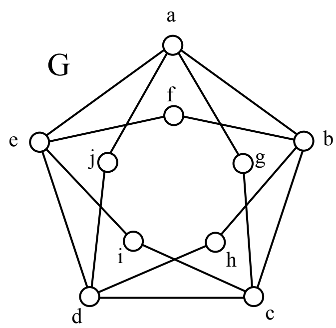
Se considera el grafo G de Grötzsch, mostrado en la figura

(b) Halla el número cromático de G.



El número cromático del grafo de Grötzsch es 4. Una 4-coloración se muestra en la figura. Los vértices del pentágono exterior necesitan 3 colores. Los 5 vértices correspondientes a los del ciclo exterior también requieren 3 colores, luego el vértice central k precisa un cuarto color

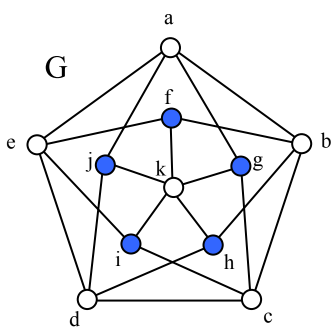
(c) Enuncia el teorema de Kuratowski y aplícalo para averiguar si G es planar.

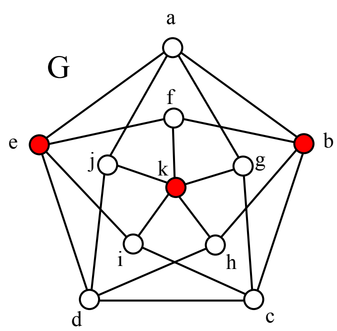


Si eliminamos el vértice central k resulta un subgrafo homeomorfo a K_5, por tanto G no es planar

(d) Construye dos conjuntos independientes maximales de distinto cardinal en G. Justifica que el número de independencia de G es 5.

En la figura se muestran dos conjuntos independientes maximales, azul de tamaño 5 y rojo de tamaño 3



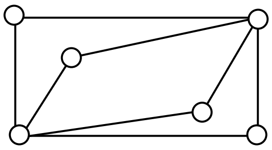


En un conjunto independiente puede haber 0, 1 ó 2 vértices del ciclo exterior. Si no hay ninguno el máximo cardinal que se obtiene es 5 (conjunto azul en la figura). Si hay dos, como en el conjunto rojo, podemos conseguir a lo sumo cardinal 4 (vértices b, e, g, j). Y si hay uno, por ejemplo b, podemos conseguir a lo sumo otros 3 independientes entre los vértices “interiores”. Por tanto el número de independencia es 5.

3. **(1 punto)** ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Demuéstralas en caso afirmativo o encuentra un contraejemplo:

   (a) Todo grafo 2-conexo y euleriano es también hamiltoniano.
   (b) Todo grafo no planar de n vértices tiene al menos 3n – 6 aristas.

Ambas afirmaciones son falsas: En la figura un grafo 2-conexo y euleriano que no es hamiltoniano. Y para (b) basta considerar $K_{3,3}$ que tiene 6 vértices y 9 aristas



4. **(2 puntos)**
   (a) Halla la función generatriz de la sucesión (a_n) que proporciona el número de formas en que se pueden distribuir n caramelos idénticos a 10 niños si cada uno recibe un número par entre 4 y 10 caramelos. ¿De cuántas formas se pueden repartir 60 caramelos?

   (b) Halla la función generatriz de la sucesión definida por la siguiente relación de recurrencia:
   $a_n = 4a_{n-2} + 3^n \quad n \geq 2, \quad a_0 = 2, a_1 = 1$

(a) La función generatriz es $A(x) = (x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})^{10} = \dfrac{x^{40}(1-x^8)^{10}}{(1-x^2)^{10}}$

Cambio de variable $x^2 = z$. La función generatriz se transforma en $A(z) = \dfrac{z^{20}(1-z^4)^{10}}{(1-z)^{10}}$

Ahora se debe calcular el coeficiente de x^{60} en A(x), es decir, el coeficiente de z^{30} en A(z), es decir, el coeficiente de z^{10} en $(1-z^4)^{10}w$, siendo $w = (1+ z+ z^2 + \ldots)^{10}$

Como $(1-z^4)^{10} = 1 - 10z^4 + \binom{10}{2}z^8 - \cdots$ resulta que

a_{60} = (coef. de z^{10} en w) – 10(coef. de z^6 en w) + 45(coef. de z^2 en w) =

$$= \binom{10+10-1}{10} - 10\binom{6+10-1}{6} + \binom{10}{2}\binom{2+10-1}{2} = \binom{19}{10} - 10\binom{15}{6} + \binom{10}{2}\binom{11}{2}$$

(b) Sea $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la función generatriz de la sucesión solución

Aplicamos el procedimiento general a la relación
$a_n x^n = 4 a_{n-2} x^n + 3^n x^n \quad n \geq 2$

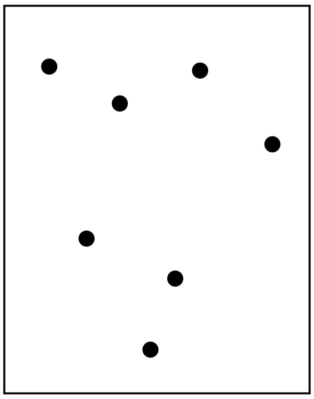
$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 4\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 3^n x^n +$$

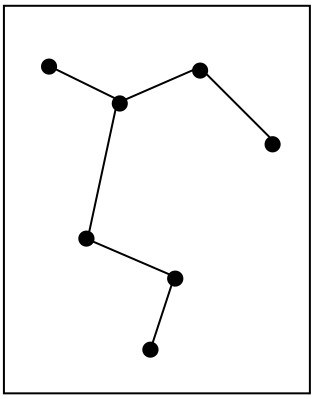
Por tanto,

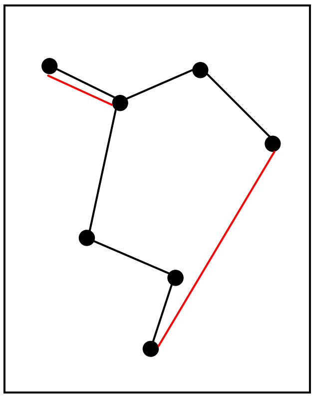
$$A(x) = 2 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 2 + x + 4x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{n=2}^{\infty} (3x)^n =$$

$$= 2 + x + 4x^2 A(x) + \frac{1}{1-3x} - 1 - 3x = \frac{2 - 5x + 6x^2}{(1-4x^2)(1-3x)}$$

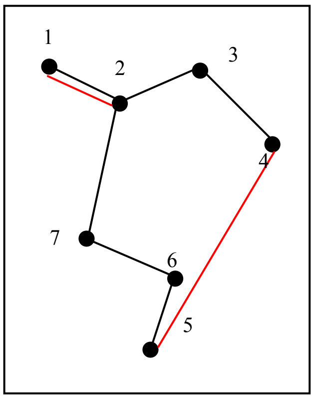
5. **(2 puntos)** Describe una aproximación de factor 3/2 para el “Problema del Viajante” utilizando las siguientes viñetas. Los vértices del grafo G aparecen en la primera viñeta, las aristas de G son todos los segmentos que unen cada par de vértices y el peso de cada arista es la distancia euclídea entre sus extremos. En la segunda viñeta aparece el árbol generador mínimo. Dibuja los pasos siguientes en las viñetas sucesivas y descríbelos brevemente.



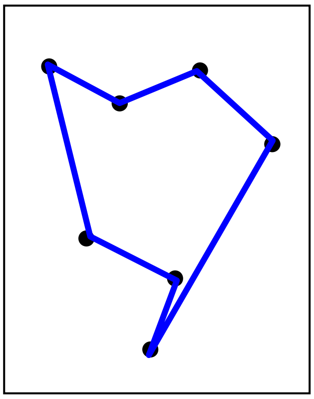




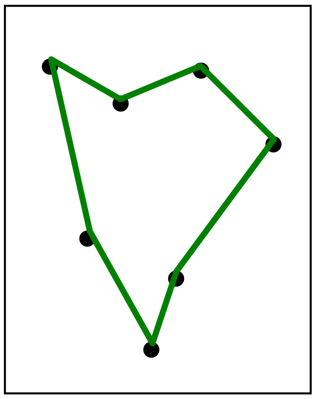
Emparejamiento mínimo de los vértices impares



Recorrido euleriano



Ciclo hamiltoniano siguiendo el orden del recorrido euleriano



Ciclo hamiltoniano de longitud mínima