0.1. Lección 3: Los números reales.

En primer lugar introducimos el conjunto de los números reales que utilizaremos durante todo el curso. Empezamos distinguiendo diferentes tipos de números:

1. El conjunto de los números naturales que denotaremos por $\mathbb{N}$

   $$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

   La suma y producto de dos números naturales es un número natural. Sin embargo la ecuación

   $$x + n = 0$$

   no tiene solución en $\mathbb{N}$. Consideramos un conjunto con más elementos donde dicha ecuación tiene solución que es el de los enteros.

2. El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ consta de los números naturales, sus opuestos y el 0.

   $$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

   La suma, y producto de números enteros es un número entero. La ecuación

   $$xp = q$$

   con $p, q \in \mathbb{Z}$ en general no tiene solución en $\mathbb{Z}$, consideramos un conjunto con más elementos donde esta ecuación tiene solución.

   Representación sobre la recta real.

3. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ consta de los números del tipo $\frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}.$$
La suma y producto de números racionales es un número racional. De hecho si $\frac{p}{q}, \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$
$$\frac{p}{q} + \frac{n}{m} = \frac{pm + qn}{qm} \in \mathbb{Q} \quad \frac{p}{q} . \frac{n}{m} = \frac{pn}{qm} \in \mathbb{Q}$$
El conjunto $\mathbb{Q}$ es un cuerpo con las propiedades de la suma y la multiplicación. Los números racionales son los que tienen expansión decimal finita o periódica.

4. El conjunto de los números reales, que incluye todos los números racionales y los irracionales (que tienen una expansión decimal infinita y no periódica).

Vamos a justificar que hay números que no son racionales. Veamos que $\sqrt{2}$ no es racional, o lo que es lo mismo, vamos a probar:

Proposición 1. *El número $\sqrt{2}$ no es racional.*

Demostración. Haremos una demostración por reducción al absurdo: Supongamos (por red. al absurdo) que:

$\triangleright$ *Hay un número racional $\frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$ de modo que $\frac{p^2}{q^2} = 2$.*

Podemos suponer que $p, q \in \mathbb{N}$ y que se trata de una fracción irreducible (es decir, p y q no tienen divisores comunes salvo el 1). Entonces $p, q \in \mathbb{N}$ y $p^2 = 2q^2$ luego p^2 es par, por tanto tenemos que p es par y será de la forma $p = 2k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Luego $p^2 = 4k^2 = 2q^2$ y $q^2 = 2k^2$ por lo tanto q es par. Hemos llegado a que p y q son pares pero esto no es posible !! ya que la fracción $\frac{p}{q}$ era irreducible. Queda probado el enunciado. $\square$

Consideramos el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales y es claro que:

$$\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}.$$

El conjunto $\mathbb{R}$ con la suma y la multiplicación es un *cuerpo* con las propiedades de la adicción y la multiplicación. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que $a + b \in \mathbb{R}, ab \in \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:
Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$:

1. **P1** $a + b = b + a$ (prop. conmutativa de la suma)

2. **P2** $(a + b) + c = a + (b + c)$ (propiedad asociativa de la suma)

3. **P3** Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = 0 + a$ (existencia del elemento neutro)

4. **P4** Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $-a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = 0$ (existencia del elemento opuesto).

5. **P5** $ab = ba$ (prop. conmutativa del producto)

6. **P6** $(ab)c = a(bc)$ (prop. asociativa del producto)

7. **P7** Existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que $a1 = a$

8. **P8** Si $a \neq 0$, existe el inverso de a, $\frac{1}{a} = a^{-1}$, tal que $a\frac{1}{a} = 1$

9. **P9** $(a + b)c = ac + bc$ (prop. distributiva).

Observación: Las propiedades anteriores son las que subyacen cuando resolvemos ecuaciones sencillas de números reales. Vemos un ejemplo:
$\triangleright$ Resolvamos la ecuación: $2x - 8 = 4$ cuya solución es $x = 6$ especificando las propiedades utilizadas. En primer lugar la ecuación es $2x + (-8) = 4$

$$(2x + (-8)) + 8 = 4 + 8 \Leftrightarrow 2x + (8 + (-8)) = 12 \Leftrightarrow 2x + 0 = 4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}12 \Leftrightarrow (\frac{1}{2}2)x = 6 \Leftrightarrow 1x = 6 \Leftrightarrow x = 6$$

Observación: La propiedad de existencia del inverso de un número real distinto de cero, es decir, *Si* $a \neq 0$ *entonces existe* $\dfrac{1}{a}$ es esencial en la resolución de igualdades. En efecto, se ella se deduce:

Proposición 2. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$*,*

$$ab = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \ \textit{o} \ b = 0$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que $ab = 0$ entonces puede ocurrir que $a = 0$ o $a \neq 0$. Si $a \neq 0$, por la propiedad del inverso, existe $\dfrac{1}{a}$ y por tanto

$$0 = \frac{1}{a}(ab) = (\frac{1}{a}a)b = 1b = b$$

luego $b = 0$. La otra implición es obvia. $\square$

Observación: La simplificación en ecuaciones que se realiza sin tener en cuenta el caso de que algún número real sea distinto de cero produce errores en la resolución de dichas ecuaciones. Por ejemplo:
$\triangleright$ Resolvemos $x = x(x-1)$. Si simplificamos x a ambos lados de la igualdad sin tener en cuenta que sea o no cero tendríamos la ecuación $1 = x - 1$ cuya única solución es $x = 2$; sin embargo $x = 0$ es también solución de la ecuación $x = x(x-1)$.

$\boxtimes$ **Ejercicio:** Encuentra el error en la siguiente demostración: Sea $a = b$, entonces

$$a^2 = ab,$$

restando b^2 en los dos lados de la igualdad tenemos que

$$a^2 - b^2 = ab - b^2,$$

luego

$$(a-b)(a+b) = b(a-b)$$

y simplificando tenemos que $a + b = b$, y como $a = b$, se tiene que $2b = b$ y simplificando de nuevo se obtiene que $2 = 1$.!!!

Definición 3. *Si $a \geq 0$ definimos la raiz cuadrada de a, y se denota por $\sqrt{a}$, como el único número mayor o igual que cero cuyo cuadrado es a. La ecuación $x^2 = a$ tiene dos soluciones que son $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$.*

De forma más general se definen la raices n-ésimas de un número real positivo a que se denotan por $\sqrt[n]{a}$ como el único número real positivo cuya potencia n-ésima es a. En el caso de números negativos se puede definir su raiz n-ésima si n es impar.

1. Si n es par y $a \geq 0$, $x^n = a \Longleftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$ o $x = -\sqrt[n]{a}$
2. Si n es impar
   - i) si $a \geq 0$ se tiene que $x^n = a \Longleftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$.
   - ii) si $a < 0$ se tiene que $x^n = a \Longleftrightarrow x = -\sqrt[n]{-a}$

$\triangleright$ Hay que distinguir bien:
$\triangleright$ $\triangleright$ las soluciones de $x^2 = a$, con $a > 0$ que son $x = \sqrt{a}$ y $x = -\sqrt{a}$.
$\triangleright$ $\triangleright$ $\sqrt{a}$.

Proposición 4. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces*

$$a^2 = b^2 \iff a = b \text{ o } a = -b$$

Si $a, b \geq 0$ se verifica $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$.

Demostración. Nótese que

$$a^2 = b^2 \iff a^2 - b^2 = 0 \iff (a+b)(a-b) = 0$$

Y utlizando el resultado anterior se tiene que

$$(a+b)(a-b) = 0 \iff a + b = 0 \text{ o } a - b = 0 \iff a = b \text{ o } a = -b$$

En el caso de $a, b \geq 0$ sólo puede darse que $a = -b$ cuando $a = b = 0$. $\square$

Observación: La utilización incorrecta de la propiedad $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ cuando ambos no son positivos da lugar a numerosos errores en la resolución de ecuaciones, especialmente si intervienen raíces cuadradas. De hecho, si al resolver una igualdad elevamos al cuadrado los dos lados para facilitar la resolución de la ecuación, cuando resolvamos la nueva ecuación hay que tener en cuenta que dichas soluciones serían *posibles* soluciones de la primera ecuación y necesitaríamos comprobar que efectivamentes son soluciones. Vemos un ejemplo de dicha situación:

$\triangleright$ Resolvemos la ecuación $\sqrt{2 + \sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$. En primer lugar,

$$\sqrt{2 + \sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x} \Longrightarrow 2 + \sqrt{x-5} = 13 - x$$

Resolvemos ahora la ecuación:$2+\sqrt{x-5} = 13-x$ o lo que es lo mismo $\sqrt{x-5} = 11-x$; puesto que uno de los lados de la ecuación puede no ser positivo (de hecho no lo es si $x > 11$) tenemos que

$$\sqrt{x-5} = 11-x \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{pero no es equivalente}} x-5 = (11-x)^2 = 121-22x+x^2 \Leftrightarrow x^2-23x+126 = 0$$

cuyas soluciones son $x = 14$ y $x = 9$. Sin embargo, no podemos asegurar que sean soluciones de la primera ecuación. Comprobamos:

$\triangleright\triangleright$ $x = 14$ no es solución de la ecuación $\sqrt{2 + \sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$.

$\triangleright\triangleright$ $x = 9$ es la única solución de la ecuación $\sqrt{2 + \sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$.

0.1.1. Orden en $\mathbb{R}$.

Dados dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$ se establece la relación siguiente: se dice que $a \leq b$ y se lee *a es menor o igual que b* si $b - a \geq 0$, es decir,

$$a \leq b \Longleftrightarrow b - a \geq 0.$$

Esta relación es una relación de orden $\mathbb{R}$ puesto que verifica las siguientes propiedades:

1. **P10** *Propiedad reflexiva* $a \leq a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

2. **P11** *Propiedad antisimétrica* Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

3. **P11** *Propiedad Transitiva* Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.

$(\mathbb{R}, \leq)$ es un conjunto ordenado. Además se trata de un orden total, es decir, si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces o bien $a \leq b$ o $b \leq a$, por lo que $\mathbb{R}$ es un conjunto ordenado totalmente. Se establecen de forma análoga las relaciones $a < b$, $a \geq b$ y $a > b$.
De estas propiedades se obtienen las siguientes propiedades que aseguran que el orden es compatible con suma y multiplicación. Estas propiedades son de gran utilidad en la resolución de inecuaciones:

Proposición 5. *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$*

1. *(Suma) Si $a \leq b$ entonces $a + c \leq b + c$.*

2. *(Producto) Si $a \leq b$ y*

   i) Si $\boxed{c > 0}$ entonces $ac \leq bc$.

   ii) Si $\boxed{c < 0}$ entonces $ac \geq bc$.

▷ **Observación** La utilización incorrecta de las propiedades de orden en la multiplicación produce errores en la resolución de inecuaciones cuando multiplicamos ambos lados de una desigualdad por un número real sin determinar primero su signo. Por ejemplo:

Resolvemos $x^2 \leq x$. ▷ Resolvemos la inecuación $x^2 \leq x$. Si realizamos la simplificación

$x^2 < x \Rightarrow x < 1$ estamos cometiendo un error puesto que dicho resultado es cierto sólo si $x > 0$ (en efecto, si $x < 0$ se tiene que $x^2 < x \Rightarrow x > 1$!!!). La forma más sencilla de resolver esta inecuación es resolver $x^2 - x < 0$ o equivalentemente $x(x-1) < 0$ cuya solución es $0 < x < 1$.

Observación: Nótese que es equivalente $ab > 0 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} > 0$. Sin embargo, no es lo mismo $ab \geq 0$ y $\dfrac{a}{b} \geq 0$ pues en el segundo caso queda sobreentendido que $b = 0$ es una solución y no lo es en el primero.

Proposición 6. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \geq 0$ y $b \geq 0$, se tiene*

$$a < b \Longleftrightarrow a^2 < b^2$$

Demostración: Partimos de a, b positivos y $a < b$. Tenemos que probar que $a^2 < b^2$, o lo que es lo mismo, $b^2 - a^2 > 0$. Se tiene que:

$$b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) \geq 0$$

puesto que $b - a \geq 0$ y $b + a \geq 0$ (por ser $a, b \geq 0$).

☒ **Ejercicio:** Responde si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando la respuesta

1. Para todos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ se tiene que $a^2 < b^2$.....V....**F**

2. Para todos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ se tiene que $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.......V...**F**

3. $\dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ....**V**....F.

4. $\dfrac{1}{1+x} \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$...V....**F**.

5. $\dfrac{x^2}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{2}$ para todo $0 \leq x \leq 1$...**V**....F.

$\rhd\rhd$ **No es cierto que si** $a < b$ **entonces** $a^2 < b^2$, por ejemplo, $a = -2$ y $b = 1$, es claro que $a < b$ pero $a^2 > b^2$.

Proposición 7. *Sean* $a, b > 0$*, se tiene:*

$$a < b \Longleftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

$\rhd\rhd$ **No es cierto que si** $a < b$ **entonces** $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$ En efecto, por ejemplo: $a = -2 < 1 = b$ y sin embargo $\dfrac{-1}{2} < 1$.

Intervalos en la recta real: La relación de orden en $\mathbb{R}$ permite definir los intervalos que son los conjuntos de puntos comprendidos entre dos puntos que llamaremos extremos. Definimos los siguientes tipos de intervalos :

1. Intervalo abierto de extremos a y b: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$.

2. Intervalo cerrado de extremos a y b: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

3. Intervalos semiabiertos de extremos a y b: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ o $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$.

4. Intervalos infinitos abiertos o cerrados :

$$\textit{abiertos} \;\; (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}, (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}.$$

$$\textit{cerrados} \;\; [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}, (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}.$$

Nótese que la intersección de dos intervalos es o bien el conjunto vacío, un único punto u otro intervalo; sin embargo, la unión de intervalos no es, en general, un intervalo.

0.1.2. El valor absoluto.

El valor absoluto de un número real a se define de la siguiente forma:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } \quad a < 0. \end{cases}$$

El valor absoluto tiene una interpretación geométrica sobre la recta real como la longitud del intervalo que tiene por extremos 0 y a o lo que es lo mismo la distancia entre los números reales 0 y a. Esto permite definir la distancia entre dos puntos de la recta real como

$$d(a, b) = |b - a|.$$

Proposición 8. *Las propiedades del valor absoluto son:*

1. $|a| \geq 0$. *Además,* $|a| = 0$ *si y sólo si* $a = 0$.
2. $|ab| = |a||b|$
3. *(Desigualdad triangular)* $|a + b| \leq |a| + |b|$

A partir de esta definición se obtienen muchas de las propiedades del valor absoluto. Destacamos alguna de ellas:

Proposición 9. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$

1. $|-a| = |a|$.
2. $|a|^2 = a^2$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$.
3. $\sqrt{a^2} = |a|$.
4. $|a - b| \geq ||a| - |b||$

Vemos la prueba de la última desigualdad. Nótese que puesto que los dos lados de la desigualdad son positivos, es decir, $|a - b| \geq 0$ y $||a| - |b|| \geq 0$ se tiene que

$$|a - b| \geq ||a| - |b|| \Leftrightarrow |a - b|^2 \geq ||a| - |b||^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b| \Leftrightarrow -2ab \geq -2|a||b| \Leftrightarrow ab \leq |ab| \qquad \checkmark$$

Interpretación del valor absoluto como distancia: Si consideramos la representación de los números reales sobre la recta real, dado $a \in \mathbb{R}$ el valor de $|a|$ representa la distancia del punto a al 0 o lo que es lo mismo la longitud del segmento de extremos 0 a. De la misma forma, para dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$, $|a-b|$ representa la distancia entre los puntos a y b, o lo que es lo mismo, la longitud del segmento de extremos a y b. Esta interpretación de valor absoluto será de gran utilidad a lo largo del curso.

Vemos a continuación otras propiedades del valor absoluto que son muy útiles en la resolución de ecuaciones o inecuaciones en las que interviene el valor absoluto:

Proposición 10. *Sea $r > 0$,*

1. *Si $r > 0$, $|x| < r \Longleftrightarrow -r < x < r$.*
2. *Si $r > 0$, $|x| > r \Longleftrightarrow x > r \quad o \quad x < -r$.*

A partir de lo anterior podemos calcular el conjunto de puntos cuya distancia a uno fijo a es menor que r lo cual da lugar a los intervalos o entornos centrados en un punto y de radio $r > 0$:

1. Si $r > 0$, $|x-a| < r \Longleftrightarrow a-r < x < a+r \Longleftrightarrow x \in (a-r, a+r)$. Llamaremos a $(a-r, a+r)$ intervalo abierto de centro a y radio r.
2. Si $r > 0$, $|x-a| \leq r \Longleftrightarrow a-r \leq x \leq a+r \Longleftrightarrow x \in [a-r, a+r]$. Llamaremos a $[a-r, a+r]$ intervalo cerrado de centro a y radio r.

Por otra parte

$$|x-a| > r \Longleftrightarrow x > a+r \text{ o } x < a-r \Longleftrightarrow x \in (-\infty, a-r) \cup (a+r, \infty).$$

☒ **Ejercicio:** Resuelve las siguientes desigualdades

i) $|x| < 1$

ii) $|3x + 1| \geq 1$

iii) $|x^2 - x| > 2$

iv) $|x + 4| < 2$

v) $|x + 1| < |x - 3|$

vi) $|x - 1|\,|x + 2| \leq 4$