MATEMÁTICA DISCRETAS I

RELACIONES DE EQUIVALENCIA Y DE ORDEN

---

1. ¿Es relación de equivalencia $xRy \leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$? En caso afirmativo, obtén la clase [5] y el conjunto cociente.

Para comprobar si es una **relación de equivalencia**, debemos verificar las propiedades siguientes:
I) Reflexiva: **xRx** $\leftrightarrow$ $x^2 - x^2 = x - x$; $0 = 0 \rightarrow$ *OK*
*** NOTA: ↔ significa sí y solo sí**
II) Simétrica: **si xRy** $\leftrightarrow$ $x^2 - y^2 = x - y$, **entonces yRx** $\leftrightarrow$ $y^2 - x^2 = y - x \rightarrow$ *Si multiplicamos por -1 la segunda ecuación, obtenemos la primera* $\rightarrow$ *OK*
III) Transitiva: **si xRy** $\leftrightarrow$ $x^2 - y^2 = x - y$ **y yRz** $\leftrightarrow$ $y^2 - z^2 = y - z$, **entonces xRz** $\leftrightarrow$ $x^2 - z^2 = x - z$
En este caso, sumamos ambas ecuaciones
$x^2 - y^2 = x - y$
$y^2 - z^2 = y - z$

$x^2 - z^2 = x - z \rightarrow$ *OK*
Como se cumplen las tres propiedades, entonces la relación es de equivalencia.

Obtenemos la clase [5] = {xR5: x ∈ Z } = {5,-4}

xR5$\leftrightarrow x^2 - 5^2 = x - 5 \rightarrow x^2 - x - 20 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \dfrac{1 \pm 9}{2} = \{5, -4\}$

Obtenemos el conjunto cociente: {xRa: x,a ∈ Z } = {a,1-a}
xRa$\leftrightarrow x^2 - a^2 = x - a \rightarrow x^2 - x - a(a-1) = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a(a-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{4a^2-4a+1}}{2} = \frac{1 \pm (2a-1)}{2} = \{a, 1-a\}$$

2. ¿Es relación de equivalencia $(a, b)R(c, d) \leftrightarrow ad = bc$? En caso afirmativo, obtén la clase [(2,8)] y el conjunto cociente.

Para comprobar si es una relación de equivalencia, debemos verificar las propiedades siguientes:
I) Reflexiva: (a,b)R(a,b) $\leftrightarrow ab = ba \rightarrow$ *OK*
II) Simétrica: Si (a,b)R(c,d)$\leftrightarrow ad = bc$, entonces (c,d)R(a,b) $\leftrightarrow cb = da \rightarrow$ *OK*
III) Transitiva: Si (a,b)R(c,d)$\leftrightarrow ad = bc$ y (c,d)R(e,f)$\leftrightarrow cf = de$, entonces (a,b)R(e,f)$\leftrightarrow af = be$
Despejamos de la primera ecuación la d y sustituimos en la segunda ecuación
d = bc/a → cf = bc/a e → af = be → OK

Como se cumplen las tres propiedades, entonces la relación es de equivalencia.

Hallamos la clase [(2,8)] = {(a,b)R(2,8): a,b ∈ Z} = {(a,4a): a ∈ Z}
(a,b)R(2,8) ↔ 8a = 2b → b = 4a → (a,4a)

Hallamos el conjunto cociente: {(a,b)R(x,y): a,b,x,y ∈ Z} = {(a,ay/x):a,y,x ∈ Z y x ≠ 0}
(a,b)R(x,y)↔ ay = bx → b = ay/x → (a,ay/x)

3. En el conjunto $\mathfrak{R}$ se define la relación (a,b)R(c,d) ↔ a+d=b+c. Averigua si es una relación de equivalencia, y en caso afirmativo, obtén la clase [(2,5)] y el conjunto cociente.

Para comprobar si es una relación de equivalencia, debemos verificar las propiedades siguientes:
I) Reflexiva: (a,b)R(a,b) ↔ a+b=b+a → OK
II) Simétrica: si (a,b)R(c,d) ↔ a+d=b+c, entonces (c,d)R(a,b) ↔ c+b=d+a → OK
III) Transitiva: si (a,b)R(c,d) ↔ a+d=b+c y (c,d)R(e,f) ↔ c+f=d+e, entonces (a,b)R(e,f) ↔ a+f=b+e
a+d=b+c → Despejamos de la primera: d = b+c-a
d+e=f+c → Sustituimos en la segunda: b+c-a+e = f+c → b+e = a+f → OK

Como se cumplen las tres propiedades, entonces la relación es de equivalencia.

Hallamos la clase [(2,5)] = {(a,b)R(2,5): a,b ∈ Z} = {(a,a+3): a ∈ Z}
(a,b)R(2,5) ↔ a+5=b+2 → b = a+3 → (a,a+3)

Hallamos el conjunto cociente: {(a,b)R(x,y): a,b,x,y ∈ Z} = {(a,a+y-x): a,x,y ∈ Z}
(a,b)R(x,y) ↔ a+y=b+x → b = a+y-x → (a,a+y-x)

OJO: si nos piden calcular una clase de equivalencia o el conjunto cociente de una relación de orden → MAL !! NO EXISTE !!

4. En el conjunto $\mathbb{Z}$ se define la relación $aRb \leftrightarrow 10|a^2 - b^2$. Averigua si se trata de una relación de equivalencia y, de ser cierto, encuentra la clase de equivalencia del elemento 0, es decir, [0].

Para comprobar si es relación de equivalencia, debemos verificar las siguientes propiedades:
I) Reflexiva: aRa↔ $10|a^2 - a^2 = \frac{a^2-a^2}{10} = \frac{0}{10}$ = 0 ∈ Z → OK
***NOTACIÓN: | se lee divide a…**
II) Simétrica: si aRb↔ $10|a^2 - b^2 = \frac{a^2-b^2}{10}$, entonces bRa ↔ $10|b^2 - a^2 = \frac{b^2-a^2}{10}$ → Si multiplico el segundo resultado por -1 entonces obtenemos el primero → OK
III) Transitiva: si aRb↔ $10|a^2 - b^2 = \frac{a^2-b^2}{10}$ y bRc↔ $10|b^2 - c^2 = \frac{b^2-c^2}{10}$,
entonces aRc ↔ $10|a^2 - c^2 = \frac{a^2-c^2}{10}$
Si sumamos las dos primeras operaciones, obtenemos la tercera: $\frac{a^2-b^2}{10} + \frac{b^2-c^2}{10} = \frac{a^2-c^2}{10}$ → OK

Como se cumplen las tres propiedades, entonces la relación es de equivalencia.

Hallamos la clase de equivalencia del [0] = {aR0: a ∈ Z} = {10·a / a ∈ Z}
aR0 ↔ $10|a^2 - 0^2 = \frac{a^2}{10}$ → Cumplirán esto todos los elementos de la forma 10·a, tq (tal que) a ∈ Z

5. a) Sean los conjuntos D_{1519} , A = { n ∈ ℕ / $2n - 14 \leq 5$ } y B = { $2n + 3$ /n ∈ ℕ $y\ n \geq 2$ }. Obtén el cardinal del conjunto cartesiano D_{1519} x (A ∩B).

Cardinal de un conjunto → número de elementos que tiene.
Para D1519 debemos calcular su factorización (descomposición en factores primos) → 1517 = $7^2 * 31$
|D1519| = 3*2 = 6 elementos

A = { n ∈ ℕ / $2n - 14 \leq 5$ } → 2n ≤ 19 → n ≤ 9.5 → n ≤ 9 → {0,1,2,...,9}
B = { $2n + 3$ /n ∈ ℕ $y\ n \geq 2$ } → Si n=2 → 2*2+3 = 7; Si n=3 → 2*3+3 = 9 → {7,9,11,...}
A∩B = {7,9} → |A∩B| = 2 elementos

Luego, |D1519x(A∩B)| = 6x2 = 12 elementos.

¿Cómo calculamos el cardinal de un conjunto del estilo D1519?
Cogemos las potencias de sus factores primos, les sumamos 1 y los multiplicamos entre sí.

b) En el conjunto de los números enteros definimos la siguiente relación: dados a,b ∈ Z, decimos que aRb si $\exists c \in Z : b = a \cdot c$. Razona si es una relación de equivalencia, de orden, ambas o ninguna de las dos. (**Nov 2019**)

Relación dada: aRb ↔ b=a·c, donde c ∈ Z

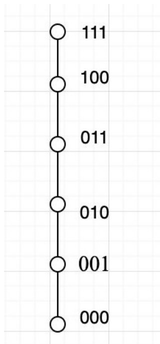
Comprobamos las propiedades:
I) Simétrica: si aRb ↔ b=a·c, entonces bRa ↔ a=b·c, si c=1 ∈ Z → OK
II)Antisimétrica: si aRb ↔ b=a·c y bRa ↔ a=b·c, entonces a=b
Buscamos un contraejemplo:
Si a=1 y b=-1, entonces aRb ↔ b=a·c → -1 = 1·c, si c = -1 ∈ Z , entonces se relacionan
bRa ↔ a=b·c → 1 = -1·c, si c = -1 ∈ Z , entonces se relacionan
Como a ≠ b y aRb y bRa, entonces NO es antisimétrica → No puede ser relación de orden.
III) Reflexiva: aRa ↔ a=a·c, si c=1 ∈ Z → OK
IV) Transitiva: aRb ↔ b=a·c y bRd ↔ d=b·c, entonces aRd ↔ d=a·c
Si sustituimos la primera ecuación en la segunda, entonces obtenemos la tercera:
d=a·c·c, donde c ∈ Z. Luego es lo mismo que poner d=a·c’ donde c’ ∈ Z → OK

Como es reflexiva, simétrica y transitiva, entonces se trata de una relación de equivalencia.

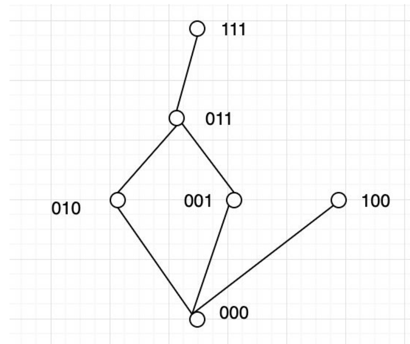
6. Determina el orden lexicográfico de las siguientes cadenas de bits: 001, 111, 010, 011, 000,100 basado en el orden $0 \leq 1$. Dibuja el diagrama de Hasse de estas cadenas, con el orden producto.

Nota: Sabemos que … Orden usual = $\leq$

Orden Lexicográfico

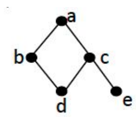


Orden Producto

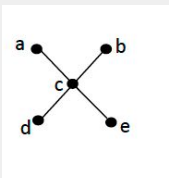


RETÍCULOS Y ÁLGEBRAS DE BOOLE

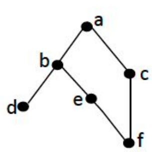
1. Halla los elementos maximales, minimales, máximo y mínimo (si los hay) para los siguientes conjuntos con el orden dado el diagrama de Hasse:



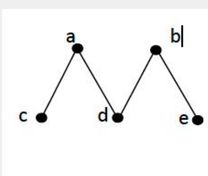
Maximales = {a}
Minimales = {d,e}
Máximo = a → Si existe, coincide con el maximal (solo hay uno)
Mínimo = $\nexists$ → Si existe, coincide con el minimal (solo hay uno)



Maximales = {a,b}
Minimales = {d,e}
Máximo = $\nexists$
Mínimo = $\nexists$

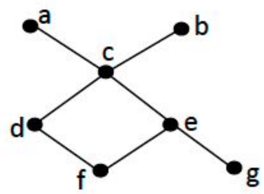
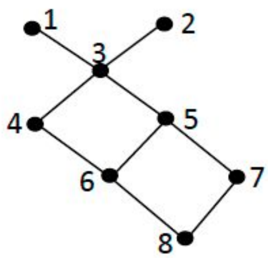
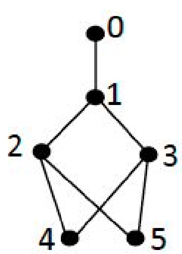


Maximales = {a}
Minimales = {d,f}
Máximo = a
Mínimo = $\nexists$



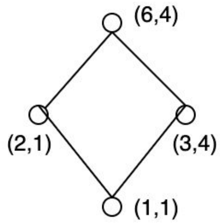
Maximales = {a,b}
Minimales = {c,d,e}
Máximo = $\nexists$
Mínimo = $\nexists$

2. Halla C.S., C.I., supremo, ínfimo, maximales, minimales, máximo y mínimo (si los hay) del conjunto B en cada uno de los siguientes casos:

 $B = \{c, d, e\}$	**ESTOS ELEMENTOS NO TIENEN POR QUÉ PERTENECER AL SUBCONJUNTO** C.S. = {a,b,c} C.I. = {f} Supremo = c → mínima CS Ínfimo = f → máxima CI	**ESTOS ELEMENTOS DEBEN PERTENECER AL SUBCONJUNTO** Maximales = {c} Minimales = {d,e} Máximo = c →supremo Mínimo = ∄ → ínfimo Máximo y mínimo, si existen, coinciden con el supremo e ínfimo (respectivamente). Existen si supremo/ínfimo ∈ subconjunto B
 $B = \{4, 5, 6\}$	**Los elementos que son únicos (si existen) entonces no llevan {}** C.S. = {1,2,3} C.I. = {6,8} Supremo = 3 Ínfimo = 6	**Los elementos que pueden ser más de uno, entonces van entre llaves {}** Maximales = {4,5} Minimales = {6} Máximo = ∄ Mínimo = 6
 $B = \{2, 3, 4\}$	C.S. = {0,1} C.I. = {4} Supremo = 1 Ínfimo = 4	Maximales = {2,3} Minimales = {4} Máximo = ∄ Mínimo = 4

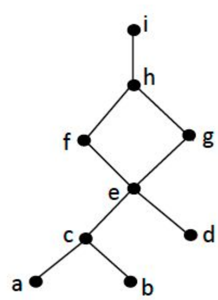
3. Representa el diagrama de Hasse de los siguientes conjuntos ordenados, y halla los elementos notables de los subconjuntos señalados:

4. En (ℕ, |) x (ℕ, |) se considera el orden lexicográfico. Determina, si existen, las cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo del conjunto A = {(2,1),(3,4)}

 	C.S. = {(6,4),(6,8),(6,12), …, (6,4k), (12,4),(12,8),(12,12), …, (12,4k), …, (6k,4),(6k,8),(6k,12), …, (6k,4k),} donde k ∈ N C.I. = {(1,1)} Supremo = (6,4) Ínfimo = (1,1)

5. Se considera D48xN el orden lexicográfico correspondiente a tomar el orden de divisibilidad en el primer factor y el orden usual en el segundo factor. Sea S = {(2,2), (2,3), (3,2), (6,3), (6,1), (4,2)}. Halla, si existen, las C.S., C.I., supremo, ínfimo, máximo, mínimo, maximales y minimales de S.

6. Dado el orden parcial del siguiente diagrama de Hasse, obtén un orden total que lo contenga. ¿Cuántos pueden obtenerse?



ORDEN TOTAL → TODOS los elementos están relacionados entre sí
ORDEN PARCIAL → no todo par de elementos cualesquiera están relacionados entre sí

Un posible orden total sería {i,h,f,e,d}

Hay 6 órdenes totales posibles (uno hasta a, otro hasta b y otro hasta d x 2 debido a la bifurcación de f,g)

Indicamos todas las posibilidades:
{i,h,f,e,d}
{i,h,g,e,d}
{i,h,f,e,c,a}
{i,h,g,e,c,a}
{i,h,f,e,c,b}
{i,h,g,e,c,b}