0.1. Lección 17

0.2. Polinomios de Taylor. El teorema de Taylor. Teorema de la función inversa

En esta lección estamos interesados en estudiar la aproximación de funciones con buenas propiedades de diferenciabilidad por funciones más simples, más concretamente por polinomios. En este sentido, en el estudio de las funciones derivables vimos cómo la recta tangente aproxima a la gráfica de la función en las proximidades de un punto. La recta tangente es la gráfica de una función polinómica de grado uno, en concreto $p(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$. Este polinomio de grado uno tiene la propiedad de que tanto el valor del polinomio en el punto como su derivada de primer orden coinciden con las de f. Buscamos ahora polinomios de mayor grado con la misma propiedad, es decir, que el valor del polinomio y el de las derivadas hasta el orden n coincidan con las de la función, para lo que consideraremos funciones que son, al menos, n-veces derivables.

Pregunta: Si f es n-veces derivable en un punto a, ¿ cuál es el polinomio de grado n, $P_n(x)$ tal que

$$f(a) = P_(a), \qquad f'(a) = P'(a) \qquad \ldots f^{n)}(a) = P^{n)}(a).$$

Si expresamos el polinomio en términios de monomios del tipo $(x-a)^k$ tenemos que:

$$P_n(a) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n$$

Derivando sucesivamente, obtenemos que

$$\begin{cases} P_n(a) = f(a) \Longrightarrow a_0 = f(a) \\ P_n'(a) = f'(a) \Longrightarrow a_1 = f'(a) \\ P_n''(a) = 2a_2 \Longrightarrow a_2 = \frac{1}{2!}P_n''(a) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_n^{n)}(a)(a) = n!a_n \Longrightarrow a_n = \frac{1}{n!}P_n^{n)}(a) \end{cases}$$

es decir, obtenemos el polinomio $P_n(x) := \sum_{k=0}^n \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. Esto nos permite definir los polinomios de Taylor de grado n de una función en un punto.

Sea f una función n-veces derivable en un intervalo abierto I y $a \in I$, se define el polinomio de Taylor de de grado n de f en a de la siguiente forma:

$$\boxed{P_{n,a}(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \displaystyle\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}$$

En la notación $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}(x-a)^k$ se considera que $f^{0)} := f$.

Observación 1. *Es fácil probar que si $p(x)$ es un polinomio de grado n, entonces el polinomio de Taylor de grado n de $p(x)$ en 0 es precisamente dicho polinomio. De la misma forma, el polinomio de Taylor de grado n de p en a también coincide con p; este resultado permite expresar un polinomio en término de los monomios $(x-a)$, es decir, para todo $a \in \mathbb{R}$,*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Ejemplo 2. *La función $f(x) = e^x$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$. Puesto que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^{n)}(x) = e^x$ entonces el polinomio de Taylor de orden n de f en $x = 0$ es*

$$P_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k$$

Observación 3. *Como hemos dicho el polinomio de Taylor de grado 1 obtenemos $P_{1,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ cuya gráfica es precisamente la recta tangente a la gráfica en el punto $(a, f(a))$ que, como vimos, proporciona una aproximación a la función cerca del punto a; es decir,*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{1,a}(x)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0.$$

Surge ahora el problema de la aproximación de una función por su polinomio de Taylor. Considerando derivadas de orden superior obtenemos, para funciones con buenas propiedades de diferenciabilidad, una *mejor* aproximación de la gráfica de f cerca del punto medidante el polinomio de Taylor de f en a. Esto es debido al siguiente resultado:

Teorema 4. *Sea f una función n veces derivable en un intervalo abierto I y sea $a \in I$, entonces*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Demostración. Vemos la prueba en el caso $n = 2$. Tenemos que probar que si f es dos veces derivable en a,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{2,a}(x)}{(x-a)^2} = 0$$

Puesto que $\lim_{x \to a} f(x) - P_{2,a}(x) = 0$ se tiene que el límite anterior presenta una indeterminación de tipo $[\frac{0}{0}]$, por la regla de L'Hopital tenemos que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2\right)}{(x-a)^2} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a)}{2(x-a)}$$

siempre que el segundo límite exista. Esto ocurre puesto que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a)}{2(x-a)} = \frac{1}{2} \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} - f''(a) = 0$$

por la definición de derivabilidad de f' en a.

La prueba en el caso n se haría utilizando la regla de L'Hopital $n-1$ veces. □

El resultado anterior tiene aplicaciones a la clasificiación de extremos relativos usando las derivadas de orden n, que generaliza el caso de la derivada segunda. Más concretamente,

Teorema 5. *(Clasificación de extremos relativos mediante usando las derivadas de orden n) Sea f una función n veces derivable en un intervalo abierto I y $a \in I$, supongamos que:*

$$f'(a) = 0, \quad f''(a) = 0 \quad \ldots \quad f^{n-1)}(a) = 0$$

1. *Si n es par y $f^{n)}(a) > 0$ entonces f tiene un mínimo relativo en a.*
2. *Si n es par y $f^{n)}(a) < 0$ entonces f tiene un mánimo relativo en a.*
3. *Si n es impar y $f^{n)}(a) \neq 0$ entonces f no tiene extremo relativo en a.*

Demostración. Hacemos la demostración del primer caso. Las otras dos pruebas son análogas.

Utilizando el resultado del límite con el polinomio de Taylor de orden n y puesto que $f'(a) = \cdots = f^{n-1)}(a) = 0$, se tiene que:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f^{n)}(a)(x-a)^n}{(x-a)^n} = 0$$

por lo tanto $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = f^{n)}(a) > 0$ siendo n par. Por la propiedad de conservación del signo del límite se tiene $\dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} > 0$ en algún $(a-r, a+r) \setminus \{a\}$ con $r > 0$, por lo tanto:

$$f(x) - f(a) \geq 0 \quad \text{si} \quad x \in (a-r, a+r) \setminus \{a\}$$

y se obtiene que f tiene un mínimo relativo en a.

$\square$

Interesante: En el caso de la condición suficiente de extremos relativos, utilizando la prueba anterior y las propiedades de aotación local y de conservación del signo del límite se obtiene que existen constantes $c, C > 0$ tales que en un cierto intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ se verifica que la gráfica de la función está comprendida entre las gráficas de dos parábolas con centro a, es decir,

$$f(a) + c(x-a)^n \leq f(x) \leq f(a) + C(x-a)^2 \qquad\qquad x \in (a-\delta, a+\delta).$$

Esta propiedad es más restrictiva que la de tener mínimo relativo en el punto a. Por ejemplo, la función $f(x) = x^4$ tiene un mínimo relativo en 0 pero la gráfica de f cerca del origen no puede quedar comprendida entre dos parábolas centradas en 0 , ¿ Por qué?

0.3. Teorema de Taylor

El siguiente teorema nos permite estudiar la aproximación de las funciones mediante los polinomios de Taylor y, lo que es muy importante, nos proporciona una estimación del *error* de la aproximación:

Teorema 6. *(Teorema de Taylor) Sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo abierto I y sean $a, x \in I$, entonces existe c en el intervalo abierto de extremos a y x de modo que:*

$$f(x) = P_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

A $R_{n,a}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ se le llama el resto de Lagrange de orden n.

Demostración. Fijamos $x = b \in I$ y por comodidad suponemos $a < b$. Tenemos que probar que existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Para probar este teorema se utiliza el teorema del Valor Medio de Cauchy aplicado a las siguientes funciones $g(x)$ y $h(x)$

$$g(x) := f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n$$

$$h(x) := (b-x)^{n+1}.$$

Puesto que f es $n+1$-veces derivable en I las funciones $g(x)$ y $h(x)$ son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces podemos utilizar el teorema del Valor Medio de Cauchy y podemos asegurar que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$(g(b) - g(a))h'(c) = (h(b) - h(a))g'(c).$$

Por la forma de elegir las funciones tenemos que:

$$g(b) = f(b).$$

$$g(a) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n = P_{n,a}(b)$$

$$h(b) = 0.$$

$$h(a) = (b-a)^{n+1}.$$

Por otra parte, derivando la función $g(x)$ obtenemos :

$$g'(x) = f'(x) - f'(x) + \frac{1}{2}f''(x)(b-x)^2 - \frac{1}{2}f''(x)(b-x)^2 + \frac{1}{2}f'''(x)(b-x)^2 - \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x)(b-x)^n = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x)(b-x)^n$$

$$h'(x) = -(n+1)(b-x)^n$$

Sustituyendo en la fórmula anterior:

$$(f(b) - P_{n,a}(b))(-(n+1)(c-b)^n) = -(b-a)^{n+1}\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(c)(c-b)^n$$

y por lo tanto:

$$f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

$\square$

A la fórmula:

$$f(b) = P_{n,a}(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

se la denomina fórmula de Taylor de orden n. Por otra parte, a la expresión $f(b) - P_{n,a}(b)$ se le denota resto de Lagrange de orden n de f en a. Por el teorema de Taylor podemos estimar este resto mediante la derivada $n+1$ de la función en un punto intermedio, es decir,

$$R_{n,a}(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \text{para algún } \ a < c < b.$$

0.3.1. Aplicaciones a aproximación.

La principal aplicación del teorema de Taylor es la aproximación; nótese que el teorema de Taylor aplicado a una cierta función en las cercanías de un cierto punto a mide el error que cometemos al elegir el valor del polinomio de Taylor de f en a evalúado en $x = b$ en lugar del valor de f en b, para valores b cercanos a a. En efecto, en las condiciones del teorema

$$f(b) = P_{n,a}(b) + R_{n,a}(c)$$

Para conseguir una buena aproximación el objetivo es encontrar estimaciones del error. En particular, nótese que si la función $f^{(n+1)}$ es continua entonces está localmente acotada y podemos acotar el resto de Taylor mediante

$$|R_{n,a}(c)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(c)| \frac{(b-a)^n}{(n+1)!}.$$

En particular, si b está próximo a a y n es suficientemente grande el valor del error lo podemos acotar y hacer tan pequeño como queramos. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 7. *Obtener un valor aproximado del número e con un error menor que* $0,001$

Consideremos la función $f(x) = e^x$, sabemos que el polinomio de Taylor en $x = 0$ de grado n para esta función es

$$P_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Por lo tanto aplicando el Teorema de Taylor a la función $f(x) = e^x$ en el intervalo $[0, 1]$ tenemos que:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \mathrm{ERROR}[n].$$

Donde el resto o error es:

$$|\mathrm{ERROR}[n]| = |\frac{1}{(n+1)!}e^c|$$

Puesto que $c < 1$ se tiene que $e^c < e < 3$ y por tanto:

$$|\mathrm{ERROR}[n]| < \frac{3}{(n+1)!}$$

Por tanto si elegimos $n = 6$ tenemos que $\frac{3}{7!} < 0,001$ y por lo tanto utilizando el polinomio de Taylor de grado 6 de f en $x = 0$ obtenemos:

$$P_{6,0}(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{6!} = 2,7250$$

Luego

$$e \sim 2,7250$$

da una aproximación del número e con un error menor que $0,001$ y por tanto:

$$2,7240 < e < 2,7260$$

0.4. Teorema de la función inversa.

Vemos las consecuencias del teorema del valor medio y sus aplicaciones para la existencia de función inversa de funciones que son derivables. En primer lugar, como aplicación del teorema de Darboux de los valores intermedios de la función derivada f' se tiene que si $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$ o bien $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ o bien $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$. Por lo tanto:

Proposición 8. *Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en un intervalo abierto (a,b). Si $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ entonces f es estrictamente creciente en $[a,b]$ o f es estrictamente decreciente en $[a,b]$.*

Consecuencia: Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$ se tiene que o bien $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ o bien $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$ y además f es inyectiva por lo que existe la función inversa f^{-1}.

Teorema 9. *(Teorema de la función inversa.) Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Si $f([a,b]) = [\alpha, \beta]$ existe función inversa $f^{-1} : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ y además f^{-1} es continua en $[\alpha, \beta]$ y derivable en (α, β). Además, para todo $x \in (a,b)$,*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

La última parte del teorema es una consecuencia de la regla de la cadena ya que puesto que $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in (a,b)$ y $f'(x) \neq 0$ por lo que:

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x) = 1 \Longrightarrow \left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Aplicación: Funciones arcoseno y arcotangente.

$\triangleright$ *Función arcsen* Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. f es continua y $f'(x) = \cos x \neq 0$ en $(-\pi/2, \pi/2)$ por lo tanto, por el teorema de la función inversa existe la función inversa del seno en dicho intervalo. Dicha función es la función *arcsen*. Claramente, *arcsen* : $[-1,1] \to [\pi/2, \pi/2]$ y su derivada será:

$$(arcsen)'(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}$$

ya que si $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ se tiene que $\cos x > 0$, por tanto puesto que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ se deduce que $\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$. Por lo tanto, si consideramos $y = \operatorname{sen} x$ se tiene la conocida fórmula de la derivada de la función *arcsen*.

$$(arcsen)'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

De forma análoga se pueden definir las funciones *arccos*, *arctan*.

$\triangleright$ *Función arctan* Consideremos la función $f(x) = \tan x$ en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. f es continua y $f'(x) = 1 + \tan^2 x \neq 0$ en $(-\pi/2, \pi/2)$ por lo tanto, por una variación del teorema de la función inversaa intervalos abiertos, existe la función inversa del tan en $(-\infty, \infty)$. Dicha función es la función *arctan*. Claramente, *arctan* : $(-\infty, \infty) \rightarrow (\pi/2, \pi/2)$ y su derivada será:

$$(arctan)'(\tan x) = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

Por lo tanto, si consideramos $y = \tan x$ se tiene la conocida fórmula de la derivada de la función *arctan*.

$$(arctan)'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$