0.1. Lección 9

0.1.1. Infinitésimos equivalentes.

Diremos que f es un infinitésimo en $x = a$ (donde $a \in \mathbb{R}$ o $a = \infty$ o $a = -\infty$) si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.
Diremos que f es un infinito en a si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ o $-\infty$.
Diremos que dos infinitésimos $f(x), g(x)$ o infinitos en a son equivalentes, y lo denotamos por $f(x) \sim g(x)$ en $x = a$ si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Las equivalencias más importantes son:
$\triangleright$ $\operatorname{sen}(x) \sim x$ si $x \to 0$. Más generalmente, $\operatorname{sen}(f(x)) \sim f(x)$ en $x = a$ si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ siendo $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$.

$\triangleright$ $\log(1 + x) \sim x$ si $x \to 0$. Más generalmente, $\log(1 + f(x)) \sim f(x)$ en $x = a$ si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ siendo $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$. Otra formulación equivalente de la equivalencia: $\log(f(x)) \sim f(x) - 1$ en a si $\lim_{x\to a} f(x) = 1$.

★ **Uso de infinitésimos equivalentes en el cálculo de límites:** Podemos sustituir un infinitésimo o infinito por otro equivalente en productos y cocientes. pero *nunca* en sumas (o restas) o potencias funcionales.

Sean $f(x), g(x)$ dos infinitésimos o infinitos equivalentes en $x = a$,

1. $\lim_{x\to a} f(x)h(x) = \lim_{x\to a} g(x)h(x)$
2. $\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{g(x)}$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) \overbrace{\underbrace{}_{=}}^{\operatorname{sen}\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} \text{ en } \infty} \lim_{x\to\infty} x\frac{1}{x} = 1$$

Consecuencia: obtención de la fórmula para límites del tipo 1^∞: Si $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$,

$$\lim_{x\to a} (f(x))^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\,(f(x)-1)}$$

Demostración. Utilizando la identidad $e^{\log x} = x$ si $x > 0$ tenemos que

$$\lim_{x\to a} (f(x))^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\log f(x)}$$

Utilizando la equivalencia: $\log f(x) = \log(1 + (f(x)-1)) \sim f(x) - 1$ si $x \to a$ (nótese que $\lim_{x\to a} f(x) - 1 = 0$. De este forma obtenemos el resultado. $\square$

Observación 1. *No se puede sustituir un infinito por otro equivalente en restas o sumas.*

Por ejemplo. Las funciones $f(x) = xe^{1/x}$ y $g(x) = x$ son infinitos en ∞ y además son equivalentes , puesto que

$$\lim_{x\to\infty} xe^{1/x} = \lim_{x\to\infty} x = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{xe^{1/x}}{x} = 1 \text{ luego} f \sim g \text{ en } \infty.$$

Sin embargo:

$$\lim_{x\to\infty} xe^{1/x} - x \neq \lim_{x\to\infty} x - x = 0$$

puesto que el límite anterior presenta una indeterminación de tipo $\infty - \infty$ que se resuelve de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to\infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} \overset{[\frac{0}{0}]\text{ L'Hopital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-1/x^2 e^{1/x}}{-1/x^2} = \infty.$$

☒ En cada uno de los límites siguientes indica el tipo de indeterminación y calcula el límite, si existe.

1.
$$\lim_{x\to\infty}\left(tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x})\right)^{3x} \qquad \text{Indeterminación del tipo } 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x})\right)^{3x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} 3x\left(tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x})-1\right)}$$

Ahora, en el exponente hay una indeterminación del tipo $0\cdot\infty$

$$\lim_{x\to\infty} 3x\left(tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x})-1\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{3x}} = [\frac{\infty}{\infty}, L'Hopital] =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{x^2}(1+tan^2(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x})}{\frac{-1}{3x^2}} = 6$$

Luego la solución es e^6.

2.
$$\lim_{x\to\infty}\left(\log(1+\frac{1}{x})+1\right)^{x+3} \qquad \text{Indeterminación del tipo } 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\log(1+\frac{1}{x})+1\right)^{x+3} = e^{(x+3)\log(1+\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x\to\infty}(x+3)\log(1+\frac{1}{x}) = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x+3}} \overbrace{=}^{\log(1+\frac{1}{x})\sim\frac{1}{x}\text{ en }\infty} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+3}} = 1$$

Luego la solución es e.

3.
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x}{x+1}\right)^{\frac{x+3}{3x^2+2}} \qquad \text{Indeterminación del tipo } \infty^0.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x}{x+1}\right)^{\frac{x+3}{3x^2+2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \log\left(\frac{x^2+x}{x+1}\right)^{\frac{x+3}{3x^2+2}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{3x^2+2}\log\left(\frac{x^2+x}{x+1}\right) \underbrace{\frac{x+3}{3x^2+2}\sim\frac{1}{3x}\text{ en }\infty}_{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(\frac{x^2+x}{x+1}\right)}{3x} = [\frac{\infty}{\infty}]$$

$$[\text{L'Hopital}] = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x+1}{x^2+x}-\frac{1}{1+x}}{3} = 0$$

Luego
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x}{x+1}\right)^{\frac{x+3}{3x^2+2}} = e^0 = 1$$

0.1.2. Criterio del Sandwich.

Un límite distinto:

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) =$$

(Criterio del Sandwich). Sean f, g, h funciones definidas en $(a-r, a+r) \setminus \{a\}$ para algún $r > 0$. Supongamos que para todo $x \neq a$ tal que $a - r < x < a + r$ se tiene que:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

Si $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ tenemos que encontrar $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$ y $x \neq a$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$ o equivalentemente $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$.
Puesto que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$ para dicho $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta_1 > 0$ tal que si $|x - a| < \delta_1$ y $x \neq a$ se tiene que

$$\boxed{L - \epsilon < g(x)} < L + \epsilon$$

Por otra parte, usando que $\lim\limits_{x \to a} h(x) = L$ para dicho $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta_2 > 0$ tal que si $|x - a| < \delta_2$ y $x \neq a$ se tiene que

$$L - \epsilon < \boxed{h(x) < L + \epsilon}$$

Combinando los dos resultados tenemos que si $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ y $|x - a| < \delta$ y $x \neq a$ entonces $x \neq a$ y $|x - a| < \delta_1$ y $|x - a| < \delta_2$ por lo que se tiene:

$$\boxed{L - \epsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \epsilon\ .}$$

$\square$

Funciones acotadas:

Una de las principales consecuencias del criterio del sancwich es el resultado que afirma que si una función tiene límite cero en un punto y está acotada cerca de dicho punto entonces el producto tiene límite cero. Definimos las nociones de acotación de funciones:

1. Diremos que una función f está acotada superiormente en el conjunto I si existe $M > 0$ tal que $f(x) \leq M$ para todo $x \in I$, es decir, si el conjunto $A = \{f(x) : x \in I\}$ es un conjunto acotado superiormente.

2. Diremos que una función f está acotada inferiormente en el conjunto I si existe $M > 0$ tal que $f(x) \geq M$ para todo $x \in I$, es decir, si el conjunto $A = \{f(x) : x \in I\}$ es un conjunto acotado inferiormente.

3. Diremos que una función f está acotada en el conjunto I si está acotada superior e inferiormente en I, es decir, si el conjunto $A = \{f(x) : x \in I\}$ es un conjunto acotado.

★ *Criterio de acotación:* f está acotada en un conjunto I si existe $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M \qquad\qquad \text{para todo } x \in I$$

Observación 2. *Una función puede ser acotada en un intervalo pero no en otro; por ejemplo,* $f(x) = \frac{1}{x}$ *está acotada en* $(2, 3)$ *puesto que* $\frac{1}{3} < \frac{1}{x} = f(x) < \frac{1}{2}$. *Sin embargo* f *no está acotada en* $(0, 1)$ *puesto que* $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$.

Indica si las siguientes funciones están acotadas en el intervalo que se indica:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $[\frac{1}{2}, \infty)$.

2. $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ en $[-100, 100] \setminus \{0\}$

3. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \log^2 x}$ en $(0, \infty)$.

4. $f(x) = \dfrac{3}{2 - x^2}$ en $[0, 1]$.

0.1.3. Tipo de límite: infinitésimo por función acotada.

Sean $f(x), g(x)$ tales que:

$\triangleright$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

$\triangleright$ $g(x)$ una función *acotada* en algún intervalo $(a-r, a+r)\setminus\{a\}$ para algún $r>0$. Entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0.$$

Ejemplo 3. *Calculamos* $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,\mathrm{sen}(\ln(x))$.
Puesto que $\lim_{x\to 0} x = 0$ *y* $\mathrm{sen}(\ln(x))$ *acotada en* $(0,\infty)$ *se tiene que:*

$$\lim_{x\to 0^+} x\,\mathrm{sen}(\ln(x)) = 0.$$

0.1.4. Casos extremos del criterio del Sandwich.

(Casos extremos del criterio del Sandwich.) Sean $f(x), g(x)$ funciones tales que para todo $x \in \mathbb{R}$ y sea $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$

$$f(x) \leq g(x)$$

1. Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, entonces $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$.
2. Si $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Vemos alguna aplicación de los resultados anteriores:

Ejemplo 4. *Para calcular*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} + \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$$

Nótese que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ *no existe, pero para todo* $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

$$\frac{1}{x^2} + \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) \geq \frac{1}{x^2} - 1$$

por lo tanto, puesto que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} - 1 = \infty$, *por el caso extremo del criterio del sandwich se tiene que:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} + \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = \infty$$

Ejemplo 5. *Para calcular*

$$\lim_{x \to \infty} x^2 + x - [x]$$

Puesto que $x - [x] \geq 0$ *siempre, se tiene que para todo* x

$$x^2 + x - [x] \geq x^2$$

y puesto que $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$, *de nuevo se tiene que* $\lim_{x \to \infty} x^2 + x - [x] = \infty$

Observación 6. *El mismo tipo de resultados se puede obtener para límites laterales, donde las desigualdades entre funciones se consideran sólo para puntos a la derecha o a la izquiera del punto a en el que se estudia el límite.*

⊛ ⊛ Prueba el siguiente resultado: Si $f(x), g(x)$ son funciones tales que para todo $x \in (a - r, a + r) \setminus \{a\}$

$$|f(x)| \leq g(x)$$

y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

0.1.5. Dos propiedades locales de los límites

Recordamos la definición $\epsilon - \delta$ de límite:
Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$ (es decir, $x \in (a-\delta, a+\delta)$) se tiene que $|f(x) - L| < \epsilon$ (es decir, $f(x) \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$).

(*Propiedad de conservación del signo*) Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = L > 0$ entonces existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ se tiene que:

$$f(x) > \frac{L}{2} > 0.$$

Demostración. Basta considerar $\epsilon = \dfrac{L}{2} > 0$ y aplicar la definición de límite para encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$ se tiene que:

$$|f(x) - L| < \frac{L}{2}$$

Por lo tanto

$$\frac{L}{2} = L - \frac{L}{2} < f(x) < L + \frac{L}{2}$$

□

Observación 7. *El mismo tipo de resultado es cierto para $L < 0$ es cierto (formularlo y probarlo). Ahora, si sabemos por ejemplo que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ ¿Podemos decir algo acerca del signo de f en las proximidades de a? Pensar en la función $f(x) = x \operatorname{sen}(\dfrac{1}{x})$.*

(*Propiedad de acotación local*). Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = L > 0$ entonces existe un $\delta > 0$ tal que f está acotada en $(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ para algún $\delta > 0$.

Demostración. Basta considerar $\epsilon = \dfrac{L}{2} > 0$ como antes y aplicar la definición de límite para encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$ se tiene que:

$$|f(x) - L| < \frac{L}{2}$$

Por lo tanto para todo $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ se tiene que

$$\frac{L}{2} < f(x) < L + \frac{L}{2},$$

lo cual significa que f está acotada en dicho intervalo estrellado. □