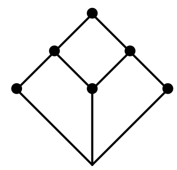
Tema 4: Retículos y Álgebras de Boole

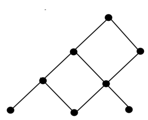
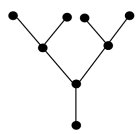
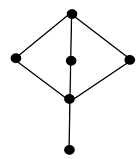
Retículos

1. ¿Es un retículo distributivo el definido por el siguiente diagrama de Hasse?



Solución: Sí, ya que no contiene ningún subretículo de las dos formas estándar de retículos que no son distributivos.

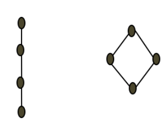
2. Estudia cuáles de los siguientes conjuntos ordenados son retículos.

(a)  (b)  (c) 

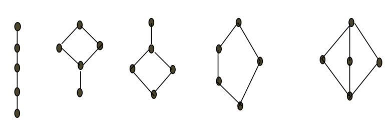
Solución: Sólo el retículo (c).

3. Obtén los diagramas de Hasse de todos los retículos, salvo isomorfismos, de uno, dos, tres, cuatro y cinco elementos.

Solución: De un elemento y de dos elementos, trivial, sólo hay uno.
De tres elementos, sólo hay uno, que es una cadena.
De cuatro elementos, existen dos:



De cinco elementos existen cinco:



4. Sea $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ la colección de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. ¿Tiene $(\mathcal{F}(\mathbb{N}), \subseteq)$ algún elemento maximal? ¿Tiene algún elemento minimal? ¿Es $(\mathcal{F}(\mathbb{N}), \subseteq)$ un retículo?

Solución: $(\mathcal{F}(\mathbb{N}), \subseteq)$ no tiene elementos maximales, pero sí tiene uno minimal que es el conjunto $\emptyset$.
Sí es un retículo, porque para cada par de elementos $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$,

$$\text{Supremo}(A, B) = A \cup B \text{ y } \text{Infimo}(A, B) = A \cap B$$

son subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$.

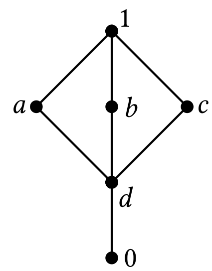
5. Sea $E(\mathbb{N})$ la colección de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ que tienen un número par de elementos. En $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$ se consideran los elementos $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$. Encontrar cuatro cotas superiores para $\{A, B\}$. ¿Tiene $\{A, B\}$ supremo en $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$? ¿Es $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$ un retículo?

   Solución: Cotas superiores para $\{A, B\}$ son

$$C = \{1, 2, 3, 4\}, \quad D = \{1, 2, 3, 8\}, \quad E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \quad F = \{1, 2, 3, 5, 9, 20\}.$$

   El conjunto $\{A, B\}$ no tiene supremo en $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$, y por tanto, $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$ no es un retículo.

6. Estudia si en el siguiente retículo se verifica la igualdad $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$



   Solución: No se verifica, ya que $a \vee (b \wedge c) = a \vee d = a$, pero $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = 1 \wedge 1 = 1$.

7. Encuentra el complementario de cada elemento en $(D_{42}, /)$, $(D_{45}, /)$ y $(D_{105}, /)$. ¿Son álgebras de Boole estos retículos?

   Solución: La descomposición de 42 en factores primos es $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, y por lo tanto sí es un álgebra de Boole. $|D_{48}| = 8$, de hecho $D_{42} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$ y los complementarios son

$$1' = 42, \quad 2' = 21, \quad 3' = 14 \quad 6' = 7.$$

   En cambio, la descomposición en factores primos de 45 es $45 = 3^2 \cdot 5$ y, por tanto, no es un álgebra de Boole. $|D_{45}| = 6$, donde $D_{45} = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$, y

$$1' = 45, \quad 5' = 9.$$

   Pero no existen complementarios de 3 ni de 15. La descomposición en factores primos de 105 es $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ y, por tanto, sí es un álgebra de Boole. El número de elementos es $|D_{105}| = 8$ donde $D_{105} = \{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105\}$, y los complementarios son:

$$1' = 105, \quad 3' = 35, \quad 5' = 21, \quad 7' = 15.$$

8. Se considera el conjunto $A = \{2, 3, 4, 6, 12, 15, 24, 90, 180, 360\}$ y la relación de orden de divisibilidad.

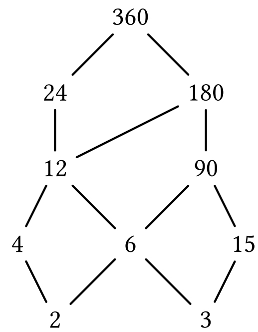
   a) Representa el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(A, /)$.

   b) ¿Es $(A, /)$ un retículo?

   c) Obtén, si existen, las cotas inferiores, cotas superiores, ínfimo, supremo, mínimo, máximo, elementos minimales y maximales del subconjunto $B = \{2, 3, 4, 6, 12, 180\}$.

   Solución: Las soluciones son

   a) El diagrama de Hasse de $(A, /)$ es



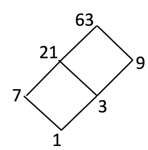
b) No es un retículo porque el conjunto $\{2, 3\} \subseteq A$ no tiene ínfimo.

c) Cotas superiores $(B) = \{180, 360\}$, Supremo $(B) = 180$, Cotas Inferiores $(B) =$ no existen, Ínfimo $(B) =$ no existe, Maximales $(B) = \{180\}$, Máximo $(B) = 180$, Minimales $(B) = \{2, 3\}$, Mínimo $(B) =$ no existe .

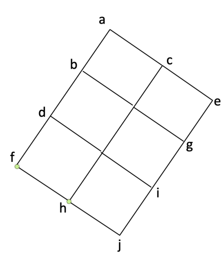
9. (Examen Enero 2016)

a) Sea D_{63} el conjunto de todos los divisores de 63, y / la relación de divisibilidad dada por a/b si y sólo si "a divide a b". Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{63}, /)$.

Solución: La descomposición $63 = 3^2 \cdot 7$, $|D_{63}| = 6$, $D_{63} = \{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$, y el diagrama de Hasse es



b) Considera el conjunto ordenado A de la figura.



I) Obtén las cotas superiores e inferiores, supremo, ínfimo, maximales, minimales, máximo y mínimo del conjunto $B = \{b, c, d\}$.

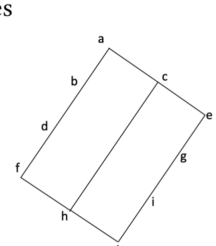
Solución: C. Superiores $(B) = \{a\}$, Supremo $(B) = a$, C. Inferiores $(B) = \{h, i, j\}$, Infimo no existe, Maximales $(B) = \{b, c\}$, Máximo no existe, Minimales $(B) = \{c, d\}$, Mínimo no existe.

II) ¿Es A un retículo?

Solución: No es un retículo, ya que, por ejemplo, el conjunto de dos elementos $\{h, i\}$ tienen como cotas superiores $\{a, b, c, d\}$, pero no tiene supremo.

III) Sea A' el conjunto ordenado cuyo diagrama de Hasse es el mismo que el de A, pero eliminando las aristas que van de b a g y de d a i. ¿Es A' un retículo?

Solución: El diagrama de Hasse de A' es



Así, A' sí es un retículo, ya que todo par de elementos tienen supremo e ínfimo.

IV) ¿Es A' complementario? En caso de que no lo sea, da un elemento que no tenga complementario y otro que sí lo tenga, indicando un complementario.

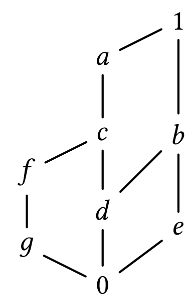
Solución: No es un retículo complementario: Los elementos h y c no tienen complementario; el elemento f tiene varios complementarios: e, g, i.

V) ¿Es A' distributivo?

Solución: No es distributivo. Por ejemplo, el subretículo formado por los elementos $\{j, h, c, i, g\}$ no es distributivo. En particular

$$g \wedge (h \vee i) \neq (g \wedge h) \vee (g \wedge i).$$

10. (Examen Noviembre 2016) Considera el conjunto ordenado A del dibujo.



a) Sea $B = \{a, d, f\}$, encuentra todos los elementos notables de B (cotas superiores e inferiores, supremo, ínfimo, máximo y mínimo, maximales y minimales, si los hay).

Solución: C. superiores = $\{a, 1\}$, Supremo = a, C. Inferiores = $\{0\}$, Ínfimo = 0, Maximales = $\{a\}$, Máximo = a, Minimales= $\{d, f\}$, Mínimo no existe.

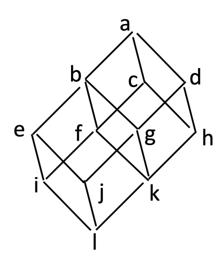
b) Encuentra, si existen, todos los elementos complementarios de b y c.

Solución: $b' = \{f, g\}$, $\quad c' = e$.

c) Razona si A es un álgebra de Boole.

Solución: No es un álgebra de Boole: no es distributivo, y b tiene más de un complementario.

11. (Examen noviembre 2012) Dado el conjunto ordenado $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$ cuyo diagrama de Hasse es el de la figura y el subconjunto $B = \{b, e, f, k\}$.



a) Hallar las cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo de B en A.

Solución: C. Superiores = $\{b, a\}$; Supremo = b; C. Inferiores = $\{l\}$; Infimo = l.

b) Hallar los elementos maximales y minimales, máximo y mínimo de B.

Solución: Maximales = $\{b\}$; Máximo = b; Minimales = $\{e, k\}$; Mínimo no tiene.

c) Hallar $\inf\{f, g\}$ y $\sup\{f, g\}$. ¿Es A un retículo?

Solución: $\inf\{f, g\} = k$; $\sup\{f, g\} = b$. Sí es un retículo porque todo par de elementos tienen supremo e ínfimo.

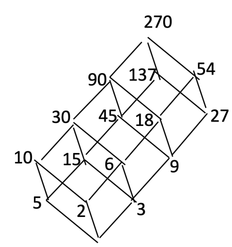
12. (Examen enero 2017) Sea D_{270} el conjunto de los divisores positivos de 270. Se pide:

a) Sabiendo que una relación en D_{270} es un subconjunto del producto cartesiano $D_{270} \times D_{270}$, ¿cuál es el cardinal del conjunto de todas las relaciones distintas en D_{270}?

Solución: La descomposición en factores primos es $270 = 2 \cdot 5 \cdot 3^3$; luego $|D_{270}| = 16$; $|D_{270} \times D_{270}| = 16^2$. El número de subconjuntos de $D_{270} \times D_{270}$, es $2^{|D_{270} \times D_{270}|} = 2^{16^2}$.

b) Dibuja el diagrama de Hasse de D_{270} con la relación de orden de divisibilidad.

Solución: El diagrama de Hasse es



c) Encuentra todos los elementos de D_{270} que tienen complementario. Razona si D_{270} es álgebra de Boole.

Solución: Los complementarios son: $1' = 270$; $2' = 137$; $5' = 54$; $27' = 10$. No es un álgebra de Boole: no todos los elementos tienen complementario; por ejemplo, el 9 no tiene complementario.

d) Sea el conjunto $C = D_{270} \setminus \{45, 54\}$ con la relación de orden de divisibilidad. Calcula si existe el $\sup\{6, 27\}$ en C. Razona si C es un retículo.

Solución: En $C = D_{270} \setminus \{45, 54\}$ el $\sup\{6, 27\} = 270$.

No es un retículo, porque no existe $\sup\{9, 15\}$. En efecto las cotas superiores de este par de elementos son $\{90, 137, 270\}$, pero ninguna de ellas es menor que las otras dos.