Geometría Afín y Proyectiva GMI Parcial 2020-21	1^{er} Apellido: ______________	29 Octubre 2020
	2^{o} Apellido: ______________	Tiempo: 2 horas
Dpto. Matematica Aplicada TIC ETS Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: ______________ Número de matrícula:	**Nota:**

Ejercicio 1: (2 puntos) Sea $f : A \longrightarrow A'$ una aplicación afín inyectiva. Demuestra las siguientes propiedades:

(a) (0.75 puntos) Dados puntos afínmente independientes $P_0, P_1, \ldots, P_m$ de A, sus imágenes $f(P_0), f(P_1), \ldots, f(P_m)$ son una colección de puntos afínmente independientes de A'.

Solución: Como los puntos $P_0, P_1, \ldots, P_m$ son afínmente independientes, los vectores $\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_m}$ son linealmente independientes. Además, si f es una aplicación afín inyectiva, su aplicación lineal asociada $\overrightarrow{f}$ es inyectiva, por lo que las imágenes de los vectores, $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{P_0P_1}), \ldots, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{P_0P_m})$, son linealmente independientes. Entonces los puntos $f(P_0), f(P_1), \ldots, f(P_m)$ son afínmente independientes.

(b) (0.75 puntos) Dado un subespacio afín $B \subset A$ de dimensión m, su imagen $f(B)$ es un subespacio afín de A' de igual dimensión m.

Solución: Sea $B \subset A$ un subespacio afín de dimensión m y sean puntos $Q_0, Q_1, \ldots, Q_m$ afínmente independientes y afínmente generadores de B. Por el apartado (a), los puntos $f(Q_0), f(Q_1), \ldots, f(Q_m)$ son afínmente independientes. Veamos que también son afínmente generadores de $f(B)$. Sea un punto $R' \in f(B)$. Por definición de imagen de un subespacio B por f existe un punto $R \in B \subset A$ tal que $f(R) = R'$. Como los puntos $Q_0, Q_1, \ldots, Q_m$ son afínmente generadores de B, se tiene que existen escalares $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$, tales que $R = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i Q_i$. Por definición de aplicación afín, f preserva las combinaciones afines, por tanto:

$$R' = f(R) = f(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i Q_i) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f(Q_i)$$

y entonces $f(Q_0), f(Q_1), \ldots, f(Q_m)$ son afínmente generadores de $f(B)$. Como también son afínmente independientes concluimos que $\dim f(B) = m$.

(c) (0.5 puntos) Prueba que $\dim A \leq \dim A'$.

Solución: Aplicando (b), $f(A)$ es un subespacio afín de A' de dimensión igual a $\dim A$, por tanto $\dim A = \dim f(A) \leq \dim A'$.

Ejercicio 2: (1.5 puntos) Sea $\mathcal{R}_{a,e}$ la referencia afín estándar en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ y sea $\mathcal{R}_a = \{(0,0), (1,1), (-1,1)\}$ otra referencia afín en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$. Calcula la matriz de cambio de base de la referencia afín estándar $\mathcal{R}_{a,e}$ a la referencia afín $\mathcal{R}_a$ y utilízala para calcular las coordenadas baricéntricas del punto $(2,2)$ en la referencia afín $\mathcal{R}_a$.

Solución: La matriz de cambio de base de la referencia afín estándar $\mathcal{R}_{a,e}$ a la referencia afín $\mathcal{R}_a$ es una matriz 3×3 cuyas columnas son las coordenadas baricéntricas de cada punto de $\mathcal{R}_{a,e}$ en la referencia afín $\mathcal{R}_a$. El primer punto de $\mathcal{R}_{a,e}$ es el primer punto de de $\mathcal{R}_a$, por lo que sus coordenadas baricéntricas son $(1,0,0)$. El segundo punto de $\mathcal{R}_{a,e}$ es $(1,0)$, por lo tanto planteamos la ecuación:

$$(1,0) = \lambda_0(0,0) + \lambda_1(1,1) + \lambda_2(-1,1), \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

que da lugar al sistema:

$$\begin{cases} & \lambda_1 & -\lambda_2 & = & 1 \\ & \lambda_1 & +\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_0 & +\lambda_1 & +\lambda_2 & = & 1 \end{cases}$$

cuya solución es $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. El tercer punto de $\mathcal{R}_{a,e}$ es $(0,1)$, que es el punto medio (baricentro) del segundo y tercer puntos de la referencia $\mathcal{R}_a$, por tanto sus coordenadas baricéntricas son $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Finalmente, la matriz de cambio de referencia es:

$$C_{\mathcal{R}_{a,e}\mathcal{R}_a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas baricéntricas de $(2,2)$ en la referencia afín estándar son $(-3,2,2)$ (sólo hay que encontrar λ_0 para que las tres sumen 1). Usando la matriz calculada anteriormente, sus coordenadas baricéntricas en la referencia $\mathcal{R}_a$ son:

$$C_{\mathcal{R}_{a,e}\mathcal{R}_a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3: (1.5 puntos) Sea A un espacio afín con dirección V y sean $B, C \subset A$ subespacios afines con direcciones, respectivamente, W y U, tales que $W + U = V$.

(a) (0.5 puntos) Prueba que $B + C = A$.

Solución: Como $W + U = V$ se tiene que $\dim(W+U) = \dim V = \dim A$. Usando el resultado vectorial

$$\dim(W+U) = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U)$$

se tiene que

$$\dim A = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U).$$

Usando la fórmula de Grassmann:

$$\dim(B+C) = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U) + \epsilon$$

donde $\epsilon = 0$ si $B \cap C \neq \emptyset$ y $\epsilon = 1$ si $B \cap C = \emptyset$ obtenemos que

$$\dim(B+C) = \dim A + \epsilon \geq \dim A$$

ya que $\epsilon \geq 0$. Por otra parte, como $B + C$ es un subespacio afín de A su dimensión no puede ser mayor, $\dim(B+C) \leq \dim A$. Juntando ambas desigualdades obtenemos que $\dim(B+C) = \dim A$ y, entonces, $B + C = A$, ya que el unico subespacio afín de dimensión igual al espacio afín total es A.

(b) (0.5 puntos) Prueba que $B \cap C \neq \emptyset$.

Solución: Usando el apartado (a),

$$\dim A = \dim(B+C) = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U) + \epsilon = \dim A + \epsilon$$

por lo tanto $\epsilon = 0$ y $B \cap C \neq \emptyset$.

(c) (0.5 puntos) Si $\dim A = n$, $\dim B = m$ y $B \cap C = L$, donde L es una recta, calcula $\dim C$ (en función de n y m).

Solución: Si $\dim A = n$, $\dim B = m$, entonces $\dim V = n$, $\dim W = m$, respectivamente. Además, como $B \cap C \neq \emptyset$, la intersección $B \cap C = L$ tiene por dirección la intersección de las direcciones $W \cap U$, por tanto $\dim W \cap U = \dim L = 1$. Usando los resultados de (a) y (b):

$$n = \dim A = \dim(B + C) = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U) + \epsilon = m + \dim U - 1 + 0 = m + \dim U - 1.$$

Por tanto

$$\dim C = \dim U = n - m + 1.$$

Ejercicio 4: (5 puntos) Sea la aplicación afín

$$f : \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3 + 2, x_2 - x_3 - 2, x_1 + x_2 + 1)$$

y sean los puntos $P = (2, 0, -1)$, $Q = (1, 1, 0)$ y $R = (0, 1, -1)$.

(a) (0.5 puntos) Escribe la matriz de f respecto de la referencia cartesiana estándar de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

Solución: La matriz de f respecto de la referencia cartesiana estándar de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ viene dada por

$$M_{\mathcal{R}_{c,e}\mathcal{R}_{c,e}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

(b) (0.75 puntos) Calcula el subespacio afín de puntos fijos de f y su dimensión.

Solución: Usaremos el sistema

$$Fix(f) = (M_{\mathcal{R}_{c,e}\mathcal{R}_{c,e}}(f) - I_4) \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline \mathbf{x^t} \end{array}\right) = \mathbf{0}$$

$$\left(\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\right) \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2 & & & & +x_3 & = & 0 \\ -2 & & & & -x_3 & = & 0 \\ 1 & +x_1 & & +x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

que equivale a

$$\left\{\begin{array}{ccccc} & & x_3 & = & -2 \\ x_1 & +x_2 & & = & -3 \end{array}\right.$$

con lo cual se tiene la recta de puntos fijos

$$Fix(f) = (-3, 0, -2) + \mathcal{L}\{(1, -1, 0)\}$$

de dimensión 1.

(c) (1 punto) Determina la imagen por f del plano H que pasa por los puntos P, Q y R, calculando unas ecuaciones paramétricas e implícitas.

Solución: Es sencillo ver que los puntos P, Q y R no están alineados, ya que los vectores $\overrightarrow{PQ} = (-1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{PR} = (-2, 1, 0)$ no son proporcionales. Como la aplicación f es afín, la imagen de H, $f(H)$, está generada por las imágenes de los puntos P, Q, R que generan H:

$$f(H) = f(V\{P, Q, R\}) = V\{f(P), f(Q), f(R)\}.$$

Calculemos las tres imágenes con la matriz del apartado (a):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 2 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 3 \\ -1 \\ 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 3 \\ -1 \\ 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 \\ 0 \\ 2 \end{array}\right)$$

Es claro observar que $f(P) = f(Q) \neq f(R)$, por lo cual $f(H)$ es una recta generada por $f(P) = (3, -1, 3)$ y $f(R) = (1, 0, 2)$:

$$f(H) = V\{(3, -1, 3), (1, 0, 2)\} = (1, 0, 2) + \mathcal{L}\{(2, -1, 1)\}$$

cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\left\{\begin{array}{rcrr} x_1 & = & 1 & +2\lambda \\ x_2 & = & & -\lambda \\ x_3 & = & 2 & +\lambda \end{array}\right.$$

que, eliminando parámetros proporcionan unas ecuaciones implícitas:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & & = & 1 \\ & x_2 & +x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

Ahora considera en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ su estructura como espacio afín euclídeo estándar.

(d) (0.5 puntos) ¿Es f un movimiento? ¿Por qué?

Solución: La aplicación afín f no puede ser un movimiento ya que la matriz de su aplicación lineal asociada $\overrightarrow{f}$ no es una matriz ortogonal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

porque sus columnas no son vectores ortonormales, por tanto no conserva el producto escalar y, en consecuencia, f no conserva la distancia.

(e) (1 punto) Sea $L = V\{P, Q\}$. Calcula la distancia entre los subespacios afines L y $f(L)$.

Solución: L es la recta

$$L = V\{P, Q\} = V\{(2, 0, -1), (1, 1, 0)\} = (1, 1, 0) + \mathcal{L}\{(1, -1, -1)\};$$

Usando la información del apartado (c), como $f(P) = f(Q) = (3, -1, 3) := S$, la imagen de L es este punto S, $f(L) = (3, -1, 3)$. Por tanto la distancia entre L y $f(L)$ es:

$$d(L, f(L)) = d(S, L) = d(S, \pi(S))$$

donde $\pi(S)$ es la proyección ortogonal de S a la recta L. Por definición de proyección ortogonal se tiene que

$$\pi(S) = L \cap (S + W^{\perp})$$

donde $W = \mathcal{L}\{(1, -1, -1)\}$ es la dirección de L. Entonces $W^{\perp}$ es el plano vectorial de ecuación $\{x - y - z = 0\}$ y $S + W^{\perp}$ tendrá por ecuación $\{x - y - z = a\}$; entonces, obligando a que pase por el punto $S = (3, -1, 3)$ se tiene que $a = 1$ y $S + W^{\perp}$ tiene por ecuación $\{x - y - z = 1\}$. Como los puntos de L son de la forma $(1 + \lambda, 1 - \lambda, -\lambda)$, al sustituir en la ecuación de $S + W^{\perp}$ obtendremos la intersección:

$$1 + \lambda - (1 - \lambda) - (-\lambda) = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

y el punto proyección es $\pi(S) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$. Finalmente la distancia entre L y $f(L)$ viene dada por:

$$d(L, f(L)) = d(S, L) = d(S, \pi(S)) =$$

$$d\left((3, -1, 3), \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)\right) = \left\| \left(\frac{-5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{-10}{3}\right) \right\| = \sqrt{\frac{150}{9}} = 5\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

(f) (1.25 puntos) Estudia el movimiento g dado como la composición del giro de ángulo $\frac{\pi}{4}$ con respecto al subespacio L (del apartado (e)) con la traslación de vector $\overrightarrow{v} = (1, -1, -1)$:

- ¿Cómo se llama este movimiento g?
- Obtén una representación matricial simple de g respecto de una referencia cartesiana adecuada.
- Determina los puntos fijos de g.
- Calcula $g^4(O) = (g \circ g \circ g \circ g)(O)$, donde O es el origen de coordenadas.

Solución: Como el vector $\overrightarrow{v} = (1, -1, -1)$ es paralelo a la recta L (ver (e)) el movimiento g es un movimiento helicoidal que se compone de un giro de ángulo $\frac{\pi}{4}$ alrededor de la recta L y una traslación paralela al eje de rotación. Para obtener una representación matricial simple, usaremos una referencia cartesiana ortonormal donde el punto sea un punto de la recta L, y los vectores de la base sean, el primero un vector paralelo a L y los otros dos sean una base del plano ortogonal $W^{\perp}$, donde $W = \mathcal{L}\{(1, -1, -1)\}$

es la dirección de L. Como $L^\perp$ tiene por ecuación $\{x-y-z=0\}$ dos vectores ortogonales son $(1,1,0)$ y $(1,-1,2)$, por lo que una referencia ortonormal válida es

$$\mathcal{R}_c = \left\{(1,1,0); \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}\right\}.$$

Respecto de $\mathcal{R}_c$, el vector de traslación $\overrightarrow{v} = (1,-1,-1)$ tiene coordenadas cartesianas $(a_1, a_2, a_3) = (\sqrt{3}, 0, 0)$, por lo tanto la matriz de g respecto de esta referencia viene dada por

$$M_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}_c}(g) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ a_3 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right)$$

Por teoría sabemos que g no tiene puntos fijos. Alternativamente se podría resolver el sistema de ecuaciones correspondiente para ver que es incompatible.

Como g es composición de un giro de ángulo $\frac{\pi}{4} = 45°$ con una traslación de vector $\overrightarrow{v} = (1,-1,-1)$, al aplicar g cuatro veces a cualquier punto obtendremos cuatro giros de ángulo $\frac{\pi}{4} = 45°$, que completan media vuelta de círculo completa, y cuatro traslaciones de vector $\overrightarrow{v} = (1,-1,-1)$. La imagen del origen de coordenadas será el resultado de componer la vuelta de $180°$ en su plano de giro con la traslación por $\overrightarrow{v} = (1,-1,-1)$ cuatro veces. El plano de giro del origen $(0,0,0)$ es el plano $(0,0,0)+L^\perp = \{x-y-z=0\}$, que corta a L el el punto $(1,1,0)$ como se ve por simple sustitución. Entonces, el giro de $180°$ del punto $(0,0,0)$ en el plano $\{x-y-z=0\}$ alrededor del punto $(1,1,0)$ es el simétrico respecto de $(1,1,0)$, es decir:

$$(0,0,0) + 2\cdot\overrightarrow{(0,0,0),(1,1,0)} = (0,0,0) + 2\cdot(1,1,0) = (2,2,0).$$

Por tanto, la imagen del origen de coordenadas será este punto más la traslación por $\overrightarrow{v} = (1,-1,-1)$ cuatro veces:

$$g^4(O) = (2,2,0) + 4\cdot\overrightarrow{v} = (2,2,0) + 4\cdot(1,-1,-1) = (6,-2,-4).$$

Alternativamente se puede comprobar que las coordenadas cartesianas del origen en la referencia $\mathcal{R}_c$ son $(0,-\sqrt{2},0)$ y que la matriz de g^4 es la potencia cuarta de la matriz de g, con lo cual:

$$g^4(O) = M_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}_c}(g^4)\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{array}\right) = M_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}_c}(g)^4\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4\sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 4\sqrt{3} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{array}\right)$$

que corresponde al punto

$$(1,1,0) + 4\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = (6,-2,4).$$

Ejercicio Extra Considera el cuadrado unidad D de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$ en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$. Sea la aplicación afín $f = g\circ\tau\circ\sigma\circ\eta$, donde

- η es la homotecia de centro $C=(1,0)$ y razón $\lambda = 2$.
- σ es la simetría respecto de la recta $B=\{x_2=0\}$ con dirección $U=\{x_1-x_2=0\}$.

- τ es la traslación de vector $\overrightarrow{v} = (2,1)$.
- g es el giro de centro $Q = (-2,-1)$ y ángulo $\frac{\pi}{6}$.

Explica por qué la figura final $f(D)$ es un paralelogramo. Sabiendo que el área de un paralelogramo es igual a la longitud de su base por su altura, calcula el área del paralelogramo imagen $f(D)$.

Solución: La figura final será un paralelogramo ya que la composición de las cuatro aplicaciones afines es una aplicación afín y las aplicaciones afines conservan el paralelismo. Entonces la imagen de los vectores paralelos $\overrightarrow{(0,0)(0,1)}$ y $\overrightarrow{(1,0)(1,1)}$ serán dos vectores paralelos; de igual modo la imagen de los vectores paralelos $\overrightarrow{(0,0)(1,0)}$, $\overrightarrow{(0,1)(1,1)}$ serán dos vectores paralelos. Por tanto, la figura resultante $f(D)$ es un cuadrilátero con sus lados paralelos dos a dos, por tanto un paralelogramo.

El área del paralelogramo $f(D)$ vendrá dada por la composición de las modificaciones que sufra el área de D, que es 1 (ya que se trata de un cuadrado de lado 1) en cada una de las 4 aplicaciones afines.

La primera es una homotecia de razón $\lambda = 2$, que sabemos que conserva el paralelismo (es decir, lleva rectas en rectas paralelas a ellas) por tanto convierte el cuadrado de lado 1 en un cuadrado de lado 2, de área 4. Llamando a los vértices de D, $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$, $P_3 = (1,1)$ y $P_4 = (0,1)$, es sencillo ver que los vértices del cuadrado $\eta(D)$ son $\eta(P_1) = (-1,0)$, $\eta(P_2) = \eta(C) = (1,0)$ (el centro de la homotecia queda fijo), $\eta(P_3) = (1,2)$, $\eta(P_4) = (-1,2)$, que efectivamente forman un cuadrado de lado 2 y área 4.

Como σ es la simetría respecto de la recta $B = \{x_2 = 0\}$ con dirección $U = \{x_1 - x_2 = 0\}$, los puntos $\eta(P_1) = (-1,0)$, $\eta(P_2) = (1,0)$ son fijos por σ, $\sigma(\eta(P_1)) = (-1,0)$, $\sigma(\eta(P_2)) = (1,0)$. Y es sencillo ver gráficamente que los otros dos vértices del cuadrado van a los puntos $\sigma(\eta(P_3)) = (-3,-2)$, $\sigma(\eta(P_4)) = (-5,-2)$. Por tanto $\sigma(\eta(D))$ es un romboide de base 2 y altura 2, cuya área es 4. Observa que σ no es una simetría ortogonal, ya que aunque conserve este área no conserva las longitudes de los lados.

Las dos últimas aplicaciones, la traslación τ y el giro g son isometrías afines que conservan la distancia, por tanto no modifican el área del paralelogramo $\sigma(\eta(D))$.

En consecuencia, el área de $f(D) = (g \circ \tau \circ \sigma \circ \eta)(D)$ es 4.