DMATIC Curso 16-17

ETSIInf, UPM **Matemática Discreta II (MI)**

Final Junio 2017 **08-06-17**

Soluciones

1. (1,5 puntos)

(a) Construye una red de 12 vértices que tolere cuatro fallos en los vértices. ¿Cuál es el número mínimo de aristas de la red? Justifícalo.

(b) Demuestra que un grafo simple G es 2-conexo si y sólo si para vértice u y cada arista e existe un ciclo en G que contiene ambos elementos.

SOL.:

(a) El grafo pedido es el grafo de Harary $H(5,12)$. El número mínimo de aristas es $kn/2 = 30$

2. (1,5 puntos)

(a) Enuncia y demuestra la fórmula de Euler para grafos planos. Demuestra que un grafo planar maximal de grado máximo 5 tiene a lo sumo 12 vértices.

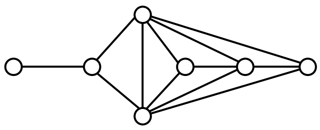
(b) Averigua si la sucesión [5,5,4,3,3,3,1] es gráfica. En caso afirmativo construye dos grafos, uno planar y otro no planar, con esa sucesión de grados.

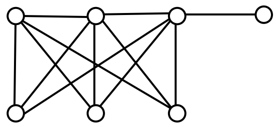
SOL.:

(a) Un grafo planar maximal de orden n tiene $3n - 6$ aristas

Si $\Delta \leq 5$ entonces el número de aristas cumple que $2q = \Sigma d(v) \leq 5n$, luego $n \leq 12$

(b) Aplicando el algoritmo de detección de sucesiones gráficas se comprueba que lo es. Los grafos pedidos son:





No planar porque contiene a $K_{3,3}$

3. (1,5 puntos)

Sean $T_1 = (V_1, A_1)$ y $T_2 = (V_2, A_2)$ dos árboles de n y n + 2 vértices, respectivamente, donde $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $V_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1}, w_{n+2}\}$. Se considera el conjunto de aristas $A_3 = \{\{v_1, w_1\}, \dots, \{v_n, w_n\}\}$, que unen vértices de T_1 con vértices de T_2, quedando dos vértices de T_2 sin unir a T_1. Se define el grafo $H = (V, A)$, donde $V = V_1 \cup V_2$ y $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

En los apartados a), b), c), construye un grafo H utilizando el método anterior que además satisfaga:

a) H tiene 6 vértices, es euleriano y hamiltoniano.

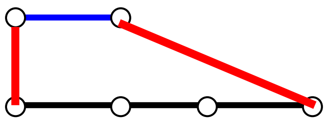
b) H tiene 8 vértices, es hamiltoniano y no es euleriano.

c) H tiene 10 vértices, es euleriano y no es hamiltoniano.

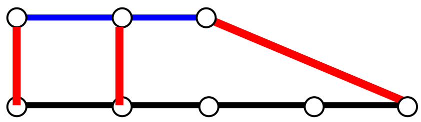
d) Demuestra que si H es un grafo, obtenido utilizando el método descrito, con $2n + 2$ vértices, siendo $n \geq 3$ número impar, entonces H no es euleriano.

SOL.:

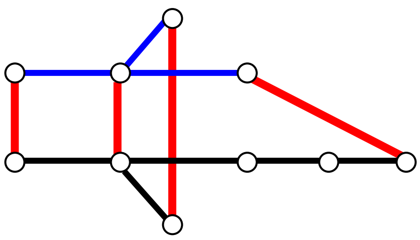
(a)



(b)



(c)



T_1 en **azul**

T_2 en **negro**

Las aristas de A_3 en **rojo**

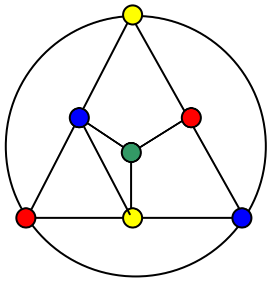
(d) En el árbol T_1 habrá un número par de vértices impares. Estos se convierten en vértices pares en H. Luego siempre habrá al menos un vértice par en T_1 que se convierte en vértice impar en H. Por tanto H no es euleriano.

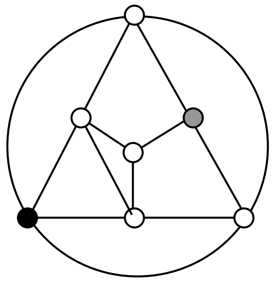
4. (1,5 puntos)

(a) Define conjunto independiente, número cromático e índice cromático en un grafo.

(b) ¿Qué relaciones conoces entre independencia, número cromático y grado máximo? Demuestra una de ellas. Comprueba que se cumplen en el grafo H de la figura.

SOL.:





A la izquierda tenemos una 4-coloración, luego $\chi \leq 4$

La elección del vértice negro (cualquiera de los 3 del ciclo exterior) como elemento en un conjunto independiente I deja solo dos candidatos conectados por una arista para ampliar I. Luego |I| = 2

Si el elegido es el vértice central quedan los tres del ciclo exterior para ampliar I. Luego |I| = 2

Y si el elegido fuera el vértice gris quedan los tres del triángulo inferior izquierdo. Y también |I| = 2

Por tanto, $\chi \geq 7/2$, es decir, $\chi = 4$

5. (1 punto)

En un juego de rol hay 6 dados dodecaédricos de distintos colores. Halla la función generatriz para el número de formas en que se puede obtener suma n cuando se lanzan los 6 dados. Calcula el número de formas en que se puede obtener la suma 40.

SOL.: La función generatriz es $A(x) = (x+x^2+x^3 + \ldots + x^{12})^6 = \dfrac{x^6(1-x^{12})^6}{(1-x)^6}$

Ahora se debe calcular el coeficiente de x^{40} en A(x), es decir, el coeficiente de x^{34} en $(1 - x^{12})^6 w$, siendo $w = (1+ x+ x^2 + \ldots)^6$

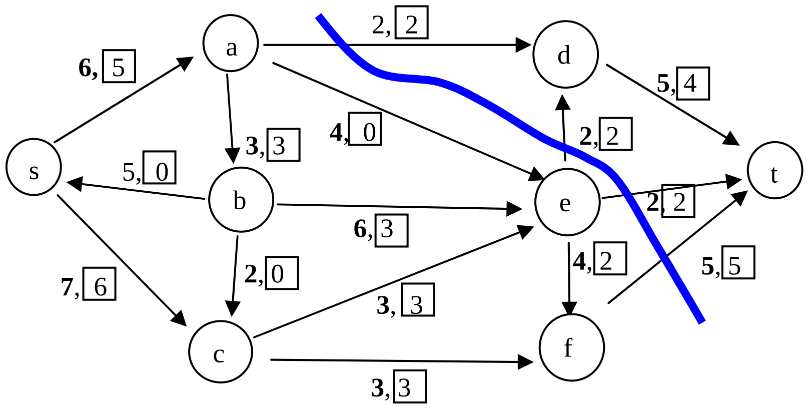
Como $(1 - x^{12})^6 = 1 - 6x^{12} + \binom{6}{2} x^{24} - \cdots$ resulta que

a_{34} = (coef. de x^{34} en w) – 6(coef. de x^{22} en w) + 15(coef. de x^{10} en w) =

$$= \binom{34+6-1}{34} - 6\binom{22+6-1}{22} + \binom{6}{2}\binom{10+6-1}{10} = \binom{39}{5} - 6\binom{27}{5} + \binom{6}{2}\binom{15}{5}$$

6. (1,5 puntos)

Enuncia el Teorema de Ford-Fulkerson definiendo, con detalle, los conceptos que aparecen en el enunciado. En la red de la figura circula un flujo f de valor 7. Las etiquetas de cada arista indican su capacidad (en negrita y en primer lugar) y el valor actual del flujo (en segundo lugar y en recuadro). ¿Cuáles son los valores de x e y? Indica un camino de f-aumento en la red con arista de retroceso. Aplica el algoritmo de etiquetado para obtener un flujo de valor máximo. Comprueba el teorema en esta red.



Sol.: x = 0, y = 2

Camino de f-aumento con arco de retroceso: sbet con residuo 1

Aplicando el algoritmo de etiquetado en sucesivos árboles de búsqueda se obtienen los siguientes caminos de aumento:

sadt residuo 1

sceft residuo 2

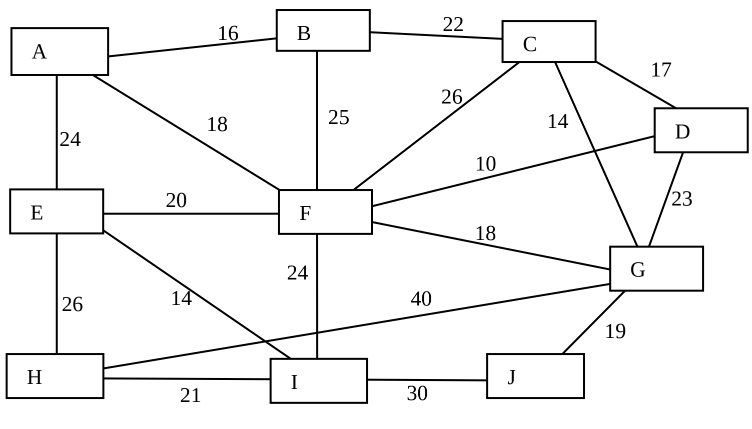
Y en el siguiente árbol de búsqueda de caminos de aumento se alcanzan desde s los vértices a,b,c,e,f pero no se alcanza t. Por tanto el flujo de valor máximo es el indicado en la figura y tiene valor 11.

Un corte de capacidad mínima es S = {s,a,b,c,e,f}, T = {d,t} de capacidad 11 (en azul)

7. (1,5 puntos)

En la red R de acequias de la Comarca Baja se deben realizar tareas de mantenimiento. Para ello se inutilizan temporalmente el mayor número de acequias de forma que el agua siga fluyendo entre todos los depósitos intermedios. La red aparece en el grafo de la figura donde los vértices son los depósitos y la etiqueta de cada arista es el caudal máximo de la correspondiente acequia.

Indica cuál será la red resultante R' si el criterio de inutilización de acequias es que el caudal entre dos depósitos cualesquiera en R' sea el máximo posible. Explica razonadamente la estrategia que has seguido para obtener R'. Analiza la complejidad del algoritmo correspondiente.



SOL.:

El árbol generador de peso máximo contiene caminos de caudal máximo entre cada par de vértices. Este árbol se construye con el algoritmo de Prim, Kruskal o Boruvka. La descripción del algoritmo y el análisis de la complejidad se puede ver en los apuntes.