2.4. Estructura de grupos

Definición de $p-$grupos

Sea $(G, *)$ un grupo finito y $p \in \mathbb{N}$ un número primo.

- Se dice que $(G, *)$ es un $p-$**grupo** si el orden de G es una potencia de p.
- Si $H \leq G$, se dice que H es un $p-$**subgrupo** de $G \Leftrightarrow$ $|H|$ es potencia de p.
- Si $H \leq G$, se dice que H es un $p-$**subgrupo de Sylow** de $G \Leftrightarrow$ H es un $p-$subgrupo y tiene orden maximal.

Caracterización del $p-$subgrupo de Sylow de un grupo abeliano finito

Sea $(G, *)$ grupo abeliano, con $|G| = p^t m$ siendo $p \in \mathbb{N}$ primo y $\operatorname{mcd}(p, m) = 1 \Rightarrow$ el $p-$**subgrupo de Sylow** de $(G, *)$ es:

$$S_p = \{x \in G \,:\, x^{p^t} = e_G\} \ \leq G$$

Factorización de los elementos de un grupo

Sea $(G, *)$ grupo y sea $a \in G$ con $|a| = mn$ siendo $\operatorname{mcd}\{m, n\} = 1$. Entonces existen $b, c \in G$ tales que $a = b * c = c * b$ con $|b| = n$ y $|c| = m$. Además b y c se pueden obtener como potencias del elemento a.

$p-$Subgrupos de Sylow como factores de grupos abelianos finitos

Sea $(G, *)$ grupo abeliano con $|G| = p^t m$, $p \in \mathbb{N}$ primo y $\operatorname{mcd}(p, m) = 1$

$$\Rightarrow \qquad G \approx S_p \times K$$

Siendo $S_p = \{x \in G : x^{p^t} = e_G\}$, $K = \{x \in G : x^m = e_G\}$. Además $|S_p| = p^t$ y $|K| = m$.

Factorización de $p-$grupos abelianos finitos

Si $(G, *)$ es un $p-$grupo abeliano, de orden p^t y $a \in G$ es un elemento de orden máximo, entonces existe $K \leq G$ tal que $G \approx \langle a \rangle \times K$.

Divisores elementales de un grupo abeliano finito

Todo grupo abeliano finito $(G, *)$ es isomorfo a un producto de grupos cíclicos:

$$G \approx \mathbb{Z}_{q_1^{\beta_1}} \times \mathbb{Z}_{q_2^{\beta_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{q_r^{\beta_r}}$$

Siendo $q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_r$ primos, no necesariamente distintos.
Se dice que $(G, *)$ está expresado en función de sus **divisores elementales**.

Teorema de estructura de grupos abelianos finitos

Dado un grupo abeliano finito $(G, *)$, existe una única secuencia de naturales

$$m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_k \geq 1$$

tales que $|G| = m_1 m_2 \cdots m_k$, $\forall i \in \{1, \cdots, k-1\}$, $m_{i+1} \,|\, m_i$ y

$$G \approx \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k}$$

Se dice que $(G, *)$ está expresado en función de sus **factores invariantes**.

2.4. Problemas

1. Señalar cuales de los siguientes grupos son cíclicos:

   a) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_5$
   b) $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4$
   c) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_2$
   d) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_2$

2. Determinar salvo isomorfismos, todos los grupos abelianos de orden n:

   a) $1 < n < 20$
   b) $n = 64$
   c) $n = 360$
   d) $n = 96$
   e) $n = 720$
   f) $n = 1089$

3. ¿Es $\mathbb{Z}_{54} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{72}$ isomorfo a $\mathbb{Z}_{48} \times \mathbb{Z}_{27} \times \mathbb{Z}_{36}$?

4. ¿Qué grupos abelianos de orden 360 tienen un elemento de orden 30?

5. Demostrar que cualquier grupo abeliano de orden 36 tiene elementos de orden 6 ¿y de orden 9?

6. Si $(G, *)$ es un grupo abeliano de orden 100 demostrar que contiene un elemento de orden 10.

7. ¿Cuántos subgrupos de orden 11 tiene un grupo abeliano de orden 33?

8. Se consideran 6 grupos abelianos de orden 16. Demostrar que al menos dos de ellos son isomorfos.

9. Demostrar que $\mathbb{Z}_{10} \approx H \times K$ siendo $\quad H = \{[0]_{10}, [5]_{10}\} \leq \mathbb{Z}_{10} \quad$ y $K = \{[0]_{10}, [2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}\} \leq \mathbb{Z}_{10}$

10. Demostrar que el grupo multiplicativo $(U_{21}, \cdot_{21})$ es isomorfo a un producto directo de los subgrupos $\quad H = \langle [2]_{21} \rangle \;$ y $\quad K = \langle [13]_{21} \rangle$.

11. Encontrar los factores invariantes:

    a) $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_{36}$
    b) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{35}$
    c) $\mathbb{Z}_{26} \times \mathbb{Z}_{42} \times \mathbb{Z}_{49} \times \mathbb{Z}_{200} \times \mathbb{Z}_{100}$
    d) $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{10}$
    e) $(U_{20}, \cdot_{20})$
    f) $(U_{22}, \cdot_{22})$
    g) $(\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_5)/\langle([0]_{20}, [1]_5)\rangle$
    h) $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8)/\langle([1]_6, [2]_8)\rangle$
    i) $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)/\langle([1]_3, [1]_4, [1]_6)\rangle$
    j) $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)/(\langle[2]_4\rangle \times \langle[0]_2\rangle \times \langle[1]_3\rangle)$