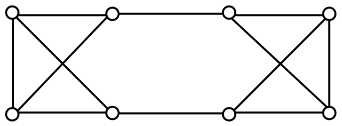
SOLUCIONES

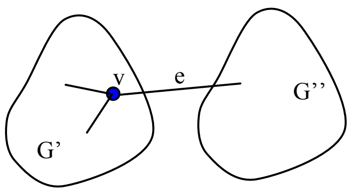
1. **(1 punto)**
   (a) Define grafo 3-conexo y grafo 2-aristo-conexo. Dibuja un grafo simple con al menos 8 vértices que sea 2-aristoconexo y 2-conexo pero no sea 3-conexo. Justifica que el grafo dibujado cumple las condiciones pedidas.
   (b) Demuestra que si G es un grafo conexo, bipartido y 3-regular entonces G es 2-conexo

(a)



(b)

Por reducción al absurdo. Supongamos que G tiene un vértice-corte v. Como hay 3 aristas incidentes en v, una de ellas es una arista puente e. Llamemos G' y G'' las componentes de G – e



G' es bipartido y todos sus vértices son de grado 3 salvo v de grado 2.

Contemos las aristas del grafo bipartido G'. Si miramos desde el conjunto de vértices que no contiene a v, el número de aristas es múltiplo de 3. Si miramos desde el conjunto de vértices que contiene a v, el número de aristas es de la forma $3j + 2$. Contradicción.

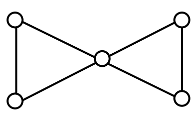
2. **(0,5 puntos)**

   Sea T un árbol cuyos vértices tienen los grados 1, 5 y 8. Si T tiene 200 hojas, comprobar que en el árbol T hay, a lo sumo, 66 vértices de grado 5.

Llamamos x (resp. y) al número de vértices de grado 5 (resp. 8)
Así, $200 + 5x + 8y = 2(200 + x + y - 1)$, operando $x + 2y = 66$, luego $x \leq 66$

3. **(1,5 puntos)** ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Demuéstralas o encuentra un contraejemplo.
   (a) Si un grafo es planar y euleriano entonces es hamiltoniano.
   (b) Todo grafo bipartido euleriano tiene un número par de aristas.
   (c) Todo grafo planar de 8 vértices tiene menos de 19 aristas.
   (d) Si G es un grafo con ciclos y T es uno de sus árboles generadores entonces diam(G) < diam(T)

(a) FALSO



(b) CIERTO. Un grafo euleriano tiene todos sus vértices pares. Por ser bipartido, todas sus aristas son incidentes a los vértices del nivel 1, todos ellos pares. Luego el número de aristas es par.

(c) CIERTO. Si un grafo es planar, entonces $q \leq 3n - 6$, es decir $q \leq 18$

(d) FALSO. En el grafo de la figura el árbol T cumple que diam(G) = diam (T) = 2

4. **(0,5 puntos)**
Demostrar que en todo grafo conexo existe un recorrido cerrado que pasa exactamente dos veces por cada arista del grafo.

Dado G se considera el grafo G' obtenido al duplicar cada arista de G. G' es euleriano por lo que existe un recorrido cerrado que pasa una vez por cada arista de de G'. Este es el recorrido buscado para G.

5. **(1 punto)**
Se llama cintura de un grafo con ciclos a la longitud de su ciclo más corto.
a) Describe un algoritmo que calcule la cintura de un grafo.
b) Analiza la complejidad de tu algoritmo.

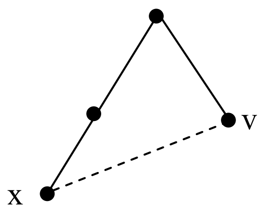
a) Empezaremos determinando una cota para el ciclo de menor longitud detectado a partir de la BFS (búsqueda en anchura) desde un vértice elegido s.

Realicemos la BFS desde s, en la que se etiqueta cada vértice con su distancia a s. Cuando vamos a etiquetar el vértice x, vecino de v, y encontramos por primera vez que una etiqueta d(x) ya está definida eso significa que existe ciclo. Pueden presentarse dos casos:

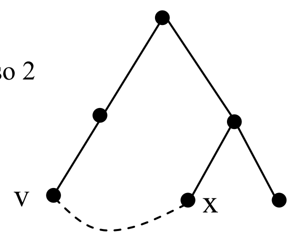
1) d(x) = d(v)+1 la longitud del ciclo es a lo más 2d(v)+2

2) d(x) = d(v) la longitud del ciclo es a lo más 2d(v)+1

Caso 1



Caso 2



La cota NO se puede mejorar en el segundo caso, por la que la BFS debe terminar. Pero sí puede mejorar en el primer caso por lo que debe seguir la BFS hasta examinar todos los vértices del nivel de v. Al terminar el nivel se corta la BFS.

Si repetimos este proceso desde cada vértice s y nos quedamos con la menor cota encontrada para la cintura habremos hallado la cintura del grafo inicial.

b) Complejidad

Cada búsqueda en anchura tiene complejidad O(q). Como hay que efectuar n búsquedas la complejidad del algoritmo es $O(qn) = O(n^3)$

6. **(1 punto)**
Enunciar y demostrar el teorema de Menger (versión aristas o vértices).

7. **(1 punto)**
Halla la función generatriz para el número de formas en que se pueden distribuir n caramelos (idénticos) a 6 niños si cada uno recibe una cantidad impar de caramelos entre 5 y 11. Calcula el número de distribuciones cuando hay 50 caramelos.

La función generatriz es $A(x) = (x^5+x^7+x^9+x^{11})^6 = \dfrac{x^{30}(1-x^8)^6}{(1-x^2)^6}$

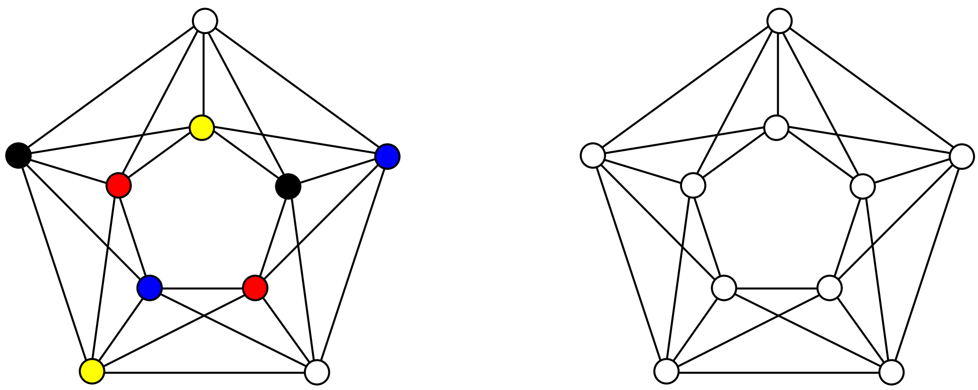
Ahora se debe calcular el coeficiente de x^{50} en A(x), es decir, el coeficiente de x^{20} en $(1-x^8)^6 w$, siendo $w = (1+x^2+x^4+\ldots)^6$

Como $(1-x^8)^6 = 1 - 6x^8 + \binom{6}{2}x^{16} - \binom{6}{3}x^{24}\cdots$ resulta que

a_{50} = (coef. de x^{20} en w) – 6(coef. de x^{12} en w) + 15(coef. de x^4 en w) =

$$= \binom{10+6-1}{10} - 6\binom{6+6-1}{6} + 15\binom{2+6-1}{2} = \binom{15}{5} - 6\binom{11}{5} + 15\binom{7}{5}$$

8. **(1,5 puntos)**
   a) Calcula el número cromático de G y su número de independencia. Demuestra la relación existente entre estos dos parámetros.
   b) Averigua si el grafo es planar.



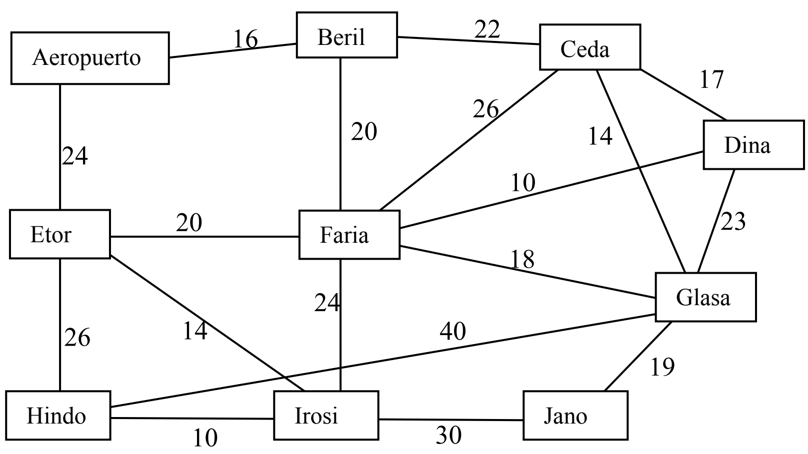
El número de independencia es 2, porque del K_4 inferior sólo hay un vértice independiente. Y sea cuál sea la elección que se haga, al eliminar dicho vértice y sus vecinos queda un K_4

En el grafo de la izquierda hay una 5-coloración. Teniendo en cuenta la acotación $\chi \geq n/\alpha$, resulta que el número cromático es 5.

El grafo no es planar, tiene 10 vértices y 25 aristas por lo que no cumple que la relación indicada en 3 (c)

9. (2 puntos)
La red de Metro de Mitrovia aparece en el grafo de la figura inferior, donde la etiqueta de cada tramo indica el tiempo que tarda un convoy en recorrerlo. Hay convocada una huelga y se deben establecer los servicios mínimos en algunos de los tramos de la red, tan pocos como sea posible, con la condición de que se garantice la conexión entre dos estaciones cualesquiera. Se discuten dos criterios para los servicios mínimos:

a) Dar servicio a tramos de la red de forma que el tiempo de viaje desde cualquier estación al Aeropuerto sea el mínimo posible. Explica la estrategia que seguirías en esta opción y desarróllala hasta calcular el tiempo que se tardaría desde Glasa.
b) El segundo criterio consiste en dar servicio a ciertos tramos de la red de forma que se minimice el tiempo máximo de viaje entre dos estaciones de la red de metro. Explica la estrategia que seguirías en esta opción para decidir los tramos con servicios mínimos.



a) Se pide construir el árbol de caminos mínimos desde el vértice A. Se puede utilizar el algoritmo de Dijkstra cuya descripción se encuentra en los apuntes de la asignatura.

Desarrollándolo hasta alcanzar el vértice G se encuentra el camino ABCG de tiempo 52.

b) Se pide construir el árbol generador de diámetro mínimo. Una estrategia razonable consiste calcular el centro del grafo y construir el árbol de caminos mínimos desde uno de los vértices del centro. (Las descripciones de los algoritmos para realizar estas tareas se encuentran en los apuntes de la asignatura)