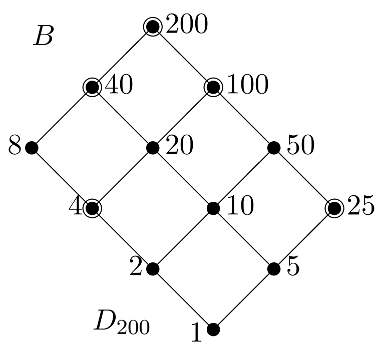
Matemática Discreta I Primer parcial	1er Apellido: ______________	30 de octubre de 2020
Dpto. Matematica Aplicada TIC ETS Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	2º Apellido: ______________ Nombre: ______________	Tiempo 100 minutos **Nota:**

Ejercicio 1

Sea D_{200} el conjunto de todos los divisores positivos de 200, y sea $|$ la relación de divisibilidad, es decir, $a \mid b$ significa que "a divide a b".

a) (3 puntos) Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{200}, |)$.

Solución:



b) (6 puntos) Sea $B = \{4, 25, 40, 100, 200\}$ un subconjunto de D_{200}. Obtén, si existen, las cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo de B en $(D_{200}, |)$. Obtén, si existen, máximo y mínimo, maximales y minimales de B.

Solución:

Vemos que el único elemento de D_{200} al que dividen todos los elementos de B es el 200, por tanto es la única **Cota superior** y en consecuencia será el **Supremo**.

De igual forma vemos que 1 es el único elemento de D_{200} que divide a todos los elementos de B, por lo que será la única **Cota inferior** y por tanto el **Ínfimo**.

El único **maximal** del conjunto B es el 200, que consecuentemente es el **máximo**. Sin embargo, el conjunto tiene dos **minimales**: $\{4, 25\}$. Al tener más de un minimal el conjunto no tendrá **mínimo**.

Ejercicio 2

Sea S el conjunto de los números naturales múltiplos de 3 y menores que 25, y sea R la relación de equivalencia definida en S como: $a \, R \, b \Leftrightarrow 6 \mid (b - a)$.

a) (3 puntos) Describe S por enumeración y por caracterización, y calcula su cardinal.

Solución:

Por enumeración S se corresponde con:

$$S = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}.$$

Por caracterización podríamos definir S de múltiples formas:

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 25, n = 3k \text{ con } k \in \mathbb{N}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 25, 3 \mid n\}.$$

En cuanto al cardinal:

$$|S| = 8.$$

b) (6 puntos) Representa matricialmente R. Calcula la clase de equivalencia de 9 y obtén el conjunto cociente de S por la relación R.

Solución:
La representación matricial de la relación sería:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La clase de equivalencia de 9 estaría formada por los números relacionados con 9, por tanto por aquellos $a \in S$ tales que $6 \mid (9-a)$. En consecuencia será:

$$[9] = \{3, 9, 15, 21\}.$$

El conjunto cociente estará formado por dos clases de equivalencia:

$$S/R = \{\{3, 9, 15, 21\}, \{6, 12, 18, 24\}\} = \{[3], [6]\}.$$

Ejercicio 3

a) **(5 puntos)** Demuestra por inducción que la suma de los n primeros números pares $(2, 4, 6, \ldots, 2n)$ es igual a $n^2 + n$.

Solución:

La expresión que se pretende demostrar se corresponde con $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2 \cdot k = n^2 + n$.

1. En primer lugar debemos demostrar que la fórmula es cierta si n $= 1$, lo que es obvio puesto que $2 \cdot 1 = 1^2 + 1$.
2. Hipótesis de Inducción: suponemos el resultado cierto para $n = m$, es decir, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} 2 \cdot k = m^2 + m$.
3. Comprobamos para $n = m + 1$ utilizando la hipótesis de inducción.

$$\sum_{k=1}^{m+1} 2 \cdot k = \sum_{k=1}^{m} 2 \cdot k + 2(m+1) =$$

que aplicando la hipótesis de inducción sería

$$= (m^2 + m) + 2(m + 1) = m^2 + 3m + 2 = m^2 + 2m + 1 + m + 1 = (m + 1)^2 + (m + 1),$$

con lo que la fórmula se cumple para $n = m + 1$.

Luego, se cumple la igualdad para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) **(8 puntos)** Un electricista tiene que instalar 500 enchufes en un edificio de apartamentos. Si los enchufes se venden en cajas de 24 unidades y en cajas de 44 unidades, ¿cuantas cajas de cada tipo tendrá que comprar para que no sobre ni falte ningún enchufe? Resuelve aplicando el algoritmo extendido de Euclides y obtén todas las soluciones posibles.

Solución:

Sean x el número de cajas de 24 unidades (que contendrán en total $24x$ enchufes) e y el número de cajas de 44 unidades (que contendrán en total $44y$ enchufes). Tendremos que resolver la ecuación diofántica $24x + 44y = 500$.

- Calculamos primero $\operatorname{mcd}(44, 24)$. Vemos que $44 = 24 \cdot 1 + 20$, $24 = 20 \cdot 1 + 4$ y $20 = 4 \cdot 5$, con lo que $\operatorname{mcd}(44, 24) = 4$ y la ecuación tiene soluciones enteras puesto que $4 \mid 500$ ($500 = 4 \cdot 125$).
- Buscamos ahora una solución particular. Sabemos que $4 = 24 - 20 \cdot 1$ y $20 = 44 - 24 \cdot 1$, por tanto $4 = 24 - 20 \cdot 1 = 24 - (44 - 24 \cdot 1) \cdot 1 = 24 \cdot 2 - 44 \cdot 1$, es decir, $24 \cdot 2 - 44 \cdot 1 = 4$.

  Multiplicamos ahora la expresión por $\dfrac{500}{\operatorname{mcd}(44, 24)} = 125$, y obtenemos una solución particular de nuestra ecuación: $24 \cdot 250 - 44 \cdot 125 = 500$.

  Y la solución general de la ecuación diofántica es

$$\begin{cases} x = 250 + \frac{44}{4}t = 250 + 11t \\ y = -125 - \frac{24}{4}t = -125 - 6t \end{cases}, \forall t \in \mathbb{Z}$$

  Puesto que el número de cajas no puede ser negativo sabemos que $y = -125 - 6t \geq 0$ por lo que $t \leq -21$. Por otro lado $x = 250 + 11t \geq 0$ y $t \geq -22$.

  Por tanto si calculamos los valores posibles correspondientes a tomar $t = -21$, y $t = -22$, las soluciones son:

  1. Con $t = -21$ resulta **19 cajas de 24 unidades y 1 caja de 44 unidades**.
  2. Con $t = -22$ resulta **8 cajas de 24 unidades y 7 cajas de 44 unidades**.

Ejercicio 4

Sea n un número natural producto de tres números primos que pueden ser iguales o distintos entre si.

a) **(3 puntos)** Determina en cada caso el cardinal del conjunto de divisores positivos de n.

Solución:

Si n es el producto de tres números primos que pueden ser iguales o distintos entre si, las opciones son: $n = p_1^3$, $n = p_1^2 \cdot p_2$ y $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$, siendo p_1, p_2 y p_3 tres números primos distintos entre si.

En el primer caso el conjunto será $D_{p_1^3} = \{1, p_1, p_1^2, p_1^3\}$, y su cardinal es $|D_{p_1^3}| = 4$.

En el segundo caso el conjunto será $D_{p_1^2 \cdot p_2} = \{1, p_1, p_2, p_1 \cdot p_2, p_1^2, p_1^2 \cdot p_2\}$, y su cardinal es $|D_{p_1^2 \cdot p_2}| = 6$.

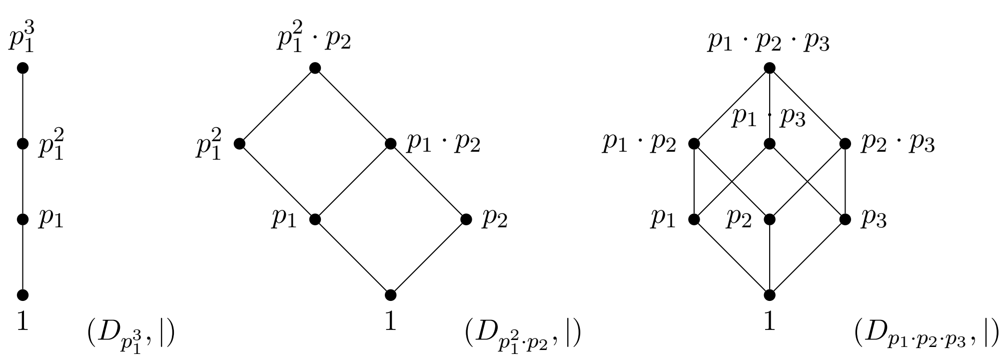
En el tercer caso el conjunto será $D_{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3} = \{1, p_1, p_2, p_3, p_1 \cdot p_2, p_1 \cdot p_3, p_2 \cdot p_3, p_1 \cdot p_2 \cdot p_3\}$, y su cardinal es $|D_{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3}| = 8$.

b) **(6 puntos)** Define el concepto de conjunto totalmente ordenado, y demuestra para qué valores de n el conjunto de divisores positivos de n, con la relación "divide a", es o no un conjunto totalmente ordenado.

Solución:

Decimos que **un conjunto es totalmente ordenado si, siendo un conjunto ordenado, todo par de elementos del mismo son comparables**.

Podemos visualizar las relaciones de orden en los tres conjuntos mediante sus diagramas de Hasse.



Vemos que **solo el conjunto $D_{p_1^3}$ es totalmente ordenado**, ya que en los otros dos casos hay elementos no comparables, por ejemplo p_1 y p_2.

En $(D_{p_1^3}, |)$ el orden total viene dado por $1 \mid p_1 \mid p_1^2 \mid p_1^3$, y por tanto todos los elementos son comparables.