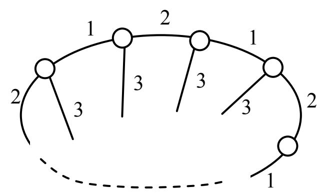
SOLUCIONES

1. **(2,5 puntos)**

(a) Enuncia y demuestra el teorema de Euler para grafos planos.
(b) Demuestra que si G es un grafo planar y bipartido, entonces G tiene algún vértice de grado menor o igual a 3.
(c) Demuestra que si G es un grafo 3-regular y hamiltoniano entonces su índice cromático es 3. ¿Cuál es su número cromático?

Solución:
a) Si todos los vértices tuvieran grado al menos 4, entonces $2q = \Sigma d(v) \geq 4n$ luego $q \geq 2n$
Pero en un grafo plano bipartido se cumple que $q \leq 2n - 4$
b) Antes de colorear vértices y aristas una observación. Si un grafo G es 3-regular todos sus vértices son impares luego el orden del grafo es par (porque no puede haber un número impar de vértices impares)



Empecemos con el índice cromático.
Las aristas del ciclo hamiltoniano se colorean con los colores 1 y 2, alternadamente. Y el resto de aristas, que son disjuntas, con el color 3.
Luego $\chi'(G) = 3$

Ahora el número cromático. Para $n = 4$ observamos que el único grafo cúbico y hamiltoniano es K_4 y sabemos que $\chi(K_4) = 4$.

Recordemos una acotación del número cromático: *Si G es un grafo simple que no es ni completo ni un ciclo impar entonces* $\chi \leq \Delta$

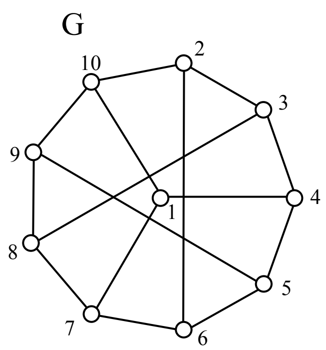
Luego para todo grafo G 3-regular y hamiltoniano con $n>4$ vértices se cumple que
$2 \leq \chi(G) \leq 3$
El número cromático será 2 cuando G sea bipartido y 3 si G contiene algún ciclo impar

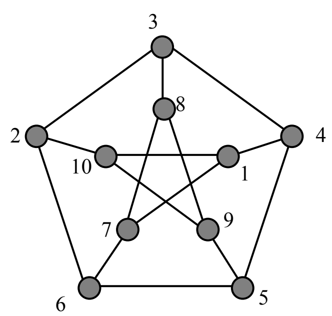
2. (2 + 0,5 puntos)

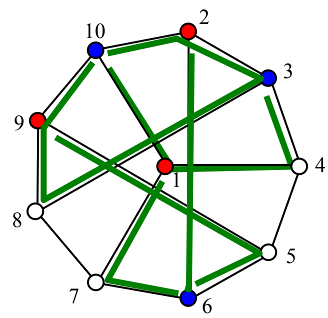
Se considera el grafo G, mostrado en la figura

(a) Enuncia el teorema de Kuratowski y aplícalo para averiguar si G es planar.
(b) El grafo G – e, donde e es la arista $\widehat{14}$, ¿es hamiltoniano?
(c) Construye dos conjuntos independientes maximales de distinto cardinal en G. Calcula, justificándolo, el número de independencia de G.
(d) Calcula el número cromático y el índice cromático (**) de G

Solución:
En primer lugar podemos observar que el grafo G es el grafo de Petersen (grafo 3-regular con dos 5-ciclos, 2-3-4-5-6-2 y 1-7-8-9-10-1, conectados por 5 aristas). Por tanto, podemos recordar todo lo que conocemos de este grafo

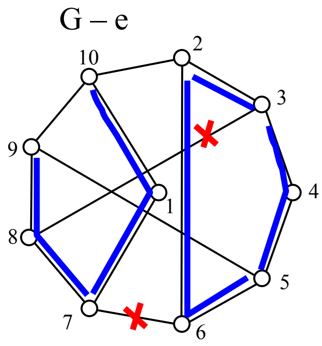






a) G no es planar porque contiene un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$ (figura de la derecha)

b) El grafo G – e NO es hamiltoniano.

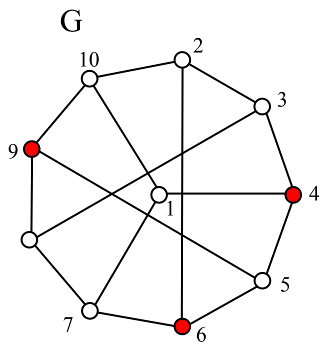


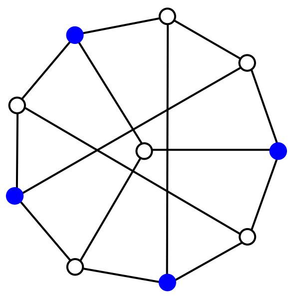
Si existiera ese ciclo hamiltoniano H debería contener las aristas 3-4, 4-5, 1-10 y 1-7. Así la segunda arista de 3 en H es o bien 2-3, o bien 3-8

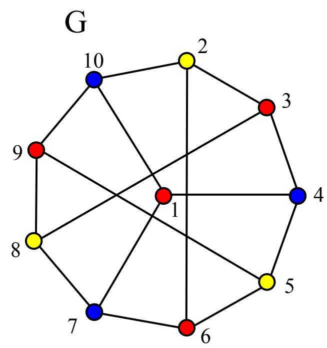
Si es 2-3, entonces 3-8 no está en H, luego sí están 7-8 y 8-9. Por lo que la arista 6-7 no está en H. Esto significa que las dos aristas en H de 6 son 5-6 y 2-6. Se ha cerrado H antes de alcanzar todos los vértices.

Si la arista elegida en 3 es la 3-8 se razona de forma análoga. En cualquiera de los dos casos el posible ciclo hamiltoniano se cierra sin alcanzar todos los vértices.

c) En las figuras tenemos dos conjuntos independientes de cardinales 3 (rojo) y 4 (azul).
El cardinal máximo de un conjunto independiente J es 4. Si J no contiene al vértice 1, entonces $|J| \leq 4$ porque el ciclo exterior tiene 9 vértices. Y si J contiene al vértice 1 entonces quedan disponibles en el ciclo exterior los vértices de tres aristas, 2-3, 5-6 y 8-9, de los cuales solo 3 pueden pertenecer a J.
Por tanto $\alpha(G) = 4$

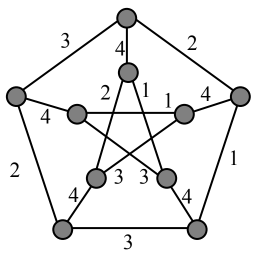


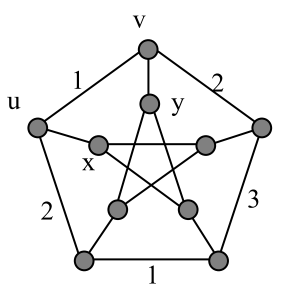




d) El número cromático de G es 3. Tiene ciclos impares y en la figura de la derecha se presenta una 3-coloración.

El índice cromático del grafo de Petersen es 4. Una 4-coloración de las aristas se muestra en la figura inferior (a la izquierda)
Demostraremos que no se pueden colorear las aristas con sólo 3 colores.





Veremos que si el grafo de Petersen admitiera una coloración de aristas con sólo 3 colores entonces cada uno de ellos aparecería dos veces en el ciclo interior que ¡sólo tiene 5 aristas!
Como el ciclo exterior tiene 5 aristas, los tres colores 1-2-3 aparecen en el ciclo. Sea uv una arista con color 1. Como el grafo de Petersen es 3-regular en cada vértice aparecen los tres colores (1, 2 y 3). Pero las aristas ux y vy no pueden tener color 1, luego el color 1 aparece en dos aristas distintas del ciclo interior. El mismo razonamiento sirve para probar que también hay dos aristas de color 2 y otras dos de color 3. Como el ciclo interior solo tiene 5 aristas llegamos a un absurdo.

3. **(1 punto)**

El número de particiones de n en exactamente k partes (o sumandos) se designa por $p_k(n)$. Demuestra, utilizando los diagramas de Ferrers, que: $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$

Comprueba la igualdad para n = 8, k = 3.

Lo vimos en clase y está en el material de Moodle. Por cierto en la comprobación había que comprobar que $p_3(8) = p_2(7) + p_3(5)$

4. **(1 punto)** ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Demuéstralas en caso afirmativo o encuentra un contraejemplo:

(a) Todo grafo bipartido, 2-conexo y hamiltoniano tiene un número par de aristas
(b) Si G es un grafo no conexo con n vértices, n>2, y q = 3n – 6 aristas entonces es no planar.

Solución:
a) FALSO. El grafo G = C_6 + arista 14 es bipartido, 2-conexo y hamiltoniano y tiene 7 aristas.
b) CIERTO. Si G es un grafo no conexo agregar una arista entre dos vértices de diferente componente conexa no modifica su planaridad. Así se consigue un grafo G* que es planar si y solo si lo es G. Pero G* tiene 3n – 5 aristas por lo que no es planar. Por tanto el grafo original G tampoco es planar.
Nota. Los contraejemplos presentados por algunos alumnos son grafos NO simples.

5. **(1,5 puntos)**

(a) En un juego de rol hay 6 dados octaédricos de distintos colores. Halla la función generatriz para el número de formas en que se puede obtener suma n cuando se lanzan los 6 dados. Calcula el número de formas en que se puede obtener la suma 26.

(b) Halla la función generatriz de la sucesión definida por la siguiente relación de recurrencia:
$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 3^n \quad n \geq 2, \quad a_0 = 2, a_1 = -1$

Solución:

(a) La función generatriz es $A(x) = (x+x^2+x^3 + \ldots + x^8)^6 = \dfrac{x^6(1-x^8)^6}{(1-x)^6}$

Ahora se debe calcular el coeficiente de x^{26} en A(x), es decir, el coeficiente de x^{20} en $(1-x^8)^6 w$, siendo $w = (1+ x+ x^2 + \ldots)^6$

Como $(1-x^8)^6 = 1 - 6x^8 + 15x^{16} - \ldots$ resulta que
a_{29} = (coef. de x^{20} en w) – 6(coef. de x^{12} en w) + 15(coef. de x^4 en w) =

$$= \binom{20+6-1}{20} - 6\binom{12+6-1}{12} + 15\binom{4+6-1}{4} = \binom{25}{5} - 6\binom{17}{5} + 15\binom{9}{5}$$

(b) Sea $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la función generatriz de la sucesión solución

Aplicamos el procedimiento general a la relación
$a_n\, x^n = a_{n-1}\, x^n + 6\, a_{n-2}\, x^n + 3^n x^n \quad n\geq 2$

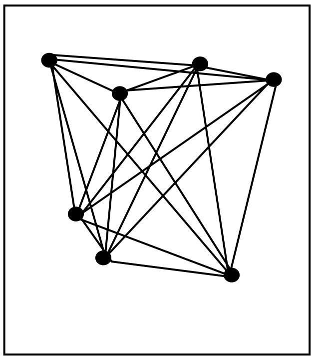
$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + 6\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 3^n x^n$$

Por tanto,

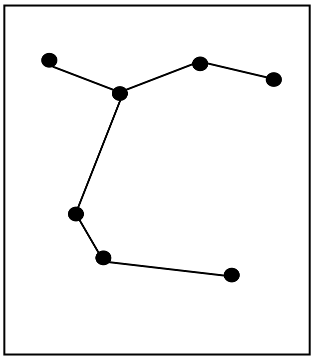
$$A(x) = 2 - x + x(A(x) - 2) + 6x^2 A(x) + \sum_{n=2}^{\infty} (3x)^n =$$

$$= 2 - x + xA(x) - 2x + 6x^2 A(x) + \frac{1}{1-3x} - 1 - 3x = \frac{2 - 9x + 18x^2}{(1+2x)(1-3x)^2}$$

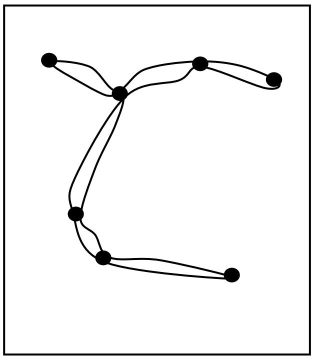
6. **(2 puntos)** ¿Qué significa que un algoritmo garantice una solución 2-aproximada para un problema de optimización? Describe una aproximación con esa razón para el "Problema del Viajante" utilizando las siguientes viñetas. Los vértices del grafo G aparecen en la primera viñeta, las aristas de G son todos los segmentos que unen cada par de vértices y el peso de cada arista es la distancia euclídea entre sus extremos. Dibuja los pasos siguientes en las viñetas sucesivas y descríbelos brevemente. Demuestra que efectivamente el algoritmo es una 2-aproximación.



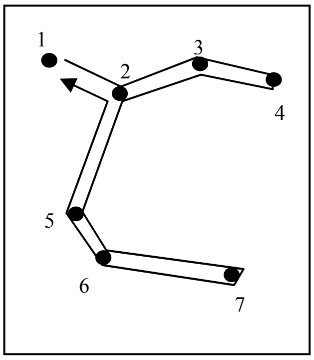
El grafo G



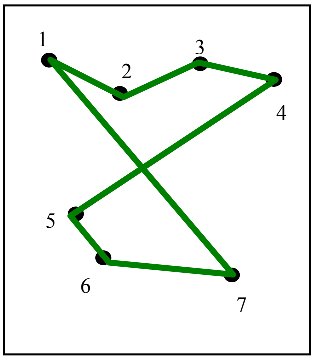
Árbol generador (euclídeo) de peso mínimo



Grafo euleriano H duplicando las aristas de EMST



Recorrido euleriano cerrado en H



Ciclo hamiltoniano siguiendo el orden de visita de los vértices en el recorrido euleriano