Departamento Inteligencia Artificial

POLITÉCNICA

LÓGICA - 1º Grado en Ingeniería Informática

Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid

Sustituciones y Unificación

David Pérez del Rey
dperezdelrey@fi.upm.es

Despacho 2104
Tel: +34 91 336 74 45

Sustituciones – Notación LPO

- La sustitución es una ***operación sintáctica*** sobre fórmulas y términos que devuelve nuevas fórmulas y términos:

  A – *sustitución* → A'   t – *sustitución* → t'

  - Esta operación se aplica *única y exclusivamente* sobre variables *libres* presentes en A o en t. De no haberlas, el resultado de la sustitución es la expresión inicial.

- Siendo **A** una fórmula y **x** una variable de un LPO
  - A(x) indica la aparición de al menos una ocurrencia **libre** de x en A
  - A { x / t } representa a la fórmula obtenida a partir de A sustituyendo **todas** las apariciones de la variable libre x por el término t.

- Ejemplos:
  - A(x): P(x,f(y)) → ∃yQ(x,y);   A {x/a}: P(a,f(y)) → ∃yQ(a,y)
  - A(y): ∃x((P(x,y)∨Q(x,y))∧R(x,y));   A{y/f(z)}:∃x((P(x,f(z))∨Q(x,f(z)))∧R(x,f(z)))

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Sustituciones - Condiciones

- Condiciones para la sustitución de una variable **libre** por un término:
  - Reemplazo de ***todas y sólo*** las ocurrencias de la variable *libre* en la fórmula por el término
    - $(\exists x(P(x,f(y)) \rightarrow \exists y Q(x,y)))\{y/a\} = \exists x(P(x,f(a)) \rightarrow \exists y Q(x,y))$
  - $(\exists xA)\{y/t\} = \exists xA\{y/t\}$ sii t ***no*** contiene apariciones de ***x***
    - $\exists x(\neg(x=y))\{y/z\} = \exists x(\neg(x=z))$
    - $\exists x(\neg(x=y))\{y/x\} =?\ \exists x(\neg(x=x))$
  - $(\forall xA)\{y/t\} = \forall xA\{y/t\}$ sii t ***no*** contiene apariciones de ***x***
    - $\forall x Padre(x,y)\{y/primogénito(x)\} =?\ \forall x Padre(x,primogénito(x))$
  - $(\exists xA)\{y/t\} =$ **$\exists z(A\{x/z\})$**$\{y/t$ sii t ***contiene*** apariciones de ***x*** pero ***z no aparece en A***
    - $\exists x(\neg(x=y))\{y/x\} = \exists z(\neg(x=y)\{x/z\}))\{y/x\} = \exists z(\neg(z=y))\{y/x\} = \exists z(\neg(z=x))$
  - $(\forall xA)\{y/t\} =$ **$\forall z(A\{x/z\})$**$\{y/t\}$ sii t ***contiene*** apariciones de ***x*** pero ***z no aparece en A***
    - $\forall x Padre(x,y)\{y/primogénito(x)\} = \forall z(Padre(x,y)\{x/z\})\{y/primogénito(x)\} = \forall z Padre(z,y)\{y/primogénito(x)\} = \forall z Padre(z,primogénito(x))$

Sustituciones – Notación LC

- Una ***sustitución*** es una función finita de un conjunto de variables de un lenguaje en el de términos. Se representa como α = {x1/t1, x2/t2, …, xn/tn} donde x1, …, xn son variables diferentes y t1, …, tn son términos tales que, en cada ti no aparece la variable xi
- Un par xi/ti se denomina ***ligadura***
- **Dominio(α)** = {xi / xi/ti $\in$ α}
- **Rango(α)** = {yi / yi aparece en ti y xi/ti $\in$ α}
- Una sustitución que no sustituye ninguna variable se llama ***sustitución vacía*** (λ)
- Si α es una función biyectiva de variables en variables entonces α se denomina ***renombrado***

Ejemplos: Ctes = {a, b, c, d}, Var = {x, y, z, w}, Func = {f/1, h/2}

- α1 = {x/f(a), y/x, z/h(b,y), w/a} Dominio(α1) = {x, y, z, w} Rango(α1) = {x, y}
- α2 = {x/a, y/a, z/h(b,c), w/f(d)} Dominio(α2) = {x, y, z, w} Rango(α2) = $\emptyset$
- α3 = {x/y, z/w} (renombrado) Dominio(α3) = {x, z} Rango(α3) = {y, w}
- λ = {x/x, y/y, z/z}

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Sustituciones

- Dada una fórmula A y una sustitución $\alpha = \{x1/t1, \ldots, xn/tn\}$, se denomina **aplicación de α a A (Aα)** a la fórmula obtenida reemplazando *simultáneamente* cada ocurrencia en A de xi por ti, para cada $xi/ti \in \alpha$.
  - $\alpha = \{x/f(a), y/x, z/h(b,y), w/a\}$
  - $P(x, y, z)\,\alpha = P(f(a), f(a), h(b,f(a)))$
  - $P(x, y, z)\,\alpha = P(f(a), x, h(b,y))$

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Sustituciones

- Dada una fórmula A y una sustitución $\alpha = \{x1/t1, \ldots, xn/tn\}$, se denomina **aplicación de α a A ($A\alpha$)** a la fórmula obtenida reemplazando *simultáneamente* cada ocurrencia en A de xi por ti, para cada $xi/ti \in \alpha$.
  - $\alpha = \{x/f(a), y/x, z/h(b,y), w/a\}$
  - $P(x, y, z)\,\alpha = P(f(a), f(a), h(b,f(a)))$ *incorrecto*
  - $P(x, y, z)\,\alpha = P(f(a), x, h(b,y))$ *correcto*
- Una fórmula A' es **instancia** de otra A si existe una sustitución, no vacía, α tal que $A' = A\alpha$
- Una sustitución α es **idempotente** si $\text{Dominio}(\alpha) \cap \text{Rango}(\alpha) = \varnothing$
- Si α es una sustitución idempotente entonces $(A\alpha)\alpha = A\alpha$
  - $\alpha 1 = \{x/a, y/f(b), z/v\}$ $P(x, y, w, z)\,\alpha 1 = P(a, f(b), w, v)$
    $P(a, f(b), w, v)\,\alpha 1 = P(a, f(b), w, v)$
  - $\alpha 2 = \{x/a, y/f(b), z/x\}$ $P(x, y, w, z)\,\alpha 2 = P(a, f(b), w, x)$
    $P(a, f(b), w, x)\,\alpha 2 = P(a, f(b), w, a)$
  - $\alpha 1$ es idempotente, $\alpha 2$ no

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Composición de sustituciones

- Dadas dos sustituciones α = {x1/t1, …, xn/tn} y β= {y1/s1, …, ym/sm} su ***composición*** $\alpha\beta$ se define eliminando del conjunto

  {x1/t1β, …, xn/tnβ, y1/s1, …, ym/sm}

  - las ligaduras xi/tiβ tales que xi $\equiv$ tiβ,
  - y las ligaduras yi/si tales que yi no pertenece a {x1,…,xn}

- Ejemplo:
  - si α = {x/3,y/f(x,1)} y β= {x/4} entonces $\alpha\beta$ = {x/3, y/f(4,1)} y $\beta\alpha$ = {x/4, y/f(x,1)}

- Propiedades de la composición:
  - $(A\alpha)\beta = A(\alpha\beta)$
  - $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
  - $\alpha\,\lambda = \lambda\,\alpha = \alpha$
  - $\alpha\beta \neq \beta\alpha$

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Ejercicios Sustituciones

- Hallar las sustituciones resultantes de componer las siguientes sustituciones:
  - $\{x/a, y/f(b,z)\} \circ \{z/c, u/d\} =$
  - $\{x/a, y/f(b,z)\} \circ \{z/c, y/d\} =$
  - $\{x/y\} \circ \{y/f(b,z), z/c\} =$
  - $\{x/y\} \circ \{y/f(y)\} =$

- Hallar las expresiones resultantes de aplicar las siguientes sustituciones:
  - $(P(y,x))\{y/f(x), x/a\} =$
  - $(\{P(x,f(y)), P(g(y,x),z)\})\{y/f(x), x/a, z/y\} =$
  - $(\{P(x,f(y)), P(g(z,a),z)\})\{y/b, x/g(f(b),a), z/f(b)\} =$

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Ejercicios Sustituciones

- Hallar las sustituciones resultantes de componer las siguientes sustituciones:
  - $\{x/a, y/f(b,z)\} \circ \{z/c, u/d\} = \{x/a, y/f(b,c), z/c, u/d\}$
  - $\{x/a, y/f(b,z)\} \circ \{z/c, y/d\} =$
  - $\{x/y\} \circ \{y/f(b,z), z/c\} =$
  - $\{x/y\} \circ \{y/f(y)\} =$

- Hallar las expresiones resultantes de aplicar las siguientes sustituciones:
  - $(P(y,x))\{y/f(x), x/a\} =$
  - $(\{P(x,f(y)), P(g(y,x),z)\})\{y/f(x), x/a, z/y\} =$
  - $(\{P(x,f(y)), P(g(z,a),z)\})\{y/b, x/g(f(b),a), z/f(b)\} =$

Ejercicios Sustituciones

- Hallar las sustituciones resultantes de componer las siguientes sustituciones:
  - $\{x/a, y/f(b,z)\} \circ \{z/c, u/d\} = \{x/a, y/f(b,c), z/c, u/d\}$
  - $\{x/a, y/f(b,z)\} \circ \{z/c, y/d\} = \{x/a, y/f(b,c), z/c\}$
  - $\{x/y\} \circ \{y/f(b,z), z/c\} =$
  - $\{x/y\} \circ \{y/f(y)\} =$

- Hallar las expresiones resultantes de aplicar las siguientes sustituciones:
  - $(P(y,x))\{y/f(x), x/a\} =$
  - $(\{P(x,f(y)), P(g(y,x),z)\})\{y/f(x), x/a, z/y\} =$
  - $(\{P(x,f(y)), P(g(z,a),z)\})\{y/b, x/g(f(b),a), z/f(b)\} =$

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Ejercicios Sustituciones

- Hallar las sustituciones resultantes de componer las siguientes sustituciones:
  - $\{x/a, y/f(b,z)\} \circ \{z/c, u/d\} = \{x/a, y/f(b,c), z/c, u/d\}$
  - $\{x/a, y/f(b,z)\} \circ \{z/c, y/d\} = \{x/a, y/f(b,c), z/c\}$
  - $\{x/y\} \circ \{y/f(b,z), z/c\} = \{x/f(b,z), y/f(b,z), z/c\}$
  - $\{x/y\} \circ \{y/f(y)\} =$

- Hallar las expresiones resultantes de aplicar las siguientes sustituciones:
  - $(P(y,x))\{y/f(x), x/a\} =$
  - $(\{P(x,f(y)), P(g(y,x),z)\})\{y/f(x), x/a, z/y\} =$
  - $(\{P(x,f(y)), P(g(z,a),z)\})\{y/b, x/g(f(b),a), z/f(b)\} =$

Ejercicios Sustituciones

- Hallar las sustituciones resultantes de componer las siguientes sustituciones:
  - {x/a, y/f(b,z)} ◦ {z/c, u/d} = {x/a, y/f(b,c), z/c, u/d}
  - {x/a, y/f(b,z)} ◦ {z/c, y/d} = {x/a, y/f(b,c), z/c}
  - {x/y} ◦ {y/f(b,z), z/c} = {x/f(b,z), y/f(b,z), z/c}
  - {x/y} ◦ {y/f(y)} = {x/f(y), y/f(y)}

- Hallar las expresiones resultantes de aplicar las siguientes sustituciones:
  - (P(y,x)){y/f(x), x/a} =
  - ({P(x,f(y)), P(g(y,x),z)}){y/f(x), x/a, z/y} =
  - ({P(x,f(y)), P(g(z,a),z)}){y/b, x/g(f(b),a), z/f(b)} =

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Ejercicios Sustituciones

- Hallar las sustituciones resultantes de componer las siguientes sustituciones:
  - {x/a, y/f(b,z)} ◦ {z/c, u/d} = {x/a, y/f(b,c), z/c, u/d}
  - {x/a, y/f(b,z)} ◦ {z/c, y/d} = {x/a, y/f(b,c), z/c}
  - {x/y} ◦ {y/f(b,z), z/c} = {x/f(b,z), y/f(b,z), z/c}
  - {x/y} ◦ {y/f(y)} = {x/f(y), y/f(y)}

- Hallar las expresiones resultantes de aplicar las siguientes sustituciones:
  - (P(y,x)){y/f(x), x/a} = P(f(x), a)
  - ({P(x,f(y)), P(g(y,x),z)}){y/f(x), x/a, z/y} =
  - ({P(x,f(y)), P(g(z,a),z)}){y/b, x/g(f(b),a), z/f(b)} =

Unificadores

- Una sustitución α es un ***unificador*** de dos fórmulas A y B si $A\alpha = B\alpha$. En este caso se dice que A y B son unificables
- Un unificador α de A y B se denomina ***unificador de máxima generalidad (umg)*** sii para cualquier otro unificador β de A y B existe alguna sustitución γ tal que $\beta=\alpha\gamma$
- Si dos fórmulas son unificables entonces tienen umg
- El umg de dos fórmulas es único (salvo renombrado)
- Ejemplo:
  - $A \equiv P(x, f(x, g(y)), z)$ y $B \equiv P(r, f(r, u), a)$
  - $\alpha 1 = \{x/r, u/g(y), z/a\}$ y $\alpha 2 = \{x/a, r/a, y/b, u/g(b), z/a\}$
  - $A\alpha 1 = B\alpha 1 = P(r, f(r, g(y)), a)$
  - $A\alpha 2 = B\alpha 2 = P(a, f(a, g(b)), a)$
  - $\alpha 1$ y $\alpha 2$ son unificadores de A y B, pero $\alpha 1$ es el umg de A y B
  - $\gamma = \{r/a, y/b\}$, $\alpha 2 = \alpha 1\ \gamma$

Unificadores

- Unificabilidad de expresiones:
  - Constantes: unificables entre sí sólo cuando son idénticas
  - Variables: unificables con cualquier término (simple o complejo) bajo sustitución
  - Funciones: unificables entre sí sólo cuando tienen idéntico símbolo de función y sus argumentos son unificables
  - Átomos: unificables entre sí sólo cuando tienen idéntico símbolo de predicado y sus argumentos son unificables

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Algoritmo de Unificación

Sean A y B dos átomos con el mismo símbolo de predicado:

(1) $\alpha = \lambda$

(2) Mientras $A\alpha \neq B\alpha$:

(2.1) Encontrar el símbolo más a la izquierda en $A\alpha$ tal que el símbolo correspondiente en $B\alpha$ sea diferente

(2.2) Sean t_A y t_B los términos de $A\alpha$ y $B\alpha$ que empiezan con esos símbolos:

(a) Si ni t_A ni t_B son variables o, si uno de ellos es una variable que aparece en el otro ➔ terminar con fallo (A y B no son unificables)

(b) En otro caso, sea t_A una variable ➔ el nuevo α es el resultado de $\alpha\{t_A/t_B\}$

(3) Terminar, siendo α el umg de A y B

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Algoritmo de Unificación

- Ejemplo: $A \equiv P(x, x)$ y $B \equiv P(f(a), f(b))$

α	$A\alpha$	$B\alpha$	(t_A, t_B)
λ	P(x, x)	P(f(a), f(b))	(x,f(a))
{x/f(a)}	P(f(a), f(a))	P(f(a), f(b))	(a,b)

Fallo ➔ A y B no son unificables

- Ejemplo: $A \equiv P(x, f(y))$ y $B \equiv P(z, x)$

α	$A\alpha$	$B\alpha$	(t_A, t_B)
λ	P(x, f(y))	P(z, x)	(x,z)
{x/z}	P(z, f(y))	P(z, z)	(f(y),z)
{x/z} · {z/f(y)} =	P(f(y), f(y))	P(f(y), f(y))	

= {x/f(y), z/f(y)} = UMG ➔ A y B son unificables y su umg es {x/f(y), z/f(y)}

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Ejercicios UMG

- Para el siguiente par de fórmulas atómicas, encontrar el unificador de máxima generalidad

1.	P(x, f(g(u),u), g(x))	P(h(y), f(z,h(a)), z)
2.	Q(a, y, g(a, y))	Q(z, x, g(z, f(x)))
3.	R(g(a), y, f(y), u)	R(x, f(x), z, g(z))
4.	P(a, f(x))	P(y, b)
5.	Q(f(a), g(a,y))	Q(f(x), g(x, b))
6.	R(x, x, y)	R(z, f(a), f(b))
7.	P(f(x), x)	P(y, f(y))
8.	Q(x, f(y, x), g(y))	Q(v, f(w, g(w)), g(v))
9.	R(f(x, y), g(y), a)	R(f(t, z), t, z)

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es