CÁLCULO III Matemáticas e Informática Curso 2019/2020	1^{er}Apellido: ________ 2º Apellido: ________	24/10/2019 Tiempo: 2h
Dpto. Matemática Aplicada ETSI Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: ________ Número de matrícula:	Calificación:

PRIMER PARCIAL

1. (a) **(1 punto)** Demuestra que todo subconjunto numerable de $\mathbb{R}^n$ tiene medida nula.
   (b) **(1 punto)** Enuncia el teorema de Lebesgue y úsalo para probar que la suma de dos funciones integrables Riemann es también integrable Riemann.
   (c) **(1 punto)** Calcula el área del recinto encerrado por una elipse de semiejes a y b.
2. **(1,5 puntos)** Calcula la integral de la función $f(x,y) = 2xy$ sobre el recinto acotado $D \subset \mathbb{R}^2$ limitado por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$.
3. **(2 puntos)** Calcula el volumen del recinto acotado limitado por los paraboloides de ecuaciones $x^2 + y^2 = z - 3$ y $x^2 + y^2 - 4y = 3 - z$.
4. **(1,5 puntos)** Un sólido tiene la forma de la parte interior a la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ en el primer octante. Calcula su masa sabiendo que la densidad puntual es $\delta(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2}$.
5. **(2 puntos)** Se considera la curva γ parametrizada por $\alpha(t) = (\sin^3 t, \cos^3 t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.
   (a) Encuentra las ecuaciones cartesianas de la curva γ, y haz un esbozo de la misma.
   (b) Calcula la longitud de γ.
   (c) Halla el valor medio de la función $f(x,y) = x + y$ sobre γ.

SOLUCIONES

1 a) Consultar teoría de la asignatura

b) Para el enunciado del Th. de Lebesgue consultar teoría

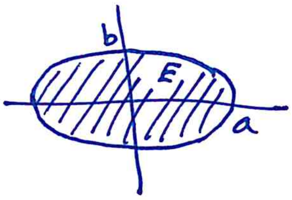
Si $D \subset \mathbb{R}^n$ es un recinto acotado, $\mathcal{R}(D)$ el conjunto de funciones integrables Riemann sobre D y $D(f)$ el conjunto de discontinuidades de la función f en D, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{R}(D) \Rightarrow D(f) \text{ tiene medida nula} \\ g \in \mathcal{R}(D) \Rightarrow D(g) \text{ tiene medida nula} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(f+g) \subset D(f) \cup D(g) \text{ tiene medida nula} \Rightarrow f+g \in \mathcal{R}(D)$$

ya que la unión de dos conjuntos de medida nula tiene medida nula.

c) Ecuación de la elipse centrada en el origen: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



En coordenadas elípticas:

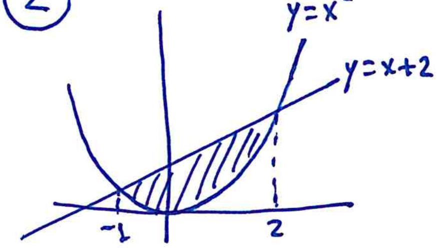
$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow J = ab\rho \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\rho^2=1$$

Entonces:

$$A(E)=\iint_E dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 1\cdot ab\rho\, d\rho = 2\pi ab\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \underline{\underline{\pi ab}}$$

---

(2)



$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+2 \end{cases} \Rightarrow x^2=x+2 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

$$D=\{(x,y): -1\le x\le 2,\ x^2\le y\le x+2\}$$

$$\iint_D 2xy\,dx\,dy = \int_{-1}^{2} dx\int_{x^2}^{x+2} 2xy\,dy = \int_{-1}^{2} x\left[y^2\right]_{y=x^2}^{y=x+2} dx = \int_{-1}^{2} x\left[(x+2)^2-x^4\right]dx =$$

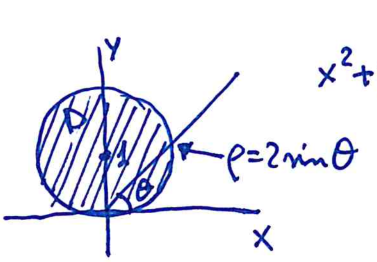
$$= \int_{-1}^{2}\left(x^3+4x^2+4x-x^5\right)dx = \left[\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+2x^2-\frac{x^6}{6}\right]_{x=-1}^{x=2} = \dots = \boxed{\frac{45}{4}}$$

---

(3)

$$\begin{cases} x^2+y^2=z-3 \\ x^2+y^2-4y=3-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=x^2+y^2+3 \xrightarrow{(0,1)} 4 \\ z=3-x^2-y^2+4y \xrightarrow{(0,1)} 6 \end{cases}$$

$$z=x^2+y^2+3=3-x^2-y^2+4y \Rightarrow x^2+y^2-2y=0 \Rightarrow \underbrace{x^2+(y-1)^2=1}_{D\subset\mathbb{R}^2}$$



$$x^2+y^2=2y \xrightarrow{\text{Polares}} \rho^2=2\rho\sin\theta \Rightarrow \begin{cases} \rho=0 \\ \rho=2\sin\theta \end{cases}$$

$$\Omega=\{(x,y,z): (x,y)\in D,\ x^2+y^2+3\le z\le 3-x^2-y^2+4y\}$$

$$V(\Omega)=\iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \iint_D\left[(3-x^2-y^2+4y)-(x^2+y^2+3)\right]dx\,dy =$$

$$= \iint_D \left[4y - 2(x^2+y^2)\right] dx\,dy = (\text{Polares}) = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} (4\rho\sin\theta - 2\rho^2)\,\rho\,d\rho =$$

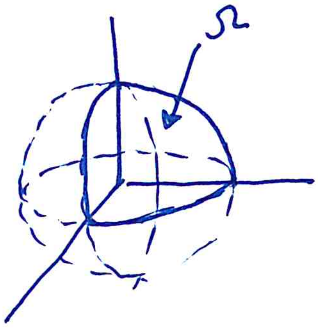
$$= \int_0^{\pi} \left[4\sin\theta \cdot \frac{\rho^3}{3} - 2\cdot\frac{\rho^4}{4}\right]_{\rho=0}^{\rho=2\sin\theta} d\theta = \int_0^{\pi} \left(\frac{32}{3}\sin^4\theta - 8\sin^4\theta\right) d\theta =$$

$$= \frac{8}{3}\cdot\int_0^{\pi} \sin^4\theta\,d\theta = \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\,d\theta = \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{2}\,\beta\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3}\cdot\frac{\Gamma(5/2)\cdot\Gamma(1/2)}{\Gamma(3)} =$$

$$= \frac{8}{3}\cdot\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}}{2} = \boxed{\pi}$$

---

(4)



En coordenadas esféricas: $\Omega = \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le \rho \le 1 \end{cases}$

$z = \rho\cos\varphi$

$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(\rho\cos\theta\sin\varphi)^2 + (\rho\sin\theta\sin\varphi)^2} = \rho\sin\varphi$

$J = \rho^2\cdot\sin\varphi$

Entonces:

$$m = \iiint_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{1} \rho\cos\varphi\cdot\rho\sin\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho =$$

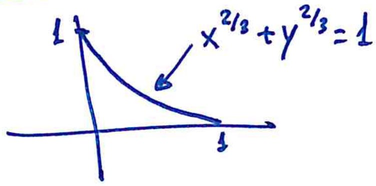
$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\cdot\cos\varphi\,d\varphi \int_0^{1} \rho^4\,d\rho = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_{\rho=0}^{\rho=1} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} = \boxed{\frac{\pi}{30}}$$

---

⑤ $\alpha(t) = (\sin^3 t, \cos^3 t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

a) $\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos^3 t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^{2/3} = \sin^2 t \\ y^{2/3} = \cos^2 t \end{cases} \Longrightarrow \boxed{x^{2/3} + y^{2/3} = 1}$



b) $\alpha'(t) = (3\sin^2 t \cos t, -3\cos^2 t \cdot \sin t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{9\sin^4 t \cos^2 t + 9\cos^4 t \cdot \sin^2 t} = 3\sqrt{\sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t)} =$$

$$= 3\sqrt{\sin^2 t \cdot \cos^2 t} = 3 \sin t \cos t, \text{ en } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{long}(\gamma) = \int_0^{\pi/2} \|\alpha'(t)\| \, dt = \int_0^{\pi/2} 3 \sin t \cos t \, dt = 3 \left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

c) $$VM(f, \gamma) = \frac{1}{3/2} \int_\gamma (x+y) \, ds = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} (\sin^3 t + \cos^3 t) \cdot 3 \sin t \cos t \, dt =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} (\sin^4 t \cdot \cos t + \cos^4 t \cdot \sin t) \, dt = \frac{2}{5} \left[\sin^5 t - \cos^5 t\right]_{t=0}^{t=\pi/2} =$$

$$= \frac{2}{5} \left[1 - (-1)\right] = \boxed{\frac{4}{5}}$$