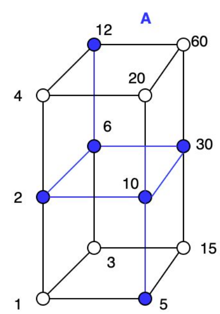
RETÍCULOS Y ÁLGEBRAS DE BOOLE

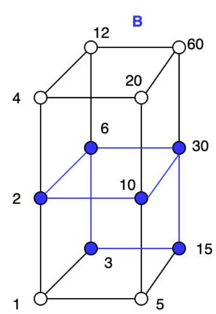
1. Representa el diagrama de Hasse de los siguientes conjuntos ordenados, y halla los elementos notables de los subconjuntos señalados:

   a) (D60, |), A = {2, 5, 6, 10, 12, 30} y B = {2, 3, 6, 10, 15, 30}

60 |2	60 = 2^2*3*5
30 |2	|D60| = 3*2*2 = 12 els.
15 |3	Dos cubos
5 |5	superpuestos
1	



C.S. = {60}
C.I. = {1}
Supremo = 60
Ínfimo = 1
Máximo = ∄
Mínimo = ∄
Maximales = {12, 30}
Minimales = {2, 5}

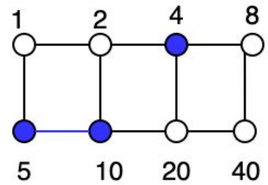


C.S. = {30, 60}
C.I. = {1}
Supremo = 30
Ínfimo = 1
Máximo = 30
Mínimo = ∄
Maximales = {30}
Minimales = {2,3}

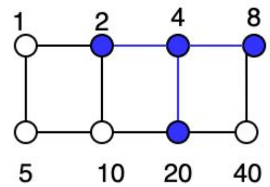
b) (D40, |), A = {4, 5, 10} y B = {2, 4, 8, 20}

40 |2
20 |2
10 |2
5 |5
1

40 = 2^3*5
|D40| = 4*2 = 8 els.



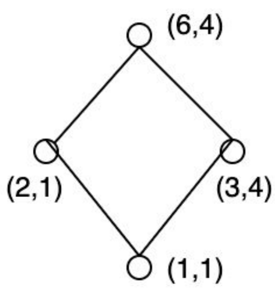
C.S. = {20,40}
C.I. = {1}
Supremo = 20
Ínfimo = 1
Máximo = $\nexists$
Mínimo = $\nexists$
Maximales = {4,10}
Minimales = {4,5}



C.S. = {40}
C.I. = {1,2}
Supremo = 40
Ínfimo = 2
Máximo = $\nexists$
Mínimo = 2
Maximales = {8,20}
Minimales = {2}

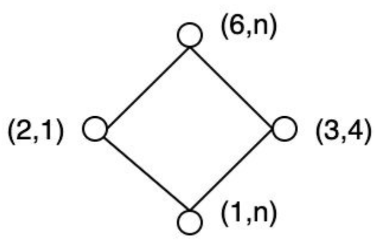
2. En (ℕ, |) x (ℕ, |) se considera el **orden lexicográfico**. Determina, si existen, las cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo del conjunto A = {(2,1),(3,4)}

ORDEN PRODUCTO



C.S. = {(6,4),(6,8),(6,12), …, (6,4k),
(12,4),(12,8),(12,12), …, (12,4k), …,
(6k,4),(6k,8),(6k,12), …, (6k,4k),}
donde k ∈ N
C.I. = {(1,1)}
Supremo = (6,4)
Ínfimo = (1,1)

ORDEN LEXICOGRÁFICO



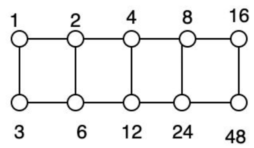
C.S. = {(6,n), (12,n),(18,n),...} = {(6k,n): n,k ∈ N}
C.I. = {(1,n): n ∈ N}
Supremo = (6,1)
Ínfimo = $\nexists$ → ya que $(1,\infty)$ no es un número

Definición ORDEN LEXICOGRÁFICO: Dados dos pares cualquiera (a,b), (c,d), entonces

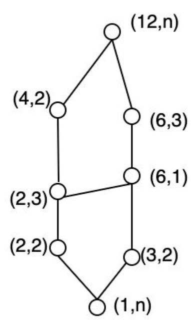
(a,b) R (c,d) $\leftrightarrow$
- Si a=c $\rightarrow$ bRd
- Si a $\neq$ c $\rightarrow$ aRc

3. Se considera D48xN el **orden lexicográfico** correspondiente a tomar el orden de divisibilidad en el primer factor y el orden usual ($\leq$) en el segundo factor. Sea S = {(2,2), (2,3), (3,2), (6,3), (6,1), (4,2)}. Halla, si existen, las C.S., C.I., supremo, ínfimo, máximo, mínimo, maximales y minimales de S.

Debemos hacer por una parte, D48 $\rightarrow$ 48 = $2^4 \cdot 3$ $\rightarrow$ |D48| = 5*2 = 10 elementos (forma plana)



48 | 2
24 | 2
12 | 2
6 | 2
3 | 3
1



C.S. = {(12k,n): k,n pertenecen N}
C.I. = {(1,n): n pertenece N}
Supremo = (12,1)
Ínfimo = $\nexists$

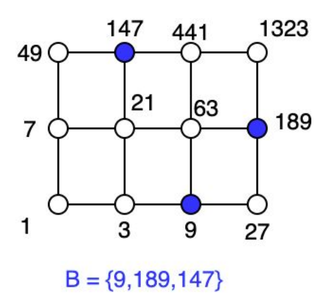
Maximales = {(4,2),(6,3)}
Minimales = {(2,2),(3,2)}
Máximo = $\nexists$
Mínimo = $\nexists$

¿Cómo hago mi diagrama de Hasse?
Si tengo dos factores primos $\rightarrow$ tiene forma "plana" (rectángulo, cuadrado)
Si tengo tres factores primos $\rightarrow$ tiene forma "cúbica" (depende del número de elementos)
8 elementos: entonces es un cubo
12 elementos: entonces son dos cubos superpuestos

4. a) Sea A=(D_{1323} , |), dibuja su diagrama de Hasse.

1323 | 3
441 | 3
147 | 3
49 | 7
7 | 7
1

1323 = 3^3 · 7^2 $\rightarrow$ forma plana
|D1323| = 4*3 = 12 elementos



b) Dado B={9, 147, 189}, calcular C.S., C.I., supremo e ínfimo de B en A.

C.S. = {1323} Supremo = 1323
C.I. = {1,3} Ínfimo = 3

c) Calcula los maximales, minimales, máximo y mínimo de B en A (si los hay).
Máximo = $\nexists$ Maximales = {147, 189}
Mínimo = $\nexists$ Minimales = {9,147}

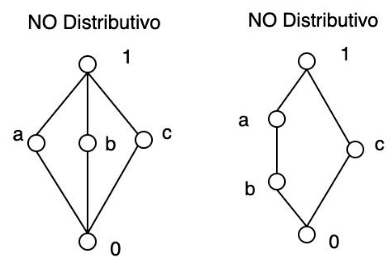
d) Calcular los complementarios de 7 y de 49 en el caso de que existan.
7' = $\nexists$, ya que no existe un elemento a tq sup{7,a} = 1323 e inf{7,a} = 1
49' = 27, ya que sup{49,27} = 1323 e inf{49,27} = 1

e) Razona si A es retículo.
Un **retículo** es aquel conjunto en el que para cada par de elementos cualesquiera existe tanto supremo como ínfimo

A es retículo, ya que para cada par de elementos cualesquiera de A existe tanto supremo como ínfimo.

f) Razona si A es álgebra de Boole. (**Enero 2104**)
Un conjunto es **Álgebra de Boole** si es un retículo complementario y distributivo.

- **Retículo complementario**: aquél en el que todos los elementos tienen complementario
- **Retículo distributivo**: aquél en el que el complementario de un elemento, si existe, es único



No es álgebra de Boole, ya que no es un retículo complementario porque no todos los elementos tienen complementario (el 7 p.ej. no lo tiene)

5. *Ejercicio 1.*

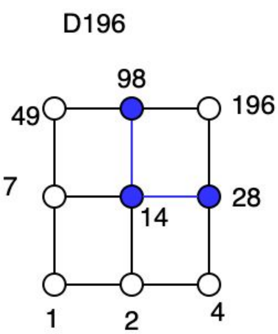
a) Sea un conjunto finito X de n elementos y P(X) el conjunto formado por todos los subconjuntos de X (partes de X), y sea X={a,b,c} en P(X) definimos la siguiente relación: dados M , $N \subset X$, decimos que MRN si $|M| \leq |N|$. Razona qué propiedades cumple (reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva) y cuáles no.

|P(X)| = 2^|X| = 2^3 = 8 elementos → {vacío, a,b,c,ab,ac,bc,abc}
MRN sii |M|≤|N| → ¿Propiedades?
i) Reflexiva: MRM sii |M|≤|M| → Como son iguales, entonces se cumple
ii) Simétrica: Si MRN sii |M|≤|N|, entonces NRM sii |N|≤|M|
Contraejemplo: si M={a} y N={a,b}, entonces |M|=1 y |N|=2. Por lo que MRN pero N¬RM → NO es simétrica
iii) Antisimétrica: Si MRN y NRM, entonces M=N
Contraejemplo: si M = {a} y N = {b}, entonces |M| = |N| = 1. Por lo que MRN y NRM, pero
M = {a} ≠ {b} = N → NO es antisimétrica
iv) Transitiva: Si MRN sii |M|≤|N| y NRP sii |N|≤|P|, entonces MRP sii |M|≤|P|
|M|≤|N|≤|P| → |M|≤|P| → Por lo que sí es transitiva

Ejercicio 2.

a) Sea $A = D_{196}$
i) Dibuja el diagrama de Hasse de (A, |).

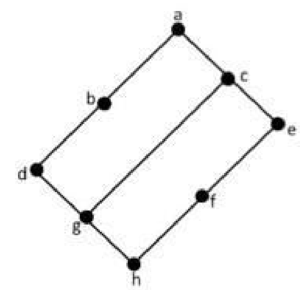
196 |2
98 |2 196 = 2^2*7^2
49 |7 |D196| = 3*3 = 9 els.
7 |7 Forma plana
1



C.S. = {196}
C.I = {1,2,7,14}
Supremo = 196
Ínfimo = 14
Máximo = ∄
Mínimo = 14
Maximales = {28,98}
Minimales = {14}

No tienen por qué ser únicos y no tienen por qué pertenecer al subconjunto → entre llaves
Son únicos y no tienen por qué pertenecer al subconjunto
Son únicos y tienen que pertenecer al subconjunto
No tienen por qué ser únicos y tienen que pertenecer al subconjunto → entre llaves
ii) Obtén la C.S., C.I., supremo, ínfimo, máximo, mínimo, maximales, minimales (si los hay) de B={14, 28, 98}
iii) Razona si 28 y 4 tienen complementario.
4' = 49 ya que sup{4,49} = 196 e inf{4,49} = 1
28 no tiene complementario ya que no existe un elemento a tq sup{a,28} = 196 e inf{a,28} = 1

b) Sea L el retículo cuyo diagrama de Hasse está dado por la siguiente figura:



i) Razona si L es un retículo complementario.

Todos los elementos deben tener complementario

No es un retículo complementario ya que no todos sus elementos tienen complementario, por ejemplo, g no lo tiene

ii) Razona si L es un retículo distributivo. (**Nov. 2017**)

No puede haber un elemento con más de un complementario

No es distributivo ya que hay elementos que tienen más de un complementario, por ejemplo, d' = {e,f}

Ya que tanto el sup{d,e}=sup{d,f}=a i inf{d,e}=inf{d,f}=h