TEMA 1: ESPACIOS AFINES

Problema 1. Sean los puntos $(1,0)$, $(3,2)$ y $(2,-1)$ en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

a) Demuestra que forman una referencia afín.

b) Calcula las coordenadas baricéntricas del origen de coordenadas respecto de esta referencia afín.

Problema 2. Sean los puntos $(1,0,0)$, $(-1,-1,2)$ y $(3,0,1)$ en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

a) Completa una referencia afín con un cuarto punto y calcula las coordenadas baricéntricas del origen de coordenadas respecto de la referencia afín.

b) Calcula la matriz de cambio de referencia de esta referencia afín a la referencia afín estándar y comprueba que transforma las coordenadas baricéntricas del origen respecto de ambas referencias.

Problema 3. Prueba que el subconjunto de matrices de traza igual a 3

$$B = \{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \operatorname{tr}(M) = 3\}$$

es un subespacio afín de dimensión 3, con dirección las matrices de traza nula.

Problema 4. Demuestra que el subconjunto de polinomios con coeficientes reales, que toman un determinado valor b en un punto a es un subespacio afín. Por ejemplo, muestra que

$$C = \{p(X) \in \mathcal{P}_n[X] : p(a) = b\}$$

es un subespacio afín con dirección

$$W = \{p(X) \in \mathcal{P}_n[X] : p(a) = 0\}.$$

Calcula su dimensión y unas ecuaciones cartesianas que lo definan.

Problema 5. Prueba que si dos subespacios B_1, B_2 tienen intersección no vacía, se puede eliminar el término $\mathcal{L}\{\overrightarrow{P_1P_2}\}$ de la definición de suma de subespacios, y tenemos

$$B_1 + B_2 = P_1 + \big(W_1 + W_2\big).$$

Problema 6. Prueba que dos planos distintos en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ que no son paralelos intersecan en una recta.

Problema 7. Dado un subespacio afín B de dimensión m y un punto $P \notin B$, demuestra que el subespacio afín $\{P\} + B$ tiene dimensión $m+1$.

Problema 8. Dado un punto P y una recta L contenidos en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, $P \notin L$, demuestra que existe una única recta L' paralela a L que pasa por P.

Problema 9. Dado un punto P y un plano H contenidos en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, $P \notin H$, demuestra que existe un único plano H' paralelo a H que pasa por P.

Problema 10. Muestra, con ayuda de la fórmula de Grassmann, que una recta y un plano no se pueden cruzar en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

Problema 11. Demuestra que dado $H \subset A$ hiperplano y otro subespacio $B \subset A$, con $B \cap H = \emptyset$, entonces B y H son paralelos.

Problema 12. Calcula unas ecuaciones implícitas de la recta $L \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ que pasa por el punto $(0, 1, 0)$ y es paralela al vector $(2, -1, 1)$.

Problema 13. Calcula unas ecuaciones implícitas de la recta $L \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y es paralela a la intersección de los planos $\{x + y = 1\}$ y $\{y - z = -1\}$.

Problema 14. Calcula ecuaciones paramétricas e implícitas del plano $H \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ que pasa por $P = (0, 0, 1)$ y es paralelo a $\{x - 2y - 3z = 5\}$.

Problema 15. Dadas dos rectas en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, L_1 que pasa por los puntos $P = (-1, -1, -1)$ y $Q = (2, 0, 1)$, y L_2 dada en ecuaciones implícitas

$$L_2 : \left\{ \begin{array}{cccrr} 2x & -y & -z & = & -1 \\ x & +y & +3z & = & 1 \end{array} \right.$$

calcula su suma y su intersección, calculando ecuaciones de ambas.

Problema 16. Dadas dos rectas en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, L_1 que pasa por los puntos $P = (1, 1, 0)$ y $Q = (2, 0, 2)$, y L_2 dada en ecuaciones implícitas

$$L_2 : \left\{ \begin{array}{cccrr} x & -2y & & = & -1 \\ & 3y & +z & = & 3 \end{array} \right.$$

calcula su suma y su intersección, calculando ecuaciones de ambas.

Problema 17. Dadas los dos planos en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ de ecuaciones implícitas $H_1 : \{x - y + z = 2\}$ y $H_2 : \{2x + y - 2z = -1\}$. Calcula su suma y su intersección, calculando ecuaciones de ambas.