0.1. Lección 20

Aplicaciones de la integral. Integrales impropias.

0.1.1. Aplicaciones de la integral:

La aplicación más importante de la integral es el cálculo de áreas planas. Como hemos dicho en la lección anterior, si f es una función continua (o continua a trozos) en $[a,b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ se define el área de la región plana R limitada por la gráfica de f, las rectas $x = a$, y $x = b$ y el eje $0X$, es decir, el área de

$$R = \{(x,y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

como

$$Area(R) = \int_a^b f(x)dx$$

De forma más general:

Si f, g son funciones continuas en $[a,b]$ se define el área de la región limitada por las gráficas de f y g y las rectas $x = a$, y $x = b$ como

$$A = \int_a^b |g(x) - f(x)|dx$$

Otra aplicación de la integral es el cálculo de volúmenes de revolución en torno al eje $0X$ de la siguiente forma:

Sea f una función continua y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Sea S el sólido de revolución engendrado al girar la gráfica de f en torno al eje 0X, entonces el volumen de dicho sólido se define como

$$V(S) = \int_a^b \pi\,(f(x))^2\,dx$$

Idea para la obtención de la fórmula Lo que se hace es una aproximación del volumen engendrado por la gráfica de f mediante sumas de volúmenes de cilindros. Nótese que el volumen de revolución engendrado por una recta $y = r$ en un intervalo $[a,b]$ es el volumen del cilindro que tiene por base un círculo de radio r y altura $b - a$, es decir, $\pi r^2(b - a)$. Cuando consideramos una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a,b]$, y denotamos $M_k = \sup\{f(x)\ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ y $m_k = \text{ínf}\{f(x)\ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, es claro que, para cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ el volumen engendrado por la gráfica al girar quedaría encajado entre el volumen engendrado al girar la recta m_k en $[a,b]$ que es $\pi m_k^2(x_k - x_{k-1})$

y el volumen engendrado al girar la recta M_k (que es $\pi M_k^2(x_k - x_{k-1})$. Por lo tanto, el volumen V quedaría encajado entre:

$$s(\pi f^2, P) = \sum_{k=1}(x_k - x_{k-1})\pi m_k^2 \leq V \leq \sum_{k=1}(x_k - x_{k-1})\pi M_k^2 = S(\pi f^2, P)$$

Puesto que la función $\pi f^2(x)$ es integrable en $[a, b]$, pasando a la integral inferior y superior de Riemann se tiene que el volumen coincide con la integral de dicha función en $[a, b]$.

Longitud de curva. Sea f una función de clase $\mathcal{C}^1$ en $[a, b]$ y tales que f y f' son continuas en $[a, b]$. Se define la *longitud de curva* de f en $[a, b]$ como

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Idea para la obtención de la fórmula Nótese que puesto que f' es continua en $[a, b]$ dicha integral siempre existe. Vemos a continuación una idea de la obtención de la fórmula mediante las sumas de Riemann. La idea principal es la aproximación de la longitud de curva entre dos puntos x, y de $[a, b]$ por la longitud del segmento de extremos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$ que, mediante el teorema de Pitágoras, mide $\sqrt{(y-x)^2 + (f(y) - f(x))^2}$. De esta forma, si consideramos una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ podemos aproximar la longitud de la curva por la longitud de la poligonal formada por los puntos $(x_k, f(x_k))$; de esta forma obtenemos aproximaciones por las siguientes sumas :

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\sqrt{1 + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} =$$

mediante el Teorema del Valor Medio aplicado a cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ se obtiene $t_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que $\dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(t_k)$, por lo tanto,

$$= \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\sqrt{1 + f'(t_k)^2}$$

Estas sumas están claramente encajadas entre las sumas inferiores y superiores de Riemann de la función $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ y de ahí se decude la fórmula.

0.2. Una introducción a las integrales impropias.

Cuando consideramos funciones integrables en intervalos no acotados del tipo $[a, \infty)$ o $(-\infty, b]$ se puede generalizar la noción de función integrable mediante la integrales impropias que definimos a continuación:

Integrales impropias en intervalos no acotados o de primera especie. Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, \infty)$, se define la integral impropia de f en $[a, \infty)$ y se denota con $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\, dx$ omo el siguiente límite siempre que exista (sea finito):

$$\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)dt$$

En este caso se dice que la integral impropia es convergente.

De forma análoga se define para una función continua en $(-\infty, b]$ la integral impropia de f en $(-\infty, b]$ como el siguiente límite si existe:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx = \lim_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)\, dt$$

Ejemplo 1. *Consideremos las funciones* $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ *con* $p > 0$*, si* $p \neq 1$*,*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{x^p}\, dt = \lim_{x\to\infty} [\frac{1}{-p+1} t^{-p+1}]_{t=1}^{t=x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{-p+1} x^{-p+1} - \frac{1}{1-p}$$

Por lo tanto sólo convergen cuando $-p+1 < 0$*, es decir,* $p > 1$*. En el caso* $p = 1$*,*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{x}\, dt = \lim_{x\to\infty} \sqsubset \ln t \sqsupset_1^x = \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

Integrales impropias en intervalos acotados de funciones no acotadas o de segunda especie.

1. Sea $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $(a, b]$ tal que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ (o $-\infty$). Definimos la integral impropia de f en $(a, b]$ como el siguiente límite siempre que exista:

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt$$

   En este caso se dice que la integral impropia es convergente.

2. Sea $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b)$ tal que $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$ (o -∞). Definimos la integral impropia de f en $(a, b]$ como el siguiente límite siempre que exista:

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt$$

   En este caso se dice que la integral impropia es convergente.

Ejemplo 2. *Consideremos ahora las funciones* $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ *con* $p > 0$ *que verifican que* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ *y estudiamos* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ *según los valores de* $p > 0$*. Puesto que:*

▷ *si* $p \neq 1$ *se tiene que:*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t^p}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \sqsubset \frac{t^{-p+1}}{-p+1} \sqsupset_x^1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(1-p)}(1 - x^{-p+1})$$

por lo que:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(1-p)}(1 - x^{-p+1}) = \begin{cases} \frac{1}{1-p} \ \textit{si } p < 1 \\ \infty \ \textit{si } p > 1 \end{cases}$$

▷ *si* $p = 1$ *se tiene que:*

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \sqsubset \ln t \sqsupset_x^1 = \lim_{x\to 0^+} \ln 1 - \ln x = \infty$$

Integrales impropias en intervalos no acotados y no acotadas o de tercera especie.

1. Sea $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua en (a, ∞) tal que $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ (o $-\infty$). Definimos la integral impropia de f en $(a, \infty$ como

$$\int_a^{\infty} f(t)dt \equiv \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^{\infty} f(t)\,dt, \qquad a < c$$

   cuando las *dos* integrales impropias existen.

2. Sea $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$ una función continua en $(-\infty, b)$ tal que $\displaystyle\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$ (o -∞) Definimos la integral impropia de f en $(-\infty, b)$ como

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt \equiv \int_{-\infty}^{c} f(t)\,dt + \int_c^{b} f(t)\,dt, \qquad c < b$$

   cuando las *dos* integrales impropias existen.

0.2.1. Dos criterios de comparación de integrales impropias en el caso de funciones positivas.

El siguiente resultado se deduce de forma inmediata utilizando los criterios de Sandwich para límites. Para unificar en una misma notación el caso de intervalo de integración no acotado o función integrando no acotada consideraremos funciones positivas en intervalos $[a, b)$ donde $a < b \leq \infty$.

Criterios de comparación: mayorante Sean f, g continas y positivas en $[a, b)$ con $b \leq \infty$ tales que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \qquad\qquad x \in [a, b)$$

1. Si $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ converge entonces $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ converge.
2. Si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ no converge entonces $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ no converge.

Criterio de comparación en el límite Sean f, g continuas y positivas en $[a, b)$ tales el siguiente límite existe (es finito) y positivo, es decir, :

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$$

Entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ converge si y sólo si $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ converge.

De forma análoga se obtendrían los resultados en el caso de intervalos $(b, a]$ con $b \geq -\infty$.

0.2.2. Aplicaciones de las integrales impropias al cálculo de áreas, volúmenes y longitudes de curvas.

Las nociones de áreas, volúmenes de revolución, longitud de curva, generados por funciones positivas pueden ser generarlizados cuando el intervalo es infinito o la función no es acotada mediante las integrales impropias. En particular, el caso de funciones positivas, la noción de área bajo la gráfica de f puede ser generalizada de la siguiente forma:

Área bajo la gráfica de una función positiva en un intervalo infinito. Sea f una función continua en $[a, \infty)$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, \infty)$. Consideremos

$$R = \{(x, y), x \in [a, \infty), 0 \leq y \leq f(x)\}$$

El área de la región R se define como:

$$Area(R) = \int_0^{\infty} f(x)\, dx$$

Ejemplo 3. *Cálculo de la longitud de la circunferencia mediante una integral impropia: Consideremos la función* $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ *que es continua en* $[0,1]$. *La gráfica de esta función es la parte de la circunferencia unidad que queda comprendida en el primer cuadrante* $\{(x,y); x \geq 0, y \geq 0\}$. *Calculemos la longitud de la gráfica de* f. *Puesto que la función* $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ *está definida y es continua en* $[0,b]$ *para todo* $0 < b < 1$, *haremos la integral impropia:*

$$\int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx = \lim_{x\to 1^-} \int_0^x \sqrt{1+f'(t)^2}\, dt = \lim_{x\to 1^-} \int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2}\, dt$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \lim_{x\to 1^-} [arcsent]_0^x = \lim_{x\to 1^-} arcsenx = arcsen1 = \frac{\pi}{2}$$

con lo que la longitud de curva de la circunferencia de centro el origen y radio 1 *será* $4\frac{\pi}{2} = 2\pi$.