LGEBRA LINEAL 4 de Enero 2014 MATIC TS de Ingenieros Informáticos PM	APELLIDO 1º: ________ APELLIDO 2º: ________ NOMBRE: ________ Nº MATRÍCULA:	TIEMPO: **2 horas** NOTA FINAL:

21 1. Para cada $a \in \mathbb{R}$, se considera el conjunto de vectores $C_a = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ a \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) **(0,5 puntos)** Estudia para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, el conjunto C_a es linealmente independiente.

b) **(1 punto)** Para el valor $a = -1$, obtén una base del subespacio $V = \mathcal{L}(C_a)$.

c) **(1 punto)** Para el valor $a = -1$, calcula las coordenadas del vector $\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ en la base obtenida en el apartado anterior.

22 2. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x - y = 0 \\ z + t = 0 \end{array} \right\}, \qquad T = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

a) **(0.5 puntos)** Obtén una base del subespacio S.

b) **(0.5 puntos)** Obtén unas ecuaciones implícitas del subespacio T.

c) **(0.6 puntos)** Obtén una base del subespacio intersección de ambos, $S \cap T$.

d) **(0.6 puntos)** Obtén unas ecuaciones paramétricas del subespacio suma de ambos, $S + T$.

e) **(0.3 puntos)** Verifica que se cumple la fórmula de las dimensiones.

3 3. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz en las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) **(1 punto)** Halla una base del núcleo y otra base de la imagen de f. Comprueba que se verifica la fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales.

b) **(0.5 puntos)** Razona si f es monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo.

c) **(1 punto)** Calcula la matriz $A' = M(f, \mathcal{B}_C^4, \mathcal{B})$ de la aplicación respecto de las bases $\mathcal{B}_C^4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

CONTINÚA AL DORSO $\longrightarrow\longrightarrow$

24

4. *a*) **(1.5 puntos)** Diagonaliza, si es posible, las siguientes matrices sabiendo que $\lambda = 2$ es autovalor doble:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) **(1 punto)** Halla $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que sus autovalores son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = -1$, con autovectores asociados $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivamente.

ÁLGEBRA LINEAL 14 de Enero 2014	APELLIDO 1º: APELLIDO 2º:	TIEMPO: 2 horas
DMATIC ETS de Ingenieros Informáticos UPM	NOMBRE: Nº MATRÍCULA:	NOTA FINAL:

25

1. Se considera el siguiente subespacio S y vector $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}0\\3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5\\3\\5\end{pmatrix}\right\}, \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix}5\\0\\-5\\7\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Se pide:

(a) **(0,7 puntos)** Halla una base ortogonal de S por el método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

(b) **(0,7 puntos)** Halla una base ortonormal de $S^{\perp}$, subespacio complementario ortogonal de S.

(c) **(0,7 puntos)** Obtén la proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre $S^{\perp}$ y la proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre S. Escribe una relación entre $P_S(\mathbf{v})$ y $P_{S^\perp}(\mathbf{v})$.

(d) **(0,4 puntos)** Halla la distancia entre el vector $\mathbf{v}$ y el subespacio S.

26

2. **(2,5 puntos)** Diagonaliza ortogonalmente la matriz $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 2\\ -2 & 2 & -2\end{pmatrix}$.

$p(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda - 16$

λ 2 doble, -4

27

3. Dadas las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

(a) **(0,5 puntos)** Demuestra que A_1 y A_2 son matrices ortogonales y A_3 no lo es.

(b) **(2 puntos)** Clasifica las aplicaciones ortogonales definidas por las matrices A_1, A_2 y la matriz producto $A_1 \cdot A_2$, dando sus elementos geométricos.

28

4. (a) **(1 punto)** Halla la ecuación matricial de la reflexión (simetría) en el plano respecto de la recta de ecuación $y = 2x + 1$.

(b) **(1 punto)** Demuestra que la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

define un movimiento en el plano. Clasifica el movimiento, dando sus elementos geométricos.

(c) **(0,5 puntos)** Razona cuál puede ser el resultado de la composición de dos reflexiones (simetrías) en el plano.

NOMBRE:

NOTA…………

EXAMEN de RESCATE (15/1/2014) 1B y 4B

29 **1.** *(2.5 ptos.)*Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{S} \equiv \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-y+2z-t=0 \\ 4x+y+4z+t=0 \end{cases} \text{ y } \mathbf{T} \equiv \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\\3\end{pmatrix}\right\}, \text{ se pide:}$$

a) *(0,5 ptos.)* Obtener una base del subespacio **S** b) *(0,5 ptos.)*Obtener ecuaciones implícitas de **T** c) *(0,6 ptos.)* Obtener una base del subespacio intersección de ambos: d) *(0,6 ptos.)* La base Usual del subespacio SUMA de ambos e) *(0,3 ptos.)*Verificar que se cumple la fórmula de las dimensiones

30 **2.** *(2.5 ptos)* Dado el subespacio vectorial $\mathbf{U} \equiv \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ en $\mathbb{R}^4$ Se pide:

A) *(1pto.)* Determinar una base ortonormal del mismo

B) *(1pto.)* Calcular las ecuaciones implícitas de su complemento Ortogonal.

C) *(0.5 ptos.)* Proyectar el vector $\vec{v} = (1,1,1,3)$ sobre el subespacio vectorial U.

31 **3.** *(1.5 ptos.)* Dada una aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de manera que

$$f(1,1,1) = (1,-1,1), f(-1,1,1) = (1,2-2,), f(-1,-2,1) = (1,0,0).$$

Se pide,:

A) *(0.5 ptos.)* Obtener su matriz con respecto a las bases canónicas $\mathcal{M}(f, B_3^C, B_3^C)$.

B) *(0.5 ptos.)* Obtener la matriz de f respecto de la base $B' = \{(1,1,1), (-1,1,1), (-1,-2,1)\}$ en el espacio inicial y la base canónica en el final, $\mathcal{M}(f, B', B_3^C)$

C) *(0,4 ptos.)* Hallar la imagen de f. *(0,1 ptos.)*¿Es epimorfismo? ¿ Por qué?

32 **4.** *(2.5 ptos.)*Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

a) *(1,5 ptos.)* Calcular A^{36}, usando la fórmula de diagonalización

b) *(1pto.)* Especificar la base de diagonalización asociada

33 **5.** *(1pto.)* Clasificar y calcular los elementos geométricos de las aplicaciones ortogonales cuyas matrices asociadas son, respectivamente:

a) $(0{,}5, ptos.)\ M(f, B^C{}_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

b) $(0{,}5, ptos.)\ M(g, B^C{}_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

OBSERVACIONES: No se permite el uso de calculadoras o dispositivos electrónicos
Para realizar el examen disponen de dos horas.

Conv. Extraordinaria
8 de Julio de 2014

ÁLGEBRA LINEAL

Tiempo 2h.

APELLIDOS:
NOMBRE:

34

1. Se consideran los subespacios S y T de $\mathbb{R}^4$ siguientes:
S es el subespacio generado por el conjunto de vectores $\{(1,0,2,-1),(1,1,3,0),(0,1,1,1)\}$.
T es el subespacio definido por las ecuaciones implícitas $\begin{cases} 3x-3y+z-t=0 \\ x-y+t=0 \\ x-y+z-3t=0. \end{cases}$

   (a) **(0.5 puntos)** Averiguar si el vector $(1,2,4,1)$ pertenece al subespacio S.
   (b) **(0.5 puntos)** Hallar las dimensiones de los subespacios S y T.
   (c) **(0.5 puntos)** Hallar una base y la dimensión del subespacio $S\cap T$.
   (d) **(0.5 puntos)** Halla la dimensión del subespacio $S+T$.

35

2. **(2 puntos)** Sea la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\forall(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$,
$$f(x,y,z,t)=(x+2y+t,y-z+2t,x+4y-2z+5t).$$
Hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas de la Imagen y del Núcleo de f, explicando por qué razón se verifica que $\dim(\mathrm{Im}(f))+\dim(\mathrm{Ker}(f))=4$.

36

3. **(2 puntos)** Dadas las matrices
$$A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\1&1&1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&3\\0&0&1\end{pmatrix},$$
estudiar si son diagonalizables. En caso afirmativo, hallar la forma diagonal, una base B de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores y la matriz de paso de B a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

CONTINÚA AL DORSO

37 4. Dado el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} x + y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{array} \right\}$, se pide:

(a) **(0.7 puntos)** Obtener el subespacio complemento ortogonal de S, $S^{\perp}$, y dar una base ortonormal de $S^{\perp}$.

(b) **(0.7 puntos)** Obtener la matriz asociada a la proyección ortogonal sobre el subespacio S, $P_S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, respecto de la base canónica en $\mathbb{R}^3$.

(c) **(0.6 puntos)** Dado el vector $\bar{u} = (1, 5, 1)$, calcular la distancia entre el vector $\bar{u}$ y el subespacio S.

38 5. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal de manera que, siendo $B_C = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, es

$$f(\bar{e}_1) = \frac{1}{3}\bar{e}_1 - \frac{2}{3}\bar{e}_2 - \frac{2}{3}\bar{e}_3, \quad f(\bar{e}_2) = -\frac{2}{3}\bar{e}_1 + \frac{1}{3}\bar{e}_2 - \frac{2}{3}\bar{e}_3, \quad f(\bar{e}_3) = \frac{b}{3}\bar{e}_1 - \frac{2}{3}\bar{e}_2 + \frac{1}{3}\bar{e}_3.$$

se pide:

(a) **(1 punto)** Calcular el valor de b de manera que f sea una aplicación ortogonal.

(b) **(1 punto)** Para el valor de b obtenido en el apartado (a), hallar la matriz de f con respecto a la base canónica $M(f, B_C)$ y deducir de ella si conserva o cambia la orientación.

Algebra Lineal
Primer examen parcial

Grado en Ingeniería Informática
23 octubre 2015

ETSIINF UPM

Apellidos: Nombre:

Nº de matrícula:

39 1º) (2 puntos) Dados los vectores $u_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, u_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, u_3=\begin{pmatrix}1\\-5\\3\\5\end{pmatrix}$

a) Encontrar una combinación lineal de dichos vectores que sea igual al vector $\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}$

b) ¿Es posible encontrar también una combinación lineal de los vectores u_1 y u_2 que den como resultado el mismo vector? En caso afirmativo, obtenerla.

40 2º) Sean $S=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 ; x+y=0\right\}$ y $T=L\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ dos subespacios de $\mathbb{R}^4$.

a) (0,5 puntos) Hallar unas ecuaciones implícitas, una base y la dimensión del subespacio $S\cap T$.
b) (0,5 puntos) Hallar una base y la dimensión del subespacio $S+T$.
c) (0,5 puntos) Estudiar si la suma de los subespacios S y T es directa.
d) (0,5 puntos) Justificar si S y T son subespacios complementarios.

41 3º) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la base $B=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

a)(1 punto) Hallar las matrices de cambio de la base B a la base canónica B_c y de cambio de la base canónica B_c a la base B.

b) (1 punto) Sabiendo que la matriz del endomorfismo $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ en la base B es $M_f(B,B)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$,

calcular la matriz $M_f(B_c,B_c)$ del endomorfismo f en la base canónica B_c.

42 4º) (2 puntos) Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, una aplicación lineal tal que $f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

a) Calcular su matriz referida a las bases canónicas, $M_f\ B_c, B_c$

b) Calcular una base del núcleo, Ker(f).

c) Las ecuaciones implícitas de la imágen, Im(f).

d) ¿Es monomorfismo? ¿Es epimorfismo? Sin explicación la respuesta no es válida.

43 5º) a) (1.5 puntos) Diagonalizar la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&-1&6\\0&-1&4\end{pmatrix}$.

b) (0.5 puntos) Hallar A^6 usando la diagonalización de A.

TIEMPO: 2 HORAS NO SE PERMITE EL USO DE DISPOSITIVOS ELECTRÓNICOS

ALGEBRA LINEAL
6 de Julio de 2015

APELLIDO 1º: ______________________
APELLIDO 2º: ______________________

TIEMPO: 2 horas

44

1. **(2 puntos)** Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{c} x+y=0 \\ z-t=0 \end{array} \right\}, \qquad T = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ -\beta \\ -\alpha+\beta \\ \beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\},$$

se pide:

a) Obtén una base del subespacio S.

b) Obtén unas ecuaciones implícitas del subespacio T.

c) Halla una base del subespacio suma de ambos, $S+T$.

d) Deduce la dimensión del subespacio intersección de ambos, $S \cap T$.

45

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal que verifica las siguientes condiciones:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

a) **(0.7 puntos)** Obtén la matriz de la aplicación lineal f, respecto de las bases canónicas.

b) **(0.7 puntos)** Obtén el núcleo y la imagen de f.

c) **(0.6 puntos)** Estudia si f es biyectiva, suprayectiva o inyectiva.

46

3. **(2 puntos)** Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que en la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ tiene como matriz asociada

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & -4 & 9 \\ 0 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

a) Demuestra que, en la base canónica, la matriz del endomorfismo es la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Halla la matriz diagonal asociada a la matriz A, los subespacios propios y una base ortonormal $\mathcal{B}^*$ de vectores propios.

47

4. Se considera el subespacio $S = \mathcal{L}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$. Se pide:

$\bar{u}_1(1,0,1,2)$ $\bar{u}_2(-1,0,1,0)$ $\bar{u}_3(a,1,b,-1)$. $\bar{v}(1,3,5,6)$

a) Determina a y b números reales tales que $\mathbf{u}_3$ sea ortogonal a los dos vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$.

b) Obtén la proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre el subespacio S.

c) Halla la distancia entre el vector $\mathbf{v}$ y el subespacio S.

d) Halla una base ortonormal de $S^\perp$, subespacio complementario ortogonal de S.

48

5. *a)* **(1 punto)** Dada la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, demuestra que define una aplicación ortogonal, clasifícala y halla sus elementos geométricos.

b) **(1 punto)** Halla las ecuaciones de un giro en el plano cuyo centro es el punto $(1, 2)$ y transforma el punto $(0, 0)$ en el punto $(3, 1)$.

Álgebra Lineal Examen de Control 2º Parcial	1er Apellido: ______	18 de diciembre de 2015
Departamento Matem. Aplic. TIC. ETS de Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	2º Apellido: ______ Nombre: ______ Número de matrícula:	Tiempo 2 horas **Calificación:**

49 1. (3 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcular el polinomio característico y el espectro de A. $p(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1$

b) Obtener bases de los subespacios propios de A.

c) Estudiar si A es diagonalizable y en caso afirmativo, diagonalizar.
Encontrar una matriz B, tal que $B^3 = A$

50 2. (4 puntos) Dado el subespacio vectorial: $S = \mathcal{L}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ y el vector $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$:

a) Obtener una base del complementario ortogonal de S: $B_{S^\perp}$

b) Obtener una base ortonormal de S; B_S^{on}

c) Calcular la proyección ortogonal del vector u sobre el subespacio S.
Obtener la distancia y el ángulo que forma u con el subespacio S.

d) Construir la matriz de la aplicación proyección ortogonal sobre S.
Diagonalizar ortogonalmente la matriz de la proyección.

51 3. (3 puntos)

a) Construir las ecuaciones de una simetría en el plano, respecto de la recta $x - 2y = 1$

b) Clasificar, dando los elementos geométricos, el movimiento de ecuación:
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c) Clasificar, dando los elementos geométricos, la aplicación ortogonal cuya matriz en base canónica es:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

NO SE PERMITE EL USO DE DISPOSITIVOS ELECTRÓNICOS

ALGEBRA LINEAL | Grado en Ingeniería Informática | ETSIINF

EXAMEN JULIO 2016

APELLIDOS:	Nº Matrícula:
NOMBRE:	

Tiempo disponible: 2 horas — No se permite el uso de dispositivos electrónicos

52

1. (2 puntos)

Sean S y T los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones $S: \begin{cases} 2x & +3y & -z & =0 \\ -4x & -6y & +2z & =0 \\ & & t=0 \end{cases}$ y

$$T=\begin{cases} x= & 2\lambda & +\mu \\ y= & -\lambda & \\ z= & & 2\mu \\ t= & \lambda & \end{cases}$$

a) Halla las dimensiones de S y T.

b) Halla una base y la dimensión de $S \cap T$.

c) Halla una base de $S+T$ y razona si la suma $S+T$ es directa.

53

2. (3 puntos)

Sea $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo tal que su matriz referida a la base canónica B_c de $\mathbb{R}^3$, es $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Obtén unas ecuaciones implícitas de la imagen, $\mathrm{Im}(f)$.

b) Estudia si A es diagonalizable.

c) Halla una base de $\ker(A^2)$ y halla un vector $\vec{v}$ tal que $\vec{v} \in \ker(A^2)$ y $\vec{v} \notin \ker(A)$.

d) Sea la base de $\mathbb{R}^3$, $B' = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Calcula la matriz A' del endomorfismo f en la base B' en espacio inicial y final.

54

3. (2 puntos)

Sea W el subespacio de de ecuaciones $W=\begin{cases} x= & 2\lambda & \\ y= & -2\lambda & +\mu \\ z= & & -\mu \end{cases}$

a) Halla una base ortonormal de W.

b) Halla una base ortonormal del subespacio ortogonal a W.

c) Halla la proyección ortogonal del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sobre el subespacio W.

55

4. (2 puntos)

Demuestra que la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ define una aplicación ortogonal respecto de la base canónica. Clasifica dicha aplicación ortogonal y halla sus elementos geométricos.

56

5. (1 punto)

Halla el eje de la simetría en $\mathbb{R}^2$ que transforma los puntos *A(0,0)* y *B(0,1)* en los puntos *A'(1,-1)* y *B'(2,-1)* respectivamente.

Álgebra Lineal

Primer examen parcial Grupos: 3 y 4MB

Grado en Ingeniería Informática

2 de Noviembre de 2016

NOMBRE Y APELLIDOS:

P1	P2	P3	P4	SUMA

57 **1.** *(3 puntos)* Sean $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4; \begin{cases} x+z=0 \\ y+t=0 \end{cases} \right\}$ y $T = L\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ dos subespacios de $\mathbb{R}^4$.

a) *(1 puntos)* Hallar unas ecuaciones implícitas, una base y la dimensión del subespacio $S \cap T$.
b) *(1 puntos)* Hallar una base y la dimensión del subespacio $S + T$.
c) *(0,5 puntos)* Calcular una base del subespacio $(S + T) \cap S$
d) *(0,5 puntos)* Calcular una base del subespacio $(S \cap T) + T$

58 **2.** *(1,5 puntos)* En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases $B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ y $B^* = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$, y se pide:

a) *(1 ptos.)* Expresar las ecuaciones del cambio de base de B a B^*

b) *(0,5 puntos)* Calcular las coordenadas de $\overrightarrow{v_B} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B$ con respecto a la base B^*

59 **3.** *(2,5 puntos)* Dado el subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{S} \equiv \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

a) *(1,5 puntos)* Calcular la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ sobre dicho subespacio.

b) *(1 puntos)* Calcular la distancia y el ángulo que forma dicho vector sobre el subespacio S

60 **4.** *(3 ptos.)* Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{S} \equiv \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad \mathbf{T} \equiv \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$., se pide:

a) *(1 ptos.)* Analizar si son ortogonales entre sí.
b) *(1,5 ptos.)* Obtener las ecuaciones implícitas del complemento ortogonal de **T**
c) *(0,5 ptos.)* Obtener un vector que sea ortogonal a todos los vectores que están en el subespacio **T**.

NO SE PERMITE EL USO DE NINGÚN DISPOSITIVO PARA REALIZAR EL EXAMEN: LÁPIZ Y PAPEL

Ex. 2 de NOV. de 2016 TIEMPO: 2 horas

61 (1.) Para $a \in \mathbb{R}$ se considera el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ -x - y + at = a \\ x - z + a^2 t = a \end{cases}$$

(a) 1'5p Clasificar el sistema según valores de a, y, en caso de ser compatible indeterminado, indica el número de parámetros de los que dependen sus soluciones

(b) 1p Para $a=2$ resuelve el sistema y analiza si el conjunto de soluciones es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

---

62 (2) Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$S = \left\{(x,y,z,t) : \begin{matrix} x+z=0 \\ y+t=0 \end{matrix}\right\}, \quad T = L\{(0,2,-1,1), (1,1,-1,-1), (1,-1,0,-2)\}$$

(a) 1p. Halla una base de $S \cap T$

(b) 1p Halla una base de $S+T$. ¿Es la suma directa?

(c) 0'5p Dimensión y una base de $(S \cap T) + S$

---

63 (3) Sea $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$: $f(x,y,z,t) = (x+z, y+z+t, 2x+3z+t)$

(a) 0'5p. Matriz asociada en las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$.

(b) 0'7p Ecuaciones paramétricas del subespacio núcleo de f

(c) 0'7p Dimensión y una base del subespacio imagen de f.

(d) 0'6p. Determinar si f es monomorfismo y/o epimorfismo.

---

64 (4) Sea f endomorfismo: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz en base canónica es $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

(a) 1'5p. Determina si A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ y en caso afirmativo calcula las matrices P y D.

(b) 1p. Sea $B_1 = \{(1,1,0), (1,3,0), (0,0,1)\}$. Halla la matriz asociada a f en base B_1 de $\mathbb{R}^3$ (inicial y final)

2º PARCIAL 18/1/2017 TIEMPO: 2 horas

(65) (1) 2'5p Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que:

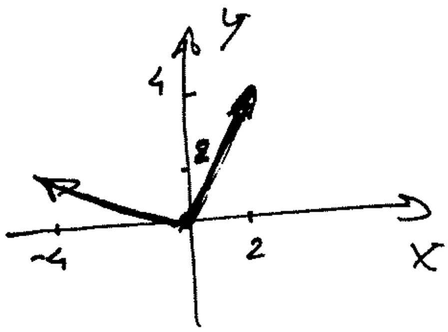
$$M(f; B_3^c) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

a) 1p. Calcular sus autovalores y una base de cada uno de los subespacios de autovectores:

$$\mathcal{B}(\mathrm{Ker}(A-\lambda I)), \forall \lambda \in \sigma(A)$$

b) 1'5p. Diagonalizarla normal y ortogonalmente, si fuera posible. Especificar, en este caso, las bases de diagonalización y la matrices de paso respectivas.

(66) (2) 2'5p. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, una aplicación ortogonal de manera que $f\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, si geométricamente planteamos la transformación de un vector en otro mediante una simetría con respecto a un eje que pasa por el origen de coordenadas.



Se pide:

a) 1p. Especificar las ecuaciones del eje de simetría correspondiente.

b) 1'5p. Plantear las ecuaciones de f referida a la base canónica.

(67) (3) 2'5p. a) 1p. Teniendo en cuenta la definición de aplicación ortogonal, analizar si puede existir alguna $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de manera que:

$$g\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad y \quad g\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) 1'5p Clasificar y calcular los elementos geométricos del endomorfismo ortogonal de matriz: $M(f, B_3^c) = A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

---

(68) (4) 2'5p Dado el endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuya matriz con respecto a la base canónica es $M(f, B^c) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) 1p. Determinar bases respectivas de los subespacios $Ker(f)$ e $Im(f)$.

b) 1'5p Dada la base $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Calcular la matriz del endomorfismo respecto a la misma: $M(f, B')$

Nota: No se permite el uso de calculadoras o dispositivos electrónicos.

ÁLGEBRA LINEAL 18 Enero 2017 Parcial 1 DMATIC ETSIINF, UPM	1er APELLIDO: ________ 2º APELLIDO: ________ NOMBRE: ________ Nº MATRÍCULA:	TIEMPO: 2 horas PUNTOS: NOTA FINAL:

69

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y el vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   (a) **(0.5 puntos)** Obtén la forma escalonada reducida por filas de la matriz A.

   (b) **(0.5 puntos)** Halla una base $\mathcal{B}$ del subespacio $Col(A)$, generado por las columnas de A.

   (c) **(0.5 puntos)** Estudia si el vector $\vec{u}$ pertenece al subespacio $Col(A)$. En caso afirmativo, determina sus coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}$ del apartado anterior.

   (d) **(1 punto)** Resuelve el sistema matricial $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

70

2. Sean los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{r} x - 5y + 3z \quad = 0 \\ y + \quad t = 0 \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad T = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   (a) **(0.5 puntos)** Halla una base de S.

   (b) **(0.5 puntos)** Halla unas ecuaciones implícitas de T.

   (c) **(0.5 puntos)** Halla, si es posible, una base de $S \cap T$.

   (d) **(0.5 puntos)** Aplicando la fórmula de las dimensiones de subespacios vectoriales, determina $S + T$.

   (e) **(0.5 puntos)** ¿Es $S + T$ suma directa? ¿Son S y T subespacios complementarios? Justifica las respuestas.

71

3. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida en función de los parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z - 2t \\ y + z + t \\ \alpha y + z + t \\ -y - z - \beta t \end{pmatrix}.$$

   (a) **(0.5 puntos)** Halla la matriz asociada a la aplicación lineal f respecto de la base canónica en los espacios inicial y final.

   (b) **(1 punto)** Para $\alpha = 0$, halla todos los valores de β para que f sea un isomorfismo.

   (c) **(1 punto)** Determina los valores de α y β para que $\dim(\ker(f)) = \dim(\operatorname{im}(f))$.

72

4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ a & -3 & 2 \end{pmatrix}$, donde $a \in \mathbb{R}$.

(a) **(1.5 puntos)** Para $a = 2$, analiza si la matriz A es diagonalizable. En caso afirmativo, determina la matriz diagonal D y la matriz de la diagonalización P, y escribe D en función de A y P.

(b) **(1 punto)** Calcula el valor de a para que la matriz A tenga como autovalor $\lambda = 4$.

NO SE PERMITE EL USO DE DISPOSITIVOS ELECTRÓNICOS

ÁLGEBRA LINEAL **18 Enero 2017** **Parcial 2** DMATIC ETSIINF, UPM	1.er APELLIDO: ______ 2.º APELLIDO: ______ NOMBRE: ______ N.º MATRÍCULA:	TIEMPO: **2 horas** PUNTOS: NOTA FINAL:

73

1. Sean $S = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^4$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\4\\1\\-1\end{pmatrix}$.

   (a) **(0,5 puntos)** Halla una base ortonormal del subespacio S.

   (b) **(0,5 puntos)** Halla la proyección ortogonal del vector $\vec{v}$ sobre S.

   (c) **(0,5 puntos)** Calcula la distancia del vector $\vec{v}$ al subespacio S.

   (d) **(0,5 puntos)** Obtén la matriz asociada a la aplicación proyección ortogonal sobre S respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

   (e) **(0,5 puntos)** Halla unas ecuaciones paramétricas del subespacio complementario ortogonal de S.

74

2. **(2,5 puntos)** Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo cuya matriz asociada, respecto de la base canónica $\mathcal{B}_c^3$, es

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

   Analiza si el endomorfismo es ortogonalmente diagonalizable y, en caso afirmativo, diagonaliza f ortogonalmente.

75

3. **(2,5 puntos)** Sea la simetría en $\mathbb{R}^2$ respecto de una recta que pasa por el origen, tal que la imagen del vector $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$. Halla la recta de simetría y la matriz asociada a la simetría respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

76

4. (a) **(0,5 puntos)** ¿Cuándo se dice que una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es ortogonal respecto del producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$?

   (b) **(0,5 puntos)** Determina si puede existir alguna aplicación ortogonal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que las imágenes de $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ sean $f(\vec{u}) = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ y $f(\vec{v}) = \begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

   (c) **(1,5 puntos)** Clasifica y determina todos los elementos geométricos de la aplicación ortogonal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto la base canónica es:

NO SE PERMITE EL USO DE DISPOSITIVOS ELECTRÓNICOS

Álgebra Lineal Examen extraordinario de Julio	1^er^ Apellido: ________________	3 de Julio de 2017
	2º Apellido: ________________	Tiempo 2 h.
Depto. Matemática Aplicada T.I.C. E.T.S. de Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: ________________ Número de matrícula:	**Calificación:**

77

1. (2, 5 puntos) Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha+\beta-\gamma \\ -\beta-3\gamma \\ \alpha-\beta-5\gamma \\ \alpha-2\gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{y} \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{rcl} x-y-2t & = & 0 \\ x-z-2t & = & 0 \\ x-2y-3z-2t & = & 0 \end{array} \right\}.$$

se pide:

a) Hallar, una base B_1 y unas ecuaciones implícitas, de S_1.

b) Dado el vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, determinar si $\vec{u} \in S_1$.

En caso afirmativo obtener las coordenadas de $\vec{u}$ respecto de la base B_1 de S_1.

c) Hallar una base B_2 y la dimensión de S_2.

d) Justificar que S_1 y S_2 son subespacios complementarios.

78

2. (2, 5 puntos) Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, donde $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a(x-z) \\ y-t \\ -x+z \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se pide:

a) Hallar una base de $\ker(f)$.

b) Para el caso $a = -1$, hallar unas ecuaciones paramétricas del subespacio imagen de f.

79

3. (2, 5 puntos) Sea $B^c = \{\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que:

$$f(\vec{e}_1) = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3, \qquad f(\vec{e}_2) = 4\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \qquad f(\vec{e}_3) = -4\vec{e}_1 - 5\vec{e}_3$$

a) Si A es la matriz de f referida a la base canónica, calcular su polinomio característico y comprobar que los autovalores de A son: 3, 9 y -3.

b) Calcular una base para cada uno de los subespacios propios asociados a dichos autovalores.

c) Justificar si el endomorfismo dado es o no es diagonalizable.

d) Justificar si admite o no diagonalización ortogonal. Si fuera así, calcular una matriz diagonal D y una matriz ortogonal P tal que $A = PDP^{-1}$.

80

4. (2, 5 puntos)

a) Clasificar la aplicación ortogonal definida por la siguiente matriz: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Obtener la matriz de la simetría en el plano, respecto de una recta que pasa por el origen, que transforma el punto $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ en el punto $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dar la recta de simetría.

NO SE PERMITE EL USO DE DISPOSITIVOS ELECTRÓNICOS

Álgebra Lineal Primer examen parcial	1^{er} Apellido: ______________	3 de noviembre de 2017
Departamento Matem. Aplic. TIC. ETS de Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	2^{o} Apellido: ______________ Nombre: ______________ Número de matrícula:	Tiempo 2 horas **Calificación:**

1. **(2 ptos.)** Sean $S = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ y $T = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \ x - 2z + 2t = 0\right\}$

   a) Obtener unas ecuaciones implícitas de S y una base de T.

   b) Dar una base de $S \cap T$ y otra de $S + T$.

2. **(2 ptos.)**

   a) Calcular la matriz de cambio de base, de la base B_1' a la base B_2', siendo
   $B_1' = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ y $B_2' = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

   b) Dar las coordenadas del vector $\vec{u} = -2 + t + 3t^2 \in P_2(\mathbb{R})$ en cada una de las siguientes bases: $B_1 = \{t + t^2, 2 + t - t^2\}$ y $B_2 = \{1 + t, 1 - t^2\}$.

3. **(2 ptos.)** Se considera el código lineal (subespacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_2$), que tiene por matriz de paridad $H = \begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&1&1&1\end{pmatrix}$

   a) Indicar el número de elementos que tiene este código.

   b) Si usando ese código, se ha recibido $\vec{y} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, indicar cuál ha sido la palabra enviada.

4. **(2 ptos.)** Sea $U = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\right\}$

   a) Obtener una base ortogonal de U

   b) Obtener una base ortonormal del subespacio complementario ortogonal a U: $U^{\perp}$

5. **(2 ptos.)**

   a) Calcular la proyección ortogonal de $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sobre $U = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x+y-z = 0\right\}$

   b) Resolver, por mínimos cuadrados, el sistema incompatible $\begin{cases} x + y = 3 \\ -2y = -1 \\ x - y = -1 \end{cases}$

No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.

Álgebra Lineal Recuperación del primer parcial	1er Apellido: ______	16 de enero de 2018
Departamento Matem. Aplic. TIC. ETS de Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	2º Apellido: ______ Nombre: ______ Número de matrícula:	Tiempo: 2 horas **Calificación:**

86

1. (2,5 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

   a) Calcular la forma escalonada reducida por filas de la matriz A.

   b) Calcular la dimensión del subespacio asociado $\operatorname{col}(A)$ generado por las columnas de la matriz.

   c) Calcular el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$.

   d) Calcular la inversa de A, si existe.

87

2. (2,5 puntos) Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \mathcal{L}\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \qquad T = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{rcl} x + y - z & = & 0 \\ y + z - 2t & = & 0 \end{array}\}$$

   a) Calcular unas ecuaciones implícitas de S y una base de T.

   b) Obtener una base de $S + T$ y una base de $S \cap T$.

88

3. (2,5 puntos) Sea $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\}$

   a) Obtener una base ortogonal de U.

   b) Obtener una base ortonormal del subespacio complementario ortogonal a U: $U^\perp$

89

4. (2,5 puntos)

   a) Calcular la proyección ortogonal de $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sobre $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\}$

   b) Resolver, por mínimos cuadrados, el sistema incompatible $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 3 \\ -x + y & = & 1 \\ -y & = & 1 \end{array} \right.$

No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.

Álgebra Lineal Segundo examen parcial	1er Apellido: ______________	16 de enero de 2018
Departamento Matem. Aplic. TIC. ETS de Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	2º Apellido: ______________ Nombre: ______________ Número de matrícula:	Tiempo: 2 horas **Calificación:**

90 1. (2, 5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Estudiar si A es diagonalizable, y en caso afirmativo diagonalizarla.

b) Indicar si las matrices A y B son ortogonalmente diagonalizables, y en caso afirmativo diagonalizar ortogonalmente.

91 2. (2, 5 puntos) Dado el endomorfismo $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ del que se sabe que:

- El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 1$ es: $S_{\lambda=1} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + y - z - t = 0\}$.
- Una base del subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 0$ es: $B_{S_{\lambda=0}} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$.

Se pide:

a) Obtener la matriz del endomorfismo, en una base de $\mathbb{R}^4$ formada por autovectores de g.

b) Obtener la matriz del endomorfismo en la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

c) Analizar si el endomorfismo g es una proyección ortogonal sobre un subespacio.

92 3. (2, 5 puntos) Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, cuya matriz con respecto a las bases canónicas es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 6 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular la dimensión y la base usual del subespacio $\mathrm{im}(f)$.

b) Obtener unas ecuaciones implícitas del subespacio $\mathrm{im}(f)$.

c) Comprobar que se cumple la fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales y estudiar si f es un isomorfismo, monomorfismo y/o epimorfismo.

93 4. (2, 5 puntos)

a) Construir la matriz de una simetría en $\mathbb{R}^2$ respecto de la recta de ecuación implícita $x - y = 0$.

b) Clasificar la aplicación ortogonal cuya matriz, respecto de la base canónica, es $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Dar sus elementos geométricos.

c) Estudiar si $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ es la matriz de una aplicación ortogonal respecto de una base ortonormal.

No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.

Álgebra Lineal Examen extraordinario de Julio	1er Apellido: ______ 2º Apellido: ______ Nombre: ______ Número de matrícula:	28 de junio de 2018 Tiempo 2 horas Calificación:
Departamento Matem. Aplic. TIC. ETS de Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid		

94

1º Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 1 \\ 2 & -1 & 1 & a^2 \end{pmatrix}$, donde $a \in \mathbb{R}$, $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Utilizando operaciones elementales de fila estudiar el rango de la matriz A, según los valores del parámetro a.

b) Para $a = 0$, halla una base y la dimensión del espacio de columnas de la matriz A y determina, si es posible, las coordenadas de los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ respecto de dicha base.

95

2º Sean $S = L\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ y $T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ / \ 3x - y - 2z - 4t = 0 \right\}$

a) Obtener las ecuaciones implícitas y paramétricas que definen el subespacio S de $\mathbb{R}^4$, y hallar una base del subespacio T.

b) Hallar una base del subespacio vectorial $S + T$. ¿Es $S + T$. suma directa? Justificar la respuesta.

96

3º Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, que verifica las siguientes condiciones:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un autovalor asociado a $\lambda = 1$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Obtener la matriz de la aplicación f, respecto de la base canónica: $A = M\left(f, B^c_{\mathbb{R}^4}, B^c_{\mathbb{R}^4}\right)$.

b) Calcular el núcleo y la imagen de dicha aplicación lineal y estudiar si se trata de un monomorfismo, epimorfismo y/o isomorfismo.

c) Estudiar si f es diagonalizable, y en caso afirmativo diagonalizar obteniendo una matriz diagonal D y una matriz regular P tales que $D = P^{-1}AP$.

97

4º Clasificar la aplicación ortogonal de matriz $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Primer Parcial
3 de Noviembre de 2017

ÁLGEBRA LINEAL

Tiempo 2h.

APELLIDOS:
NOMBRE:

78 **1.** Dado el sistema

$$\begin{cases} x + 3y + 3z = m \\ x + my + 3z = -m \\ x + 3y + mz = 3 \end{cases}$$

(a) **(1.5 puntos)** Expresar el sistema en forma matricial $AX = B$ y hallar la solución $X = A^{-1}B$ cuando $m = 2$.

(b) **(1 punto)** Hallar para qué valor de m la solución es $x = m$, $y = m$ y $z = -m$.

79 **2.** Consideremos los subespacios U y W de $\mathbb{R}^3$ tales que las ecuaciones paramétricas de U son:

$$U = \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$$

y la ecuación implícita de W es $x - y + 2z = 0$.

(a) **(1 punto)** Encontrar bases de U, W.

(b) **(1 punto)** Encontrar bases de $U + W$ y $U \cap W$. ¿Es $U + W$ una suma directa?

(c) **(0.5 puntos)** Dar unas ecuaciones paramétricas de $U + W$ e implícitas de $U \cap W$.

100 **3.** Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por

$$f(1,0,0) = (1,0,-1,0),\ f(-1,0,1) = (-1,a^2,a+1,a),\ f(-1,1,0) = (a-1,1,1,a),\ a \in \mathbb{R}.$$

(a) **(0.5 puntos)** Escribe la matriz asociada a f con respecto a las bases canónicas en los espacios inicial y final.

(b) **(0.8 puntos)** Determina todos los valores de a para los cuales f es monomorfismo.

(c) **(0.6 puntos)** Para $a = 1$, halla una base del subespacio núcleo y una base del subespacio imágen de f.

(d) **(0.6 puntos)** Para $a = 1$, halla la matriz asociada a f con respecto a la base $\mathcal{B} = \{(0,0,1), (0,1,1), (1,0,0)\}$ en el espacio inicial y la base canónica en el espacio final.

101 **4.** Sea el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ respecto a la base canónica en los espacios inicial y final.

(a) **(1.5 puntos)** Justifica que f es diagonalizable y determina una báse de diagonalización.

(b) **(1 punto)** Utilizando la diagonalización de la matriz A, calcula A^{2k} con $k \in \mathbb{N}$.

Primer Parcial
25 de Octubre de 2018

ÁLGEBRA LINEAL

Tiempo 2h.

APELLIDOS:
NOMBRE:

102

1. Dados:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) **(0.75 puntos)** Calcular una forma escalonada por filas de la matriz $(A \mid b)$.

(b) **(1 punto)** Calcular la forma escalonada reducida por filas de $(A \mid b)$ en función de los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) **(0.75 puntos)** Discutir, según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, el sistema $A\mathbf{x} = b$ resolviéndolo para los valores de α en los que sea compatible.

103

2. Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$S = L(\{(1,0,-1,1),(0,1,1,1),(1,-1,-2,0)\}) \quad \text{y} \quad T = \left\{ (x,y,z,t) \mid \begin{array}{r} x+y-z-t=0 \\ x-y=0 \end{array} \right\}$$

(a) **(0.75 puntos)** Hallar una base de la intersección de S y T.

(b) **(0.75 puntos)** Hallar unas ecuaciones implícitas de la suma de S y T.

(c) **(0.5 puntos)** Hallar las dimensiones de S, de T, de $S+T$ y de $S \cap T$

(d) **(0.5 puntos)** Razonar si S y T son complementarios.

104

3. Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por $f(x,y,z,t) = (y+t, -x+z, 2x+y-2z)$.

(a) **(0.5 puntos)** Determina la matriz asociada a f respecto a la base canónica de los espacios inicial y final.

(b) **(0.5 puntos)** Halla una base del núcleo de f.

(c) **(0.5 puntos)** Razona si f es un epimorfismo.

(d) **(1 punto)** Dadas $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,0,0),(0,1,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^4$ y $\mathcal{B}_2 = \{(1,1,0),(1,0,1),(1,0,0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$, calcula $\vec{y}_{\mathcal{B}_2} = f(\vec{x}_{\mathcal{B}_1})$ siendo $\vec{x}_{\mathcal{B}_1} = (0,1,1,0)$.

105

4. Dado el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, cuya matriz en la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) **(1.5 puntos)** Hallar, en caso de que sea posible, una base $\mathcal{B}$ respecto a la cual la matriz del endomorfismo sea diagonal.

(b) **(1 punto)** Hallar A^{47}.

Segundo Parcial
11 de Enero de 2019

ÁLGEBRA LINEAL

Tiempo 2h.

APELLIDOS:
NOMBRE:

106
1. Dado el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$

$$S = \mathcal{L}\{(1,1,0,0),(1,0,1,1)\}$$

(a) **(1 punto)** Hallar una base del subespacio complementario ortorgonal de S.

(b) **(1 punto)** Hallar una base ortogonal de S.

(c) **(1 punto)** Hallar la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (0,0,0,1)$ sobre S y sobre $S^{\perp}$.

(d) **(1 punto)** Hallar la distancia entre v y S y determinar el ángulo que forman.

07
2. Sea f un endomorfismo cuya matriz con respecto a la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

se pide:

(a) **(1 punto)** Calcular sus autovalores y sus multiplicidades algebraicas respectivas.

(b) **(1 punto)** Calcular, si existe, una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores asociados al mismo.

(c) **(1 punto)** Obtener una matriz P ortogonal y una matriz D diagonal tal que

$$A = PDP^t.$$

08
3. a) **(1 puntos)** Estudiar si las matrices

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

definen aplicaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$ y clasificar, determinando sus elementos geometricos, las que lo hagan.

b) **(2 puntos)** Halla las ecuaciones del giro en $\mathbb{R}^3$ de eje $\mathcal{L}(\{(0,1,1)\})$ y ángulo $\pi/2$ y halla la imágen del vector $\vec{v} = (2,-3,1)$.

NO SE PERMITE EL USO DE DISPOSITIVOS ELECTRÓNICOS

Examen extraordinario convocatoria de Julio
24 de Junio de 2019

ÁLGEBRA LINEAL

Tiempo 2h.

APELLIDOS:		P1	P2	P3	P4	P5	TOTAL
NOMBRE:							

109 **1.** Considerar el subespacio de $\mathbb{R}^4$

$$S = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\8\\-4\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\1\\4\end{pmatrix}\right\}$$

(a) **(0.75 puntos)** Calcular base, dimensión y ecuaciones implícitas de S.

(b) **(0.75 puntos)** Sea

$$T = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} : \begin{matrix} x+y+z=0 \\ x+z-3t=0 \end{matrix}\right\},$$

calcular unas ecuaciones paramétricas de $S \cap T$.

(c) **(0.5 puntos)** Definir subespacios complementarios en $\mathbb{R}^4$ y determinar si los subespacios S y T son complementarios.

110 **2.** Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\10\end{pmatrix}$$

a) **(0.75 puntos)** Hallar la matriz de la aplicación respecto a la base canónica.

b) **(0.75 puntos)** Hallar una base y la dimensión de los subespacios núcleo e imagen de f.

c) **(0.5 puntos)** Definir isomorfismo de $\mathbb{R}^3$ y razonar si f es isomorfismo.

111 **3.** Dado el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$

$$S = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

se pide

(a) **(0.75 puntos)** Obtener una base de $S^\perp$.

(b) **(0.75 puntos)** Proyectar ortogonalmente el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ sobre S.

(c) **(0.5 puntos)** Calcular la distancia de $\vec{v}$ a S y determina el ángulo que forman.

→→→→→→→→→→→→→**CONTINÚA AL DORSO**→→→→→→→→→→→→→

112 **4.** (**2 puntos**) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Analizar si admite diagonalización ortogonal, diagonalizándola ortogonalmente si es que fuese posible encontrando una matriz D diagonal y una matriz P ortogonal tales que $D = P^t AP$.

113 **5.** a) (**1 punto**) Dar las matrices en las bases canónicas de las siguientes aplicaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$:

i) Giro de ángulo $\frac{\pi}{2}$ centrado en el origen.

ii) Simetría respecto de la recta $x - y = 0$.

Y halllar los vectores imagen del vector $\vec{v} = (2, 0)$ en las dos aplicaciones.

b) (**1 punto**) Dada la matriz

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

estudiar si es la matriz de una aplicación ortogonal en $\mathbb{R}^3$ y, si lo es, clasificarla indicando sus elementos geométricos.

NO SE PERMITE EL USO DE DISPOSITIVOS ELECTRÓNICOS

EXAMEN 29 DE OCTUBRE 2019 – 1º PARCIAL

114

1. Sean

$$\vec{u}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\vec{u}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix},\vec{u}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix},\quad \vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\vec{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix},\vec{v}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad \vec{u}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\\alpha\end{pmatrix},\alpha\in\mathbb{R}.$$

(a) **(0.75 puntos)** Demostrar que $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ es linealmente independiente.

(b) **(0.75 puntos)** Hallar α para que $\vec{u}$ sea combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ y escribir dicha combinación lineal.

(c) **(1 punto)** Sabiendo que $\mathcal{B}_1=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ y $\mathcal{B}_2=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ son bases del mismo subespacio vectorial S, se considera un vector $\vec{x}\in S$ tal que su vector de coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}_1$ es $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$. Hallar el vector $\vec{x}$ y el vector de coordenadas de $\vec{x}$ respecto de la base $\mathcal{B}_2$.

115

2. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$S=\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\qquad \text{y}\qquad T=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4:\ \begin{array}{r}x+y=0\\x-z=0\\x+t=0\end{array}\right\},$$

se pide:

(a) **(0.75 puntos)** Hallar bases de S y T.

(b) **(0.75 puntos)** Hallar unas ecuaciones implícitas de $S+T$.

(c) **(0.75 puntos)** Hallar las dimensiones de $S+T$ y $S\cap T$.

(d) **(0.25 puntos)** Razonar si $S+T$ es suma directa.

116

3. Sea la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^4$, definida por

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\\-1\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

(a) **(1 punto)** Hallar la matriz de la aplicación respecto de la base canónica en el espacio inicial y final.

(b) **(0.75 puntos)** Obtener las dimensiones de los subespacios núcleo e imagen de f.

(c) **(0.75 puntos)** Razonar si f es monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo.

117

4. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&6&6\\0&3&2\\0&-4&-3\end{pmatrix}$, se pide:

(a) **(1 punto)** Calcular los autovalores λ asociados a la matriz A y sus multiplicidades algebraicas.

(b) **(0.75 puntos)** Hallar una base de cada subespacio de autovectores $\mathcal{N}ul(A-\lambda I_3)$.

(c) **(0.75 puntos)** A la vista de lo anterior, deducir si A es diagonizable o no. Si lo fuera, dar la matriz diagonal D semejante a la matriz A y la matriz de diagonalización P tales que $A=PDP^{-1}$.

EXAMEN 2º PARCIAL 16 de DICIEMBRE de 2019

(118) Se considera $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual.

(a) Sea $B=\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

(i) 1p. Hallar las coordenadas en la base B del vector $\bar{u}$ ortogonal a $\bar{w}_1$, que forma un ángulo de $\pi/4$ con los vectores $\bar{w}_2$ y $\bar{w}_3$ y que tiene norma $\|\bar{u}\|=\sqrt{2}$.

(ii) 0'75p. Calcular la distancia y el ángulo que forma el vector $\bar{u}$ del apartado anterior con el vector

$$\bar{v}=2\bar{w}_1+\bar{w}_2-\bar{w}_3.$$

(b) 0'75p. Razonar la veracidad o falsedad del siguiente enunciado: Si $\bar{u},\bar{v},\bar{w}\in\mathbb{R}^3$ satisfacen $\bar{w}\perp(\bar{u}+\bar{v})$, entonces $\bar{w}\perp\bar{u}$ y $\bar{w}\perp\bar{v}$.

---

(119) Dado el subespacio vectorial $S=L\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ y el vector $\bar{u}=\begin{pmatrix}5\\-1\\3\end{pmatrix}$, se pide:

(a) 0'5p. Hallar una base ortonormal de S.

(b) 0'75p Hallar unas ecuaciones implícitas y una base del subespacio $S^\perp$, complemento ortogonal de S.

(c) 0'75p. Calcular la proyección ortogonal del vector $\bar{u}$ sobre los subespacios S y $S^\perp$

(d) 0'5p. Calcular la distancia entre el vector $\bar{u}$ y el subespacio S.

---

(120) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

(a) 0'5p. Justificar que la matriz A es ortogonalmente diagonalizable.

(b) 0'5p. Calcular los autovalores de A, indicando su multiplicidad algebraica.

(c) 1p. Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A.

(d) 0'5p. Determinar una matriz ortogonal P y una matriz diagonal D tales que $D = P^t . A . P$.

---

(121) (a) 0'75p Hallar las ecuaciones del giro g en $\mathbb{R}^2$, con centro el origen, tal que $g\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

(b) 0'75p Sea el endomorfismo f con matriz asociada respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$

$$A = M(f, B_c^2, B_c^2) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Analizar si es aplicación ortogonal. En caso afirmativo, clasificar y obtener sus elementos geométricos.

(c) 1p. Hallar la matriz asociada, respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, de la simetría rotacional de ángulo $\alpha = \pi/2$ y cuyo eje es la recta que pasa por el origen con la dirección y sentido dados por el vector $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Calcular la imagen del vector $\bar{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ por dicha simetría rotacional.
