Grado de Matemáticas e Informática Curso 15-16
ETSIInf, UPM **Matemática Discreta II (Gr. B)**
Control 1 **9-03-16**

1. **(1,5 puntos)**
   (a) Sea G un grafo de orden 12 en el que para todo vértice v el grafo G – v tiene 25 aristas. ¿Cuántas aristas tiene G? (Aplicar la fórmula de Euler al grafo G – v).

   (b) Construye el árbol etiquetado T cuyo código de Prüfer es [6, 5, 5, 5, 6, 2, 2]. Construye otro árbol NO etiquetado con la misma sucesión de grados que T y que no sea isomorfo a T.

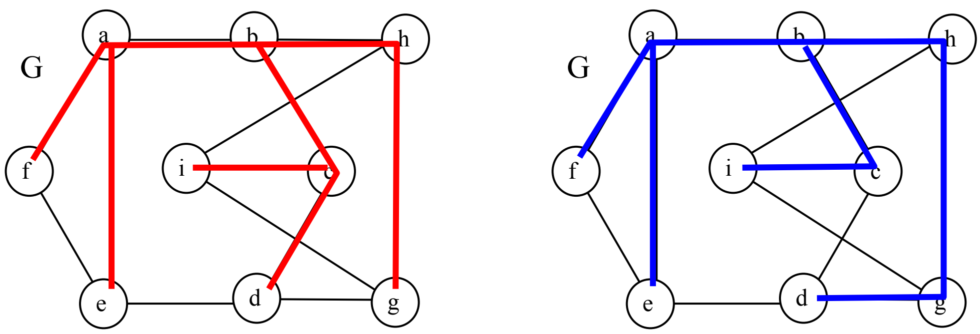
SOLUCIÓN:
(a) Como G – v tiene siempre 25 aristas el grafo G es k-regular.
Fórmula de Euler en G – v , $2\cdot 25 = k(k-1) + (11-k)k = 10k$ luego k= 5
(en G – v hay k vértices de grado k – 1 y 11 – k vértices de grado k)

Finalmente, aplicamos la fórmula de Euler en G, $2q = kn$, luego $2q = 5\cdot 12$, de donde $q = 30$
El grafo G tiene 30 aristas.

(b)

En el árbol de la derecha los vértices de grado 3 no son vecinos. En la izquierda sí lo son, luego los árboles NO son isomorfos.

2. **(2 puntos)**
   (a) Define diámetro de un grafo y camino diametral en un grafo.
En el grafo G de la figura se piden las siguientes cuestiones:
   (b) Calcula la excentricidad de cada vértice, el diámetro de G y su periferia.
   (c) Dibuja dos árboles generadores de G, uno de diámetro 4 y otro de diámetro 5.



SOLUCIÓN
ex(b)=ex(d)=2, ex(i)=ex(f)=4, el resto de vértices tienen excentricidad 3
diam(G) = 4
Periferia de G es {f,i}
Los árboles en la figura. A la izquierda (rojo) de diámetro 4. A la derecha (azul) de diámetro 5

3. **(1 punto)** Demuestra que la arista de mayor peso de un ciclo en un grafo ponderado G (con pesos diferentes en las aristas) nunca pertenece al árbol generador mínimo de G.

4. **(1 punto)** Estudiar si son ciertas las siguientes afirmaciones:

   (a) Si G es un grafo bipartido, entonces su complementario G' también lo es.
   (b) Un grafo conexo, 3-regular y sin puentes no tiene vértices-corte

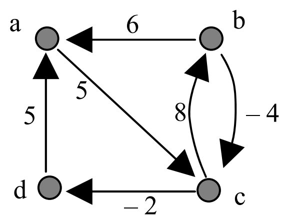
SOLUCIÓN

(a) Es FALSO.
Un grafo bipartido no tiene ciclos impares. Por tanto si en un grafo bipartido G tenemos 3 vértices en un nivel, entonces en G' tendremos un 3-ciclo.

El contraejemplo más sencillo es $G = K_{1,3}$

(b) Es CIERTO.
Realmente se puede demostrar que en un grafo conexo y sin puentes un vértice v de grado 3 NUNCA puede ser un vértice corte.
Si v fuera vértice-corte, entonces en alguna componente conexa de G – v habría un único vértice x vecino de v en G. Es decir, vx sería una arista puente.

5. **(1,5 puntos)** Describe el algoritmo de Bellman-Ford. Aplícalo al digrafo de la figura para el vértice c. (Dos iteraciones son suficientes).



SOLUCIÓN
El algoritmo de Bellman-Ford calcula los caminos de peso mínimo desde un vértice a todos los demás en un digrafo con pesos en los arcos. En el digrafo se permiten pesos negativos y el algoritmo es capaz de detectar la existencia de ciclos negativos.

La breve descripción que se pide debe incluir la idea clave del algoritmo y la descripción del paso general.

Idea clave: Actualización de etiquetas en los vértices. La etiqueta de un vértice t(u) indica en cada momento el peso del camino más corto desde s encontrado hasta el momento.

La actualización se produce al considerar un arco ab. Entonces se actualiza la etiqueta del vértice final b

$$t(b) := \min \{t(b), t(a) + w(ab)\}$$

En cada iteración del algoritmo (n – 1 iteraciones, n es el orden del digrafo) se consideran todos los arcos del digrafo uno tras otro (no importa el orden) y se actualizan las etiquetas de sus extremos. La etiqueta final de un vértice u, t(u), es el peso del camino mínimo de s a u.

El digrafo de la figura tiene arcos negativos, pero NO tiene ciclos negativos. La existencia de ciclos negativos se detecta si en la n-sima iteración se produce algún cambio de etiqueta.

Caminos de peso mínimo desde el vértice c

Primera iteración

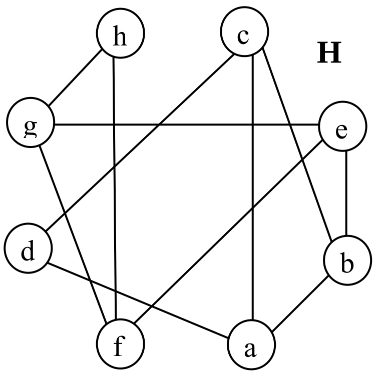
		ba	bc	cb	cd	ac	da
c	0	0	0	0	0	0	0
a	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3
b	∞	∞	∞	8	8	8	8
d	∞	∞	∞	∞	-2	-2	-2

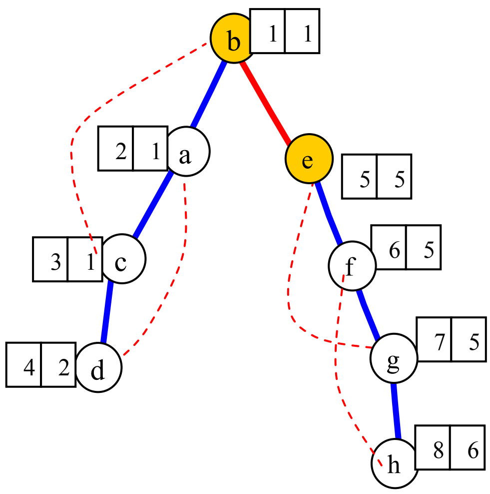
Segunda iteración

		ba	bc	cb	cd	ac	da
c	0	0	0	0	0	0	0
a	3	3	3	3	3	3	3
b	8	8	8	8	8	8	8
d	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2

Como no ha habido ninguna actualización de etiquetas en la segunda iteración, el algoritmo para y las etiquetas son definitivas. Indican el peso del camino mínimo al vértice respectivo.

6. **(1 punto)** Aplica al grafo H de la figura el algoritmo de búsqueda en profundidad, indicando el doble etiquetado de cada vértice. Detecta los vértices-corte y las aristas puente de H a partir del doble etiquetado indicando la condición sobre las etiquetas que los caracteriza.
(La búsqueda en profundidad debe empezar en el vértice **b** y los vértices se eligen siguiendo el orden alfabético)



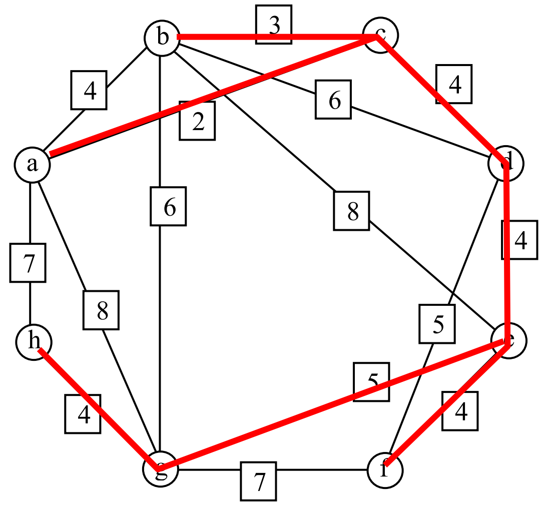


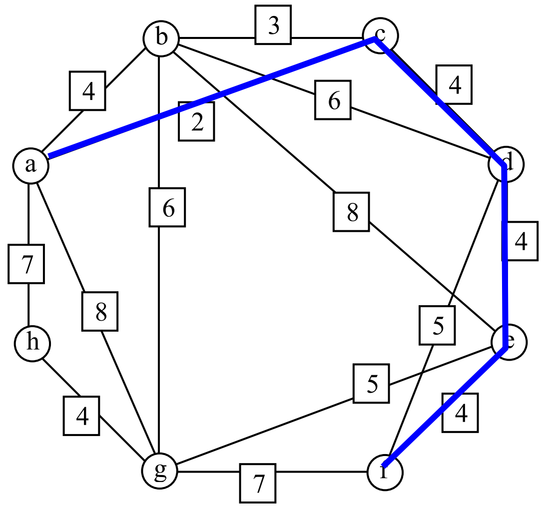
El vértice raíz b es corte porque tiene dos hijos.
La condición en las etiquetas para que un vértice (no raíz) v sea corte es que exista un hijo z de v tal que: 2ª etiq(z)≥ 1ª etiq(v) . Esto solo se cumple en el vértice e.

Una arista uv con 1ª etiq(u) < 1ª etiq(v) es puente si 2ªetiq(v) > 1ªetiq(u) . En el grafo H la única aristaque cumple esta condición es be.

7. **(2 puntos)**

En el grafo de la figura se representa, en forma esquemática, la red de carreteras de InforMonte. La etiqueta de cada arista indica la densidad de circulación de vehículos, en decenas por minuto, en el correspondiente tramo de la red. Por ejemplo, la etiqueta 4 de la arista ab indica que por el correspondiente tramo circulan en hora punta 40 vehículos por minuto entre esas dos ciudades. La densidad de un camino en la red es la máxima de las densidades de los tramos que lo forman. Así la densidad del camino ahgf es de 70 vehículos por minuto.





Se pide:

a) Demuestra que existe cierto árbol generador de la red que contiene un camino de densidad mínima entre dos vértices cualesquiera de la red.

b) Describe un algoritmo que determine, dada una red con densidades en las aristas y dos vértices *u* y *v* cualesquiera, el camino entre *u* y *v* de densidad mínima.

c) Comprueba su funcionamiento en la red de la figura. ¿Cuál es el camino de densidad mínima entre a y f?

SOLUCIÓN

(a) Probaremos que el árbol generador de peso mínimo (MST) contiene un camino de densidad mínima entre dos vértices cualesquiera de la red

Lema. Sea G un grafo conexo con pesos en las aristas que indican su densidad y T el árbol generador de peso mínimo. Entonces para cada par (u,v) de vértices de G el único camino entre u y v en T, es un camino de densidad mínima en G.

Dem.: Sea P ese camino en T y e la arista con su densidad. Es decir c(P)=c(e)

Supongamos que hay otro camino P’ en G de de u a v con menor densidad, c(P’)<c(P). Este camino P’ no contiene a la arista e (pues en caso contrario su densidad sería la de P), por lo que debe contener a una arista e’ que conecte las dos componentes conexas de T – e.

Además la densidad de e’ es c(e’)<c(e). Por tanto, si consideramos el árbol T – e + e’ tendremos un árbol de menor peso que T, contradiciendo que T sea el de peso mínimo.

(b) Algoritmo

Primer paso. Construir el árbol generador de peso mínimo T (algoritmo de Prim, Kruskal o Borüvka)

Segundo paso. Dados u y v, hallar en T el único camino entre u y v (algoritmo de búsqueda en profundidad o en anchura en el árbol T) Se deben describir ambos algoritmos.

(c) En rojo T= MST(G) y en azul un camino de densidad mínima entre a y f contenido en T. Hay otros caminos en G con la misma densidad, por ejemplo abcdef