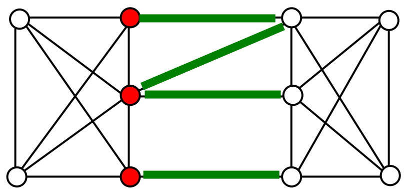
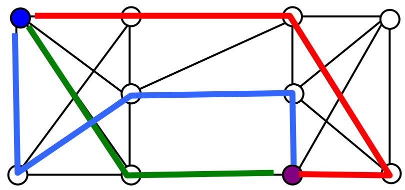
SOLUCIONES

1. **(2 puntos)**

   (a) Diseña una red que tolere el fallo de 2 de sus nodos y de 3 de sus aristas y que tenga grado mínimo 4. Enuncia el teorema de Whitney y compruébalo en tu red.
   (b) Demuestra que un grafo simple G es 2-conexo si y sólo si para cada arista e y cada vértice z de G existe un ciclo de G que contiene a la arista e y al vértice z.

(a) La red debe ser 3-conexa y 4-aristoconexa. Por ejemplo la red de la figura:

Hay que eliminar al menos tres vértices (por ej. los rojos) para desconectar el grafo. Y hay que eliminar al menos 4 aristas (por ejemplo las verdes) para desconectar el grafo.

El teorema de Whitney (para un grafo 3-conexo como el de la figura) dice que para cualquier par de vértices u, v existen 3 caminos disjuntos de u hasta v. En la figura de la derecha aparecen tres caminos disjuntos entre dos de los vértices del grafo.

(b) Nos piden que demostremos una caracterización (condición necesaria y suficiente) para que un grafo sea 2-conexo. Así que debemos hacer dos demostraciones.

$\Rightarrow$) Si G es un grafo 2-conexo entonces para cada arista e y cada vértice z de G existe un ciclo de G que contiene a la arista e y al vértice z. (Condición necesaria)

Construimos G' insertando un vértice x de grado dos en la arista e. G' sigue siendo un grafo 2-conexo. Por el teorema de Whitney existen dos caminos disjuntos en G' de x a z. Es decir, un ciclo C' en G' que contiene a los vértices x y z. Suprimiendo el vértice x tenemos un ciclo C en G pasando por e y z

$\Leftarrow$) Si en un grafo G para cada arista e y cada vértice z de G existe un ciclo que contiene a la arista e y al vértice z, entonces el grafo G es 2-conexo. (Condición suficiente)

Lo demostramos por reducción al absurdo. Supongamos que G no es 2-conexo. Entonces hay en G un vértice-corte a. Elegimos un vértice z en una componente conexa de G – v y un vecino b de a en la otra componente. Así NO existe ningún ciclo que contenga a la arista ab y al vértice z, en contradicción con la hipótesis de partida.

2. **(2 puntos)**
   ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Justifica tus respuestas.

   a) Si G es un grafo euleriano entonces G es orientable

   b) Si G es un grafo orientable entonces G es hamiltoniano.

   c) Si G es euleriano y hamiltoniano entonces G es 3-conexo.

   d) Existen grafos de 18 vértices, 50 aristas y que son 6-conexos.

   e) Si G es hamiltoniano de orden n entonces $d(x) \geq n/2$ para cada vértice x de G.

a) CIERTA. Si G es euleriano entonces G es conexo y todos sus vértices serán pares. Así no puede tener ningún puente por lo que será orientable.

b) FALSA. El grafo de la pajarita es orientable (conexo y sin puentes) pero NO es hamiltoniano.

c) FALSA. Un ciclo es euleriano y hamiltoniano pero no es 3-conexo

d) FALSA. Si un grafo es k-conexo entonces tiene al menos kn/2 aristas. Por tanto un grafo 6-conexo de orden 18 tiene al menos $6 \cdot 18/2 = 54$ aristas.

e) FALSA. El ciclo $C_6$ es hamiltoniano pero NO cumple la condición sobre los grados.

Esa condición es suficiente para asegurar la hamiltonicidad de un grafo, pero NO es una condición necesaria.

3. **(1 punto)**

   Los aeroplanos de una competición aérea necesitan piloto y navegante. Cada participante solo puede emparejarse con a lo sumo otros 6 participantes en la competición y, en total, hay 50 parejas posibles para pilotar los aeroplanos. Indica, justificándola, una cota inferior para el número de aeroplanos que pueden volar con las condiciones anteriores.

El problema se modeliza con un grafo bipartido G en el que los vértices de un nivel son los pilotos y los del otro nivel son los navegantes. Los datos son que el grafo tiene 50 aristas y que el grado máximo es 6.

Cada aeroplano corresponde a un par piloto-navegante, luego los aeroplanos que pueden volar simultáneamente corresponden a un emparejamiento del grafo G. Demostramos en clase que todo grafo bipartido tiene un emparejamiento M de tamaño al menos $\lceil q/\Delta \rceil$. Luego el número de aeroplanos que pueden volar es, al menos, $\lceil 50/6 \rceil = 9$

Recordemos la demostración del resultado utilizado, en la que se relacionan las nociones de emparejamiento y recubrimiento. Un vértice v cubre a lo más $\Delta$ aristas, luego se necesitan como mínimo $q/\Delta$ vértices para cubrir todas las aristas. Por tanto, el número de recubrimiento verifica que $\beta \geq \lceil q/\Delta \rceil$

Como G es bipartido, $\alpha' = \beta$, luego hay un emparejamiento en G con al menos $\lceil q/\Delta \rceil$ aristas

4. **(1 punto)**
   Construye **DOS** emparejamientos estables para los conjuntos X={x,y,z,w} y A={a,b,c,d}, siendo las preferencias:

| | |
|---|---|
| x: b > c > a > d | a: x > z > y > w |
| y: a > d > c > b | b: y > z > x > w |
| z: a > b > d > c | c: y > w > x > z |
| w: b > a > c > d | d: x > z > y > w |

Aplicamos el algoritmo de Gale-Shapley eligiendo primero los elementos de X y luego los de A

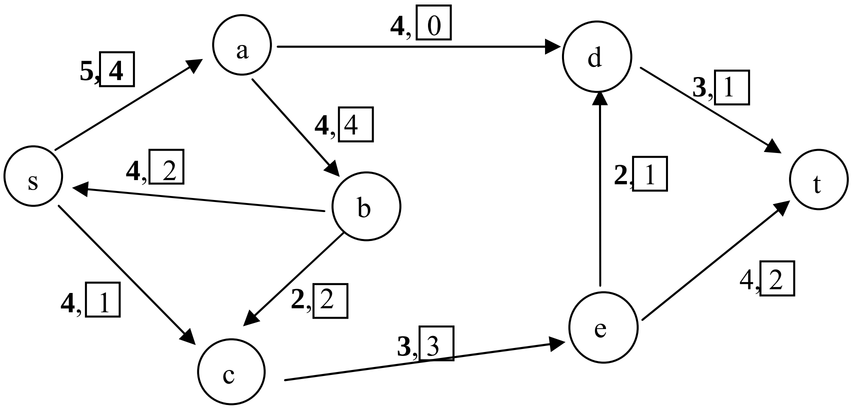
| | 1ª | 2ª | 3ª |
|---|---|---|---|
| x | b | b | b |
| y | ~~a~~ | d | d |
| z | a | a | a |
| w | ~~b~~ | ~~a~~ | c |

| | 1ª | 2ª | 3ª | 4ª |
|---|---|---|---|---|
| a | x | x | x | x |
| b | ~~y~~ | z | z | z |
| c | y | y | ~~y~~ | w |
| d | ~~x~~ | ~~z~~ | y | y |

Así tenemos los emparejamientos estables M = {xb, yd, za, wc} y M' = {ax, bz, cw, dy}

5. **(2,5 puntos)**

   Enuncia el Teorema de Ford-Fulkerson definiendo los conceptos que aparecen en el enunciado. **Demuestra el teorema de Ford-Fulkerson**. En la red de la figura circula un flujo f de valor 3. Las etiquetas de cada arista indican su capacidad (en negrita y en primer lugar) y el valor actual del flujo (en segundo lugar y en recuadro). Indica un camino de f-aumento en la red con arista de retroceso. Aplica el algoritmo de etiquetado para obtener un flujo de valor máximo. Comprueba el enunciado del teorema en esta red.

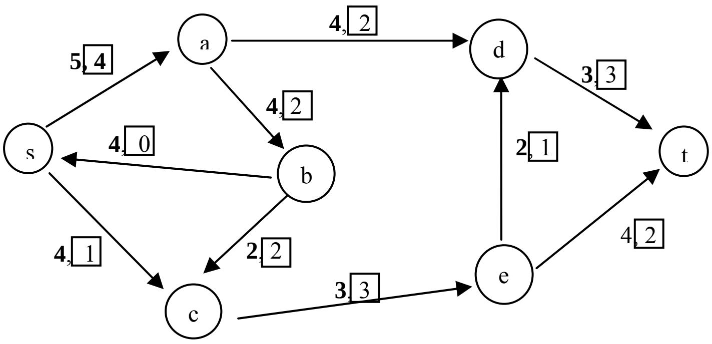



El teorema de Ford-Fulkerson dice que en una red de transporte N el máximo valor de un flujo coincide con la mínima capacidad de los cortes de N.

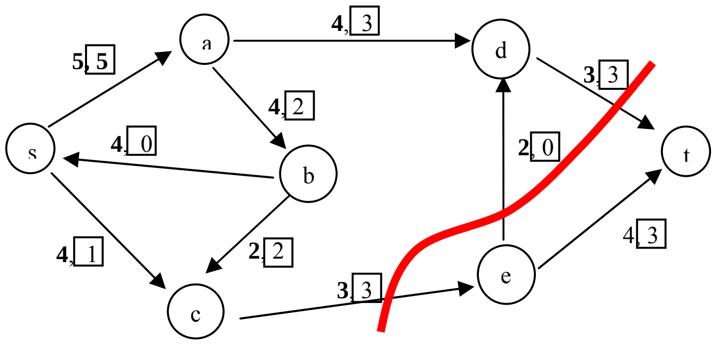
max {val(f) | f es un flujo en N} = min {cap(S,T) | (S,T) es un corte en la red N}

Recuerdo, porque todos lo habéis olvidado, que demostramos el teorema en dos partes. En primer lugar hay que demostrar que para todo flujo f y para todo corte (S,T) se cumple que val(f) ≤ cap(S,T). Y en segundo lugar se demuestra que si f es un flujo de valor máximo se puede construir un corte cuya capacidad iguala dicho valor. Los pocos alumnos que han intentado demostrar el teorema se han limitado a esta segunda parte.

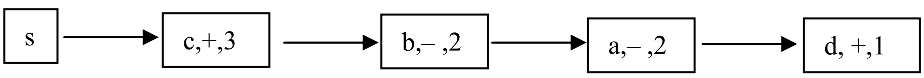
Un camino de f-aumento con arco de retroceso es, por ejemplo, sbadt que tiene dos arcos de retroceso y residuo 2. Aumentamos el flujo a lo largo de este camino y obtenemos un flujo $f_1$ de valor 5




Camino de $f_1$-aumento sadet con residuo 1. Aumentamos el flujo una unidad y obtenemos el flujo $f_2$ de valor 6



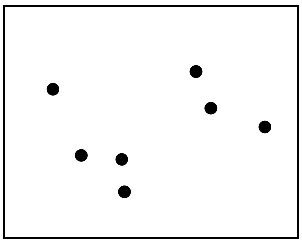

No hay caminos de aumento, como se comprobaría con el árbol de búsqueda. Los vértices alcanzados desde s son {s,a,b,c,d}. Así tenemos el corte de capacidad mínima 6 marcado en rojo.

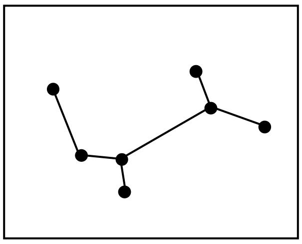


6. **(1,5 puntos)**

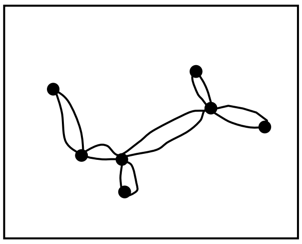
¿Qué significa que un algoritmo garantice una solución 2-aproximada para un problema de optimización? Describe una aproximación con ese factor para el "Problema del Viajante" utilizando las siguientes viñetas. Los vértices del grafo G aparecen en la primera viñeta, las aristas de G son todos los segmentos que unen cada par de vértices y el peso de cada arista es la distancia euclídea entre sus extremos. Dibuja cada paso en las viñetas sucesivas y descríbelos brevemente demostrando que la solución obtenida es una 2-aproximación.

(*) Analiza la complejidad del algoritmo

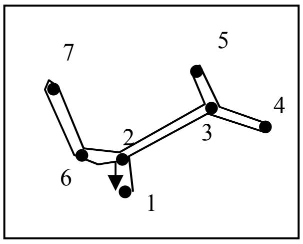




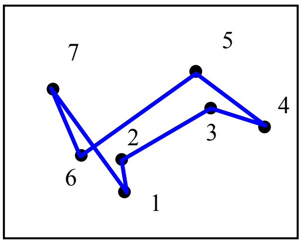
MST(G)



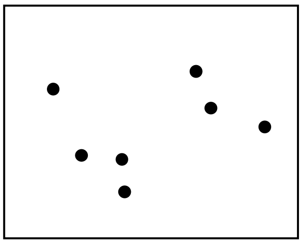
G* grafo euleriano, duplicando las aristas de MST




Recorrido euleriano en G*




Ciclo hamiltoniano en el orden en que aparecen los vértices en el recorrido anterior en G*



Observación: Había que demostrar (y nadie lo ha intentado) que el algoritmo descrito es un algoritmo 2-aproximado.