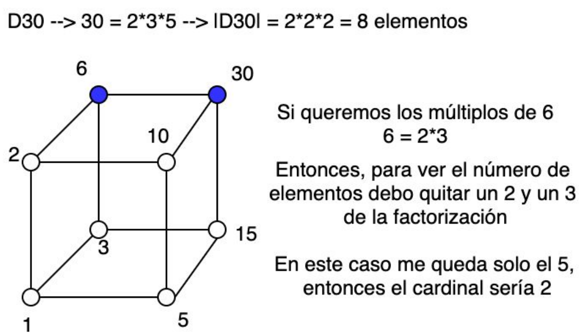
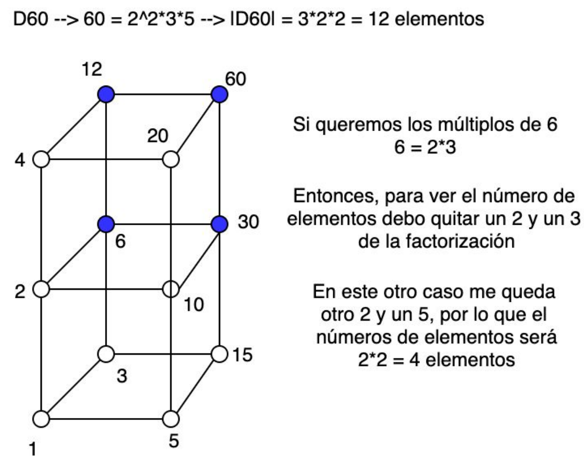
RETÍCULOS Y ÁLGEBRAS DE BOOLE

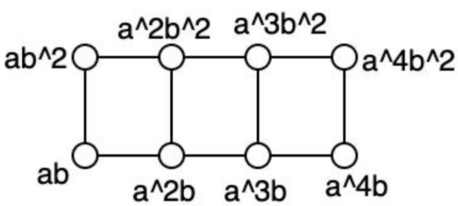
1. a) Sean a y b dos números primos y sea $n = a^4 \cdot b^2$ Obtén el cardinal de los siguientes conjuntos:
   Dn = {divisores positivos de n} = 5 * 3 = 15 elementos
   P(Dn) = {conjunto de las partes de Dn} = $2^{|Dn|} = 2^{15}$ elementos
   C = {x ∈ Dn: x es múltiplo de a y b} = me queda a^3*b, es decir, 4*2 = 8 elementos

   Ejemplos de múltiplos:

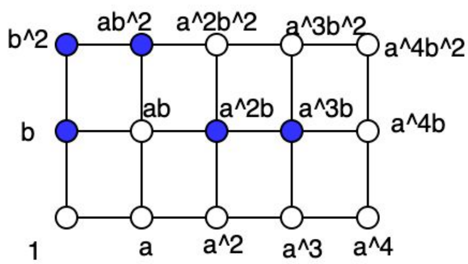




   b) Dibuja el diagrama de Hasse de (C, |).

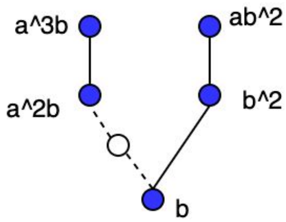


c) Considera el conjunto ordenado (Dn, |). Obtén C.S., C.I., supremo, ínfimo, máximo, mínimo, maximales y minimales del subconjunto B={ b, b^2, b^2a, ba^2, ba^3 }



C.S. = {a^3b^2, a^4b^2}
C.I. = {1,b}
Supremo = a^3b^2
Ínfimo = b

Máximo = no existe
Mínimo = b
Maximales = {ab^2, a^3b}
Minimales = {b}



d) Razona si (C, |) es retículo y si (Dn, |) es álgebra de Boole. (**Julio 2016**)

(C,|) es retículo ya que entre cada par de elementos cualesquiera del conjunto existe tanto supremo como ínfimo.

Para que sea Álgebra de Boole debe ser un retículo complementario (todos los elementos tienen complementario) y distributivo (si un elemento tiene complementario, entonces éste es único).

Como no todos los elementos tienen complementario, entonces no es álgebra de Boole (por ejemplo, b no tiene complementario).

2. *Ejercicio 1.*

a) Obtén el cardinal de D_{2107} , es decir, el cardinal de todos los divisores de 2107.

Descomponemos en factores primos: 2107 = 7^2*43 → |D2107| = 3 * 2 = 6 elementos
2107 | 7
301 | 7
43 | 43
1

b) Dados los conjuntos $A = \{t \in \mathbb{Z} : -4 + 3t \geq 7\}$ y $B = \{t \in \mathbb{Z} : 620 - 4t \geq 5\}$, construye el conjunto $A \cap B$ y obtén su cardinal.

A ⇒ 3t>=11 → t>=3.666 → t>=4

B ⇒ 4t<=615 → t<=153.7… → t<=153

Luego A ∩ B = {4<=t<=153: t ∈ ℤ} = 150 elementos

c) En el conjunto de los números naturales definimos la siguiente relación: dados a, $b \in \mathbb{N}$ decimos que aRb si $a|b^2$. Razona qué propiedades cumple la relación y cuáles no.(**Enero 2018**)

i) Reflexiva: aRa sii a|a^2 = $\frac{a^2}{a}$ = a $\rightarrow$ Se cumple
ii) Simétrica: Si aRb sii a|b^2, entonces bRa sii b|a^2

Buscamos un contraejemplo
Si a=2 y b=8, entonces aRb sii 2|8^2 = 2|64 = 32 $\in$ Z, pero b NOR a sii b|a^2 = 8 no| 2^2 = 8 no| 4 = 1/2 $\notin$ Z
Luego, no es simétrica

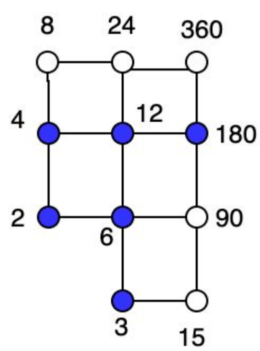
iii) Antisimétrica: Si aRb sii a|b^2 y bRa sii b|a^2, entonces a=b

Buscamos un contraejemplo
Si a=2 y b=4, entonces aRb sii 2|4^2 = 2|16 = 8 y bRa sii 4|2^2 = 4|4 = 1, pero a=2 $\neq$ b=4
Luego, no es antisimétrica

iv) Transitiva: Si aRb sii a|b^2 y bRc sii b|c^2, entonces aRc sii a|c^2

Buscamos un contraejemplo
Si a = 8, b = 4 y c =2, entonces aRb sii 8|4^2 = 8|16 = 2, bRc sii 4|2^2 = 4|4 = 1,
pero a NOR c sii 8 NO| 2^2 = 8 NO| 4 = 1/2 $\notin$ Z
Luego, no es transitiva

3. Considera el conjunto A={2, 3, 4, 6, 8, 12, 15, 24, 90, 180, 360} con la relación de orden de divisibilidad | descrita en el ejercicio anterior ($x|y$ significa que ‘x divide a y’).
   a) Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado (A, |).
   b) Obtén las C.S., C.I., supremo, ínfimo, máximo, mínimo, maximales y minimales, si los hay, del subconjunto B={2, 3, 4, 6, 12, 180}



C.S. = {180, 360}
C.I. = {no existe}
Supremo = 180
Ínfimo = no existe

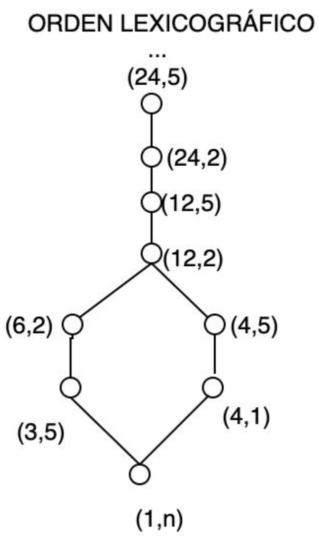
Máximo = 180
Mínimo = no existe
Maximales = {180}
Minimales = {2,3}

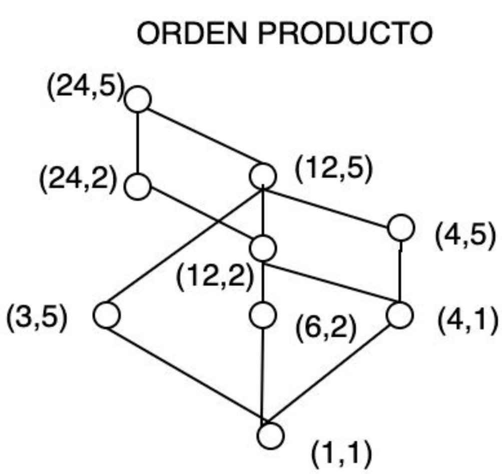
   c) Razona si los elementos 6 y 15 tienen complementario en A+{1}, y en caso afirmativo obtenlos.
   6’ = no existe, ya que no hay ningún elemento a tq sup{a,6} = 360 e inf{6,a} = 1
   15’ = 8, ya que sup{8,15} = 360 e inf{8,15} = 1

   d) Razona si A+{1} es un álgebra de Boole y si A es retículo. (**Nov. 2018**)
   Como hay elementos que no tienen complementario (por ejemplo, 6 no lo tiene) entonces A+{1} no es un retículo complementario, por lo que no es álgebra de Boole.

A no es retículo ya que no existe el inf{2,3}.

4. Se considera el conjunto (D48,|) x (D10, $\leq$) ordenado con el orden lexicográfico y con el orden producto. Dado el subconjunto A = {(3,5), (4,1), (4,5), (6,2), (12,2), (12,5), (24,2)}, halla, si existen, los elementos maximales, minimales, C.S., C.I., supremo, ínfimo, máximo y mínimo del subconjunto A, tanto para el orden lexicográfico como para el orden producto. Sugerencia: Dibuja los diagramas de Hasse de A respecto de ambos órdenes. (**Nov. 2018 - Mates**)

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>C.S. = {(24,2),(24,5),(24,10),(48,1),(48,2),(48,5),(48,10)}
C.I. = {(1,1),(1,2),(1,5),(1,10)}
Supremo = (24,2)
Ínfimo = (1,10)
Máximo = (24,2)
Mínimo = no existe
Maximales = {(24,2)}
Minimales = {(3,5),(4,1)}</td>
</tr>
<tr>
<td>


</td>
<td>C.S. = {(24,5),(24,10),(48,5),(48,10)}
C.I. = {(1,1)}
Supremo = (24,5)
Ínfimo = (1,1)
Máximo = no existe
Mínimo = no existe
Maximales = {(24,2),(12,5)}
Minimales = {(3,5),(6,2),(4,1)}</td>
</tr>
</table>

MAPAS DE KARNAUGH Y QUINE-MCCLUSKEY

1. Encuentra la expresión más sencilla que detecte los números impares de un solo dígito que sean primos o múltiplos de 3. (**Nov. 2018**)

   Son expresiones booleanas,es decir, solo toman valores V=1 o F=0, por lo que va a haber siempre 2^n números

   Como queremos los números del 0 al 9 (un solo dígito) entonces necesito 2^4 = 16 elementos (del 0 al 15)

Num	**x**	**y**	**z**	**t**	**SALIDA f(x,y,z,t)**
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	??=0
11	1	0	1	1	??=1
12	1	1	0	0	??=0
13	1	1	0	1	??=1
14	1	1	1	0	??=0
15	1	1	1	1	??=1

	y	y	y’	y’	
x	??=0	??=0	??=0	0	t’
x	??=1	??=1	??=1		t
x’				0	t
x’	0	0	0	0	t’
	z’	z	z	z’	

x’ , y’, z’, t’ → son los valores negados (0)
x, y ,z, t → son los valores verdaderos (1)

Una vez que hemos completado la tabla, tenemos que ver cuáles me conviene coger y cuáles no de los ??

Siempre voy a intentar recuadrar mi solución lo más grande posible EN POTENCIAS DE 2

f(x,y,z,t) = yt + zt + xt

2. Define una expresión booleana que compare según el orden $\leq$ los elementos del conjunto {0, 1, 2, 3} y simplifícala

   Con los elementos {0,1,2,3} necesito tan solo dos variables, pero como necesitamos ir comparando elementos, entonces necesitamos el doble (4 elementos)

x	**y**	**z**	**t**	**f(x,y,z,t)**
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

	y	y	y’	y’	
x	0	0	0	0	t’
x	0				t
x’					t
x’	0				t’
	z’	z	z	z’	

f(x,y,z,t) = x’t + zt + y’t + x’z + x`y`

3. Se considera un ascensor dotado de un dispositivo de seguridad para que no puedan viajar niños pequeños solos ni pesos excesivos. Queremos que el ascensor se ponga en marcha cuando esté vacío o con pesos entre 25 y 300 kg. Dotamos al ascensor de tres sensores: el sensor A sensible a cualquier peso, el sensor B sensible a pesos mayores de 25 kg y el sensor C sensible a pesos mayores de 300 kg. Encuentra la expresión booleana más sencilla posible que resuelva este problema.

A	**B**	**C**	**f(A,B,C)**
0	0	0	1
0	0	1	IMP. = 1
0	1	0	IMP. = 1
0	1	1	IMP. = 1
1	0	0	0
1	0	1	IMP. = 0
1	1	0	1
1	1	1	0

	B	B	B´	B´
A	1	0	IMP = 0	0
A’	IMP = 1	IMP = 1	IMP = 1	1
	C´	C	C	C´

f(A,B,C) = BC´ + A´