1.3. Grupos de permutaciones

Sea X un conjunto no vacío, se llama **grupo simétrico** $(S_X, \circ)$ al grupo formado por las aplicaciones biyectivas en X, con la operación composición de aplicaciones. En particular si $X = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ el grupo se nota por $(S_n, \circ)$ y se denomina **grupo de permutaciones**.
Todo elemento del grupo $(S_n, \circ)$ recibe el nombre de **permutación**.
Sea $\sigma \in S_n$, se dice que σ es un **ciclo** de longitud r si existen $a_0, \cdots, a_{r-1} \in \{1, \cdots, n\}$ tales que $\sigma(a_0) = a_1$, $\sigma(a_1) = a_2$, $\cdots, \sigma(a_{r-2}) = a_{r-1}$, $\sigma(a_{r-1}) = a_0$, y para todo $k \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $k \notin \{a_0, \cdots, a_{r-1}\}$ se verifica que $\sigma(k) = k$. La notación de dicho ciclo es $\sigma = (a_0, a_2, \cdots, a_{r-1})$.

Dos ciclos $\sigma \in S_n$ y $\tau \in S_n$ se dice que son **disjuntos** si ninguno de los elementos del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ aparece en la notación de ambos. Los ciclos de longitud 2 se denominan **transposiciones**.

Propiedades

Dado un ciclo $\sigma = (a_0, a_1, \cdots, a_{r-1}) \in S_n$, se verifica que:

1. $\sigma^k(a_i) = a_{(i+k) \mod r}$, $\forall i \in \{0, \cdots, r-1\}$, $k \in \mathbb{N}$
2. $|\sigma| = r$
3. $\sigma^{-1} = (a_{r-1}, \cdots, a_1, a_0)$
4. Si $\sigma, \tau \in S_n$ son dos ciclos disjuntos entonces $\sigma\tau = \tau\sigma$.
5. Si σ y τ son ciclos disjuntos, entonces $|\sigma\tau| = \text{mcm}\{|\sigma|, |\tau|\}$

Formas de expresar una permutación

1. Toda permutación $\sigma \in S_n$ se puede expresar como **producto de ciclos disjuntos**.
2. Toda permutación $\sigma \in S_n$, con $n \geq 2$, se puede expresar como **producto de transposiciones**.

Paridad de una permutación

Una **permutación** de S_n es **par** o **impar** según pueda ser expresada como el producto de un número par o de un número impar de transposiciones respectivamente.

La paridad de una permutación está bien definida

1. Sean $\tau_1, \cdots, \tau_r$ transposiciones de S_n tales que $e = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_r$. Entonces $r \equiv 0 \mod 2$.
2. Si $\sigma \in S_n$ se puede expresar como producto de r transposiciones y como producto de s transposiciones entonces $r \equiv s \mod 2$.

El grupo alternado

Sean $n \geq 2$ y A_n el conjunto de todas las permutaciones pares de S_n. Entonces:

$$A_n \leq S_n \qquad \text{y} \qquad |A_n| = \frac{n!}{2}$$

El grupo $(A_n, \circ)$ se denomina **grupo alternado**.

1.3.19. Problemas

1. Escribir cada una de las siguientes permutaciones como producto de ciclos disjuntos y como producto de transposiciones:

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 8 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 4 & 6 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

2. Escribir como producto de ciclos disjuntos: *a*) $\sigma\tau$, *b*) $\sigma\tau^2$, *c*) $\sigma^2\mu$, *d*) $\tau\sigma^{-2}$, *e*) $\sigma\tau\sigma^{-1}$, siendo $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in S_6$

3. *a*) ¿Cuál es el orden del ciclo $(1,4,5,7) \in S_8$?

   b) ¿Cuál es el orden de $\sigma = (4,5)(2,3,7)$ y de $\tau = (1,4)(3,5,7,8)$ en S_8?

   c) Expresar como producto de ciclos disjuntos y obtener el orden: $\nu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\nu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 8 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $\nu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$, $\nu_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

4. Demostrar que A_8 contiene un elemento de orden 15

5. *a*) Sea $\beta = (1,3,5,7,9,8,6)(2,4,10)$. ¿Cuál es el menor entero positivo $n \in \mathbb{N}$ tal que $\beta^n = \beta^{-5}$

   b) Si $\alpha = (1,3,5,7,9)(2,4,6)(8,10)$ y α^m es ciclo de longitud 5 ¿qué puede decirse sobre m?

6. Se disponen 20 cartas numeradas en 5 filas de 4 columnas. En cada paso, se recogen las cartas en orden por filas y se vuelven a colocar empezando por la última recogida, pero por columnas. ¿Cuántas veces hay que repetir este proceso hasta que las cartas aparezcan en la posición inicial?

7. ¿Cuales de los siguientes son subgrupos de S_5? $X_a = \{(1,2,3,4,5),(1,2,4)(3,5)\}$,
   $X_b = \{(1),(1,2,3,4,5),(1,3,5,2,4),(1,4,2,5,3),(1,5,4,3,2)\}$,
   $X_c = \{(1),(1,2)(3,4,5),(1,3,5)(2,4),(1,5,3,2,4),(1,2)(4,5),(1,3,4)(2,5),(1,4,3)(2,5)\}$.

8. Se considera el grupo $S_3 = \{\rho_0, \rho_1 = (1,2,3), \rho_2 = (1,3,2), \mu_1 = (2,3), \mu_2 = (1,3), \mu_3 = (1,2)\}$

   a) Encontrar los subgrupos cíclicos $\langle\rho_1\rangle$, $\langle\rho_2\rangle$ y $\langle\mu_1\rangle$ de S_3

   b) Encontrar todos los subgrupos de S_3 y elaborar con ellos un diagrama de Hasse.

   c) Encontrar las permutaciones pares y construir la tabla de A_3.

9. Encontrar los tres elementos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in S_4$ tales que, expresados en forma de producto de ciclos disjuntos, se componen de dos ciclos de longitud 2. Comprobar que $K = \{e, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ es un subgrupo de S_4 describiendo su tabla. Construir su diagrama de Cayley.

10. Sea $\tau = (a_0, a_1, ..., a_{k-1})$ un ciclo de longitud k

    a) Demostrar que para cualquier permutación σ, se verifica que $\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(a_0), \sigma(a_1), ..., \sigma(a_{k-1}))$

    b) Demostrar que para todo μ, ciclo de longitud k, existe σ tal que $\sigma\tau\sigma^{-1} = \mu$

11. Demostrar que una permutación es par si y sólo si puede expresarse como composición de 3−ciclos (no necesariamente disjuntos).