Solución de los ejercicios de autocomprobación

1. Tenemos que,

$$P(X=1)=P(\text{bola negra})=\frac{2}{3}$$

$$P(X=0)=P(\text{bola blanca})=\frac{1}{3}$$

por tanto, $X \sim \mathcal{B}er(\frac{2}{3})$, con lo que

$$P(X=x_i)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x_i}\left(1-\frac{2}{3}\right)^{1-x_i}$$

La probabilidad conjunta de una m.a.s de tamaño 5 es:

$$P(X_1=x_1,X_2=x_2,X_3=x_3,X_4=x_4,X_5=x_5)=\left(\frac{2}{3}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i}\left(1-\frac{2}{3}\right)^{5-\sum_{i=1}^5 x_i}$$

Sea ahora $\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^5 X_i}{5}$. Sabemos que $T=\sum_{i=1}^5 X_i \sim \mathcal{B}(5,\frac{2}{3})$, donde $\sum_{i=1}^5 X_i =$*número de bolas negras en* 5 *extraciones*. Tenemos que

$$P(\bar{X}=t)=P\left(\frac{\sum X_i}{5}=t\right)=P(\sum X_i=5t)=P(T=5t)=\binom{5}{5t}\left(\frac{2}{3}\right)^{5t}\left(\frac{1}{3}\right)^{5-5t}$$

Sabemos que $\bar{X}=\frac{T}{5}$, con lo que

$$E(\bar{X})=\frac{E(T)}{5}=\frac{2}{3}$$

$$V(\bar{X})=\frac{V(T)}{25}=\frac{npq}{n^2}=\frac{pq}{n}=\frac{2}{45}$$

2. $X_1 \sim \mathcal{N}(25,0{,}4)$, $\quad X_2 \sim \mathcal{N}(5,0{,}2)$. El peso total es el peso del paquete más el del producto, i.e.,

$$X=X_1+X_2\sim\mathcal{N}(30,\sqrt{0{,}4^2+0{,}2^2})$$

$$\bar{X}\sim\mathcal{N}(30,\frac{\sqrt{0{,}4^2+0{,}2^2}}{\sqrt{n}})$$

Con $n=100$ hay que calcular

$$\begin{aligned}
P(29\le\bar{X}\le 31) &= P\left(\frac{29-30}{\sqrt{\frac{0{,}4^2+0{,}2^2}{100}}}\le\frac{\bar{X}-30}{\sqrt{\frac{0{,}4^2+0{,}2^2}{100}}}\le\frac{31-30}{\sqrt{\frac{0{,}4^2+0{,}2^2}{100}}}\right)\\
&= P(-22{,}37\le Z\le 22{,}37)\\
&\approx 1
\end{aligned}$$

3. Sabemos que $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{10}{\sqrt{n}})$, por lo tanto

$$P(\mu - 5 < \bar{X} < \mu + 5) = P(\frac{\mu - 5 - \mu}{\frac{10}{\sqrt{n}}} < Z < \frac{\mu + 5 - \mu}{\frac{10}{\sqrt{n}}}) =$$

$$= P(-\sqrt{n}0{,}5 < Z < \sqrt{n}0{,}5)$$

Nos dicen que esa probabilidad debe ser igual a 0,954,

$$0{,}954 = P(-\sqrt{n}0{,}5 < Z < \sqrt{n}0{,}5) = 1 - 2P(Z > \sqrt{n}0{,}5) \Rightarrow P(Z > \sqrt{n}0{,}5) = 0{,}023$$

Como el punto de la $N(0,1)$ que deja a la derecha una probabilidad de 0,023 es aproximadamente 2 (mirando en las tablas), tenemos que

$$\frac{\sqrt{n}}{2} = 2 \Rightarrow n = 16$$

4. (1) Si n es lo suficientemente grande, utilizaríamos el Teorema Central del Límite y la solución sería la misma del ejercicio 3.

   (2) Si n es pequeño y, puesto que no conocemos cuál es la distribución de la variable, debemos utilizar la desigualdad de Tchebychev.

$$P\left(|\bar{X} - \mu| < k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

   Como

$$P(\mu - 5 < \bar{X} < \mu + 5) = P(|\bar{X} - \mu| < 5) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

   y esa probabilidad debe ser de, al menos, 0,954,

$$1 - \frac{1}{k^2} = 0{,}954 \Rightarrow k = 4{,}66$$

   Sabiendo el valor de k, utilizamos que $\sigma = 10$ en la igualdad

$$k\frac{10}{\sqrt{n}} = 5 \Rightarrow n = 86{,}95 \Rightarrow n \geq 87$$

5. Sabemos que $\sigma = 1$ y que la media de los informes consultados oscila entre 6 y 7 con una probabilidad de al menos 0,96, es decir

$$P(6 \leq \mu \leq 7) \geq 0{,}96$$

Como tenemos muy poca información debemos usar la desigualdad de Tchebychev,

$$P\left(|\bar{X} - \mu| < k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

que es equivalente a

$$P\left(\bar{X} - k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

y, con nuestros datos

$$P\left(\underbrace{\bar{X} - k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{=6} \leq \mu \leq \underbrace{\bar{X} + k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{=7}\right) \geq \underbrace{1 - \frac{1}{k^2}}_{=0{,}96}$$

Formamos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{lrcc} \text{Long. del intervalo} & 2k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} & = & 1 \\ & 1 - \dfrac{1}{k^2} & = & 0{,}96 \end{array}\right\}$$

cuya solución es $k = 5$ y, lo que nos piden, $n = 100$.