1.4. Isomorfismos en grupos

Dos grupos $(G, *)$ y $(G', \circ)$ son **isomorfos**, y se escribe $G \approx G'$, si existe una aplicación biyectiva $\phi : G \to G'$ tal que para todos $x, y \in G$ se verifica que

$$\phi(x * y) = \phi(x) \circ \phi(y)$$

La aplicación ϕ se denomina **isomorfismo de grupos**

Propiedades

Sea $\phi : G \to G'$ isomorfismo entre los grupos $(G, *)$ y $(G', \circ)$. Entonces

1. $\phi(e_G) = e_{G'}$
2. $\phi(a^{-1}) = (\phi(a))^{-1}$
3. Para todo $a \in G$ se verifica que $|a|_G = |\phi(a)|_{G'}$

Observaciones

$(\mathbb{Z}, +)$ es isomorfo a un subgrupo de $(\mathbb{Q}, +)$.
$(\mathbb{Q}, +)$ es isomorfo a un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.
$(\mathbb{R}, +)$ es isomorfo a un subgrupo de $(\mathbb{C}, +)$.

Isomorfismos en grupos cíclicos

1. Todo grupo cíclico $(G, *)$ de orden infinito, es isomorfo a $(\mathbb{Z}, +)$
2. Todo grupo cíclico $(G, *)$ de orden n, es isomorfo a $(\mathbb{Z}_n, +_n)$

Producto de grupos cíclicos

El grupo $(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, +_m \times +_n)$ es cíclico si y sólo si $\mathrm{mcd}(m, n) = 1$

Definición de producto directo interno

Sea $(G, *)$ un grupo y sean $H \leq G$ y $K \leq G$.
Se dice que el grupo G es **producto directo interno de los subgrupos** H y K si se verifica que:

1. $H \cap K = \{e\}$
2. $G = HK = \{h * k : h \in H, k \in K\}$
3. Los elementos de H y de K conmutan: $\forall\, h \in H, k \in K$ es $h * k = k * h$

Relación entre producto directo interno y producto directo

Si $(G, *)$ es producto directo interno de los subgrupos H y K entonces $G \approx H \times K$

Teorema de Cayley

Todo grupo de orden $n \in \mathbb{N}$ es isomorfo a un grupo de permutaciones.

Automorfismos de un grupo

Sea $(G, *)$ grupo. El conjunto de todos los isomorfismos $\varphi : G \to G$, con la composición de aplicaciones, es un grupo que se denomina **grupo de automorfismos** de $(G; *)$.

1.4.10. Problemas

1. En el grupo $(S_4, \circ)$ sea $H = \{e = (1), a = (1,2)(3,4), b = (1,3)(2,4), c = (1,4)(2,3)\}$
   a) Demostrar, mediante la construcción de su tabla de Cayley, que H es abeliano.
   b) Estudiar si existe un isomorfismo de $(H, \circ)$ en $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +_2 \times +_2)$.
2. a) Estudiar si $(U_8, \cdot_8) \approx (\mathbb{Z}_4, +_4)$
   b) Estudiar si $(U_8, \cdot_8) \approx (M, \cdot)$, siendo $M = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$, con el producto usual de matrices
3. Entre los grupos $(\mathbb{Z}_n, +_n)$, $(U_n, \cdot_n)$, $(D_n, \circ)$, $(S_n, \circ)$, $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, +_n \times +_m)$ y cuaterniones, encontrar uno isomorfo a $(V, \cdot)$, siendo $\cdot$ el producto usual de matrices y
   $V = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\}$.
4. Estudiar si $(H = \{\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_3\}, \cdot_3)$ es isomorfo a $(\mathbb{Z}_9, +_9)$ o a $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3, +_3 \times +_3)$
5. Demostrar que $G = \{\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_2\}$ con la operación producto de matrices, módulo 2, es isomorfo a D_4.
6. Estudiar si existe algún isomorfismo entre el grupo $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ y el siguiente subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$:
   $\mathcal{C} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\} \leq GL_2(\mathbb{R})$
7. Se considera el grupo $(G = \mathbb{R} - \{-1\}, *)$, siendo $a * b = a + b + ab$. Demostrar que el grupo $(G, *)$ es isomorfo al grupo $(\mathbb{R}^*, \cdot)$
8. Probar que D_4 no puede ser producto directo interno de dos subgrupos propios.
9. Probar que D_6 es producto directo interno de dos de sus subgrupos propios.
10. Obtener los automorfismos de $(\mathbb{Z}_6, +_6)$.