Estructuras Algebraicas Segundo examen parcial	1^{er} Apellido: ____________ 2^{o} Apellido: ____________ Nombre: ____________ Número de matrícula:	1 de junio de 2018 Tiempo 2 h. **Calificación:**
Depto. Matemática Aplicada T.I.C. E.T.S. de Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid		

1. (1 punto) Estudiar si el siguiente conjunto tiene estructura de anillo. En caso afirmativo indicar si se trata de un anillo conmutativo, con identidad, de división y si es un cuerpo.

$$S = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} : a, b, c \in \mathbb{Z}\}$$

2. (1 punto) Describir las unidades y los divisores de cero del anillo

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$$

3. (1 punto) Estudiar si el siguiente conjunto es un cuerpo:

$$(\{0, 2, 4, 6, 8\}, +_{10}, \cdot_{10})$$

4. (1 punto) Obtener la característica del anillo $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}, +, \cdot)$
5. (1 punto) Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo y sea $a \in R$.
   Demostrar que $N(a) = \{x \in R : xa = 0_R\}$ es un subanillo y estudiar si es un ideal.
6. (1 punto) Demostrar o refutar que la intersección de dos ideales, de un mismo anillo, es un ideal (para refutarlo basta con dar un ejemplo en el que no se verifique)
7. (1 punto) Estudiar si el polinomio $x^5 - x^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.
8. (1 punto) Determinar el resultado de la siguiente operación en $\mathbb{F}_9 = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + x + 2)$: $(x + 1)x^{-1}$
9. (1 punto) Obtener una base de la extensión $\mathbb{Q}(\alpha)$ sobre $\mathbb{Q}$, siendo $\alpha = \sqrt{5} - \sqrt{2}$.
10. (1 punto) Hallar el polinomio mínimo de $\alpha = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ sobre $\mathbb{Q}$

Soluciones

1. No es un anillo, ya que $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in S$ pero $\sqrt{6} \notin S$

2. Unidades: $\mathrm{U} = \{(a,b,c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} : a, c \in \{1,-1\}, b \in \mathbb{Q}^*\}$,
   Divisores de cero: $\mathrm{C} = \{(a,b,c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} : (a,b,c) \neq (0,0,0) \quad \text{y} \quad abc = 0\}$

3. $(\{0,2,4,6,8\}, +_{10})$ es grupo abeliano, por ser subgrupo de $(\mathbb{Z}_{10}, +_{10})$. Además el producto $\cdot_{10}$ es asociativo, conmutativo y verifica la propiedad distributiva respecto de $+_{10}$. La tabla del producto para estos elementos, suprimiendo el 0, es:

$\cdot_{10}$	2	4	6	8
2	4	8	2	6
4	8	6	4	2
6	2	4	6	8
8	6	2	8	4

   .
   Se observa que es un anillo con identidad y es de división, por tanto es cuerpo.

4. $c(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}) = 30$

5. $N(a) = \{x \in R : xa = 0_R\} \neq \emptyset$ porque $0_R \in N(a)$.
   Si $x, y \in N(a) \Rightarrow xa = 0_R$, $ya = 0_R$ y por tanto $(x-y)a = 0_R \Rightarrow x - y \in N(a)$ y $(xy)a = x(ya) = x0_R = 0_R \Rightarrow xy \in N(a)$, Por tanto $N(a)$ es subanillo de $(R, +, \cdot)$. Si el anillo $(R, +\cdot)$ es conmutativo, entonces para todos $r \in R$, $x \in N(a)$ se verifica que $(xr)a = (rx)a = r(xa) = r0_R = 0_R$ y por tanto es un ideal. Si el anillo $(R, +\cdot)$ no es conmutativo, entonces en general $N(a)$ no es un ideal. Por ejemplo, para $(R, +, \cdot) = (\mathbb{Z}^{2\times 2}, +, \cdot)$, $N(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$, se verifica que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ pero $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin N(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$

6. Sea $(R, +, \cdot)$ anillo y sean I y J ideales. entonces $0_R \in I$ y $0_R \in J$ por tanto $0_R \in I \cap J \Rightarrow I \cap J \neq \emptyset$. Si $x, y \in I \cap J \Rightarrow x, y \in I$ y $x, y \in J \Rightarrow x - y \in I$ y $x - y \in J \Rightarrow x - y \in I \cap J$. Si $x \in I \cap J$ y $r \in R \Rightarrow x \in I$ y $x \in J \Rightarrow rx, xr \in I$ y $rx, xr \in J \Rightarrow rx, xr \in I \cap J$. Por tanto $I \cap J$ es un ideal.

7. El polinomio $x^5 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ es irreducible en $\mathbb{Z}_2[x]$, porque no tienen raíces y no es divisible por el polinomio $x^2 + x + 1$, por tanto el polinomio $x^5 - x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ es irreducible.

8. $x + 2$

9. $B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}\}$

10. $x^4 - 14x^2 + 9$