Ejercicios de Autocomprobación

TEMA 2

1. Dada una m.a.s. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de una v.a. $\mathcal{U}(0,1)$, decir cuáles de los siguientes estimadores de la media (a pesar de que en este caso es conocida) son insesgados y en caso contrario calcular su sesgo.

   a) $\bar{X}$
   b) X_1
   c) $\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$
   d) $\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$
   e) $(\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} + \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\})/2$

2. Dada una m.a.s. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, calcular el estimador del parámetro θ por el método de los momentos en los siguientes casos:

   a) $f_\theta(x) = e^{-x+\theta}$, $x \geq \theta \quad (\theta > 0)$
   b) $f_\theta(x) = \theta(1/x)^{\theta+1}$, $x > 1 \quad (\theta > 1)$
   c) $Exp(\theta)$

3. Sea una m.a.s. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de una distribución $B(n, p)$. Estimar n y p por el método de los momentos.

4. Se ha obtenido la siguiente muestra de una distribución $\gamma(a, p)$: (1.5, 2, 0.75, 3, 0.25). Estimar a y p por el método de los momentos.

5. Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una m.a.s., encontrar el estimador de máxima verosimilitud para θ en los siguientes casos:

   a) $f_\theta(x) = \theta\alpha x^{\alpha-1}e^{-\theta x^\alpha}$, $x > 0 \quad (\alpha \text{ conocido})$
   b) $f_\theta(x) = \theta(1-x)^{\theta-1}$, $0 \leq x \leq 1 \quad (\theta \geq 1)$

6. Obtener el estimador por el método de los momentos de θ si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una m.a.s. de una v.a. X cuya función de densidad es:

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\theta+1}, \; x \geq x_0 > 0 \quad (\theta > 1)$$

7. El número de errores en una hora de cierto proceso sigue una distribución de Poisson de parámetro λ desconocido. En lugar de observar el número de errores en cada hora, se ha observado el tiempo en horas entre errores consecutivos.

   a) ¿Cómo puede ayudarnos esto a estimar el parámetro λ?
   b) Calcular, mediante el método de máxima verosimilitud, un estimador para λ acorde con este experimento.

c) Si los datos obtenidos en horas han sido

$$0.3, 0.45, 0.7, 0.1, 1.2, 0.5$$

¿cuál es la estimación de λ?

8. Comprobar que la familia gamma es conjugada respecto a la distribución de Poisson para el caso de $n = 1$.

9. La variable aleatoria X tiene una distribución Binomial con parámetros n conocido y θ desconocido. Encuentra la función de densidad a posteriori de θ si se asume una distribución a priori:

   a) $\pi(\theta) = 2\theta$ para $0 < \theta < 1$

   b) $\pi(\theta) = 3\theta^2$ para $0 < \theta < 1$

   c) $\pi(\theta) = 4\theta^3$ para $0 < \theta < 1$