## 0.1. Lección 18

La integral de Riemann

### 0.1.1. El problema del área:

Consideremos una función continua en un intervalo $[a, b]$ (o continua salvo en un conjunto finito de puntos) y tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ y la región $R$ del plano comprendida entre la gráfica de $f$ y el eje $0X$, es decir,

$$R = \{(x, y)\ a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

**Problema del área:** Calcular el área de la región $R$.

La integral de Riemann es la herramienta matemática que nos va a permitir calcular dicha integral. En el caso de las funciones constantes, $f(x) \equiv C$ el área de dicha región es el área del rectángulo de altura $C$ y base $b - a$, es decir, $C(b - a)$. En el caso de funciones definidas a trozos mediante funciones constantes el área será *la suma de áreas de rectángulos*. La integral de Riemann consistirá en la aproximación (por exceso y por defecto) del área de la región bajo una gráfica mediante la suma de áreas de rectángulos.

### 0.1.2. Definición de la integral de Riemann.

Sea $f(x)$ una función acotada en $[a, b]$.

**Partición de un intervalo** Un conjunto de puntos en $[a, b]$ del tipo $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ con $n \in \mathbb{N}$ es una *partición* del intervalo $[a, b]$ si $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Nótese que toda partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ divide el intervalo $[a, b]$ en $n$ subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ desde $k = 1, \ldots n$ siendo la longitud del intervalo cada subintervalo $(x_k - x_{k-1})$ para $k = 1, \ldots, n$.

Asociada a cada partición definimos las sumas superiores e inferiores de Riemann de $f$ en $[a, b]$ de la siguiente forma:

**Sumas superiores e inferiores de Riemann.** Dada una función $f$ acotada en el intervalo $[a, b]$ y una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de dicho intervalo, se define:

• La suma superior de Riemann de $f$ asociada a la partición $P$ que denotaremos por $S(f, P)$ como:

$$S(f,P) = \sum_{k=0}^{n} (x_k - x_{k-1}) M_k$$

donde $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ para todo $k = 1, \ldots, n$.

• La suma inferior de Riemann de $f$ asociada a la partición $P$ que denotaremos por $s(f, P)$ como:

$$s(f,P) = \sum_{k=0}^{n} (x_k - x_{k-1}) m_k$$

donde $m_k = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ para todo $k = 1, \ldots, n$

Nótese que puesto que $f$ está acotada en $[a, b]$ entonces $f$ está acotada en cada subintervalo $(x_{k-1}, x_k)$ por lo que estas sumas están bien definidas. Por otra parte, si

$$M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\},\ m = \text{ínf}\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

se sigue que para cualquier partición $P$ de $[a, b]$:

$$S(f,P) = \sum_{k=0}^{n} (x_k - x_{k-1}) M_k \leq \sum_{k=0}^{n} (x_k - x_{k-1}) M = M(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \cdots + x_n - x_{n-1}) = M(b-a)$$

$$s(f,P) = \sum_{k=0}^{n} (x_k - x_{k-1}) m_k \geq \sum_{k=0}^{n} (x_k - x_{k-1}) m = m(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \cdots + x_n - x_{n-1}) = m(b-a)$$

Es decir, los conjuntos de todas las sumas superiores y sumas inferiores están acotados lo que permite definir la integral superior e inferior de Riemann:

**Integral superior e inferior de Riemann.** Se define la integral superior de Riemann de $f$ en $[a, b]$ como

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \text{ínf}\{S(f,P) : P \text{ es una partición de } [a,b]\}$$

y la integral inferior de Riemann de $f$ en $[a, b]$ como

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s(f,P) : P \text{ es una partición de } [a,b]\}$$

Nótese que para toda partición $P$ se tiene que:

$$s(f,P)=\sum_{k=0}^{n}(x_k-x_{k-1})m_k\leq\sum_{k=0}^{n}(x_k-x_{k-1})M_k=S(f,P)$$

por lo que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\leq\overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Cuando la integral superior e inferior coinciden diremos que la función $f$ es integrable, es decir,

**La integral de Riemann** Diremos que una función $f$ es Riemann integrable en $[a,b]$ si la integral superior e inferior de Riemann coinciden, es decir,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\underline{\int_a^b} f(x)dx$$

En ese caso, a dicho número lo llamaremos integral de Riemann ( o simplemente integral o integral definida ) de $f$ en $[a,b]$ y se denota como

$$\int_a^b f(x)\,dx:=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

**Observación:** Por convenio se establece que $\int_a^a f(x)dx=0$ y si $a<b$,

$$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx.$$

El primer ejemplo de función integrable serán las funciones constantes en un intervalo. Nótese que si $f(x)=C$, todas las sumas superiores e inferiores coinciden con $C(b-a)$ que es la integral de $f$ en $[a,b]$, es decir,

$$\int_a^b C\,dx=C(b-a).$$

En particular, si $C>0$ obtenemos el área del rectángulo con base $b-a$ y altura $C$. Más generalmente, la integral de Riemann, que surge para resolver el problema del área nos permite definir con rigor el área bajo la gráfica de una función que sea mayor o igual que cero.

Sea $f$ una función integrable en $[a,b]$ y tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Se define el área de la región del plano $R = \{(x,y)\ a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ como

$$Area(R) = \int_a^b f(x)\, dx$$

### 0.1.3. Funciones que son integrables.

En esta sección veremos algunas clases importantes de funciones que son integrables. Para ello será esencial utilizar el siguiente criterio de integrabilidad.

**Criterio de integrabilidad.** Sea $f$ una función acotada en $[a,b]$. La función $f$ es integrable en $[a,b]$ si y sólo si:
Para todo $\epsilon > 0$ podemos encontrar una partición $P$ de $[a,b]$ tal que

$$S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$

⋆ Unas particiones muy relevantes son las que verifican que todos los intervalos son de la misma longitud y resultan de dividir el intervalo en $n$ subintervalos; puesto que longitud de dichos subintervalos en este caso es $\frac{b-a}{n}$ se obtiene la partición que denotaremos por $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ donde

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \frac{b-a}{n},\ x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \ldots,\ x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b$$

A continuación veremos distintos tipos de funciones integrables.

Toda función creciente (o decreciente) en $[a,b]$ es integrable.

*Demostración.* Haremos la prueba en el caso en el que la función es creciente. Suponemos que $f(a) < f(b)$; en otro caso, ai $f(a) = f(b)$ la función es constante y por tanto integrable. Dado $\epsilon > 0$ tenemos que encontrar una partición $P$ tal que

$$S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$

En primer lugar observamos que para las funciones crecientes se tiene que $\sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_k)$ y $\inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_{k-1})$, por lo tanto si consideramos una partición en la que todos los intervalos tienen la misma longitud, es decir, que $x_k - x_{k-1} = \delta$ para todo $k = 1, \ldots, n$ se tiene que

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) =$$

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})(f(x_k) - f(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \delta(f(x_k) - f(x_{k-1}) =$$

$$\delta\left(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(x_n) - f(x_{n-1})\right) = \delta(f(b) - f(a))$$

Basta entonces con elegir una partición de modo que todos los intervalos tengan la misma longitud y menor que $\frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}$, la cual se obtiene, por ejemplo, diviendo el intervalo $[a, b]$ en $n$-subintervalos con $\frac{b-a}{n} < \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}$, y obtenemos que para esa partición $P_n$ se tiene que:

$$S(f, P_n) - s(f, P_n) = \frac{1}{n}(f(b) - f(a)) < \epsilon$$

□

Toda función continua en $[a, b]$ es integrable en $a, b]$.

Para la prueba de este resultado nos hace falta utilizar una propiedad que verifican las funciones continuas en los intervalos cerrados y acotados que es la de ser uniformemente continua.

Definimos a continuación las funciones uniformemente continuas. Sabemos que si $f$ es continua en un punto $c$ se tene que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x-c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Por supuesto, dicho $\delta$ depende de $c$ y, en principio, es distinto para cada punto en el que la función es continua. Las funciones son uniformemente continuas sobre un conjunto $A$, si son continuas en $A$ y para cada $\epsilon > 0$ se puede encontrar $\delta > 0$ de modo que si $c \in A$ y $|x - c| < \delta$ entonces se tenga que $|f(x) - f(c)| < \epsilon$.

En el caso de las funciones continuas se tiene que toda función continua en $[a, b]$ es uniformente continua en $[a, b]$. Este resultado es el siguiente:

**Teorema 1.** *Ses $f$ una función continua en $[a, b]$, entonces $f$ es uniformemente continua en $[a, b]$; es decir, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in [a, b]$ y $|x-y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

Utilizando esta propiedad de las funciones continuas se puede probar que:

**Teorema 2.** *Sea $f$ una función continua en $[a,b]$ entonces $f$ es integrable en $[a,b]$.*

Para todo $\epsilon > 0$ podemos encontrar una partición $P$ de $[a,b]$ tal que

$$S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$

Si $P$ es una partición con $n$ intervalos de longitud $\frac{b-a}{n}$ se tiene que

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}(M_k - m_k)$$

donde $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ y $m_k = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$. Puesto que la función $f$ es continua en $[a,b]$ lo es el cualquiera de los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ y por el teorema de Weierstrass dichos supremos e ínfimos se alcanzan, es decir existe $t_k$ y $s_k$ en $[x_{k-1}, x_k]$ que son los máximos y mínimos absolutos de $f$ en dicho intervalo. Luego $M_k = f(t_k)$ y $m_k = f(s_k)$. Por lo tanto,

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}(f(t_k) - f(s_k))$$

Puesto que $f$ es continua en$[a,b]$ por el teorema anterior para $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $|x-y| < \delta$ y $x, y \in [a,b]$ entonces $|f(x)-f(y)| < \epsilon$. Luego eligiendo $\dfrac{1}{n} < \delta$ y la partición $P_n$ con $n$-subintervalos de igual longitud se tiene que $|t_k - s_k| \leq \frac{1}{n} < \delta$ para todo $k = 1, \ldots, n$. Por lo tanto,

$$S(f,P_n) - s(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}(f(t_k) - f(s_k)) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}|f(t_k) - f(s_k)|$$

$$\epsilon \sum_{k=1} n\frac{1}{n} = \epsilon$$

Más generalmente,

Sea $f$ acotada en $[a,b]$. Si $f$ es continua en $[a,b]$ excepto a lo sumo en un conjunto finito de puntos entonces $f$ es integrable en $[a,b]$.

**Observaciones:** Hay funciones que no son integrables. Por ejemplo, si consideramos la función definida en $[0,1]$ tal que $f(x) = 0$ si $x$ es racional y $f(x) = 1$ si $x$ es irracional no es una función integrable. Nótese que, en este caso, para cualquier partición $P$ de $[0,1]$, utilizando la propiedad de densidad de los racionales e irracionales, se tiene que $s(f,P) = 0$ y $S(f,P) = 1$. Luego, la integral inferior en $[0,1]$ es 0 y la integral superior es 1 por lo que $f$ no es integrable en $[0,1]$.

### 0.1.4. Propiedades de la integral.

Las propiedades más importantes de la integral son las siguientes:

**Principales propiedades de la integral:**

1. *Propiedad de linealidad:* Si $f$ y $g$ son integrables en $[a,b]$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ entonces $\lambda f + \mu g$ es integrable en $[a,b]$ y
$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$
2. *Propiedad de monotonía:* Si $f, g$ son integrables en $[a,b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ entonces
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$
3. *Propiedad de aditividad con respecto al intervalo de integración:* Si $a < c < b$ y $f$ es integrable en $[a,b]$ entonces $f$ es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$ y
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Como consecuencia de la segunda propiedad se el siguiente resultado de gran interés y con muchas aplicaciones:

Sea $f$ una función continua en $[a,b]$ y tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ entonces
$$\int_a^b f(x)dx = 0 \Longleftrightarrow f \equiv 0$$

*Demostración.* La primera parte es una consecuencia inmediata de la propiedad de monotonía puesto que $0 \leq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Para obtener la equivalencia, veamos que si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ y $f(x) \geq 0$ y continua en $[a,b]$ entonces $f \equiv 0$ en $[a,b]$. En efecto, razonando por reducción al absurdo suponemos que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) > 0$. Suponemos que $c \in (a,b)$, en otro caso la prueba es igual razonando la continuidad por la derecha o la izquierda. Puesto que $f$ es continua en $c$, por la propiedad de conservación del signo de las funciones continuas se tiene que existe $r > 0$ tal que $f(x) \geq \dfrac{f(c)}{2}$ para todo $x \in (c-r, c+r)$. Entonces por la propiedad de aditividad del intervalo y la propiedad de monotonía se tiene que:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c-r} f(x)dx + \int_{c-r}^{c+r} f(x)dx + \int_{c+r}^b f(x)dx \geq$$

$$\geq \int_{c-r}^{c+r} f(x)dx \geq \int_{c-r}^{c+r} \frac{f(c)}{2}dx > \frac{f(c)}{2}2r = f(c)r > 0;$$

lo cual no es posible, llegando a una constradicción. $\square$

Otra propiedad importante es la siguiente,

**Proposición 3.** *Si $f$ es integrable en $[a,b]$ entonces $|f|$ es integrable en $[a,b]$ y*

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$