Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos (UPM)

LENGUAJES FORMALES, AUTÓMATAS Y COMPUTABILIDAD

EXAMEN FINAL - JULIO 2018

Apellidos: SOLUCIÓN Nombre:

Ejercicio 1:

a) Dado el lenguaje $L_1 = \{ 0^m 1^n / m \geq 0, n > 0 \}$

Estudiar si es un lenguaje regular (describir mediante expresión regular) y, si lo es, obtener una gramática lineal derecha (GLD) que lo genere.

b) Construir una gramática que genere el lenguaje $L = \{ xx^{-1} / x \in \{a, b\}^* \}$

25 minutos

---

a) $L_1 = \{0^m 1^n \mid m \geq 0, n > 0\}$

Si es regular $L = 0^* 1 1^*$

$G = (\Sigma_T = \{0, 1\}, \Sigma_N = \{S, A\}, S, P)$

$$P = \left| \begin{array}{l} S ::= 0S \mid 1A \mid 1 \\ A ::= 1A \mid 1 \end{array} \right.$$

---

b) $L = \{xx^{-1} \mid x \in \{a, b\}^*$

$G = (\Sigma_T = \{a, b\}, \Sigma_N = \{S\}, S, P)$

$$P = \left| \; S ::= aSa \mid bSb \mid \lambda \right.$$

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos (UPM)

LENGUAJES FORMALES, AUTÓMATAS Y COMPUTABILIDAD

EXAMEN FINAL - JULIO 2018

Apellidos: SOLUCIÓN Nombre:

Ejercicio 2:

Dada $R_0 = a(ba)^*b$ obtener una gramática lineal derecha (GLD) y un autómata finito (AF), tal que, $L(GLD) = R_0$ y $L(AF) = R_0$, por medio de derivadas de R_0.

25 minutos

$R_0 = a(ba)^*b$

$D_a(R_0) = D_a(a(ba)^*b) = \underline{(ba)^*b = R_1}$, $\boxed{D_a(R_0) = R_1}$

$D_b(R_0) = D_b(a(ba)^*b) = \phi$

$Da(R_1) = D_a((ba)^*b) = D_a(ba)(ba)^*b + \lambda D_a(b) = \phi + \phi = \phi$

$D_b(R_1) = D_b((ba)^*b) = D_b(ba)(ba)^*b + \lambda D_b(b) = a(ba)^*b + \lambda$

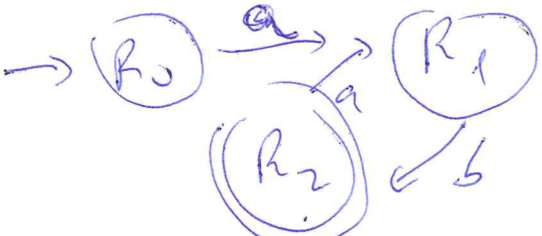
$\underline{a(ba)^*b + \lambda = R_2}$; $\boxed{D_b(R_1) = R_2}$

$D_a(R_2) = D_a(a(ba)^*b + \lambda) = D_a(a(ba)^*b) + D_a(\lambda) =$

$= (ba)^*b + \phi = (ba)^*b = R_1$; $\boxed{D_a(R_2) = R_1}$

$D_b(R_2) = D_b(a(ba)^*b + \lambda) = D_b(a(ba)^*b) + D_b(\lambda) = \phi$

$AF = (\Sigma = \{a,b\}, Q = \{R_0, R_1, R_2\}, f, R_0, F = \{R_2\})$



$GLD = (\Sigma_T = \{a,b\}, \Sigma_N = \{R_0, R_1, R_2\}, R_0, P)$

$$P = \left| \begin{array}{l} R_0 ::= aR_1 \\ R_1 ::= bR_2 \mid b \\ R_2 ::= aR_1 \end{array} \right.$$

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos (UPM)

LENGUAJES FORMALES, AUTÓMATAS Y COMPUTABILIDAD

EXAMEN FINAL - JULIO 2018

Apellidos: **SOLUCION** Nombre:

Ejercicio 3:

Sea el autómata a pila AP1 = $\{ \Sigma , \Gamma , Q , q_0 , A_0 , f , \emptyset \}$, que acepta por VACIADO DE PILA, con $\Sigma = \{ 1 , 2 \}$, $\Gamma = \{ A_0 , A \}$, $Q = \{ q_0 , q_1 \}$ y f definida mediante los 5 movimientos siguientes:

① $f (q_0 , 1 , A_0) = (q_0 , AA_0)$

② $f (q_0 , 1 , A) = (q_0 , AA)$

③ $f (q_0 , 2 , A) = (q_1 , A)$

④ $f (q_1 , 2 , A) = (q_1 , \lambda)$

⑤ $f (q_1 , \lambda , A_0) = (q_1 , \lambda)$

a) Construir, utilizando el algoritmo correspondiente, un AP2 que acepte por ESTADOS FINALES el mismo lenguaje que AP1 (7 puntos)
Siendo AP2 = $\{ \Sigma, \Gamma \cup \{A_0'\}, Q \cup \{q_0', q_F\}, q_0', A_0', f', F \}$, donde $F = \{q_F\}$.

b) Comprobad la aceptación de las palabras 112 y 11222 en ambos autómatas a pila (2 puntos)

c) Describe el lenguaje que aceptan AP1 y AP2 (1 punto)

25 minutos

---

a)

1) $f' (q_0', \lambda , A_0') = (q_0, A_0A_0')$ => 1º PASO $f(q_0'\ \lambda\ A_0') = (q_0, A_0A_0')$ Accede a la D.I.I. de AP1.
2) $f' (q_0 , 1 , A_0) = (q_0 , AA_0)$
3) $f' (q_0 , 1 , A) = (q_0 , AA)$
4) $f' (q_0 , 2 , A) = (q_1 , A)$ => 2º PASO $f'(q\ \ a\ \ A) = f (q\ \ a\ \ A)$ mismos movimientos f' de AP2 que f de AP1
5) $f' (q_1 , 2 , A) = (q_1 , \lambda)$
6) $f' (q_1 , \lambda , A_0) = (q_1 , \lambda)$
7) $f' (q_1 , \lambda , A_0') = (q_F, \lambda)$ => 3º PASO $(q_F, \lambda) \in f'(q\ \ \lambda\ \ A_0')$ accede a estado final q_F cuando borra A_0'.

b)

Aceptación AP1: Se prueban las 2 palabras: $112 \notin L$ y $11222 \in L$ en AP1:
Palabra 112: $[q_0\ \ 112\ \ A_0] \vdash [q_0\ \ 12\ \ AA_0] \vdash [q_0\ \ 2\ \ AAA_0] \vdash [q_1\ \ \lambda\ \ AAA_0]$ **NO ACEPTA**
Palabra 11222: $[q_0\ \ 11222\ \ A_0] \vdash [q_0\ \ 1222\ \ AA_0] \vdash [q_0\ \ 222\ \ AAA_0] \vdash [q_1\ \ 22\ \ AAA_0] \vdash [q_1\ \ 2\ \ AA_0] \vdash [q_1\ \ \lambda\ \ A_0] \vdash [q_1\ \ \lambda\ \ \lambda\ ]$ **ACEPTA**

Aceptación AP2: Se prueban las 2 palabras: $112 \notin L$ y $11222 \in L$ en AP2:
Palabra 112: $[q_0'\ \ 112\ \ A_0'] \vdash [[q_0\ \ 112\ \ A_0] \vdash [q_0\ \ 12\ \ AA_0] \vdash [q_0\ \ 2\ \ AAA_0] \vdash [q_1\ \ \lambda\ \ AAA_0]$ **NO ACEPTA**
Palabra 11222: $[q_0'\ \ 11222\ \ A_0'] \vdash [q_0\ \ 11222\ \ A_0A_0'] \vdash [q_0\ \ 1222\ \ AA_0A_0'] \vdash [q_0\ \ 222\ \ AAA_0A_0'] \vdash [q_1\ \ 22\ \ AAA_0A_0'] \vdash [q_1\ \ 2\ \ AA_0A_0'] \vdash [q_1\ \ \lambda\ \ A_0A_0'] \vdash [q_1\ \ \lambda\ \ A_0'] \vdash [q_F\ \ \lambda\ \ \lambda\ ]$ **ACEPTA**

c)

El lenguaje que aceptan ambos autómatas (AP1 y AP2) es: $L = \{ 1^n 2^{n+1} / n \geq 1 \}$

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos (UPM)

LENGUAJES FORMALES, AUTÓMATAS Y COMPUTABILIDAD

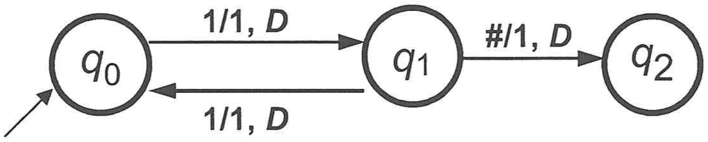
EXAMEN FINAL - JULIO 2018

Apellidos: Nombre:

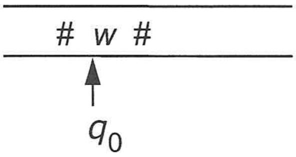
Ejercicio 4:

SOLUCIÓN

Sea la Máquina de Turing M definida según el siguiente grafo:



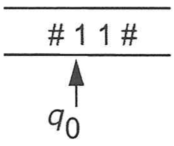
Y cuya configuración inicial es la siguiente:



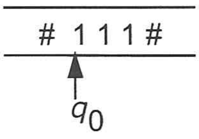
Donde $w \in 1^*$ es un número entero codificado en unario. M inicialmente está en el estado q_0 leyendo el primer 1 de *w*.

a) ¿Qué función aritmética sobre cada *w* calcula M? ¿Cuál es la configuración final de M tras recibir las entradas de los apartados a.1) y a.2)? (2 puntos)

a.1)



a.2)



b) Escribir (y describir brevemente) el contenido inicial de la cinta de una Máquina de Turing Universal (MTU) programada para simular a la máquina M con la entrada del apartado a.2). Utilicen la siguiente codificación binaria: $q_0 \equiv 00$; $q_1 \equiv 01$; $q_2 \equiv 10$; Izqda I $\equiv$ 1; Dcha D $\equiv$ 0 (2 puntos)

c) ¿En qué estado termina el módulo transcriptor durante la simulación del primer movimiento de M con la entrada del apartado a.2)? ¿Por qué? Explicar brevemente. (2 puntos)

d) Escribir (y describir brevemente) el contenido de la cinta de la MTU después de simular el primer movimiento que realiza la máquina M con la entrada del apartado a.2). ¿A qué estado accede el módulo simulador tras recolocar el *? ¿Por qué? (2 puntos)

e) ¿En qué estado se para la MTU cuando termina de simular a la máquina *M* con la entrada del apartado a.2).? ¿Por qué? Explicar brevemente. (2 puntos)

NOTA: Todos los apartados se responderán en la carilla de atrás.

Durante el examen se da fotocopia con el grafo de los tres módulos de la MTU.

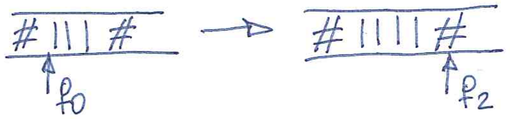
30 minutos

Continuación ejercicio 4 (Ex. Final julio 2018). RESPUESTAS. SOLUCIONES

Apartado a) **a.1)** y **a.2)** y función aritmética $w \longrightarrow w + w \pmod 2$

a.1)

a.2)



Apartado b) MTU programada (con la entrada a.2)

REG. inicial

					celdas en blanco			q_0		1		q_0		1	q_1		1	D		q_1		1	q_0		1	D		
...	#	*	1	1	0	0	ǂ	0	0	1	ǂ	0	0	1	0	1	1	0	ǂ	0	1	1	0	0	1	0	ǂ	

	0	1	0	1	0	1	0	ǂ	#	•	•	•												...

El * se sitúa sobre la 1ª celda que lee M. Se colocan dos celdas en blanco (00)

Hay 3 registros, uno por cada diferente movimiento que puede realizar M

Registro inicial: $ǂ\,00\,①\,ǂ$ → símbolo que inicialmente lee M

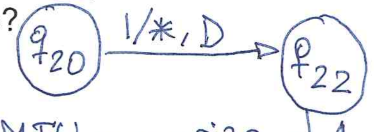
→ q_0: estado inicial de M

Apartado c) Último estado del módulo transcriptor con a.2): q_{12} ¿Por qué? Porque el último bit del registro localizado y que se transcribe es un 0. $ǂ\,001011\,⓪\,ǂ$ → q_{12}

(derecha)

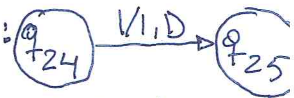
Ese 0 no se transcribe sino que se memoriza transitando a q_{12} y en q_{14} comenzando el módulo simulador.

Apartado d) Cinta de la MTU tras simular el primer movimiento (escribid sólo la parte de la cinta que cambia). ¿Estado al que accede la MTU tras recolocar el *? q_{22} ¿Por qué?



...	#	1	*	1	0	0	ǂ	0	1	1	ǂ	•	•	•				

La MTU memoriza el 1 que había en la celda donde se recoloca el * para escribirlo en la última celda del REG. inicial:



El * se ha recolocado en la celda de la derecha.

El control ha pasado de q_0 (00) a q_1 (01)

Se estaba leyendo un 1; se sigue leyendo un 1.

Apartado e) Estado en el que para la MTU con a.2): q_5 ¿Por qué? Porque el módulo localizador está en q_5 buscando un "1" y tras saltar a la derecha todos los registros marcados previamente aparece un #. $\delta(q_5, \#) = \emptyset \Rightarrow$ MTU para.

M para en q_2 pero MTU para en q_5 (que es lo que se pregunta).