CÁLCULO III **Matemáticas e Informática** **Curso 2020/2021**	1$^{\text{er}}$Apellido: __________________ 2º Apellido: __________________	**13/11/2020** Tiempo: **2h**
Dpto. Matemática Aplicada ETSI Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: __________________ Número de matrícula:	**Calificación:**

PRIMER PARCIAL

1. **(a)** **(1 punto)** Demuestra que son integrables Riemann las funciones continuas $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$, con $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo.

   (b) **(1 punto)** Enuncia el teorema de Lebesgue y úsalo para estudiar si es integrable Riemann la función $f : [0, 1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} y & , \text{si } y \notin \mathbb{Q} \\ x^2 & , \text{si } y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

   En caso afirmativo, ¿cuál es el valor de la integral?

2. **(2 puntos)** Calcula la masa de la placa $S = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ con densidad puntual $\delta(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3. **(2 puntos)** Calcula el valor de la integral de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ sobre el recinto acotado en $z \geq 0$ comprendido entre el cono $x^2 + y^2 = z^2$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = 2 - z$.

4. **(2 puntos)** Calcula el volumen del recinto acotado limitado en el semiespacio $z \geq 0$ por la superficie $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = z^2\sqrt{x^2 + y^2}$.

5. **(2 puntos)** Se considera la curva γ parametrizada por $\alpha(t) = (\sin t + \cos t, \sin t - \cos t, t^2)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

   (a) Calcula la masa de un cable con la forma de γ y densidad puntual $\delta(x,y,z) = \sqrt{z}$.

   (b) Suponiendo el campo de fuerzas $F(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$, calcula el trabajo necesario para que una partícula de masa unidad recorra la curva γ en el sentido indicado por ella.

Observaciones:

- Para que sean valorados, todos los resultados obtenidos deben estar debidamente justificados.
- No está permitido el uso de calculadoras o móviles.
- Esta hoja con los enunciado hay que entregarla junto con el resto de hojas del examen, todas ellas con el nombre del alumno.
- Los problemas se pueden resolver en cualquier orden, pero sin mezclarse unos con otros.

SOLUCIONES

① (b) No es integrable Riemann porque el conjunto de discontinuidades de f no tiene medida cero.

② $$m(S) = \iint_S \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\rho^2 \cos^2\theta}{\rho}\cdot \rho\, d\rho = \cdots\cdots = \frac{(2\sqrt{2}-1)\pi}{3}$$

③ $$\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1,\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2-x^2-y^2\}$$

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2\leq 1} dx\,dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)\,dz = \cdots\cdots = \frac{4\pi}{15}$$

④ $$(x^2+y^2+z^2)^2 = z^2\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[\text{esféricas}]{} \begin{cases} \rho = 0 \\ \rho = \cos^2\varphi \sin\varphi \end{cases}$$

$$V(\Omega) = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi} \rho^2 \cdot \sin\varphi\, d\rho = \cdots\cdots = \frac{\pi^2}{2^8} = \frac{\pi^2}{256}$$

⑤ $$\alpha(t) = (\sin t + \cos t, \sin t - \cos t, t^2),\quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\alpha'(t) = (\cos t - \sin t, \cos t + \sin t, 2t)\ ;\quad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{2+4t^2}$$

a) $$m = \int_\gamma \sqrt{z}\cdot ds = \int_0^{2\pi} t\cdot\sqrt{2+4t^2}\, dt = \cdots = \frac{(2+16\pi^2)^{3/2} - 2\sqrt{2}}{12}$$

b) $$W = \int_\gamma x\,dx + y\,dy + (x+y)\,dz = \cdots\cdots = -8\pi$$