Solución de algunos ejercicios del Tema 2.

1. a) $\bar{X}$

Sabemos que la media muestral es siempre un estimador insesgado de la media poblacional. La población, en este caso, se distribuye según una $\mathcal{U}(0,1)$, su media es el punto medio del intervalo, con lo que

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{2}$$

b) X_1

X_1 es un elemento de la m.a.s, sabemos que

$$E(X_i) = E(X) \qquad \forall \quad i = 1, \ldots, n$$

En este caso, $E(X)$ es la esperanza de la uniforme, es decir $1/2$, con lo que

$$E(X_1) = E(X) = \frac{1}{2}$$

por lo tanto, el estimador X_1 es <u>insesgado</u>.

c) $\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$

Llamamos $T = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Para poder calcular $E(T)$ y ver así si es insesgado o no, debemos calcular primero su función de distribución. La calculamos:

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \leq t) =$$
$$= P(X_1 \leq t, \ldots, X_n \leq t) \overset{(*)}{=} \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq t) \overset{(**)}{=} t^n$$

(*) Ya que los componentes de la m.a.s son independientes y la probabilidad conjunta será el producto de las probabilidades individuales.

(**) Ya que la función de densidad y de distribución de cada $X_i \sim \mathcal{U}(0,1)$ $\forall$ i es

$$f(x) = 1 \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Para calcular la función de densidad a partir de la de distribución de T:

$$f_T(t) = \frac{dF_T(t)}{dt} = \begin{cases} nt^{n-1} & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y, finalmente, para calcular la $E(T)$

$$E(T) = \int_0^1 t f_T(t) dt =$$

$$= \int_0^1 tnt^{n-1}dt = n\left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{n}{n+1} \neq \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, T es sesgado para estimar la media y su SESGO es[1]

$$\text{SESGO}(T) = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2n+2}$$

2. a) $f_\theta(x) = e^{-x+\theta}$, $x \geq \theta \quad (\theta > 0)$

   Hay que calcular $E(X)$ para poder utilizar el método de los momentos.

$$\alpha_1 = E(X) = \int_\theta^\infty xe^{-x+\theta}dx = e^\theta\left[-xe^{-x}\big|_\theta^\infty + \int_\theta^\infty e^{-x}dx\right] =$$

$$= e^\theta\left[\theta e^{-\theta} - e^{-x}\big|_\theta^\infty\right] = e^\theta[\theta e^{-\theta} + e^{-\theta}] = \theta + 1$$

   Por lo tanto, en la ecuación $E(X) = \theta + 1$ sólo debemos sustituir los momentos poblacionales por los muestrales y θ por su estimador $\hat{\theta}$ y despejarlo, obteniendo que el estimador del parámetro por el método de los momentos es:

$$\hat{\theta} = \bar{X} - 1$$

   b) $f_\theta(x) = \theta(1/x)^{\theta+1}$, $x > 1 \quad (\theta > 1)$

   Debemos calcular la esperanza de la variable aleatoria con esa función de densidad. Por definición, sabemos que:

$$E(X) = \alpha_1 = \int f(x)dx$$

   y en nuestro caso

$$E(X) = \int_1^\infty x\theta\left(\frac{1}{x}\right)^{\theta+1}dx = \theta\left.\frac{x^{-\theta+1}}{-\theta+1}\right|_1^\infty = \frac{\theta}{\theta-1}$$

   Despejamos θ:

$$\theta = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1}$$

   Estimando α_1 mediante $a_1 = \bar{x}$, obtenemos como estimador de θ:

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{\bar{x}-1}$$

5. Calculamos los estimadores por el método de máxima verosimilitud.

   a) $f_\theta(x) = \theta\alpha x^{\alpha-1}e^{-\theta x^\alpha} \qquad x > 0, \qquad \alpha > 0.$

   Se calcula la función de verosimilitud:

[1] Para el caso $n = 1$ sería insegado, pero tendríamos $T = X_1$ que es el caso b).

$$
\begin{aligned}
L_\theta(x_1,\ldots,x_n)=L(\theta) &= \prod_{i=1}^{n}\theta\alpha x_i^{\alpha-1}e^{-\theta x_i^\alpha}\\
&= \theta^n\alpha^n\left[\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha-1}\right]e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i^\alpha}
\end{aligned}
$$

Su logaritmo:

$$
LnL(\theta)=nLn\theta+nLn\alpha+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}Lnx_i-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i^\alpha
$$

Se deriva con respecto del parámetro θ e igualamos a 0:

$$
\frac{\partial LnL(\theta)}{\partial\theta}=\frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}x_i^\alpha
$$

$$
\frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}x_i^\alpha=0
$$

Despejamos θ, obteniendo $\hat{\theta}$:

$$
\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i^\alpha}
$$

Hay que comprobar que el extremo de la función que hemos encontrado se corresponde con un **máximo**. Para ello, estudiamos el signo de la la derivada segunda evaluada en $\hat{\theta}$:

$$
\frac{\partial^2 LnL(\theta)}{\partial\theta^2}=-\frac{n}{\theta^2}\bigg|_{\theta=\hat{\theta}}<0
$$

Por lo que nos encontramos ante un máximo. Por tanto, el estimador de máxima verosimilitud para θ es:

$$
\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i^\alpha}
$$

b) $f_\theta(x)=\theta(1-x)^{\theta-1},\qquad 0\le x\le 1,\quad \theta\ge 1$

Construimos la función de verosimilitud:

$$
\begin{aligned}
L(\theta) &= \prod_{i=1}^{n}\theta(1-x_i)^{\theta-1}\\
&= \theta^n\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{\theta-1}
\end{aligned}
$$

Calculamos su logaritmo:

$$
LnL(\theta)=nLn\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}Ln(1-x_i)
$$

Derivamos con respecto de θ:

$$\frac{\partial LnL(\theta)}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} Ln(1-x_i)$$

Igualamos a 0 la derivada y despejamos θ para obtener $\hat{\theta}$:

$$\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} Ln(1-x_i) = 0$$

$$\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} Ln(1-x_i)}$$

Como los x_i están entre 0 y 1, su logaritmo es negativo y menor que 1, con lo que la expresión obtenida para $\hat{\theta}$ es positiva, pero según el enunciado debe ser $\theta \geq 1$.

$$\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} Ln(1-x_i)} \geq 1 \Leftrightarrow n \geq -\sum_{i=1}^{n} Ln(1-x_i)$$

Comprobamos que el valor obtenido es realmente un máximo con la derivada segunda.

$$\frac{\partial^2 LnL(\theta)}{\partial\theta^2} = -\frac{n}{\theta^2}\bigg|_{\theta=\hat{\theta}} < 0$$

Con lo que nos encontramos ante un máximo.

La función de verosimilitud va a ser creciente si

$$\theta < -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} Ln(1-x_i)}$$

con lo que si $\hat{\theta} = -\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} Ln(1-x_i)} \geq 1$, el máximo se alcanza ese punto, pero si ese valor es menor que 1, el máximo se alcanza en el punto 1. Así,

$$\hat{\theta} = \begin{cases} -\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} Ln(1-x_i)} & \text{si } n \geq -\sum_{i=1}^{n} Ln(1-x_i) \\ 1 & \text{si } n < -\sum_{i=1}^{n} Ln(1-x_i) \end{cases}$$

6. Calculamos el estimador por el método de los momentos siendo:

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\theta+1}, \qquad x \geq x_0 > 0$$

Para ello calculamos el primer momento con respecto del origen para la variable aleatoria cuya función de densidad es la anterior:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{x_0}^{\infty} x \frac{\theta}{x_0} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\theta+1} dx \\
&= \theta x_0^{\theta} \int_{x_0}^{\infty} x^{-\theta} dx \\
&= \theta x_0^{\theta} \left. \frac{x^{-\theta+1}}{-\theta+1} \right|_{x_0}^{\infty} \\
&= \theta x_0^{\theta} \frac{x_0^{-\theta+1}}{\theta-1} \\
&= \frac{\theta}{\theta-1} x_0
\end{aligned}
$$

A continuación, despejamos θ de la igualdad:

$$\alpha_1 = E(X) = \frac{\theta}{\theta-1} x_0$$

$$\theta = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - x_0}$$

Sustituyendo $\alpha_1 = E(X)$ por su estimador $a_1 = \bar{x}$ se obtiene el estimador de θ por el método de los momentos, $\hat{\theta}$:

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{\bar{x} - x_0}$$

8. Comprobar que la familia gamma es conjugada respecto a la distribución de Poisson para el caso de $n = 1$.

Dist. a priori	Verosimilitud	Dist. a posteriori
$\theta \sim \gamma(a,p)$	$X\|\theta \sim \mathcal{P}(\theta)$	$\theta\|x \sim ?$

$$f(\theta|x) = \frac{f(x,\theta)}{f_X(x)} = \frac{P(x/\theta)f(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} P(x/\theta)f(\theta)d\theta} = \frac{e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!}\frac{a^p}{\Gamma(p)}\theta^{p-1}e^{-a\theta}}{\int_0^{\infty}\left(e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!}\frac{a^p}{\Gamma(p)}\theta^{p-1}e^{-a\theta}\right)d\theta}$$

Desarrollamos el denominador:

$$\int_0^{\infty} e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!}\frac{a^p}{\Gamma(p)}\theta^{p-1}e^{-a\theta}d\theta = \frac{a^p}{\Gamma(p)x!}\int_0^{\infty} e^{-(1+a)\theta}\theta^{x+p-1}d\theta = \frac{a^p}{\Gamma(p)x!}\frac{\Gamma(x+p)}{(1+a)^{x+p}}$$

donde hemos utilizado la siguiente propiedad de la función gamma:

$$\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-ax}dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \text{ siendo } a = b + ic \text{ con } b > 0$$

Así , sustituyendo obtenemos la función de densidad a posteriori:

$$f(\theta|x) = \frac{\dfrac{e^{-(1+a)\theta}\theta^{x+p-1}a^p}{x!\Gamma(p)}}{\dfrac{a^p}{x!\Gamma(p)}\dfrac{\Gamma(x+p)}{(1+a)^{x+p}}} = \frac{(1+a)^{x+p}}{\Gamma(x+p)}\theta^{x+p-1}e^{-(1+a)\theta}$$

que es la función de densidad de una Gamma de parámetros $1+a$ y $x+p$, es decir, $\theta|x \sim \gamma(1+a, x+p)$.

Observación 1: Si operamos algo más en el denominador, obtenemos

$$f_X(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)x!}\frac{\Gamma(x+p)}{(1+a)^{x+p}} = \cdots = \binom{x+p-1}{x}\left(\frac{a}{1+a}\right)^p\left(\frac{1}{1+a}\right)^x \sim BN\left(p, \frac{a}{1+a}\right)$$

Así, la marginal de X es una distribución binomial negativa con un número fijo de éxitos igual a p y probabilidad de éxito $\dfrac{a}{1+a}$. Recordemos que en una distribución binomial negativa, la variable aleatoria X representa el número de fallos antes del n-ésimo éxito, en este caso, el p-ésimo (n= p).

Observación 2: Si consideramos una m.a.s. de tamaño n, es decir, $(X_1, \ldots, X_n)$, la función de verosimilitud es:

$$P(\vec{x}/\theta) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n/\theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\theta}\frac{\theta^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\theta}\frac{\theta^{\sum x_i}}{\prod x_i!}$$

Sustituyendo en la expresión

$$f(\theta/\vec{x}) = \frac{P(\vec{x}/\theta)f(\theta)}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} P(\vec{x}/\theta)f(\theta)d\theta}$$

y operando igual que antes, obtenemos $\theta/\vec{x} \sim \gamma(a+n, p+\sum_{i=1}^{n} x_i)$.