| **Estructuras Algebraicas**<br>Primer examen parcial | $1^{\text{er}}$ Apellido: __________<br>$2^{\text{o}}$ Apellido: __________<br>Nombre: __________<br>Número de matrícula: | 19 de abril de 2018<br>Tiempo 2 h.<br>**Calificación:** |
|---|---|---|
| Depto. Matemática Aplicada T.I.C.<br>E.T.S. de Ingenieros Informáticos<br>Universidad Politécnica de Madrid | | |

1. (2 puntos) En el conjunto $G = \mathbb{R} - \{1\}$ se considera la operación $*$ definida del siguiente modo:

$$a * b = a + b - ab$$

Estudiar si $(G, *)$ es un grupo. En caso afirmativo encontrar el elemento identidad del grupo, el elemento inverso de cada $a \in G$ e indicar si es un grupo abeliano.

2. (2 puntos) Estudiar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo).

   *a*) Dos grupos de orden $19$ son isomorfos.

   *b*) Si un grupo tiene un elemento de orden $18$ entonces al menos tiene $6$ elementos de orden $18$.

   *c*) El grupo de $(S_5, \circ)$ tiene un subgrupo de orden $3$.

   *d*) Existen $4$ grupos abelianos no isomorfos, de orden $27$.

3. (2 puntos)

   *a*) Escribir como producto de ciclos disjuntos y obtener el orden de $\pi$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 1 & 6 & 2 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

   *b*) Calcular $\pi^{50}$. Indicar justificadamente si $\pi$ es par o impar.

4. (2 puntos) Estudiar si es un homomorfismo de grupos. En caso afirmativo calcular el núcleo y la imagen y establecer el isomorfismo dado por el primer teorema de isomorfía:

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \qquad f(a) = ([a]_2, [a]_4)$$

5. (2 puntos) Se considera el grupo $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ y el subgrupo $H = \langle([1]_4, [2]_4)\rangle$. Se pide:

   *a*) Calcular $[G : H]$ y el conjunto cociente $G/H$.

   *b*) Obtener el orden de cada uno de los elementos de $(G/H, +_H)$, y deducir razonadamente sus divisores elementales y los factores invariantes.

## Soluciones

1. *a*) La operación es interna:
   $a * b = 1 \Leftrightarrow a + b - ab = 1 \Leftrightarrow (1 - a)(1 - b) = 0 \Leftrightarrow a = 1$ ó $b = 1$

   *b*) Se verifica la propiedad asociativa:
   $a * (b * c) = a + b + c - bc - ab - ac + abc = (a * b) * c$

   *c*) Tiene elemento neutro: $e_G = 0 \in \mathbb{R} - \{1\}$ verifica que $\forall a \in \mathbb{R} - \{1\}$ es $e_G * a = a$

   *d*) Todo elemento tiene un opuesto: $\forall a \in \mathbb{R} - \{1\}$, $a^{-1} = \frac{a}{a-1} \in \mathbb{R} - \{1\}$ verifica que $a^{-1} * a = e_G$

   *e*) Es un grupo abeliano: $a * b = a + b - ab = b * a$

2. *a*) Verdadero.

   *b*) Verdadero.

   *c*) Verdadero.

   *d*) Falso.

3. *a*) $\pi = (1, 5, 4)(2, 8, 3, 7, 6)$. $|\pi| = 15$.

   *b*) $\pi^{50} = (1, 4, 5)$. $\pi \in A_8$.

4. $f$ es homomorfismo de grupos: $f(a + b) = ([a + b]_2, [a + b]_4) = ([a]_2, [a]_4) + ([b]_2, [b]_4) = f(a) + f(b)$
   $\ker(f) = 4\mathbb{Z} = \{4n : n \in \mathbb{Z}\}$, $\operatorname{im}(f) = \{(0, 0), (1, 1), (0, 2), (1, 3)\} = \langle(1, 1)\rangle$,
   $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \approx \operatorname{im}(f) \approx \mathbb{Z}_4$

5. *a*) $(0, 0)H = \{(0, 0), (1, 2), (2, 0), (3, 2)\}$, $(0, 1)H = \{(0, 1), (1, 3), (2, 1), (3, 3)\}$,
   $(0, 2)H = \{(0, 2), (1, 0), (2, 2), (3, 0)\}$, $(0, 3)H = \{(0, 3), (1, 1), (2, 3), (3, 1)\}$
   $G/H = \{(0, 0)H, (0, 1)H, (0, 2)H, (0, 3)H\}$, $[G : H] = 4$.

   *b*) $|(0, 0)H| = 1$, $|(0, 1)H| = 4$, $|(0, 2)H| = 2$, $|(0, 3)H| = 4$
   $G/H \approx \mathbb{Z}_4$