Departamento Inteligencia Artificial

POLITÉCNICA

LÓGICA - 1º Grado en Ingeniería Informática

Facultad de Informática

Universidad Politécnica de Madrid

Resolución con unificación

David Pérez del Rey

dperezdelrey@fi.upm.es

Despacho 2104

Tel: +34 91 336 74 45

Forma clausular de una deducción

- Una deducción T[A1, A2, …, An] |– B es correcta sii A1 ∧ A2 ∧ … ∧ An ∧ ¬B es insatisfacible
  - i.e. no existe una interpretación modelo de las premisas y contramodelo de la conclusión

DEFINICIÓN FUNDAMENTAL!!!

- ¿Existe un método para decidir automáticamente si una argumentación es correcta?

- Dada una deducción: T[A1, A2, …, An] |– B
  1. Obtener la forma clausular de cada Ai, $1 \leq i \leq n$
  2. Obtener la forma clausular de ¬B
  3. Realizar la unión de todos los conjuntos de cláusulas
  4. Comprobar la **satisfacibilidad** **MEDIANTE RESOLUCIÓN**

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Resolución e instancias básicas

- Pueden construirse árboles de resolución en los que los resolventes de cada dos cláusulas se obtienen en un paso de resolución con umg
- Por cada paso de resolución en instancias básicas puede definirse un paso de resolución con umg

Ejemplo: C_1: ¬B(x,f(y)) C_2: B(a,z) v C(z) C_3: B(b,w) v ¬C(w)

I_1: ¬B(a,f(a)) I_1': ¬B(b,f(a)) I_2: B(a,f(a)) v C(f(a)) I_3: B(b,f(a)) v ¬C(f(a))

¬B(a,f(a)) B(a,f(a)) v C(f(a))

C(f(a)) B(b,f(a)) v ¬C(f(a))

B(b,f(a)) ¬B(b,f(a))

□

Resolución con instancias básicas

El Método de Resolución de Robinson

- **Procedimiento general de decisión de insatisfacibilidad:**
  1. Generar todos los conjuntos posibles de instancias básicas
  2. Para cada conjunto de instancias básicas aplicar el método de resolución

- El paso 1. es especialmente costoso e ineficiente. Idea de Robinson: "retrasar" la sustitución de variables por términos de H, instanciando sólo aquellas variables que sean necesarias en cada paso de resolución

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Resolución con unificación

- Regla de resolución con UMG: Sean $L_1 \vee \ldots \vee L_n \vee C_1$ y $\neg L_1' \vee \ldots \vee \neg L_m' \vee C_2$ dos cláusulas, donde todos los L_{ij} son literales con el mismo símbolo de predicado. Puede deducirse una nueva cláusula $(C_1 \rho_1 \vee C_2 \rho_2)\beta$, llamada *resolvente*, donde
  - ρ_1 y ρ_2 son renombrados cuyos dominios respectivos son todas las variables de cada cláusula y $\text{Rango}(\rho_1) \cap \text{Rango}(\rho_2) = \varnothing$
  - β es umg de $\{L_1 \rho_1, \ldots, L_n \rho_1, L_1'\rho_2, \ldots, \neg L_m'\rho_2\}$

- La regla de resolución con UMG se apoya en una versión de la regla de **idempotencia** para LPO: Dada una cláusula $L_1 \vee \ldots \vee L_n \vee C$, siendo $L_1, \ldots, L_n$ literales con el mismo símbolo de predicado, puede deducirse una nueva cláusula $L \vee C\beta$ donde
  - β es unificador de $L_1, \ldots, L_n$
  - $L = L_1\beta = \ldots = L_n\beta$

  El literal L se denomina *factor* de $L_1 \vee \ldots \vee L_n \vee C$

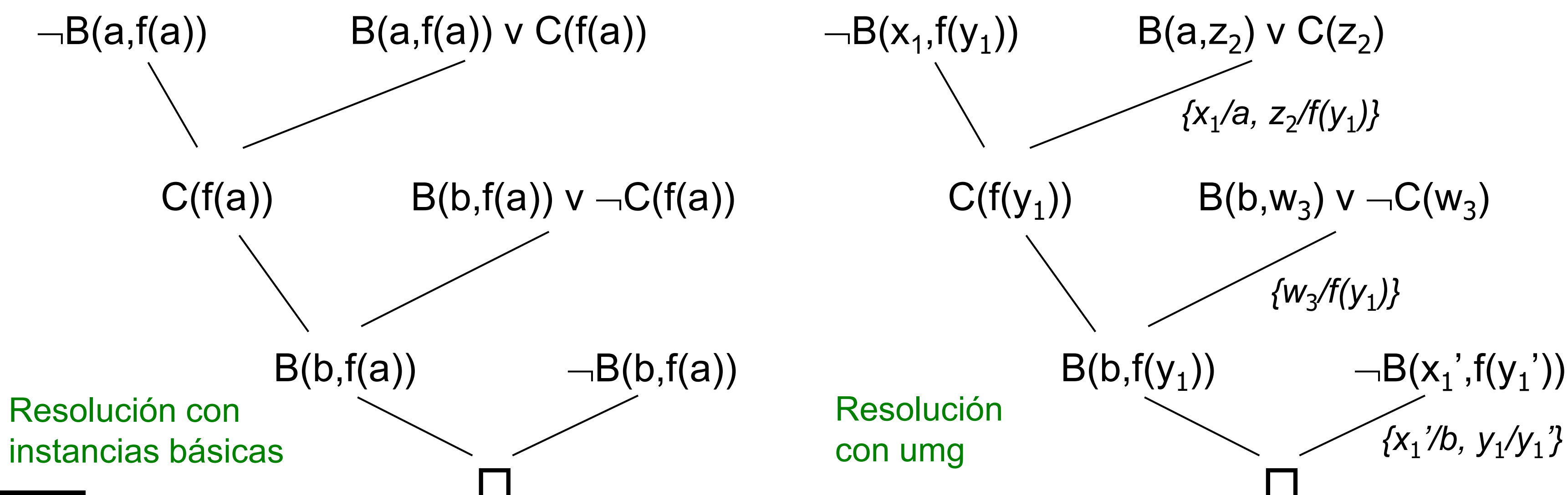
Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Resolución e instancias básicas

- Pueden construirse árboles de resolución en los que los resolventes de cada dos cláusulas se obtienen en un paso de resolución con umg
- Por cada paso de resolución en instancias básicas puede definirse un paso de resolución con umg

Ejemplo: C_1: ¬B(x,f(y)) C_2: B(a,z) v C(z) C_3: B(b,w) v ¬C(w)

I_1: ¬B(a,f(a)) I_1': ¬B(b,f(a)) I_2: B(a,f(a)) v C(f(a)) I_3: B(b,f(a)) v ¬C(f(a))



Factorización y UMG

- Ejemplos de factorización
  - (P(x,y) v P(f(z),z) v Q(g(x),y) v R(z)) {y/z, x/f(z)} $\Rightarrow$
    P(f(z),z) v Q(g(f(z)),z) v R(z)
  - (¬P(x,y,u) v ¬P(y,z,v) v ¬P(u,z,w) v P(x,v,w)) {x/u,y/u,z/u,v/u,w/u} $\Rightarrow$
    ¬P(u,u,u) v P(u,u,u)

- L_{11} v ... v L_{1n} v C_1, ¬L_{21} v ... v ¬L_{2m} v $C_2 \Rightarrow C_1$ v C_2
  - Aplicación de la regla de factorización más aplicación de la regla de corte con unificación = paso de resolución UMG

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Ejercicios de Resolución

- Estudiar la insatisfacibilidad de los siguiente conjuntos de cláusulas:
  1. $\{\neg P(x,f(y)), P(a,x) \vee Q(x), P(x,y) \vee \neg Q(y)\}$
  2. $\{\neg P(x,a) \vee Q(x), \neg P(x,a) \vee R(x,a), \neg Q(x) \vee \neg R(f(x),y) \vee S(x), \neg S(x), R(a,x), \neg Q(x), P(a,x)\}$
  3. $\{ P(x), \neg P(x) \vee Q(a,x), \neg Q(x,y) \}$
  4. $\{\neg P(x) \vee \neg R(x,y) \vee Q(x), \neg S(x) \vee \neg R(x,y) \vee \neg Q(x), \neg S(x) \vee P(x), S(f(x)), S(a), R(x,f(x)) \}$

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Más ejercicios de resolución

1. $\{ M(a,b), M(b,c), \forall x \forall y \forall z(M(x,y) \wedge M(y,z) \rightarrow M(x,z)) \} \vdash M(a,c)$
2. $\{ D(a,b) \rightarrow E(b,f(b)), \forall x \forall y(E(x,y) \rightarrow \neg I(x,y)) \} \vdash D(a,b) \rightarrow \neg I(b,f(b))$
3. $\{ \forall x(L(x) \rightarrow G(x)), \forall x(\neg R(x) \rightarrow \neg G(x)), L(a) \} \vdash R(a)$
4. $\exists x(L(x) \wedge G(x)) \vdash \exists x L(x) \wedge \exists x G(x)$
5. $\forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \vdash \forall x(\neg M(x) \rightarrow \neg P(x))$

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es
David Pérez del Rey

Procedimiento de saturación

- **¿Qué clausulas elegir** para aplicar la regla de resolución con UMG?
- **Procedimiento de saturación**: Sea C un conjunto de cláusulas
  1) Sea $S_0 = C$ y $n = 0$
  2) Si $\square \in S_n \rightarrow$ C es insatisfacible
  3) Construir $S_{n+1} = \{$resolventes de C1 y C2 / $C1 \in (S_0 \cup \ldots \cup S_n)$, $C2 \in S_n\}$
  4) Si $S_{n+1} = \emptyset$ o $S_{n+1} \subset S_0 \cup \ldots \cup S_n \rightarrow$ C es satisfacible
  5) Hacer $n = n+1$ y repetir desde 2)

- El paso 3) requiere considerar todos los posibles factores, de predicados distintos, de las cláusulas C1 y C2, sobre los que se pueden resolver ambas cláusulas con el UM, este procedimiento:
  - Genera todos y sólo los resolventes posibles a partir de un conjunto de cláusulas
  - Es **completo**: Un conjunto de cláusulas C es insatisfacible sii el procedimiento de saturación encuentra $\square$ a partir de C
  - Sin embargo, no es efectivo (puede no terminar)

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es

Procedimiento de saturación

S_0:	1)	$P \lor Q$	
	2)	$\neg P \lor Q$	
	3)	$P \lor \neg Q$	
	4)	$\neg P \lor \neg Q$	
S_1:	5)	Q	de 1) y 2)
	6)	P	de 1) y 3)
	7)	$Q \lor \neg Q$	de 1) y 4)
	8)	$P \lor \neg P$	de 1) y 4)
	9)	$Q \lor \neg Q$	de 2) y 3)
	10)	$P \lor \neg P$	de 2) y 3)
	11)	$\neg P$	de 2) y 4)
	12)	$\neg Q$	de 3) y 4)
S_2:	13)	$P \lor Q$	de 1) y 7)
	14)	$P \lor Q$	de 1) y 8)
	15)	$P \lor Q$	de 1) y 9)
	16)	$P \lor Q$	de 1) y 10)
	17)	Q	de 1) y 11)
	18)	P	de 1) y 12)
	19)	Q	de 2) y 6)
	20)	$\neg P \lor Q$	de 2) y 7)
	21)	$\neg P \lor Q$	de 2) y 8)
	22)	$\neg P \lor Q$	de 2) y 9)
	23)	$\neg P \lor Q$	de 2) y 10)
	24)	$\neg P$	de 2) y 12)
	25)	P	de 3) y 5)
	26)	$P \lor \neg Q$	de 3) y 7)
	27)	$P \lor \neg Q$	de 3) y 8)
	28)	$P \lor \neg Q$	de 3) y 9)
	29)	$P \lor \neg Q$	de 3) y 10)
	30)	$\neg Q$	de 3) y 11)
	31)	$\neg P$	de 4) y 5)
	32)	$\neg Q$	de 4) y 6)
	33)	$\neg P \lor \neg Q$	de 4) y 7)
	34)	$\neg P \lor \neg Q$	de 4) y 8)
	35)	$\neg P \lor \neg Q$	de 4) y 9)
	36)	$\neg P \lor \neg Q$	de 4) y 10)
	37)	Q	de 5) y 7)
	38)	Q	de 5) y 9)
	39)	$\square$	de 5) y 12)

Se generan muchas cláusulas redundantes e irrelevantes:

- 7), 8), 9) y 10) son tautologías
- Su interacción con otras genera más cláusulas redundantes
- P, Q, ¬P y ¬Q se generan repetidas veces

En realidad bastaría con generar las cláusulas 5), 12) y 39)

NECESIDAD DE ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN PARA SIMPLIFICAR

Prof. David Pérez-Rey dperezdelrey@fi.upm.es