MATEMÁTICA DISCRETA II – GMI

EXAMEN FINAL

Ejercicio 1 (15 ptos.)

A) Halla el número k de componentes conexas que puede tener un grafo simple G de $n = 20$ vértices y $q = 45$ aristas.

B) Sea G un grafo conexo de n vértices tal que k vértices son de grado 4 y $n–k$ vértices son de grado 1. Demuestra que G es un árbol si y sólo si el número de hojas es $h = 2k + 2$.

C) ¿Cuál es el árbol etiquetado cuyo código de Prüfer es $C = [3, 1, 3, 7, 7, 5, 2, 8]$?

Solución

A)

$$q \leq \binom{n-k+1}{2} \Rightarrow 45 \leq \binom{21-k}{2} \Rightarrow 1 \leq k \leq 11$$

B) G conexo es árbol si y sólo si $q = (n–1)$, entonces

$$2(n-1) = 2q = \sum_{v \in V} d(v) = 4k + (n-k) = n + 3k$$

$$2(n-1) = n + 3k \quad \Leftrightarrow \quad n = 3k + 2 \quad \text{vértices} \Leftrightarrow \quad h = n - k = 2k + 2 \text{ hojas}$$

C) Las aristas del árbol son $A_T = \{3\text{-}4, 1\text{-}6, 3\text{-}1, 7\text{-}3, 7\text{-}9, 5\text{-}7, 2\text{-}5, 8\text{-}2, 8\text{-}10\}$ y la sucesión de grados es $d = [2, 2, 3, 1, 2, 1, 3, 2, 1, 1]$.

Ejercicio 2 (20 ptos.)

Un operador por cable de telefonía y televisión quiere introducirse en una comarca que consta de 8 poblaciones, que etiquetamos alfabéticamente desde la a hasta la h. En la siguiente tabla cada entrada indica el número de rollos de cable que se han de utilizar para conectar entre sí las poblaciones correspondientes a su fila y columna, sobrentendiendo que los huecos vacíos corresponden a poblaciones que no pueden conectarse directamente.

	a	b	c	d	e	f	g	h
a		4			5			
b	4		4					
c		4		2	5	3		
d			2			1		6
e	5		5			1	4	
f			3	1	1		2	5
g					4	2		3
h				6		5	3	

A) Determina, usando el algoritmo apropiado, cuál es el número mínimo de rollos de cable que son necesarios para conectar las poblaciones a y h.

Indica las distintas poblaciones intermedias por las que pasa el cable.

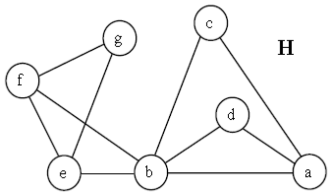
¿Existe más de una forma de conectar a y h usando el mismo número de rollos de cable?

MATEMÁTICA DISCRETA II – GMI

EXAMEN FINAL

B) Determina, usando el algoritmo apropiado, cuál es el número mínimo de rollos de cable necesario para conectar todas las poblaciones.

C) El grafo H de la figura siguiente modela una nueva estructura para la conexión entre algunas de las poblaciones anteriores. Halla las poblaciones en las que la caída del servicio desconectaría otras poblaciones, aplicando al grafo H el algoritmo correspondiente, empezando en el vértice **a** y eligiendo los vértices por orden alfabético, indicando el doble etiquetado de cada vértice.



Solución

A) Usando el algoritmo de Dijkstra se halla el camino de coste mínimo que conecta las poblaciones a y h, cuyos pasos quedan recogidos en la siguiente tabla:

a	b	c	d	e	f	g	h	vértice	arista
0	-	-	-	-	-	-	-	a	**-**
-	4	-	-	5	-	-	-	b	**ab**
-	-	8	-	5	-	-	-	e	**ae**
-	-	8	-	-	6	9	-	f	**ef**
-	-	8	7	-	-	8	11	d	**fd**
-	-	8	-	-	-	8	11	c	**bc**
-	-	-	-	-	-	8	11	g	**fg**
-	-	-	-	-	-	-	11	h	**fh**

El camino pedido es a-e-f-h, con un coste de 11 rollos.
Existe otro camino con el mismo coste, a-e-f-g-h.

B) Usando el algoritmo de Kruskal, en el que partiendo de una arista de mínimo coste se construye un árbol añadiendo en cada paso una arista de menor coste sin que forme ciclo en el grafo construido, El árbol resultante está formado por las aristas en rojo.
El número mínimo de rollos de cable necesario para conectar todas las poblaciones es de 17 rollos.

	a	b	c	d	e	f	g	h
a		4			5			
b	**4**		4					
c		**4**		2	5	3		
d			**2**			1		6
e	5		5			1	4	
f			3	**1**	**1**		2	5
g					4	**2**		3
h				6		5	**3**	

MATEMÁTICA DISCRETA II – GMI

EXAMEN FINAL

C)

Vértices	Etiquetas de los vértices	Aristas de retroceso
a	[1, 1]	
b	[2, 1]	
c	[3, 1]	ca
d	[4, 1]	da
e	[5, 2]	
f	[6, 2]	fb
g	[7, 5]	ge

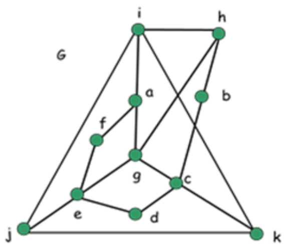
b es vértice – corte puesto que no es raíz del árbol BEP y tiene un hijo *e* en el árbol tal que

2 = *df* (*b*) ≤ *low* (*e*) = 2.

Ejercicio 3 (25 ptos.)

A) Prueba que un grafo k – regular con (2k–1) vértices es hamiltoniano.

B) Prueba que el grafo *G* de la figura siguiente no es hamiltoniano.



C) Halla en el grafo *G* de la figura anterior, aplicando los algoritmos correspondientes, un recorrido cerrado desde el vértice **a** que contenga a todas las aristas al menos una vez y que sea de peso mínimo.

D) Demuestra que si *G* es un grafo con, exactamente, cuatro vértices impares, entonces en *G* existen dos recorridos *C* y *C'*, sin aristas repetidas, tales que cada arista de *G* pertenece a uno sólo de ellos.
Aplica este resultado al grafo *G* de la figura anterior, hallando los recorridos *C* y *C'*.

E) Aplica el algoritmo de Brelaz al grafo *G* de la figura anterior y comprueba que no se obtiene su número cromático.

Solución

A) Aplicando el **Teorema de Dirac**: $d(v) = k > \frac{n}{2} = \frac{2k-1}{2} = k - \frac{1}{2}$

MATEMÁTICA DISCRETA II – GMI

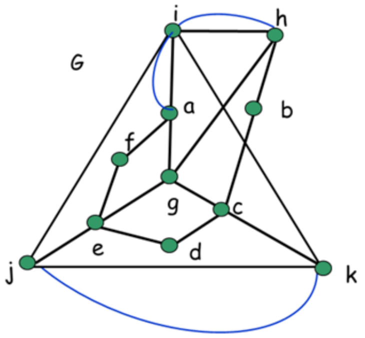
EXAMEN FINAL

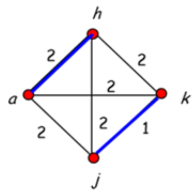
B) Los vértices {b, d, f} son de grado 2, luego sus aristas {bc, bh, dc, de, fe, fa} deben estar en el ciclo hamiltoniano y por tanto las aristas {cg, ck, eg, ej} no pueden estar en el ciclo hamiltoniano.

Se construye el camino abierto [[g, a, f, e, d, c, b, h], i, j, k], o bien se construye el camino abierto [k, j, i, [a, f, e, d, c, b, h, g]], que no se pueden cerrar porque [i, j, k, i] es un ciclo.

C) Los vértices {a, h, j, k} son de grado impar, el grafo no es euleriano.

Con los vértices de grado impar se forma un grafo completo y se duplica el camino mínimo entre los vértices a y h y entre los vértices j y k.





Recorrido euleriano cerrado C_E = [a, f, e, d, c, b, h, i, a, g, c, k, i, j, k, j, e, g, h, i, a]

D) Sean $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ los cuatro vértices impares de G y $G_1, \ldots, G_k$ las componentes conexas de G.

a) Si $\{u_1, u_2\} \in G_i$, $\{u_3, u_4\} \in G_j$, $i \neq j$, entonces en G_i existe un camino euleriano abierto C que conecta los vértices $\{u_1, u_2\}$ y en G_j existe un camino euleriano abierto C' que conecta los vértices $\{u_3, u_4\}$.

b) Si $\{u_1, u_2, u_3, u_4\} \in G_j$ conexo, se construye un camino C sin aristas repetidas que conecte los vértices $\{u_1, u_2\}$. Entonces $G_j - C$ es conexo y tiene sólo dos vértices impares $\{u_3, u_4\}$, entonces en G_j existe un camino euleriano abierto C' que conecta los vértices $\{u_3, u_4\}$.

E)

V	c	e	g	i	a	h	j	k	b	d	f
Color	1	1	2	2	1	1	3	4	2	2	2
δ_s(v)			1					1	1	1	
δ_s(v)		1			1	1		1	1	1	
δ_s(v)					1	1	1	1	1	1	1
δ_s(v)				1		1	1	1	1	1	1
δ_s(v)						1	2	2	1	1	1
δ_s(v)						1		3	1	1	1
δ_s(v)						1			1	1	1

MATEMÁTICA DISCRETA II – GMI

EXAMEN FINAL

δ_s**(v)**								1	1	1
δ_s**(v)**									1	1
δ_s**(v)**										1

El algoritmo de Brelaz colorea con 4 colores. G es conexo y no regular, entonces $\chi(G) \le \Delta(G) = 4$.

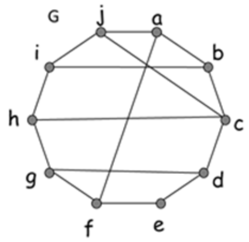
Existe una coloración con 3 colores, entonces $\chi(G) = 3$.

V	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**	**k**
Color	2	3	1	2	1	3	3	2	1	2	3

Ejercicio 4 (10 ptos.)

A) Demuestra que si G es un grafo conexo, planar y simple con $n \ge 3$ y cintura $(G) = z$ entonces su número de aristas es $q \le \frac{z(n-2)}{z-2}$.

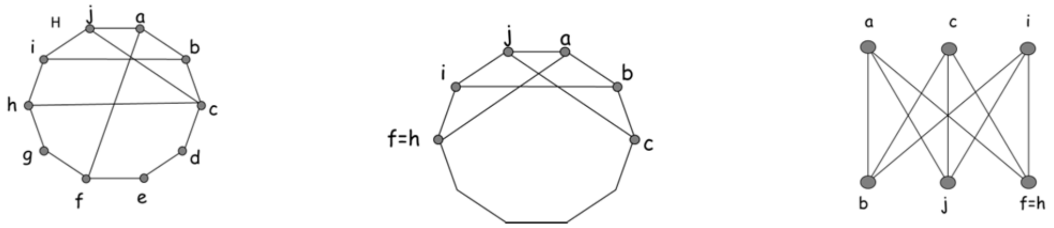
B) Aplica el teorema de Kuratowski para demostrar que el grafo G de la figura no es planar.



Solución

A)

B) Sea $H = G$ – {arista gd} subgrafo de G en que se eliminan los vértices {d, e, g} de grado 2. Identificando los vértices f y h, se obtiene $K_{3,3}$ por lo que G no es un grafo planar.

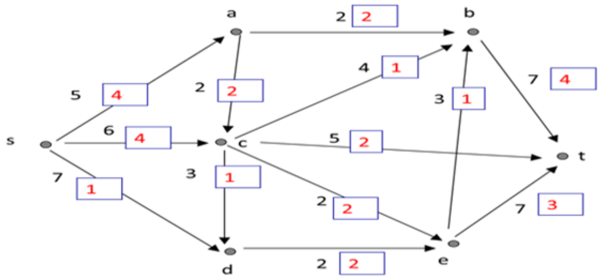


Ejercicio 5 (15 ptos.)

La empresa OILGAS envía petróleo desde el yacimiento s hasta la refinería t a través de una red de oleoductos que aparece representada en la figura inferior, donde en la etiqueta de cada tramo del oleoducto se indica la capacidad total del tramo y en recuadro, la que se utiliza en estos momentos, en centenas de barriles diarios.

MATEMÁTICA DISCRETA II – GMI

EXAMEN FINAL



A) Enuncia el teorema de Ford – Fulkerson, definiendo todos los conceptos que intervienen en él.

B) Utilizando el algoritmo de etiquetado, calcula la máxima cantidad de petróleo que podría fluir por la red.

C) En cada tramo de la red hay una válvula cuyo cierre impide el paso del petróleo, siendo el coste económico del cierre proporcional a la capacidad del tramo. Si se quisiera interrumpir el suministro de petróleo a la refinería, ¿qué válvulas habría que cerrar para que el coste fuera mínimo?

Solución

A)

B) $f_0 = 9$

Camino de f – aumento: {s, c, t } de residuo $k = 2 \Rightarrow val(f_1) = 11$

$f_1 = 11$

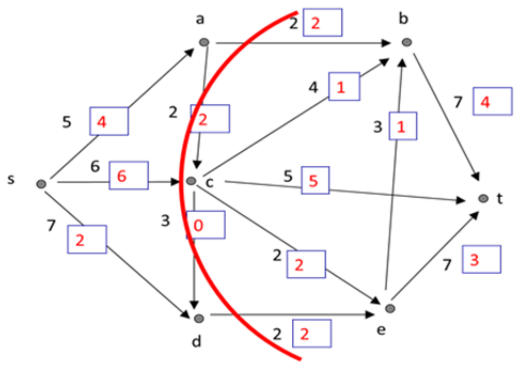
Camino de f – aumento: {s, d, c, t } de residuo $k = 1 \Rightarrow val(f_2) = 12$

Valor máximo del flujo: $val(f) = 12$.

La máxima cantidad de petróleo que podría fluir por la red es de 1200 barriles diarios.

C) Corte con capacidad mínima: S = { s, a, d }, T = { b, c, e, t } , cap(S, T) = 12.

Habría que cerrar las válvulas de los tramos ab, ac, sc, de.



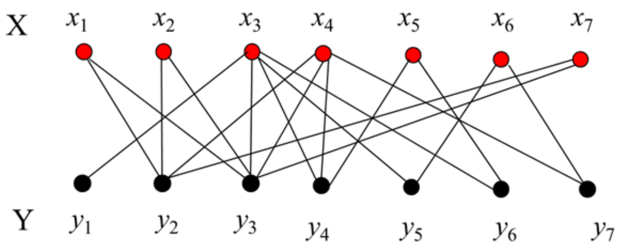
Ejercicio 6 (15 ptos.)

Se considera el siguiente grafo bipartido $G = (X \cup Y, A)$ que representa las preferencias de los 7 médicos y los 7 enfermeros para realizar las guardias en una consulta de urgencias. Se quieren

MATEMÁTICA DISCRETA II – GMI

EXAMEN FINAL

planificar las vacaciones, respetando las preferencias anteriores, de modo que siempre queden de guardia un médico y un enfermero.



A) Utilizando el algoritmo correspondiente, halla un emparejamiento máximo M´ para el grafo de la figura, a partir del emparejamiento inicial M = { $\{x_1, y_2\}$, $\{x_2, y_3\}$, $\{x_3, y_1\}$, $\{x_4, y_4\}$ }.

B) Halla un recubrimiento por vértices de cardinal mínimo en el grafo de la figura.

C) Escribe, citando los teoremas correspondientes, todas las relaciones verdaderas entre los números A, B, C, D, α (G), α'(G), β (G), siendo

A = máx. nº de caminos internamente disjuntos del vértice *s* al vértice *t* en *G*,

B = máx. nº de caminos aristo – disjuntos del vértice *s* al vértice *t* en *G*,

C = mín. nº de vértices en un conjunto que separa el vértice *s* del vértice *t* en *G*,

D = mín. nº de aristas en un conjunto que separa el vértice *s* del vértice *t* en *G*.

α (G) = máx. nº de vértices en un conjunto independiente I de G,

α'(G) = máx. nº de aristas en un emparejamiento M de G,

β (G) = mín. nº de vértices en un recubrimiento K de G.

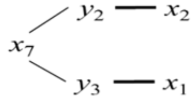
Solución

A) A partir del emparejamiento inicial M = { $\{x_1, y_2\}$, $\{x_2, y_3\}$, $\{x_3, y_1\}$, $\{x_4, y_4\}$ },

se elige x_5 vértice no emparejado de X y se construye un árbol BEA de caminos alternados parciales con raíz en x_5. Existe camino de M – aumento $\{x_5, y_6\}$

se elige x_6 vértice no emparejado de X y se construye un árbol BEA de caminos alternados parciales con raíz en x_6. Existe camino de M – aumento $\{x_6, y_5\}$

se elige x_7 vértice no emparejado de X y se construye un árbol BEA de caminos alternados parciales con raíz en x_7. no existe camino de M – aumento con raíz en 7.

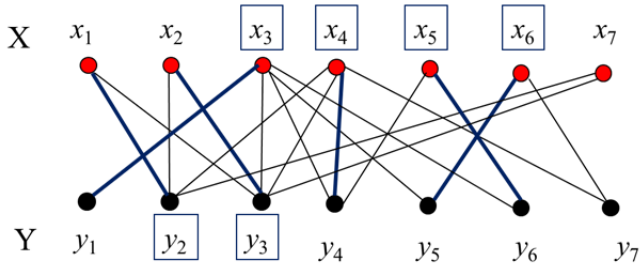


El emparejamiento obtenido M´ = { $\{x_1, y_2\}$, $\{x_2, y_3\}$, $\{x_3, y_1\}$, $\{x_4, y_4\}$, $\{x_5, y_6\}$, $\{x_6, y_5\}$ } es máximo.

B) Se añade una fuente s unida a todos los vértices de X y se añade un sumidero t unido a todos los vértices de Y, con capacidad cap (s, x_i) = cap (s, y_j) = 1.

MATEMÁTICA DISCRETA II – GMI

EXAMEN FINAL



El corte mínimo $S = \{s, x_1, x_2, x_7, y_2, y_3\}$, $T = \{t, y_1, y_4, y_5, y_6, y_7, y_5, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, con cap (S, T) = 6.

M´ = { $\{x_1, y_2\}$, $\{x_2, y_3\}$, $\{x_3, y_1\}$, $\{x_4, y_4\}$, $\{x_5, y_6\}$, $\{x_6, y_5\}$} es un emparejamiento máximo y

K = { $x_3, x_4, x_5\ x_6, y_2, y_3$ } es un recubrimiento.

Como card M = card K, por el teorema de König, M es máximo y K es mínimo.

C) Teorema de Menger (versión vértices): A = C.

Teorema de Menger (versión aristas): B = D.

$A = \alpha'(G)$ $C = \beta(G)$ $\alpha(G) + \beta(G) = n$

Teorema de König: $\alpha'(G) = \beta(G)$