0.1. Lección 2: Demostraciones

Esta parte está dedicada a las demostraciones matemáticas. Las demostraciones son una parte muy importante en las matemáticas pues las utilizamos para asegurar la veracidad de las proposiciones.

0.1.1. Tipos de demostraciones.

Demostración directa: Queremos probar una proposición del tipo:
Proposición: Si se verifica A, entonces se verifica B.
O lo que es lo mismo $A \Longrightarrow B$ (A implica B)
Partimos de que se verifica A; mediante la utilización de diferentes reglas o razonamientos llegamos a probar que se verifica B. Vemos un ejemplo de este tipo de demostración.
Proposición: Si $n \in \mathbb{N}$ es impar, entonces n^2 es impar.

Prueba:
PARTIMOS DE: $n \in \mathbb{N}$ y n es impar.
HAY QUE PROBAR: n^2 es impar.
Puesto que n es impar es de la forma $n = 2k - 1$ para algún número natural k; por lo tanto:

$$n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4k(k-1) + 1 = 4k(k-1) + 2 - 1 = 2(2k(k-1) + 1) - 1,$$

puesto que $2k(k-1) + 1$ es un número natural se concluye que n^2 es impar, como queríamos demostrar.

0.1.2. Demostración por contraposición:

Para demostrar $A \implies B$ se demuestra que "no B "$\implies$ "no A", que es equivalente, mediante demostración directa. Veamos un ejemplo.

Proposición: Sea $n \in \mathbb{N}$. Si n^2 es par entonces n es par.

Probaremos que si $n \in \mathbb{N}$ es natural, y n no es par entonces n^2 no es par. Si n no es par entonces es impar. Como hemos probado antes esto implica que n^2 es impar y por tanto n^2 no es par.

0.1.3. Demostración por reducción al absurdo.

Queremos probar una implicación del tipo $A \Longrightarrow B$.
Siendo A cierta suponemos que sin embargo (por red. al absurdo) B no es cierta. De esta forma, mediante razonamientos lógicos llegamos a algo que no tiene sentido o es absurdo. Es una contradicción. Por tanto, siendo A cierta se tiene que B también lo tiene que ser.
Veamos un ejemplo:

Proposición 1. *Sea $n \in \mathbb{N}$, si n^2 es par entonces n es par.*

Demostración. Siendo n^2 par, suponemos por red. al absurdo que n no par y por tanto n es impar. Por tanto, por la proposición anterior como n es impar se tiene que n^2 es impar. Luego hemos llegado a que n^2 es par e impar simultáneamente lo cual es una contradicción.!!!!
Luego si n^2 es par se ha de tener que n es par.

$\square$

0.1.4. Demostración por contraejemplo.

Usamos la técnica del contrajemplo cuando queremos probar que el enunciado siguiente es **FALSO**.

Proposición 2. *Todo $x \in A$ verifica la propiedad P.*

Para ver que es falso bastaría con encontar un elemento del conjunto A que no verifica la propiedad P. A dicho ejemplo se le llama contraejemplo. Veamos la prueba de que la siguiente afirmación es FALSA.
Afirmación: Todo número natural verifica que $n < n^3$.
El resultado es falso puesto que $n = 1$ no verifica que $1 < 1^3$ y por lo tanto $n = 1$ sería un contraejemplo.

0.1.5. Equivalencias.

La equivalencia $A \Leftrightarrow B$ significa que A se verifica si y sólo si B se verifica. Por lo tanto, para probar una afirmación de este tipo tendríamos que probar:

1. Si A entonces B, es decir, $A \Rightarrow B$.

2. Si B entonces A, es decir, $B \Rightarrow A$.

Por ejemplo,

Proposición 3. *Sea $n \in \mathbb{N}$, se tiene que n es par si y sólo si n^2 es par.*

Puesto que:

1. $\boxed{\text{Si } n \text{ es par, entonces } n^2 \text{ es par.}}$ En efecto, si $n = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ que es par.

2. $\boxed{\text{Si } n^2 \text{ es par, entonces } n \text{ es par}}$ (probado antes).

Se concluye que la equivalencia es cierta.

☒ *Uso de $\Rightarrow$ o $\Leftrightarrow$ en la resolución de ecuaciones.*

$E_1(x) = 0 \Rightarrow E_2(x) = 0$: significa que si x es solución de $E_1(x) = 0$ entonces también es solución de $E_2(x) = 0$ pero no necesariamente las soluciones de $E_2(x) = 0$ tienen que ser soluciones de $E_1(x) = 0$. Por ejemplo:

$$\sqrt{x-5} = \sqrt{2x} \Longrightarrow x - 5 = 2x \qquad \checkmark$$

Este resultado es cierto y nos indicaría que las soluciones de la primera ecuación son también soluciones de la segunda.

▷ La única solución de $x - 5 = 2x$ es $x = -5$ que **no es solución de la ecuación** $\sqrt{x-5} = \sqrt{2x}$

▷ La ecuación $\sqrt{x-5} = \sqrt{2x}$ no tiene solución.

$$\sqrt{x-5} = \sqrt{2x} \Longleftrightarrow x - 5 = 2x \qquad \textbf{MAL}$$

$E_1(x) = 0 \Longleftrightarrow E_2(x) = 0$: significa que x es solución de $E_1(x) = 0$ si y sólo si x es solución de $E_2(x) = 0$. Esto significa que da lo mismo resolver $E_1(x) = 0$ que resolver $E_2(x) = 0$.

0.1.6. Demostración por inducción:

La demostración por inducción se utiliza a veces para probar que todos los números naturales verifican una propiedad. Por ejemplo queremos probar que es cierta la siguiente propiedad para n, $P(n)$:

$\boxed{\text{Para todo } n \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } P(n) \text{ es cierta.}}$

Por ejemplo, sea $P(n)$ la siguiente propiedad: $P(n)$*: La suma de los* n *primeros números naturales es* $\dfrac{n(n+1)}{2}$, es decir,

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Procedemos de la siguiente forma:

1. Probamos que $P(1)$ es cierta.
2. Probamos que si $P(n)$ es cierta, entonces $P(n+1)$ es cierta.

entonces por el Principio de Inducción Matemática podemos afirmar que:
Para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ es cierta.
Probemos que:

Proposición 4. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que:*

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Demostración. 1. Para $n=1$ es claro que $P(1)$ es cierta ya que $1=\dfrac{1(1+1)}{2}$

2. Suponemos que es cierto para n, es decir, que

   $$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

   y tenemos que probar que $P(n+1)$ es cierta, es decir,

   $$?`?`?`?`1+2+3+4+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}????,$$

   Utilizamos la hipótesis de inducción, es decir, que $P(n)$ es cierta, entonces

   $$\boxed{\text{1+2+ \ldots +n}}+(n+1)=\boxed{\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1)=(n+1)(\frac{n}{2}+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

   Luego la propiedad es cierta para $n+1$.

Por lo tanto, por el PIM se tiene que $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

La siguiente desiguald de números reales es conocida como la desigualdad de Bernouilli.

Sea $x > 0$,
Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
Se puede probar por inducción.