0.1. Lección 6

0.1.1. Dominio e imagen de una función. Funciones elementales.

Una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una ley o correspondencia que hace corresponder a cada $x \in A$ un único valor real que llamamos $f(x)$ o imagen mediante f de x.

El dominio de una función f es el conjunto de los números reales para los que existe $f(x)$. Si no se indica otra cosa, la función se considera definida en su dominio:

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \text{ existe } f(x)\}.$$

El dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Observación 1. *El dominio puede ser incluso el cojunto vacío, considerar por ejemplo* $f(x) = \frac{\sqrt{x}\sqrt{-x}}{x}$ *cuyo dominio es el conjunto vacío o un único punto como para* $g(x) = \sqrt{x}\sqrt{-x}$ *cuyo dominio es* $\{0\}$*. Nosotros en general consideraremos funciones cuyos dominios son intervalos o unión (incluso infinita) de intervalos*

La gráfica de una función f es el conjunto del plano:

$$G_f = \{(x, y) : \qquad y = f(x), x \in Dom(f)\}$$

0.2. Algunas gráficas importantes.

Funciones constantes: $f(x) = c$

Rectas del tipo: $y = mx + n$

Gráfica de $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$

$\triangleright$ n par:

$\triangleright$ n impar:

Gráficas de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $h(x) = \dfrac{1}{x^3}$

Gráfica de $f(x) = e^x$

Gráfica de $f(x) = \ln x$

Gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$

Gráfica de $f(x) = x^{1/n}$

$\triangleright$ *n par:*

$\triangleright$ *n impar:*

Gráfica de $f(x) = [x]$

Gráficas de funciones definidas a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ si \ x \leq 0 \\ |x| \ si \ x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} |x| \ si \ x > 0 \\ 3 \ si \ x = 0 \\ \ln |x| \ si \ x < 0 \end{cases}$$

Translaciones de gráficas: gráficas de $f(x-a), L+f(x)$.

0.2.1. Algunas funciones Elementales (Repaso)

En todo lo que sigue consideramos funciones elementales las siguientes funciones:

1. *Funciones polinómicas o polinomios: son funciones del tipo* $f(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$ *con* $a_i \in \mathbb{R}$ *y* $n \in \mathbb{N}$. *Si* $a_n \neq 0$ *a* n *se le llama el grado del polinomio. El dominio de una función polinómica es* $\mathbb{R}$. *Entre estas funciones destacamos las del tipo* x^n *con* n *par y* x^n *con* n *impar con gráficas de distinto tipo.*

2. *Funciones racionales: Una función racional es una función del tipo* $f(x)) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *donde* $P(x), Q(x)$ *son polinomios. En este caso:*

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}.$$

3. *Función logaritmo: denotaremos por* $f(x) = \ln x$ *la función logaritmo neperiano de* x. *El dominio de esta función es* $(0, \infty)$. *Recordamos sus propiedades:*

   i) $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$.

   ii) Si $a, b > 0$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

   iii) Si $a, b > 0$, $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$.

   i) Si $a > 0$, $\ln a^b = b \ln a$.

4. *Funciones exponenciales:* $f(x) = e^x$ *cuyo dominio es* $\mathbb{R}$. *A partir de esta función podemos definir la función* a^x *con* $a > 0$ *se define como la función* $a^x = e^{x \ln a}$. *La función*

5. *Las funciones trigonométricas* $\operatorname{sen}(x)$ *y* $cos(x)$ *tienen como dominio* $\mathbb{R}$.

6. *La función* $f(x) = \tan x$ *tiene como dominio*

$$Dom(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{-\pi}{2} + (k+1)\pi \right)$$

7. *La función* $f(x) = x^x$ *se define como* $f(x) = e^{x \ln x}$ *y por tanto* $Dom(f) = (0, \infty)$. *De forma más general, la función:*

$$(f(x))^{g(x)} := e^{\ln f(x)}$$

por lo que su dominio es $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$.

Algunos ejercicios de dominios

Calcula el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\ln(x-3)}}$

2. $g(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

3. $h(x) = \ln(1 + \cos x)$

4. $F(x) = \dfrac{1}{1 - \ln(x-3)}$

5. $G(x) = \ln(x - [x])$

0.2.2. Las funciones inversas.

Una función $f : A \to B$ *es inyectiva si para cada* $x, y \in A$ *con* $x \neq y$ *se tiene que* $f(x) \neq f(y)$*. Para probar que una función es inyectiva tendremos que probar que:*

$$f(x) = f(y), \textit{con } x, y \in A \Rightarrow x = y$$

Observación 2. *Es interesante observar que hay funciones que son inyectivas en un determinado conjunto y no lo son en otros; por ejemplo la función* $f(x) = x^4$

- *¿es inyectiva en* $\mathbb{R}$*?*
- *¿Es inyectiva en* $(0, \infty)$*?*
- *¿Es inyectiva en* $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$*?*

Observación 3. *Gráficamente la inyectividad repercute en que trazando una recta horizontal en los valores de la imagen dicha recta sólo corta a la gráfica en un valor. Si alguna horizontal corta a la gráfica en dos o más valores claramente dicha función no sería inyectiva. Gráficamente la función es sobreyectiva sobre un conjunto* B *si trazando una horizontal sobre cada punto de* B *la gráfica de* f *corta en algún punto a la horizontal.*

Definición 4. *Función inversa. Si* $f : A \to B$ *dada por* $y = f(x)$ *es una función biyectiva (es decir inyectiva y sobreyectiva) entonces para cada* $y \in B$ *hay un único* $x \in A$ *tal que* $y = f(x)$*. Esto nos permite definir una función, que llamaremos función inversa de* f *y denotamos por* f^{-1}*,* $f^{-1} : B \to A$*, con* $x = f^{-1}(y)$ *de modo que:*

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A \qquad\qquad f(f^{-1}(y)) = y, \qquad y \in B$$

Si f *es inyectiva en* A *y* $B = f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ *entonces* $f : A \to B$ *es sobreyectiva y podemos definir la función inversa* $f^{-1} : B \to A$*.*

0.2.3. Funciones raíces n-ésimas y trigonométricas inversas.

▷ *Las funciones raíces n-ésimas:*

1. *Si n es impar la función* $f(x) = x^n$ *es una función biyectiva de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *siendo la función inversa la función* $f(x) := x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$.

2. *Si n es par la función* $f(x) = x^n$ *es inyectiva en* $[0, \infty)$ *con imagen en* $[, \infty)$*, por tanto la inversa* $x^{1/n}$ *está definida en* $[0, \infty)$.

▷ *Las funciones arcsen , arccos, arctan,..*

La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ *es biyectiva de* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *en* $[-1, 1]$*; la función inversa es arcsen* x

$$\operatorname{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \qquad \to \qquad \mathit{arcsen} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

De la misma forma, se define la función arccos .

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1] \qquad \to \qquad \mathit{arccos} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

La función $\tan x$ *es inyectiva en* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *y su imagen en* $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$*; la función arctan es la inversa*

$$\mathit{tan} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R} \qquad \to \qquad \mathit{arctan} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

0.2.4. Funciones pares, impares, periódicas...

Diremos que una función es par si para todo $x \in Dom(f)$ con $-x \in Dom(f)$ se tiene que $f(x) = f(-x)$.
Diremos que una función es impar si para todo $x \in Dom(f)$ con $-x \in Dom(f)$ se tiene que $f(-x) = -f(x)$.
Diremos que una función es periódica con período $T > 0$ si para todo $x \in Dom(f)$ se tiene que

$$f(x+T) = f(x)$$

☒ *Indica si las siguientes funciones son pares, impares o nada. ¿ Son periódicas?*

$$\frac{x^2}{1-|x|}, \qquad \operatorname{sen} x, \qquad \sqrt[5]{x^3} \qquad x^2 + \frac{1}{x}$$

⊛⊛ $f(x) = x - [x]$

Observación 5. *Estas propiedades tienen una gran repercusión en la gráfica:*

1. *Las gráficas de las funciones pares en $\mathbb{R}$ son simétricas con respecto al eje vertical, es decir, la recta $x = 0$.*

2. *Las gráficas de las funciones impares en $\mathbb{R}$ son simétricas con respecto al origen.*

3. *En las gráficas de las funciones periódicas en $\mathbb{R}$ con período $T > 0$ la gráfica en $(0, T)$ se repite en cada intervalo $(kT, (k+1)T)$ con $K \in \mathbb{Z}$, por lo tanto basta obtener la gráfica en $(0, T)$ y trasladar.*

Ejercicios: • *Completa la gráfica de una función* f *conociendo la gráfica en* $[0,\infty)$ *en el caso de funciones pares e impares.* • *Completa la gráfica para funciones periódicas:*

por ejemplo la función $f(x) = \begin{cases} x \;\; 0 \leq x \leq 1 \\ = 1 \; si \; 1 < x \leq 2 \end{cases}$ *, y que sea periódica de período* 2.

$\circledast\circledast$ *Considera la función* $f(x) = 1$ *si* $x \in \mathbb{Q}$ *y* $f(x) = 0$ *si* $x \notin \mathbb{Q}$*: ¿es par? ¿es impar? ¿es periódica?*

Composición de funciones

Definición 6. *(Composición de funciones:) Sea* $f : A \to B$ *y* $g : B \to C$*, de modo que* $Im(f) \subset B$ *definimos la función composición de* f *con* g*, denotada por* $g \circ f$ *a la función*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Observación 7. *Nótese que para que la composición de* f *con* g *esté bien definida* $Im(f) \subset Dom(g)$*.*

Observación 8. *En general no es cierto que* $f \circ g = g \circ f$*. Para verlo, consideramos el siguiente ejemplo* $f(x) = x^2$ *y* $g(x) = \operatorname{sen} x$*; es claro que* $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \operatorname{sen} x^2$ *y* $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \operatorname{sen}^2 x$ *y no coinciden.*

☒ *Calcula* $f \circ g$ *y* $g \circ f$ *si:*

$$f(x) = \begin{cases} x \; si \; x \geq 0 \\ 0; si \; x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x \geq 0 \\ -x^2; si \; x < 0 \end{cases}$$