



Apellidos:

SOLUCIÓN

Nombre:

Ejercicio 1:

Sea el autómata a pila $AP = \{ \Sigma, \Gamma, Q, q_0, A_0, f, \emptyset \}$, con $\Sigma = \{ a, b \}$, $\Gamma = \{ A_0, A \}$, $Q = \{ q_0, q_1 \}$ y f definida mediante los 8 movimientos siguientes:

- ① $f(q_0, a, A_0) = (q_0, AA_0)$
- ② $f(q_0, a, A) = (q_0, AA)$
- ③ $f(q_0, \lambda, A) = (q_1, \lambda)$
- ④ $f(q_0, b, A) = (q_1, \lambda)$
- ⑤ $f(q_1, b, A) = (q_1, \lambda)$
- ⑥ $f(q_1, \lambda, A) = (q_1, \lambda)$
- ⑦ $f(q_1, \lambda, A_0) = (q_1, \lambda)$
- ⑧ $f(q_0, \lambda, A_0) = (q_1, \lambda)$

- a) Construir a partir del AP, utilizando el algoritmo correspondiente, una gramática G que genere el mismo lenguaje y depurarla (7 puntos)
- b) Comprobar la generación en G y aceptación en AP de las palabras aaa y $aaabb$ (2 puntos)
- c) ¿Qué lenguaje reconoce el AP y genera la gramática G ? (1 punto)

25 minutos

a) Se pide construir una G que genere el lenguaje aceptado por AP:

$AP = \{ \{ a, b \}, \{ A, A_0 \}, \{ q_0, q_1 \}, A_0, q_0, f, \emptyset \}$

$G = \{ \Sigma_T, \Sigma_N, P, S \}$, $\Sigma_T = \Sigma$ del AP, $\Sigma_N = \{ S \} \cup \{ [q A p] / q, p \in Q, A \in \Gamma \}$, $S = \text{Axioma}$

ALGORITMO (para obtener las producciones P de G):

1. $S ::= [q_0 A_0 p], \forall p \in Q$
2. $[q A q_{m+1}] ::= a [q_1 B_1 q_2], [q_2 B_2 q_3], [q_3 B_3 q_4], \dots, [q_m B_m q_{m+1}]$
 Todas las posibles secuencias que llevan de q_1 a q_{m+1} para cada símbolo $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ introducido en la pila.
 $\forall q_1, q_2, q_3, q_4, \dots, q_m, q_{m+1} \in Q; A, B_1, B_2, B_3, \dots, B_m \in \Gamma; a \in \Sigma \cup \{ \lambda \}$
 Si los movimientos de la función de transición f son del tipo: $(q_1 B_1 B_2 B_3 \dots B_m) \in f(q a A)$
3. Si $m = 0$, es decir, si no se introduce nada en la pila: $[q A q_i] ::= a$, $\forall q_i \in Q$
 Si los movimientos de la función de transición f son del tipo: $(q_i \lambda) \in f(q a A)$

$S ::= [q_0 A_0 q_0] \mid [q_0 A_0 q_1]$

1º movimiento: $[q_0 A_0 q_0] ::= a [q_0 A q_0] [q_0 A_0 q_0] \mid a [q_0 A q_1] [q_1 A_0 q_0]$
 $[q_0 A_0 q_1] ::= a [q_0 A q_0] [q_0 A_0 q_1] \mid a [q_0 A q_1] [q_1 A_0 q_1]$

2º movimiento: $[q_0 A q_0] ::= a [q_0 A q_0] [q_0 A q_0] \mid a [q_0 A q_1] [q_1 A q_0]$
 $[q_0 A q_1] ::= a [q_0 A q_0] [q_0 A q_1] \mid a [q_0 A q_1] [q_1 A q_1]$



Apellidos:

SOLUCIÓN

Nombre:

3º movimiento:	$[q_0 A q_1] ::= \lambda$ D
4º movimiento:	$[q_0 A q_1] ::= b$ D
5º movimiento:	$[q_1 A q_1] ::= b$ E
6º movimiento:	$[q_1 A q_1] ::= \lambda$ E
7º movimiento:	$[q_1 A_0 q_1] ::= \lambda$ F
8º movimiento:	$[q_0 A_0 q_1] ::= \lambda$ B

SE REDENOMINAN LAS TERNAS Y SE DEPURA LA GRAMÁTICA

$S ::= A \mid B$ $A ::= aCA \mid aDG$ $B ::= aCB \mid aDF \mid \lambda$ $C ::= aCG \mid aDH$ $D ::= aCD \mid aDE \mid \lambda \mid b$ $E ::= b \mid \lambda$ $F ::= \lambda$	Eliminar símbolos inaccesibles: G y H (aDG, aDH) Eliminar la regla no generativa: $C ::= aCC$ Eliminar todas las afectadas por la regla anterior: aCA, aCB, aCD Desaparece A y sus producciones
$S ::= aDF \mid \lambda$ $D ::= aDE \mid \lambda \mid b$ $E ::= b \mid \lambda$ $F ::= \lambda$	Regla de red denominación: $S ::= B$ y $B ::= aDF \mid \lambda$ se queda en: $S ::= aDF \mid \lambda$ Se sustituyen en S y D las reglas: $E ::= b$ $F ::= \lambda$
$S ::= aD \mid \lambda$ $D ::= aDb \mid aD \mid b \mid \lambda$	Producciones definitivas GRAMÁTICA DEPURADA

b) (1) Se prueban las palabras en AP: aaa y aaabb (ambas $\in L$)

Palabra aaa: $[q_0 aaa A_0] \vdash [q_0 aa AA_0] \vdash [q_0 a AAA_0] \vdash [q_0 \lambda AAAA_0] \vdash [q_1 \lambda AAA_0] \vdash [q_1 \lambda AA_0] \vdash [q_1 \lambda A_0] \vdash [q_1 \lambda \lambda]$ **(ACEPTA)**
 Palabra aaabb: $[q_0 aaabb A_0] \vdash [q_0 aabb AA_0] \vdash [q_0 abb AAA_0] \vdash [q_0 bb AAAA_0] \vdash [q_1 b AAA_0] \vdash [q_1 \lambda AA_0] \vdash [q_1 \lambda A_0] \vdash [q_1 \lambda \lambda]$ **(ACEPTA)**

(2) Se generan en la G las 2 palabras: aab y aaabb $\in L$:

Palabra aaa: $S \rightarrow \underline{aD} \rightarrow \underline{aaD} \rightarrow \underline{aaaD} \rightarrow \underline{aaa}$ **(GENERA)**
 Palabra aaabb: $S \rightarrow \underline{aD} \rightarrow \underline{aaDb} \rightarrow \underline{aaaDb} \rightarrow \underline{aaabb}$ **(GENERA)**

c) El lenguaje que acepta el AP y genera la gramática G es: $L = \{ a^n b^m / n \geq m \geq 0 \}$



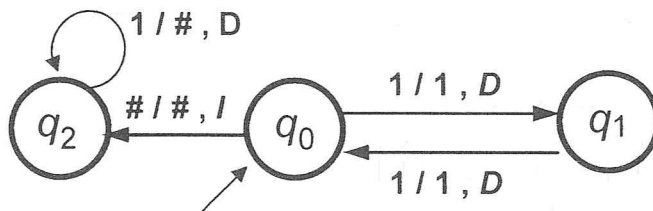
SOLUCIÓN

Apellidos:

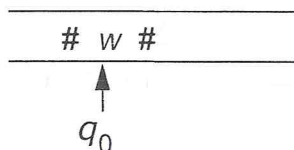
Nombre:

Ejercicio 2:

Sea la Máquina de Turing M definida según el siguiente grafo:



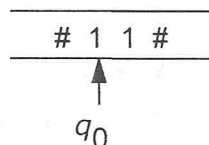
Y cuya configuración inicial es la siguiente:



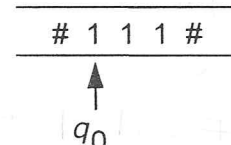
Donde $w \in 1^*$ es un número entero codificado en unario. M inicialmente está en el estado q_0 leyendo el primer 1 de w .

- a) ¿Qué función aritmética sobre cada w calcula M ? ¿Cuál es la configuración final de M tras recibir las entradas de los apartados a.1) y a.2)? (2 puntos)

a.1)



a.2)



- b) Escribir (y describir brevemente) el contenido inicial de la cinta de una Máquina de Turing Universal (MTU) programada para simular a la máquina M con la entrada del apartado a.1). Utilicen la siguiente codificación binaria: $q_0 \equiv 00$; $q_1 \equiv 01$; $q_2 \equiv 10$; Izqda I $\equiv 1$; Dcha D $\equiv 0$ (2 puntos)
- c) Escribir (y describir brevemente) el contenido de la cinta de la MTU después de la ejecución del módulo transcriptor cuando la MTU está simulando el primer movimiento de M con la entrada del apartado a.1). ¿En qué estado termina el módulo transcriptor? ¿Por qué? (2 puntos)
- d) Escribir (y describir brevemente) el contenido de la cinta de la MTU después de simular el primer movimiento que realiza la máquina M con la entrada del apartado a.1). ¿A qué estado accede el módulo simulador tras recolocar el *? ¿Por qué? (2 puntos)
- e) Escribir (y describir brevemente) el contenido final de la cinta de la MTU cuando termine de simular a la máquina M con la entrada del apartado a.1). ¿En qué estado se para la MTU? ¿Por qué? (2 puntos)

NOTA: Todos los apartados se responderán en la carilla de atrás.

Durante el examen se da fotocopia con el grafo de los tres módulos de la MTU.

30 minutos

Continuación ejercicio 2. RESPUESTAS. SOLUCIONES

Apartado a) a.1) y a.2)

$q_0 || \dots || 1 \# q_2 \#$

$q_0 || \dots || 1 || q_1 \#$

¿Qué función aritmética sobre cada w calcula M ? $w - (w+1) \bmod 2$ ó $w - 1 + w \bmod 2$
 ó $f(w) = \begin{cases} w-1 & \text{si } w \text{ par} \\ w & \text{si } w \text{ impar} \end{cases}$

Apartado b) Cinta de la MTU programada con la entrada del aptdo. a.1)

celas en blanco? q_0 q_0 1 q_1 1 D

...	#	*	1	0	≠	0	0	1	≠	0	0	1	0	1	1	0	≠	0	1	1	0	0	1	0	≠	0	0	0
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

1	0	0	1	≠	1	0	1	1	0	0	0	≠	#
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	-----

El * se sitúa sobre la celda que inicialmente lee M
 Hay 4 registros, uno por cada tipo de movimiento de M

Apartado c) Módulo Transcriptor (escribid sólo la parte de la cinta que cambia)

0 1 1 ← se transcriben en las celdas del REG de inicio

...	#	*	1	0	≠	0	1	1	≠	A	A	B	A	B	B	A	≠	
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--

Las celdas transcritas se marcan con A's y B's

¿En qué estado termina el módulo transcriptor? q_1 ¿Por qué? Para memorizar el valor 0 que indica desplazamiento a la derecha. El valor de esa celda no se puede transcribir en las celdas del REG de inicio por lo que se memoriza. Si es 0 (q_{12}). Si es 1 (q_{13}).

Apartado d) Módulo Simulador (escribid sólo la parte de la cinta que cambia)

se vuelve a escribir un 1 → el control pasa de q_0 (00) a q_1 (01)

...	#	1	*	0	≠	0	1	1	≠	0	0	1	0	1	1	0	≠	.	.	.
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

El * se recoloca en la celda de la derecha. El 0 que hay en esa celda se almacena en el REG de inicio. Se restituyen los registros marcados (el primero).

¿A qué estado accede el módulo simulador tras recolocar el *? q_2 ¿Por qué?

Porque en el estado q_{20} el módulo simulador se encuentra un 1 que memoriza transitando a q_{22} para almacenarlo posteriormente en la última celda del REG inicio

Apartado e) Cinta de la MTU cuando para M se para en (q_2) leyendo un (#)

...	#	1	0	*	≠	B	0	0	≠	A	A	B	A	B	B	A	≠	A	B	B	A	A	B	A	≠	A	A	A
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

B	A	A	B	≠	B	A	B	B	A	A	A	≠	#															...
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	-----

q_5 → memoriza un 1 del REG de inicio

¿En qué estado se para la MTU? q_5 ¿Por qué? Porque el mód. localizador busca ≠ 100 ≠ al comienzo de los diferentes registros. Ninguno de ellos comienza por esa secuencia por lo que son marcados con A's y B's. El mód. localizador para cuando buscando un registro por excluir aparece la primera celda en blanco # por la derecha en (q_5)