Ficha 19

Evaluación sumativa

Nombre: ______________________________ **Curso** ________

1. Lee y luego responde.

En una determinada isla ubicaron a 6 parejas de osos en 2006 con el fin de poblar cierta región. Se esperaba que la cantidad de osos se incrementaría según la función $O(t) = O_i \cdot 2^{0{,}18t}$, en la que t es la cantidad de años desde 2006, O_i es la cantidad inicial de osos y $O(t)$ es la cantidad de osos en t.

a. ¿La función es creciente o decreciente?, ¿cómo lo sabes?

Es creciente, ya que la base de la función exponencial es 2.

b. ¿Cuál es el valor de O_i?

Es la cantidad inicial de osos: 6 parejas, es decir, 12 osos.

c. ¿Qué cantidad de osos se esperan para el año 2027?

Para 2027 se tiene $t = 21$. Esto es:

$$O(21) = 12 \cdot 2^{0{,}18 \cdot 21} = 12 \cdot 2^{3{,}78} \approx 164{,}845\ldots$$

Se espera que hayan 165 osos, aproximadamente.

d. ¿Es correcto afirmar que para el año 2028 se tendrán aproximadamente 86 ejemplares?, ¿por qué?

Para 2028 se tiene $t = 22$. Esto es:

$$O(22) = 12 \cdot 2^{0{,}18 \cdot 22} = 12 \cdot 2^{3{,}96} \approx 186{,}750\ldots$$

Falso, se espera que hayan 187 ejemplares, aproximadamente.

e. Aproximadamente, ¿en qué porcentaje se incrementó la cantidad de osos entre los años 2006 y 2023?

Para 2023 se tiene $t = 17$. Esto es:

$$O(17) = 12 \cdot 2^{0{,}18 \cdot 17} = 12 \cdot 2^{3{,}06} \approx 100$$

Como la cantidad inicial de osos es 12, el porcentaje de incremento es:

$$\frac{100 - 12}{12} \cdot 100\ \% = \frac{88}{12} \cdot 100\ \% \approx 733\ \%$$

El porcentaje de incremento fue de 733 %, aproximadamente.

2. Resuelve el problema.

Un grupo de investigadores, como la que se muestra en la imagen, se encuentra estudiando el cultivo de diferentes bacterias. Luego de un arduo trabajo, determinaron que la masa de bacterias en un cultivo está dada por la siguiente función:

$$P(t) = 50 \cdot 2^{0,1t}$$

En que P representa la masa de bacterias medida en gramos (g) y t es el tiempo medido en horas.

Archivo editorial.

a. La variable t, ¿puede asumir valores negativos?, ¿por qué?

No, ya que representa al tiempo y el tiempo debe ser no negativo.

b. Construye una tabla con 4 valores de t.

Por ejemplo:

t (h)	0	1	2	3
P (g)	$50 \cdot 2^{0,1 \cdot 0}$ $= 50 \cdot 2^{0}$ $= 50$	$50 \cdot 2^{0,1 \cdot 1}$ $= 50 \cdot 2^{0,1}$ $\approx 53,58\ldots$	$50 \cdot 2^{0,1 \cdot 2}$ $= 50 \cdot 2^{0,2}$ $\approx 57,43\ldots$	$50 \cdot 2^{0,1 \cdot 3}$ $= 50 \cdot 2^{0,3}$ $\approx 61,55\ldots$

c. ¿Cuál es la masa inicial del cultivo de bacterias?

La masa inicial del cultivo de bacterias es 50 g.

d. ¿Cuál es la masa del cultivo después de 4 horas?

Para $t = 4$ se tiene:

$$P(4) = 50 \cdot 2^{0,1 \cdot 4} = 50 \cdot 2^{0,4} \approx 65,97\ldots$$

La masa del cultivo tras 4 h es 65,98 g, aproximadamente.

3. Lee la información y resuelve.

En muchas situaciones cotidianas, una variable cambia sus valores en el tiempo de manera porcentual, es decir, cada cierta unidad de tiempo (por ejemplo, segundos, minutos, días) esta cantidad aumenta (o disminuye) un porcentaje determinado. Este cambio se puede modelar con la siguiente función:

$$P(t) = c_0(1 + a)^t$$

En que t representa el tiempo, c_0 es valor inicial de la variable y a es el porcentaje de crecimiento (si $a > 0$) o decrecimiento (si $a < 0$).

a. Una raza de jabalíes se introdujo en una isla hace 25 años. La población inicial era de 100 individuos, pero debido a una enfermedad endémica ha ido disminuyendo en un 8 % anual. ¿Cuántos jabalíes hay actualmente?

Con $c_0 = 100$, $a = -0{,}08$ y $t = 25$, se tiene lo siguiente:

$$P(t) = c_0(1 + a)^t \to P(25) = 100 \cdot (1 - 0{,}08)^{25} = 100 \cdot 0{,}92^{25} \approx 12{,}43\ldots$$

Actualmente hay 12 jabalíes, aproximadamente.

b. La población inicial de una comuna es de 1 500 000 habitantes y se estima que la tasa de crecimiento anual es 3 %. ¿Cuántos habitantes habrá en 3 años más?

Con $c_0 = 1\,500\,000$, $a = 0{,}03$ y $t = 3$, se tiene lo siguiente:

$$P(t) = c_0(1 + a)^t \to P(3) = 1\,500\,000 \cdot (1 + 0{,}03)^3 = 1\,500\,000 \cdot 1{,}03^3 = 1\,639\,090{,}5$$

Habrá 1 639 091 habitantes, aproximadamente.

c. Demuestra que si la población P tiene un cambio porcentual en un tiempo t, entonces cumple la siguiente relación recursiva $\to$ $P(t + 1) - P(t) = a \cdot P(t)$

$$\begin{aligned} P(t + 1) - P(t) &= c_0(1 + a)^{t+1} - c_0(1 + a)^t \\ &= c_0(1 + a)^t \cdot (1 + a) - c_0(1 + a)^t \\ &= c_0(1 + a)^t \cdot [1 + a - 1] \\ &= c_0(1 + a)^t \cdot a \\ &= a \cdot P(t) \end{aligned}$$

4. Lee y resuelve.

La población p de un país, en millones de habitantes, dentro de t años está dada por la función $p(t) = 3 \cdot 4^{\frac{3}{4}}$. Aproximadamente, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que la población del país sea de 50 millones de habitantes?

Para $p = 50$ se tiene:

$$50 = 3 \cdot 4^{\frac{3}{4}t} \to \frac{50}{3} = 4^{\frac{3}{4}t} \to \log_4\left(\frac{50}{3}\right) = \frac{3}{4}t \to t = \frac{3}{4} \cdot \log_4\left(\frac{50}{3}\right) \approx 2{,}7\ldots$$

En 2,7 años, aproximadamente.

5. Lee la información y resuelve.

Algunos médicos utilizan la siguiente fórmula empírica para calcular el área a de la superficie del cuerpo humano (en m²) a partir de su masa m (en kg) y de su estatura h (en cm).

$$\log a = -2{,}144 + 0{,}425 \cdot \log m + 0{,}725 \cdot \log h$$

a. Calcula el área aproximada de la superficie del cuerpo de un hombre cuya masa es 70 kg y su estatura es 175 cm.

Para $m = 70$ y $h = 175$ se tiene:

$$\log a = -2{,}144 + 0{,}425\log m + 0{,}725\log h = -2{,}144 + 0{,}425\log(70) + 0{,}725\log(175) \approx 0{,}2663\ldots$$

Entonces: $\log a \approx 0{,}2663 \rightarrow a \approx 10^{0{,}2663} \rightarrow a \approx 1{,}8465\ldots$

El área de la superficie del cuerpo del hombre es 1,85 m², aproximadamente.

b. Calcula el área aproximada de la superficie del cuerpo de una mujer cuya masa es 60 kg y su estatura es 1,6 m.

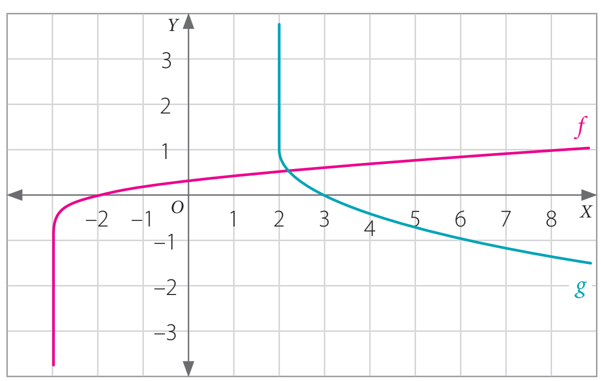
Para $m = 60$ y $h = 160$ se tiene:

$$\log a = -2{,}144 + 0{,}425\log m + 0{,}725\log h = -2{,}144 + 0{,}425\log(60) + 0{,}725\log(160) \approx 0{,}2097\ldots$$

Entonces: $\log a \approx 0{,}2097 \rightarrow a \approx 10^{0{,}2097} \rightarrow a \approx 1{,}6206\ldots$

El área de la superficie del cuerpo de la mujer es 1,62 m², aproximadamente.

6. Analiza las siguientes gráficas logarítmicas de base 10 y 0,1 y luego, responde.



a. ¿Cuál es la función que modela cada gráfica?

Las funciones son $f(x) = \log(x + 3)$ y $g(x) = \log_{\frac{1}{10}}(x - 2)$.

b. ¿Cuál función es creciente y cuál es decreciente?

De acuerdo con las gráficas, f es creciente y g es decreciente.

c. ¿Cuál es la ecuación de la asíntota de cada función?

De acuerdo con las gráficas, las ecuaciones de las asíntotas son $y = -3$ para f e $y = 2$ para g.

d. ¿En qué punto la gráfica de f corta al eje Y?

La intersección con el eje Y ocurre en $x = 0$. Esto es:

$$f(0) = \log(0 + 3) = \log 3$$

La intersección ocurre en el punto (0, log 3).

e. ¿Cuál es el valor de x que satisface la igualdad $f(x) = g(x)$?

$$f(x) = g(x)$$
$$\log(x + 3) = \log_{\frac{1}{10}}(x - 2)$$
$$\log(x + 3) = -\log(x - 2)$$
$$\log(x + 3) + \log(x - 2) = 0$$
$$(x + 3)(x - 2) = 1$$
$$x^2 + x - 7 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{-1 - \sqrt{29}}{2} \text{ y } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{29}}{2}$$

A partir de las soluciones y del gráfico, las funciones se intersecan en $x = \frac{-1 + \sqrt{29}}{2}$.

Mis logros

Marca con un ✔ las actividades que desarrollaste correctamente.

Indicador	Actividad
1. Caracterización de la función exponencial	1a 1b 1c 1d 1e 2a 2b 2c 2d 3a 3b 3c 4
2. Caracterización de la función logarítmica	5a 5b
3. Modificación de parámetros	6a 6b 6c 6d 6e

Criterios de evaluación

» 0 a 9 actividades correctas
Parcialmente logrado
Vuelvo a estudiar los contenidos.

» 10 a 18 actividades correctas
Medianamente logrado
Repaso donde fallé.

» 19 o 20 actividades correctas
Logrado
Muy bien, lo logré.

Reflexiona y responde

- ¿Qué contenido te gustaría volver a repasar?, ¿por qué?
- ¿Cuál de los contenidos te gustó más?, ¿por qué?