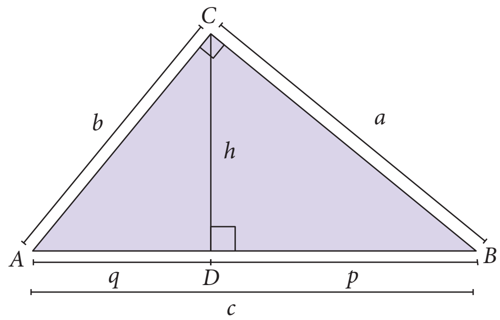
Teorema de Euclides

1. Demuestra que en el ΔABC se cumple que:



a. $b^2 = c \bullet q$

Como m($\sphericalangle ACB$) = m($\sphericalangle ADC$) = 90° y m($\sphericalangle CAB$) = m($\sphericalangle DAC$), los triángulos ACB y ADC son semejantes por el criterio de semejanza AA.

Se tiene la siguiente proporción: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BC}{CD} = \dfrac{AC}{AD}$

Se reemplazan las medidas de la imagen, se puede escribir lo siguiente: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD} \Rightarrow \dfrac{c}{b} = \dfrac{b}{q} \rightarrow b^2 = c \bullet q$

b. $a \bullet b = c \bullet h$

Se plantea el cálculo del área del triángulo ABC considerando BC como base y AC como altura: $A = \dfrac{a \bullet b}{2}$.

Se plantea el cálculo del área del triángulo ABC considerando AB como base y CD como altura: $A = \dfrac{c \bullet h}{2}$.

Se igualan las ecuaciones y se tiene que $\dfrac{a \bullet b}{2} = \dfrac{c \bullet h}{2}$, entonces $a \bullet b = c \bullet h$.

c. $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$

Se considera que $a^2 = c \bullet p$; $b^2 = c \bullet q$ y $h^2 = p \bullet q$.

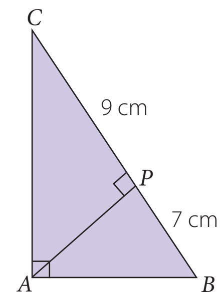
Se despejan p y q: $p = \dfrac{a^2}{c}$ y $q = \dfrac{b^2}{c}$ y se reemplazan en la ecuación de la altura: $h^2 = \dfrac{a^2}{c} \bullet \dfrac{b^2}{c} \rightarrow h^2 = \dfrac{a^2b^2}{c^2}$

Ahora, se puede aplicar el teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2$ y reemplazar en la igualdad:

$$h^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{a^2}{a^2b^2} + \frac{b^2}{a^2b^2} \rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}$$

Luego, queda demostrado que $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$.

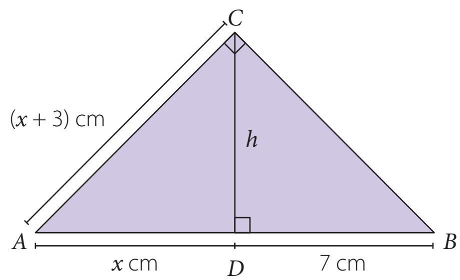
2. En el triángulo rectángulo ABC de la imagen, ¿cuál es la medida del segmento $\overline{AP}$?



Utilizando el teorema de Euclides referente a la altura se cumple que:

$$(AP)^2 = p \cdot q \Rightarrow AP = \sqrt{9 \cdot 7}$$
$$= \sqrt{63}$$
$$\approx 7{,}94 \text{ cm}$$

3. En el triángulo ABC que se muestra, ¿cuál es la medida de la altura h?



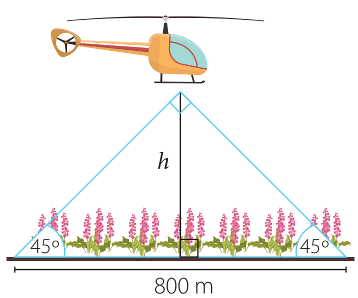
Utilizando el teorema de Euclides referido a los catetos, se tiene que:

$(x + 3)^2 = (x + 7)x \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 7x \Rightarrow x = 9$

Luego, $h = \sqrt{9 \cdot 7} = \sqrt{63} \Rightarrow h = 3\sqrt{7} \approx 7{,}94$ cm

4. Resuelve los problemas.

a. Un agricultor contrata un helicóptero para regar un cultivo que abarca una distancia horizontal de 500 m, como se muestra en la imagen. ¿Cuál es la altura h a la que vuela el helicóptero?



Como el triángulo rectángulo que se forma es isósceles, la altura correspondiente a la base la divide en dos segmentos de igual medida, por lo tanto, $p = q = \dfrac{800}{2} = 400$ m.

Al aplicar el teorema de Euclides para calcular la altura se tiene que: $h^2 = p \cdot q \Rightarrow h^2 = 400 \cdot 400 \Rightarrow h^2 = 400^2 \Rightarrow h = 400$ m

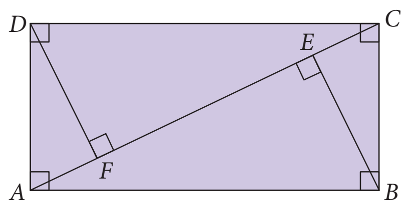
Por lo tanto la altura mide la mitad de la hipotenusa, 400 m.

b. En un triángulo rectángulo, una altura corta a la hipotenusa definiendo dos segmentos que miden 25 cm y 4 cm. ¿Cuál es la longitud de la altura?

$h = \sqrt{25 \cdot 4} \Rightarrow h = \sqrt{100} = 10$ cm

La altura tiene una longitud de 10 cm.

c. En el rectángulo $ABCD$, $\overline{BE}$ y $\overline{DF}$ son perpendiculares a la diagonal $\overline{AC}$. Si $BC = 6$ cm y $AB = 10$ cm, ¿cuánto mide $\overline{EF}$?



$AC = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{100 + 36} = \sqrt{136} \Rightarrow AC = 2\sqrt{34}$ cm

$BC = \sqrt{AC \cdot EC} \rightarrow 36 = 2\sqrt{34} \cdot EC \Rightarrow EC = \dfrac{36}{2\sqrt{34}} = \dfrac{18}{\sqrt{34}} = \dfrac{18\sqrt{34}}{34} = \dfrac{9\sqrt{34}}{17}$

$EC = FA; EF = AC - EC - FA \Rightarrow EF = 2\sqrt{34} - \dfrac{9\sqrt{34}}{17} - \dfrac{9\sqrt{34}}{17} = \dfrac{16\sqrt{34}}{17} \approx 5{,}5$ cm

d. Para estabilizar un árbol en el bosque se le atan dos cables desde la cúspide anclados al suelo, formando triángulos rectángulos. La distancia de la base a un cable es 11 m y al otro es 13 m. ¿Cuál es la altura aproximada del árbol?

$h = \sqrt{11 \cdot 13} \Rightarrow h = \sqrt{143} \approx 11{,}96$ m

La altura aproximada del árbol es 11,96 m.

e. Observa el triángulo rectángulo BCA de la imagen. ¿Cuál es la medida h de la altura? ¿Cuáles son las medidas a y b de los catetos?

$h = \sqrt{900 \cdot 1\,600} = \sqrt{1\,400\,000} = 1\,200$ m

La altura mide es 1 200 m.

$a = \sqrt{(1\,600 + 900) \cdot 900} = 1\,500$ m;

$b = \sqrt{(1\,600 + 900) \cdot 1\,600} = 2\,000$ m

Las medidas de los catetos son 1 500 m y 2 000 m.