Ficha 2

Calculando probabilidades con la distribución de Bernoulli

Nombre: ______________________________ **Curso** ________

1. Completa la siguiente tabla. Para ello, guíate por el ejercicio resuelto.

Experimento	Variable X	Función de
En un curso de 12 mujeres y 16 hombres, se elige a un estudiante al azar. ¿Cuál es la probabilidad de elegir a una mujer?	$X = 0$, si se elige un hombre. (Fracaso). $X = 1$, si se elige una mujer. (Éxito).	$P(X = 0) = \frac{16}{28}$ $P(X = 1) = \frac{12}{28}$
En un control de calidad que analiza el pH de las mezclas de jabón producidas, el 90 % de ellas cumplen con la norma. Si se elige una de ellas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no cumpla con la norma?	$X = 0$, si cumple con la norma. $X = 1$, si no cumple con la norma.	$P(X = 0) = \frac{90}{100}$ $P(X = 1) = \frac{10}{100}$
En un juego se lanzan dos dados de seis caras y gana el jugador que obtiene una suma igual a 7. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?	$X = 0$, si no suma siete. $X = 1$, si suma siete.	$P(X = 0) = \frac{30}{36}$ $P(X = 1) = \frac{6}{36}$
¿Cuál es la probabilidad de obtener más de dos caras al lanzar cuatro monedas?	$X = 0$, si es menor o igual a dos caras. $X = 1$, si es mayor a dos caras.	$P(X = 0) = \frac{11}{16}$ $P(X = 1) = \frac{5}{16}$

2. Analiza las siguientes definiciones. Luego, completa.

Sea $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ una variable aleatoria discreta y $p(x_i)$, su función de probabilidad. Entonces, su esperanza μ_x y su varianza σ_x^2 son:

$$E(X) = x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + ... + x_n \cdot p(x_n)$$

$$\sigma_x^2 = p(x_1) \cdot (x_1 - \mu)^2 + p(x_2) \cdot (x_2 - \mu)^2 + ... + p(x_n) \cdot (x_n - \mu)^2$$

a. Demuestra que si una variable X se distribuye según Bernoulli, entonces $\mu_x = p$.

Probabilidad de éxito: p

Probabilidad de fracaso $1 - p$:

$$\mu_x = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$

b. Demuestra que si una variable X se distribuye según Bernoulli, entonces $\sigma_x^2 = p(1 - p)$.

Como la media es igual a la esperanza, su varianza es:

$$\sigma_x^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

3. Analiza los siguientes experimentos de Bernoulli. Luego, determina su función de probabilidad y completa.

a. Una urna tiene 10 bolitas, cada una marcada con un número del 1 al 10. Si se extrae una de ellas, ¿cuál es la probabilidad de que el número marcado sea mayor o igual que 6?

$X = 0$ Número extraído no sea mayor o igual que 6. (Fracaso)

$X = 1$ Número extraído sea mayor o igual que 6. (Éxito)

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5 & \text{si } x = 0 \\ 0{,}5 & \text{si } x = 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Esperanza:

$\mu_x = 0{,}5$

Varianza:

$\sigma_x^2 = 0{,}25$

b. La probabilidad de que un ave enferma reaccione positivamente al inyectarle cierto antibiótico es 0,85. ¿Cuál es la probabilidad de que un ave reaccione negativamente al inyectarle ese antibiótico?

$X = 0$ ave reaccione positivamente a la inyección (Fracaso)

$X = 1$ ave reaccione negativamente a la inyección (Éxito)

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}85 \text{ si } x = 0 \\ 0{,}15 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

Esperanza:

$\mu_x = 0{,}15$

Varianza:

$\sigma_x^2 = 0{,}1275$

4. Analiza el gráfico de la función de probabilidad de una distribución de Bernoulli.

a. Determina la probabilidad de éxito p y la de fracaso q.

$p = 0{,}6$

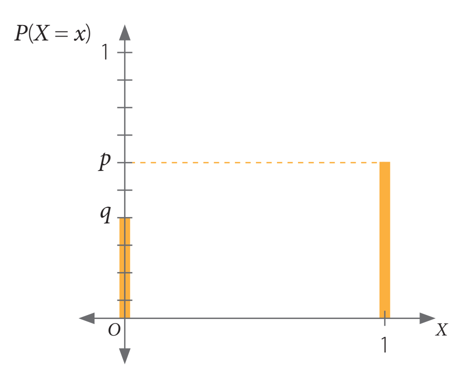
$q = 0{,}4$

b. Calcula la esperanza y la varianza de X.

$E(x) = 0{,}6$

$\sigma_x^2 = 0{,}24$

Función de probabilidad de X



5. **Verifica las propiedades de la esperanza de una variable X con distribución de Bernoulli.**

a. Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $\mu(aX) = a\mu(x)$.

$$\mu(ax) = a \cdot 0 \cdot (1 - p) + a \cdot 1 \cdot p = ap = a\mu(x)$$

b. Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $\mu(X + a) = \mu(x) + a$.

$$\mu(x + a) = a \cdot (1 - p) + (1 + a) \cdot p = a + p = a + \mu(x)$$

6. **Analiza la siguiente situación y resuelve.**

Una jugadora de fútbol ha anotado 10 de los 15 últimos lanzamientos penales.

a. Utiliza la probabilidad experimental para determinar la función de probabilidad de la variable aleatoria X definida como 0 si no marca y 1 si marca el próximo penal.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{15} & \text{si } x = 0 \\[2ex] \dfrac{10}{15} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

b. Si la jugadora se dispone a lanzar un penal, ¿podrías afirmar que logrará convertir un gol?

Tiene más probabilidad de anotar el penal, ya que su esperanza es cercana a 1. Pero no se puede afirmar que sea gol.

7. Resuelve los siguientes problemas.

a. Determina la función de probabilidad de un juego de azar que se distribuye según Bernoulli si su esperanza es 0,4. ¿Participarías de ese juego?, ¿por qué?

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}6 \text{ si } x = 0 \\ 0{,}4 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

No participaría del juego, ya que la probabilidad de fracaso es mayor que la de éxito.

b. Tres máquinas envasan leche en polvo en bolsas de 1 kg. La probabilidad de que se envase esa cantidad es: máquina 1: 0,91; máquina 2: 0,97; máquina 3: 0,89. Determina una variable con distribución de Bernoulli para cada una de ellas y su varianza, para justificar cuál trabaja con mayor precisión.

$$M_1 : f(x) = \begin{cases} 0{,}09 \text{ si } x = 0 \\ 0{,}91 \text{ si } x = 1 \end{cases}, \ \mu(x) = 0{,}91; \ \sigma_x^2 = 0{,}0819$$

$$M_2 : f(x) = \begin{cases} 0{,}03 \text{ si } x = 0 \\ 0{,}97 \text{ si } x = 1 \end{cases}, \ \mu(x) = 0{,}97; \ \sigma_x^2 = 0{,}0291$$

$$M_3 : f(x) = \begin{cases} 0{,}11 \text{ si } x = 0 \\ 0{,}89 \text{ si } x = 1 \end{cases}, \ \mu(x) = 0{,}89; \ \sigma_x^2 = 0{,}0979$$

La máquina 2 trabaja con mayor precisión.

Reflexiona y responde

- ¿Qué fenómenos o actividades de tu entorno podrías modelar mediante la distribución de Bernoulli?
- ¿Qué actividad te gustó más?, ¿por qué?