

Caracterizando la distribución normal

Nombre: _____ Curso _____

1. Sea X una variable continua y f su función de densidad.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 0,2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0,5 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0,3 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Calcula.

a. $P(1 < X < 2)$

Se calcula directo de la distribución,
 $P = 0,2$

$P = 0,2$

b. $P(X \geq 2)$

$0,5 + 0,3 = 0,8$

$P = 0,8$

c. $P(X \leq 3)$

$0,5 + 0,2 = 0,7$

$P = 0,7$

- ¿Se puede calcular $P(1 < X < 2,5)$?, ¿por qué?

Sí, de la siguiente manera: $P(1 < X < 2,5) = 0,2 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,45$.

2. Considera $X \sim N(15, 1)$ para calcular las probabilidades.

a. $P(X < 16)$ > 0,8413

b. $P(X > 18)$ > 0,001

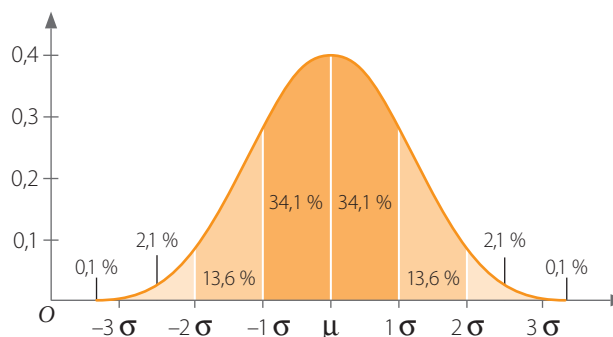
c. $P(13 < X < 17)$ > 0,954

d. $P(X < 14)$ > 0,1587

e. $P(X \geq 13)$ > 0,9772

f. $P(12 \leq X < 16)$ > 0,83995

Recuerda que para una distribución normal con media μ y desviación σ , se verifica:



3. Si $X \sim N(0,1)$, escribe $>$, $<$ o $=$, según corresponda.

a. $P(X < -1) \boxed{>} P(X < -1,5)$

c. $P(X < -2) \boxed{>} P(X > 3)$

b. $P(X < 0) \boxed{=} P(X > 0)$

d. $P(X < 3) \boxed{>} P(X < -2,5)$

4. Determina el valor de k para cada caso. Para ello, considera $X \sim N(120, 5)$.

a. $P(X < k) = 0,1587$

La expresión $P(X < k) = 0,1587$ es equivalente a $1 - P(X > k) = 0,1587$, que es lo mismo que $1 - P(X < -k) = 0,1587$, despejando se obtiene: $P(X < -k) = 0,8413$. De $X \sim N(120, 5)$ se deduce $\mu = 120$, $\sigma = 5$, al trabajar con $Z \sim N(0, 1)$, se tiene: $P(X < -k) = 0,8413 \Rightarrow P\left(Z < -\left(\frac{k-120}{5}\right)\right) = 0,8413$, buscando los valores en la tabla de la distribución normal debe cumplirse que $-\left(\frac{k-120}{5}\right) = 1$, al despejar se obtiene $k = 115$.

El valor de k es 115.

b. $P(X > k) = 0,3413$

La expresión $P(X > k) = 0,3413$ es equivalente a $1 - P(X < k) = 0,3413$, despejando se obtiene: $P(X < k) = 0,6587$. De $X \sim N(120, 5)$ se deduce $\mu = 120$, $\sigma = 5$, al trabajar con $Z \sim N(0, 1)$, se tiene: $P(X < k) = 0,6587 \Rightarrow P\left(Z < \left(\frac{k-120}{5}\right)\right) = 0,6587$, revisando la tabla de la distribución normal se tiene $\left(\frac{k-120}{5}\right) = 0,41$, al despejar se obtiene $k = 122,05$ o aproximadamente 122.

El valor de k es 122.

c. $P(X > k) = 0,8413$

La expresión $P(X > k) = 0,8413$ es equivalente a $1 - P(X < k) = 0,8413$, despejando se obtiene: $P(X < k) = 0,1587$, utilizando el mismo desarrollo que la actividad 4a, se tiene que $k = 115$.

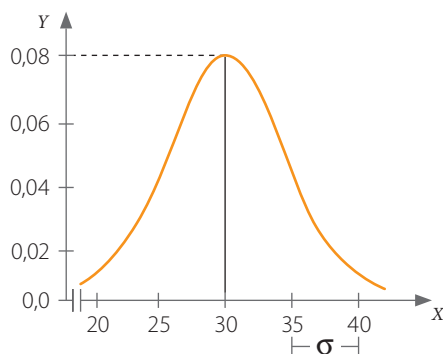
El valor de k es 115.

d. $P(X < k) = 0,0225$

La expresión $P(X < k) = 0,0225$ es equivalente a $1 - P(X > k) = 0,0225$, que es lo mismo que $1 - P(X < -k) = 0,0225$, despejando se obtiene: $P(X < -k) = 0,9775$. De $X \sim N(120, 5)$ se deduce $\mu = 120$, $\sigma = 5$, al trabajar con $Z \sim N(0, 1)$, se tiene: $P(X < -k) = 0,9775 \Rightarrow P\left(Z < -\left(\frac{k-120}{5}\right)\right) = 0,9775$, buscando los valores en la tabla de la distribución normal debe cumplirse que $-\left(\frac{k-120}{5}\right) = 2$, al despejar se obtiene $k = 110$.

El valor de k es 110.

5. Analiza el gráfico de la función de densidad de una distribución normal. Luego, completa los valores pedidos.



a. μ

>

30

c. $P(X < 35)$

>

0,8413

b. $P(25 < X < 40)$

>

0,8185

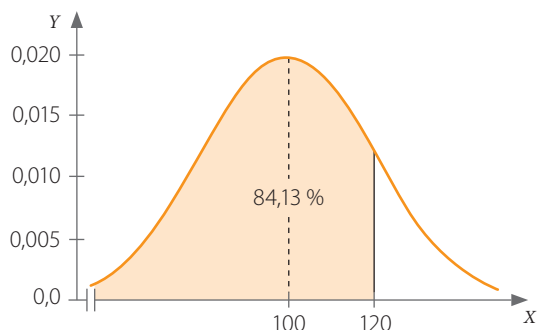
d. $P(20 < X < 30)$

>

0,4772

6. Completa la información de la variable normal X a partir del gráfico de su función de probabilidad.

a



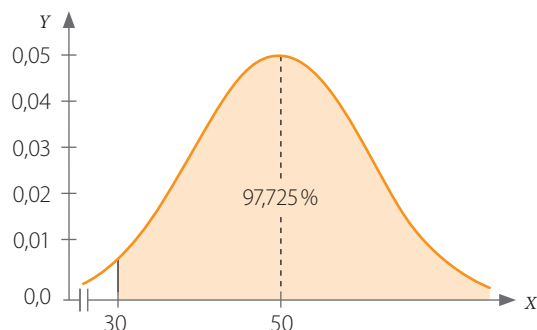
μ >

100

σ >

20

b



μ >

50

σ >

10

7. Resuelve los problemas.

- a. La distribución del ritmo cardíaco de 200 alumnos de un colegio es $X \sim N(108, 2)$. Cierta estudio médico indica que lo aceptable para la salud es tener un ritmo cardíaco de entre 104 y 112 después de trotar. Entonces, ¿cuántos alumnos, aproximadamente, se encuentran en este rango?

De $X \sim N(108, 2)$ se deduce $\mu = 108$, $\sigma = 2$, además el ritmo cardíaco debe estar entre 104 y 112, lo que es equivalente a calcular: $P(104 \leq X \leq 112)$ al trabajar con $Z \sim N(0, 1)$, se tiene:

$P(104 \leq X \leq 112) \rightarrow P\left(\frac{104 - 108}{2} \leq Z \leq \frac{112 - 108}{2}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2)$, ya que $Z \sim N(0, 1)$, se utiliza la propiedad $P(\mu - 2\sigma \leq Z \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$ ($\mu = 0$ y $\sigma = 2$), por lo tanto $P(-2 \leq Z \leq 2) \approx 0,9545$, el total de estudiantes son 200, al calcular los alumnos entre el rango solicitado se tiene:

$0,9545 \cdot 200 = 190,9 \approx 191$.

Se encuentran 191 alumnos, aproximadamente.

- b. Pedro usa todos los días la línea de colectivos AB7 para ir a la universidad. La frecuencia con la que pasan tiene una distribución normal con promedio de 15 min y desviación estándar de 3,5 min. ¿Cuál es la probabilidad de que espere como mínimo 11,5 min, pero menos de 18 min, por un colectivo de esa línea?

De $X \sim N(15; 3,5)$ se deduce $\mu = 15$, $\sigma = 3,5$, se pide calcular la probabilidad de que espere como mínimo 11,5 min y menos de 18 min, lo que es equivalente a calcular: $P(11,5 \leq X < 18)$ al trabajar con $Z \sim N(0, 1)$, se tiene: $P(11,5 \leq X < 18) \rightarrow P\left(\frac{11,5 - 15}{3,5} \leq Z < \frac{18 - 15}{3,5}\right) = P(-0,86 \leq Z < 0,86)$, esto equivale a calcular:

$$P(Z < 0,86) - P(-0,86 \leq Z) = P(Z < 0,86) - (1 - P(Z < 0,86)) = 0,80511 - 0,19489 = 0,61022 \approx 0,61.$$

La probabilidad es 0,61, aproximadamente.

- c. Se miden las estaturas de una población y se construyen dos muestras, cada una modelada por una variable aleatoria. La primera es $X \sim N(175, 2)$ y la segunda, $Y \sim N(170, 3)$. ¿En cuál de ellas es más probable elegir a una persona que mida más de 179 cm?

De $X \sim N(175, 2)$ se deduce $\mu = 175$, $\sigma = 2$, al calcular $P(X \geq 179)$, considerando $Z_1 \sim N(0, 1)$, se tiene:

$$P\left(Z_1 \geq \frac{179 - 175}{2}\right) = P(Z_1 \geq 2) = 1 - P(Z_1 \leq 2) = 0,02275.$$

De $Y \sim N(170, 3)$ se deduce $\mu = 170$, $\sigma = 3$, al calcular $P(Y \geq 179)$, considerando $Z_2 \sim N(0, 1)$, se tiene:

$$P\left(Z_2 \geq \frac{179 - 170}{3}\right) = P(Z_2 \geq 3) = 1 - P(Z_2 \leq 3) = 0,00135.$$

Al comparar las probabilidades anteriores, es más probable en $X \sim N(175, 2)$.

Es más probable en la muestra modelada por la variable aleatoria X.

- d. Un grupo de 120 alumnos rinde un ensayo PSU cuyos resultados se modelan según una distribución normal con $\mu = 560$ puntos y $\sigma = 70$ puntos. Los que hayan obtenido más de 700 puntos tendrán un reconocimiento. Aproximadamente, ¿qué cantidad de estudiantes obtendrán dicho reconocimiento?

De $X \sim N(560, 70)$ se deduce $\mu = 560, \sigma = 70$, al calcular $P(X \geq 700)$, considerando $Z \sim N(0, 1)$, se tiene: $P\left(Z \geq \frac{700 - 560}{70}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z_1 \leq 2) = 0,02275$. Luego como se tienen 120 alumnos en total, los estudiantes que obtendrán el reconocimiento es $120 \cdot 0,02275 = 2,73 \approx 3$.

Tendrán el reconocimiento 3 estudiantes, aproximadamente.

- e. Según un estudio realizado por un laboratorio, se estima que la distribución del tiempo de reacción de un medicamento es $X \sim N(60, 8)$. Además, la reacción debe ocurrir antes de los 84 min para no poner en riesgo a los pacientes. ¿Consideras recomendable aplicar ese medicamento? Justifica.

De $X \sim N(60, 8)$ se deduce $\mu = 60, \sigma = 8$, se debe calcular $P(X \leq 84)$, considerando $Z \sim N(0, 1)$, se tiene: $P\left(X \leq \frac{84 - 60}{8}\right) = P(Z \leq 3) = 0,99865$, es decir tiene un 99,865 % de efectividad, por lo que es recomendable.

Sí es recomendable debido a que su efectividad es del 99,865 %, aproximadamente.

Reflexiona y responde

- ¿Cómo se relaciona esta distribución con el concepto de «normal» que ya conoces?
- ¿Qué actividad te pareció más interesante?, ¿por qué?