

Inversas de las funciones lineal, afín y cuadrática

1. Calcula la función inversa de las siguientes funciones y luego comprueba que se cumpla $f^{-1}(f(x)) = x$. Considera que las funciones que se muestran son biyectivas.

a. $f: \left[-\frac{5}{2}, +\infty \right] \rightarrow \left[-\frac{25}{4}, +\infty \right], f(x) = x^2 + 5x$

b. $f: [1, +\infty[\rightarrow [-\infty, 4[, f(x) = -x^2 + 2x + 3$

2. Verifica si la función $g(x)$ es la inversa de la función $f(x)$. De no serlo, determina $f^{-1}(x)$.

a. $f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $f(x) = x^2$, y $g(x) = \sqrt{x}$.

b. $f: \left[\frac{3}{2}, +\infty \right] \rightarrow \left[-\frac{1}{4}, +\infty \right], f(x) = x^2 - 3x + 2, y g(x) = \frac{3 + \sqrt{1+4x}}{2}$.

3. Identifica el error cometido en el siguiente desarrollo. Luego, corrígelo.

La función inversa de $f: \mathbb{R}^- \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^- \cup \{0\}$, definida por $f(x) = -2x^2$, es $f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{x}{2}}$, ya que al calcular $f(f^{-1}(x))$ se obtiene x .

Inversas de las funciones lineal, afín y cuadrática

1. Calcula la función inversa de las siguientes funciones y luego comprueba que se cumpla $f^{-1}(f(x)) = x$. Considera que las funciones que se muestran son biyectivas.

a. $f: \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right[\rightarrow \left[-\frac{25}{4}, +\infty\right[, f(x) = x^2 + 5x$

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= \frac{-5 + \sqrt{(4x+25)}}{2} \\ f^{-1}(x^2 + 5x) &= \frac{-5 + \sqrt{(4x^2+5x)+25}}{2} \\ &= \frac{-5 + \sqrt{4x^2+20x+25}}{2} = \frac{-5 + 2x+5}{2} = x \end{aligned}$$

b. $f: [1, +\infty[\rightarrow [-\infty, 4[, f(x) = -x^2 + 2x + 3$

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= 1 + \sqrt{(4-x)} \\ f^{-1}(-x^2 + 2x + 3) &= 1 + \sqrt{(4 - (-x^2 + 2x + 3))} \\ &= 1 + \sqrt{(x^2 - 2x + 1)} \\ &= 1 + x - 1 = x \end{aligned}$$

2. Verifica si la función $g(x)$ es la inversa de la función $f(x)$. De no serlo, determina $f^{-1}(x)$.

a. $f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, f(x) = x^2$, y $g(x) = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} \text{Sí es la inversa, ya que: } y &= x^2 \Rightarrow \sqrt{y} = x \\ f^{-1}(x) &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

b. $f: \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[\rightarrow \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[, f(x) = x^2 - 3x + 2$, y $g(x) = \frac{3 + \sqrt{1+4x}}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Sí es la inversa, ya que: } f^{-1}(x) &= \frac{3 + \sqrt{9 - 4(2-x)}}{2} = \frac{3 + \sqrt{9 - 8 + 4x}}{2} \\ &= \frac{3 + \sqrt{1 + 4x}}{2} \end{aligned}$$

3. Identifica el error cometido en el siguiente desarrollo. Luego, corrígelo.

La función inversa de $f: \mathbb{R}^- \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^- \cup \{0\}$, definida por $f(x) = -2x^2$, es $f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{x}{2}}$, ya que al calcular $f(f^{-1}(x))$ se obtiene x .

El error está en que la inversa de $f(x)$ es $f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{-x}{2}}$.