Ficha 12

Decidiendo con la distribución normal estándar

Nombre: ______________________________ **Curso** ________

1. Aplica una estandarización normal a las siguientes variables y calcula.

a. $X \sim N(46, 3)$

- $P(X > 38)$

$X \sim N(46, 3)$, $\mu = 46$, $\sigma = 3$, al trabajar con $Z \sim N(0, 1)$,
se tiene: $P(X > 38) = P\left(Z > \frac{38 - 46}{3}\right) \approx P(Z > -2{,}66)$
$= P(Z < 2{,}66) = 0{,}9803$.

La probabilidad es 0,9803.

- $P(39 \leqslant X < 41)$

$X \sim N(46, 3)$, $\mu = 46$, $\sigma = 3$, con $Z \sim N(0, 1)$,
$P(39 \leq X < 41) = P(X \leq 41) - P(X \leq 39)$
$\approx P(Z \leq -1{,}66) - P(Z \leq -2{,}33) = 0{,}02728$

La probabilidad es 0,02728.

b. $X \sim N(70, 7)$

- $P(X > 54)$

$X \sim N(70, 7)$, $\mu = 70$, $\sigma = 7$, con $Z \sim N(0, 1)$,
se tiene: $P(X > 54) = P\left(Z > \frac{54 - 70}{7}\right)$
$\approx P(Z > -2{,}29) = P(Z < 2{,}29) = 0{,}98899$.

La probabilidad es 0,98899.

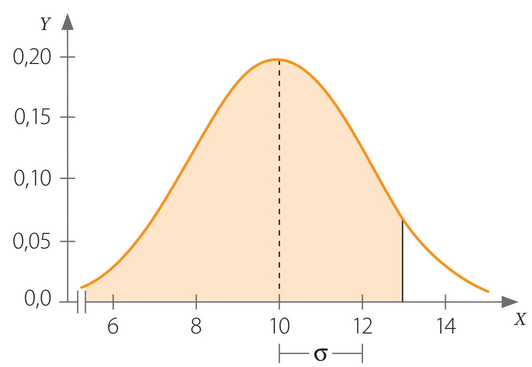
- $P(X > 75)$

$X \sim N(70, 7)$, $\mu = 70$, $\sigma = 7$, con $Z \sim N(0, 1)$,
se tiene: $P(X > 75) = P\left(Z > \frac{75 - 70}{7}\right)$
$\approx P(Z > 0{,}71) = 1 - P(Z < 0{,}71) = 0{,}2389$.

La probabilidad es 0,2389.

2. Calcula la probabilidad representada a partir de la función de distribución normal.

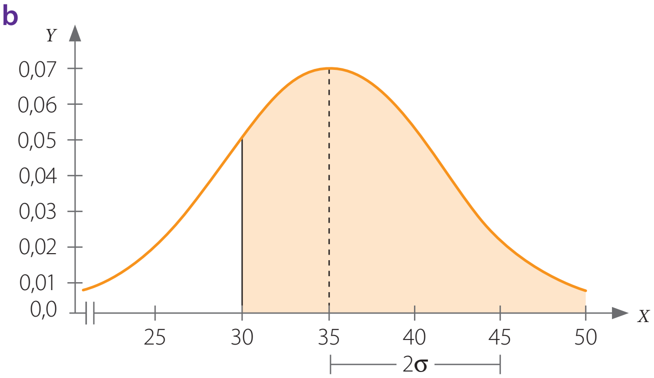
a



μ › 10 σ › 2

$P(X < 13) = 0{,}9332$

b



μ › 35 σ › 5

$P(X > 30) = 0{,}1587$

3. Utiliza la tabla de distribución normal estándar para determinar el valor de k según corresponda.

a. $X \sim N(18, 2)$ y $P(X < k) = 0{,}4522$

La expresión $P(X < k) = 0{,}4522$ es equivalente a $1 - P(X > k) = 0{,}4522$, que es lo mismo que $1 - P(X < -k) = 0{,}4522$, despejando se obtiene: $P(X < -k) = 0{,}5478$. De $X \sim N(18, 2)$ se deduce $\mu = 18$, $\sigma = 2$, al trabajar con $Z \sim N(0, 1)$, se tiene: $P(X < -k) = 0{,}5478 \blacktriangleright P\left(Z < -\left(\dfrac{k-18}{2}\right)\right) = 0{,}5478$, buscando los valores en la tabla de la distribución normal debe cumplirse que $-\left(\dfrac{k-18}{2}\right) = 0{,}12$, al despejar se obtiene $k = 17{,}76$.

El valor de k es 17,76.

b. $Y \sim N(15, 4)$ y $P(Y \geqslant k) = 0{,}33$

La expresión $P(Y \geq k) = 0{,}33$ es equivalente a $1 - P(X \leq k) = 0{,}33$, despejando se obtiene: $P(X \leq k) = 0{,}67$. De $Y \sim N(15, 4)$ se deduce $\mu = 15$, $\sigma = 4$, al trabajar con $Z \sim N(0, 1)$, se tiene: $P(X \leq k) = 0{,}67 \blacktriangleright P\left(Z \leq \left(\dfrac{k-15}{4}\right)\right) = 0{,}67$, revisando la tabla de la distribución normal se tiene $\left(\dfrac{k-15}{4}\right) = 0{,}44$, al despejar se obtiene $k = 16{,}76$.

El valor de k es 16,76.

c. ¿Cuál de las variables es más probable que tome un valor mayor que 21?

$P(X < 21)$	$P(Y < 21)$
$= P\left(Z < \dfrac{21-18}{2}\right)$	$= P\left(Z < \dfrac{21-15}{2}\right)$
$= P\left(Z < \dfrac{3}{2}\right)$	$= P\left(Z < \dfrac{3}{2}\right)$

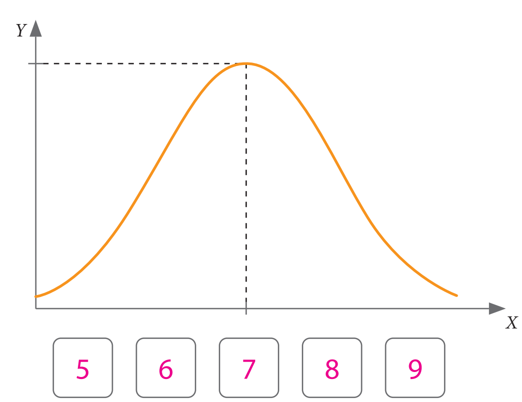
Ambas tienen la misma probabilidad.

4. Resuelve los problemas y representa en el gráfico la probabilidad pedida.

a. El consumo de bencina de cierto modelo de automóvil a los 100 km/h tiene una distribución normal con media de 7 litros y desviación estándar de 1 litro. ¿Cuál es la probabilidad de tener uno de esos modelos que consuma entre 5 y 7,5 litros a 100 km/h?

De los datos del problema se tiene $X \sim N(7, 1)$ se deduce $\mu = 7$, $\sigma = 1$, se pide calcular la probabilidad de que consuma entre 5 L y 7,5 L a 100 km/h, lo que es equivalente a calcular: $P(5 < X < 7{,}5)$ al trabajar con $Z \sim N(0, 1)$, se tiene: $P\left(\dfrac{5-7}{1} < Z < \dfrac{7{,}5-7}{1}\right) = P(-2 < Z < 0{,}5)$, esto equivale a calcular: $P(Z < 0{,}5) - P(-2 < Z) = P(Z < 0{,}5) - (1 - P(Z < 2)) = 0{,}69146 - 0{,}02275 = 0{,}66871$.

La probabilidad es igual a 0,66871.



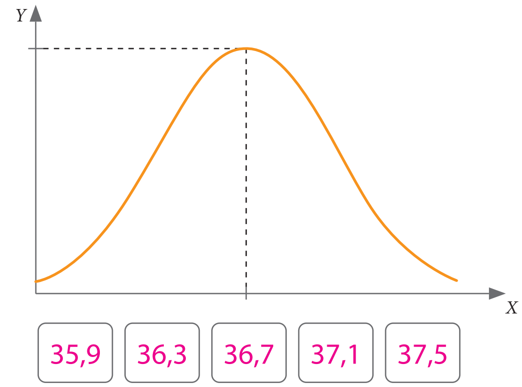
b. Según estudios científicos, la temperatura del cuerpo tiene una distribución normal con media de 36,7 °C y desviación estándar de 0,4 °C. Si una persona se siente saludable con temperatura corporal de entre 36 °C y 37 °C, ¿cuál es la probabilidad de seleccionar un individuo en este rango?

De los datos del problema se tiene $X \sim N(36{,}7; 0{,}4)$ se deduce $\mu = 36{,}7$, $\sigma = 0{,}4$, se pide calcular: $P(36 < X < 37)$ al trabajar con $Z \sim N(0, 1)$, se tiene: $P(36 < X < 37)$ ▶

$P\left(\frac{36 - 36{,}7}{0{,}4} < Z < \frac{37 - 36{,}7}{0{,}4}\right) = P(-1{,}75 < Z < 0{,}75)$, esto equivale a calcular: $P(Z < 0{,}75) - P(-1{,}75 < Z) =$

$P(Z < 0{,}75) - (1 - P(Z < 1{,}75)) = 0{,}77337 - 0{,}04006 = 0{,}73331$

La probabilidad es 0,73331.



5. Resuelve los problemas.

a. El tiempo de vuelo directo desde Arica a Santiago tiene una distribución normal, con media de 3,5 h y desviación estándar de 0,4 h. Si se analiza uno de esos vuelos:

- ¿Cuál es la probabilidad de que demore más de 4 h?

$Z = \frac{4 - 3{,}5}{0{,}4} = 1{,}25$

$$\begin{aligned} P(Z > 1{,}25) &= 1 - P(Z < 1{,}25) \\ &= 1 - 0{,}89435 \\ &= 0{,}10565 \end{aligned}$$

La probabilidad es 0,11, aproximadamente.

- ¿Cuál es la probabilidad de que llegue media hora antes de lo habitual?

$X = 3{,}5 - 0{,}5 = 3$

$Z = \frac{3 - 3{,}5}{0{,}4} = -1{,}25$

$$\begin{aligned} P(Z < -1{,}25) &= 1 - P(Z < 1{,}25) \\ &= 1 - 0{,}89435 \\ &= 0{,}10565 \end{aligned}$$

La probabilidad es 0,11, aproximadamente.

- ¿Cuál es la probabilidad de que demore más de 3,3 h y menos de 3,6 h?

$3{,}3 < X < 3{,}6$

$\frac{3{,}3 - 3{,}5}{0{,}4} < Z < \frac{3{,}6 - 3{,}5}{0{,}4}$

$-0{,}5 < Z < 0{,}25$

$$\begin{aligned} P(-0{,}5 < Z < 0{,}25) &= P(Z < 0{,}25) - P(-0{,}5 < Z) \\ &= P(Z < 0{,}25) - (1 - P(Z < 0{,}5)) \\ &= 0{,}59871 - (1 - 0{,}69146) \\ &= 0{,}29017 \end{aligned}$$

La probabilidad es 0,29, aproximadamente.

b. Una empresa de baterías para notebook fabrica productos cuya vida útil, en días, tiene una distribución normal con media de 540 días y desviación estándar de 32 días.

- ¿Cuál es la probabilidad de adquirir una batería que dure más de 570 días?

$$Z = \frac{570 - 540}{32} = 0{,}9375$$

$$\begin{aligned} P(Z > 0{,}94) &= 1 - P(Z < 0{,}94) \\ &= 1 - 0{,}82639 \\ &= 0{,}17361 \end{aligned}$$

La probabilidad es 0,17, aproximadamente.

- ¿Qué porcentaje de las baterías tiene una vida útil inferior a 500 días?

$$Z = \frac{500 - 540}{32} = -1{,}25$$

$$\begin{aligned} P(Z < -1{,}25) &= 1 - P(Z < 1{,}25) \\ &= 1 - 0{,}89435 \\ &= 0{,}10565 \end{aligned}$$

El porcentaje de baterías es 11 %, aproximadamente.

- ¿Qué porcentaje de las baterías tiene vida útil mayor que 500 días y menor que 580 días?

$$500 < X < 580$$

$$\frac{500 - 540}{32} < Z < \frac{580 - 540}{32}$$

$$-1{,}25 < Z < 1{,}25$$

$$\begin{aligned} P(-1{,}25 < Z < 1{,}25) &= 2 \cdot P(Z < 1{,}25) - 1 \\ &= 2 \cdot 0{,}89435 - 1 \\ &= 1{,}7887 - 1 \\ &= 0{,}7887 \end{aligned}$$

El porcentaje de baterías es 79 %, aproximadamente.

Reflexiona y responde

- ¿Qué fue lo más destacado que aprendiste sobre la distribución estudiada?
- ¿Qué aplicaciones en tu entorno inmediato podría tener esta distribución?