Ecuación cuadrática

1. Determina la ecuación cuadrática que tiene por solución los siguientes pares de números. Observa el ejemplo.

Si $x_1 = -3$ y $x_2 = 8$, entonces:

$(x - x_1)(x - x_2) = (x - (-3))(x - 8) = (x + 3)(x - 8) = x^2 - 5x - 24$

Por lo tanto, $x_1 = -3$ y $x_2 = 8$ son soluciones de $x^2 - 5x - 24 = 0$.

a. $x_1 = -1$ y $x_2 = -2$

$(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$

La ecuación es $x^2 + 3x + 2 = 0$.

b. $x_1 = -6$ y $x_2 = -3$

$(x + 6)(x + 3) = x^2 + 9x + 18$

La ecuación es $x^2 + 9x + 18 = 0$.

c. $x_1 = 4$ y $x_2 = -5$

$(x - 4)(x + 5) = x^2 + x - 20$

La ecuación es $x^2 + x - 20 = 0$.

d. $x_1 = 10$ y $x_2 = 12$

$(x - 10)(x - 12) = x^2 - 22x + 120$

La ecuación es $x^2 - 22x + 120 = 0$.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando el método de factorización:

a. $a^2 + 3a + 2 = 0$

$(a + 1)(a + 2) = 0$

$a_1 = -1$; $a_2 = -2$

b. $z^2 + 11z + 28 = 0$

$(z + 7)(z + 4) = 0$

$z_1 = -4$; $z_2 = -7$

c. $(7 + x)^2 + (7 - x)^2 = 130$

$2x^2 = 32$

$x^2 = 16$

$x_1 = 4$; $x_2 = -4$

d. $4m + 12 = m^2$

$(m - 6)(m + 2) = 0$

$m_1 = 6$; $m_2 = -2$

e. $x(x + 4) = 1 + 4(2 - x)$

$(x + 9)(x - 1) = 0$

$x_1 = -9$; $x_2 = 1$

f. $(x - 2)(x + 5) = 9x - 10$

$x(x - 6) = 0$

$x_1 = 0$; $x_2 = 6$

3. Analiza la factorización y explica lo que se realizó.

$$3x^2 + 10x - 8 = 0 \qquad / \cdot \frac{3}{3}$$

$$\frac{9x^2 + 10 \cdot 3x - 24}{3} = 0$$

$$\frac{(3x + 12)(3x - 2)}{3} = 0$$

$$\frac{3(x + 4)(3x - 2)}{3} = 0$$

$$(x + 4)(3x - 2) = 0$$

$x + 4 = 0$, o bien, $3x - 2 = 0$

$x_1 = -4$ o $x_2 = \frac{2}{3}$

Se multiplicó cada término de la ecuación por 1, en este caso expresado como $\frac{3}{3}$, de modo de poder factorizar el numerador.

Luego, se factorizó unos de los factores para simplificar el denominador y finalmente se resolvió la ecuación por el método de factorización.

4. Utiliza el método anterior para factorizar cada ecuación.

a. $5x^2 - 6x + 1 = 0$

$(x - 1)(5x - 1) = 0$

$x_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{5}$

b. $3x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 1)(3x + 2) = 0$

$x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{2}{3}$

c. $6x^2 + 29x - 5 = 0$

$(x + 5)(6x - 1) = 0$

$x_1 = -5$; $x_2 = \frac{1}{6}$

d. $2x^2 - 11x + 15 = 0$

$(x - 3)(2x - 5) = 0$

$x_1 = 3$; $x_2 = \frac{5}{2}$

5. Resuelve los siguientes problemas:

a. La expresión $\frac{n(n+1)}{2}$ permite calcular la adición de los primeros n números naturales. Si el resultado es 15, ¿cuántos números se consideraron en la suma?

$15 = \frac{n(n+1)}{2}$

$n^2 + n - 30 = 0$ $\qquad n_1 = 5$; $n_2 = -6$

Se consideraron 5 números.

b. La cantidad de diagonales que se pueden trazar en un polígono convexo de n lados está dada por la expresión $\frac{n(n-3)}{2}$. Si un polígono tiene 5 diagonales, ¿cuántos lados tiene?

$5 = \frac{n(n-3)}{2}$

$n^2 - 3n - 10 = 0$ $\qquad n_1 = 5$; $n_2 = -2$

Tiene 5 lados.

6. Resuelve las siguientes ecuaciones completando cuadrados:

a. $y^2 + y - 4 = 0$

$y_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{2}$; $y_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{17}}{2}$

b. $m^2 = 9 - 2m$

$m_1 = -1 + \sqrt{10}$; $m_2 = -1 - \sqrt{10}$

c. $x^2 + 11x + 2 = 0$

$x_1 = \dfrac{-11 + \sqrt{113}}{2}$; $x_2 = \dfrac{-11 - \sqrt{113}}{2}$

d. $x^2 + \dfrac{3x}{5} = 2$

$x_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{209}}{10}$; $x_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{209}}{10}$

e. $k^2 + 4k = 6$

$k_1 = -2 + \sqrt{10}$; $k_2 = -2 - \sqrt{10}$

f. $a^2 + 8a = 3$

$a_1 = -4 + \sqrt{19}$; $a_2 = -4 - \sqrt{19}$

g. $p^2 + \dfrac{p}{2} - \dfrac{1}{3} = 0$

$p_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{57}}{12}$; $p_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{57}}{12}$

h. $x(x + 11) - 2(x + 1) = 0$

$p_1 = \dfrac{-9 + \sqrt{89}}{2}$; $p_2 = \dfrac{-9 - \sqrt{89}}{2}$

7. Identifica el (los) error(es) cometido(s) y luego, corrígelo(s).

$$x^2 + 15x - 4 = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{15}{2}x - 4 = 0$$ → Multiplicas y divides por 2 en el segundo término.

$$x^2 + 2 \cdot \frac{15}{2}x = 4$$ → Sumas 4 en ambos lados de la ecuación.

$$x^2 + 2 \cdot \frac{15}{2}x + \frac{15}{2} = 4 + \frac{15}{2}$$ → Sumas $\dfrac{15}{2}$ en ambos lados de la ecuación.

$$\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 = \frac{23}{2}$$ → Factorizas el cuadrado de binomio.

$$x + \frac{15}{2} = \pm\sqrt{\frac{23}{2}}$$ → Calculas la raíz cuadrada.

$$x_1 = -\frac{15}{2} + \sqrt{\frac{23}{2}} \text{ y } x_2 = -\frac{15}{2} - \sqrt{\frac{23}{2}}$$ → Obtienes las soluciones.

El error está en que se debe sumar $\left(\dfrac{15}{2}\right)^2$ en vez de $\dfrac{15}{2}$. El resultado de la ecuación es $x_1 = \dfrac{-15 + \sqrt{241}}{2}$; $x_2 = \dfrac{-15 - \sqrt{241}}{2}$.

8. Resuelve utilizando la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.

a. $2x^2 - 3x - 11 = 0$

$x_1 = \dfrac{3 + \sqrt{97}}{4}$; $x_2 = \dfrac{3 - \sqrt{97}}{4}$

b. $\dfrac{k}{5}\left(\dfrac{k}{2} + \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{k}{6} = 0$

$k_1 = 0$; $k_2 = -\dfrac{7}{3}$

c. $0{,}1m^2 - 1{,}3m = 1{,}5$

$m_1 = \dfrac{13 + \sqrt{229}}{2}$; $m_2 = \dfrac{13 - \sqrt{229}}{2}$

d. $4x^2 + 5x - 9 = 3x^2 + 1$

$x_1 = \dfrac{-5 + \sqrt{65}}{2}$; $x_2 = \dfrac{-5 - \sqrt{65}}{2}$

e. $-3y^2 - y + 1 = 0$

$y_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{6}$; $y_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{13}}{6}$

f. $\dfrac{14}{9} - \dfrac{z^2}{3} = 0$

$z_1 = \sqrt{\dfrac{14}{3}}$; $z_2 = -\sqrt{\dfrac{14}{3}}$

g. $4(x + 3)^2 = 2(x + 4)^2$

$x_1 = -2 + \sqrt{2}$; $x_2 = -2 - \sqrt{2}$

h. $7p^2 + 4p = 5p^2 - 1$

$p_1 = \dfrac{-2 + \sqrt{2}}{2}$; $p_2 = \dfrac{-2 - \sqrt{2}}{2}$

9. Identifica el (los) error(es) cometido(s) y luego, corrígelo(s).

a. Resolución de $2x^2 - 3x - 5 = 0$.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-9 - 40}}{4}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{31}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{31}}{2} \text{ y } x_2 = \frac{-3 - \sqrt{31}}{2}$$

Se cometen errores al remplazar el coeficiente $-b$ y al desarrollar b^2.
El resultado debe ser: $x_1 = -1$; $x_2 = \dfrac{5}{2}$

b. Resolución de $x^2 + 6x + 2 = 0$.

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 8}}{2}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{7}}{2} = -6 \pm \sqrt{7}$$

$$x_1 = -6 + \sqrt{7} \text{ y } x_2 = -6 - \sqrt{7}$$

Se simplifica mal el –6 de la fracción.
El resultado debe ser:
$x_1 = -3 + \sqrt{7}$; $x_2 = -3 - \sqrt{7}$

10. En cada caso, determina el o los valores de k para que se cumpla lo pedido.

a. $x^2 + 3x + k = 0$ tenga una solución real.

$9 - 4 \cdot 1 \cdot k = 0$

$k = \frac{9}{4}$

b. $kx^2 - x + 1 = 0$ tenga 2 soluciones reales y distintas.

$1 - 4 \cdot k \cdot 1 > 0$

$k < \frac{1}{4}$

c. $x^2 + 4x + 4k = 0$ no tenga soluciones reales.

$16 - 4 \cdot 1 \cdot 4k < 0$

$k > 1$

d. $(x + k)^2 - k = 0$ tenga 2 soluciones reales y distintas.

$4k^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k^2 - k) > 0$

$k > 0$

11. Resuelve los siguientes problemas:

a. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja (paralelepípedo) para que su capacidad sea de 200 cm³?

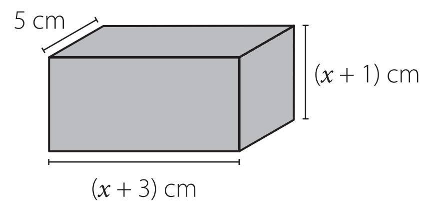
$5(x + 3)(x + 1) = 200$

$5(x^2 + 4x + 3) = 200$

$5x^2 + 20x - 185 = 0$

$x_1 = -2 + \sqrt{41}$; $x_2 = -2 - \sqrt{41}$

Las dimensiones deben ser 5 cm; 5,4 cm y 7,4 cm, aproximadamente.



b. Geometría La superficie pintada de la figura es 20π cm². ¿Cuánto debe medir el radio de la circunferencia de mayor tamaño?

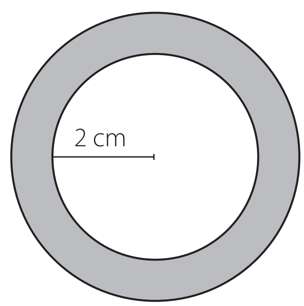
$\pi r^2 - \pi \cdot 2^2 = 20\pi$

$\pi r^2 - 4\pi = 20\pi$

$r^2 = 24$

$r = \sqrt{24}$

El radio debe medir $\sqrt{24}$ cm.



c. Calcula dos números naturales impares consecutivos cuyo producto sea 783.

$(2n - 1)(2n + 1) = 783$

$4n^2 = 784$

$n = 14$

$2n - 1 = 27$ $\quad$ $2n + 1 = 29$

Los números son 27 y 29.