Logaritmos: propiedades

1. Analiza la siguiente información y responde lo solicitado.

El carbono 14 es un isótopo radioactivo usado para determinar la edad de materiales orgánicos antiguos a través de un método conocido como datación por radiocarbono. La cantidad de carbono 14 que queda después de t años se modela con la fórmula:

$$N(t) = N_0 \bullet e^{-ktt}$$

Donde: $N(t)$ es la cantidad de carbono 14 al tiempo t.

N_0 es la cantidad inicial.

k es la constante de desintegración.

e es la base del logaritmo natural.

a. Si inicialmente hay 1 000 gramos de carbono 14 en un fósil de madera y después de 5 730 años solo quedan 500 gramos, ¿cuál es la constante de desintegración k?

b. Formula una expresión para determinar el tiempo t transcurrido en función de la cantidad N de carbono 14 presente.

c. Si la cantidad N de carbono 14 llega a ser cero, ¿qué implica esto para el tiempo t? ¿Es posible que N sea cero? Justifica tu respuesta.

2. Dadas las igualdades

$$\log 2 = a \qquad \log 3 = b \qquad \log 5 = c$$

expresa los siguientes logaritmos en términos de a, b y c:

a. $\log\left(\dfrac{72}{\sqrt{18}}\right)$

b. $\log \sqrt[3]{\dfrac{15}{32}}$

c. $\log \dfrac{12}{25} + 3\log\sqrt{30}$

3. Dadas las igualdades.

$$\log \sqrt{m} = p \qquad \log b^5 = q$$

Si b y m son números reales positivos, determina el valor de $\log \sqrt{bm}$.

Logaritmos: propiedades

1. Analiza la siguiente información y responde lo solicitado.

El carbono 14 es un isótopo radioactivo usado para determinar la edad de materiales orgánicos antiguos a través de un método conocido como datación por radiocarbono. La cantidad de carbono 14 que queda después de t años se modela con la fórmula:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-ktt}$$

Donde: $N(t)$ es la cantidad de carbono 14 al tiempo t.

N_0 es la cantidad inicial.

k es la constante de desintegración.

e es la base del logaritmo natural.

a. Si inicialmente hay 1 000 gramos de carbono 14 en un fósil de madera y después de 5 730 años solo quedan 500 gramos, ¿cuál es la constante de desintegración k?

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-kt} \Rightarrow k = -\frac{ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)}{t} \Rightarrow k = -\frac{ln\left(\frac{500}{1000}\right)}{5\,730} = -\frac{ln\,0{,}5}{5\,730} = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$$

La constante de desintegración es $k = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$.

b. Formula una expresión para determinar el tiempo t transcurrido en función de la cantidad N de carbono 14 presente.

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-kt} \Rightarrow t = -\frac{ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)}{k}$$

La fórmula que del tiempo en función de la cantidad de carbono 14 es: $t = -\frac{ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)}{k}$

c. Si la cantidad N de carbono 14 llega a ser cero, ¿qué implica esto para el tiempo t? ¿Es posible que N sea cero? Justifica tu respuesta.

Respuesta variada. Se muestra un ejemplo. Implicaría que todo el carbono 14 se ha descompuesto, es decir que ha pasado un tiempo infinito. Esto no es posible porque siempre habrá una cantidad muy pequeña de carbono 14 presente. Además, en términos matemáticos, no podemos calcular un logaritmo de cero, lo que significa que N no puede ser cero en la fórmula.

2. Dadas las igualdades

$$\log 2 = a \qquad \log 3 = b \qquad \log 5 = c$$

expresa los siguientes logaritmos en términos de a, b y c:

a. $\log\left(\dfrac{72}{\sqrt{18}}\right)$

Como $\dfrac{72}{\sqrt{18}} = \dfrac{2^3 \cdot 3^2}{\sqrt{2^1 \cdot 3^2}} = 2^2 = 4 \Rightarrow \log\left(\dfrac{72}{\sqrt{18}}\right) = \log(4) = 2 \cdot \log 2$

$= 2 \cdot a$

b. $\log \sqrt[3]{\dfrac{15}{32}}$

Como $\sqrt[3]{\dfrac{15}{32}} = \sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot 5}{2^5}} = \dfrac{\sqrt[3]{3 \cdot 5}}{\sqrt[3]{2^5}} = \dfrac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}}{2} \Rightarrow \log \sqrt[3]{\dfrac{15}{32}} = \log\left(\dfrac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{3} \log 3 + \dfrac{1}{3} \log 5 - \log 2$

$= \dfrac{1}{3} b + \dfrac{1}{3} c - a$

c. $\log \dfrac{12}{25} + 3\log\sqrt{30}$

Como $\dfrac{12}{25} = \dfrac{2^2 \cdot 3}{5^2}$ y también $\sqrt{30} \Rightarrow (2 \cdot 3 \cdot 5)^{\frac{1}{2}}$, entonces:

$\log \dfrac{12}{25} + 3\log\sqrt{30} = \log\left(\dfrac{2^2 \cdot 3}{5^2}\right) + 3\log(2 \cdot 3 \cdot 5)^{\frac{1}{2}}$

$= 2\log 2 + \log 3 - 2\log 5 + \dfrac{3}{2}(\log 2 + \log 3 + \log 5)$

$= 2a + b - 2c + \dfrac{3}{2} a + \dfrac{3}{2} b + \dfrac{3}{2} c = \dfrac{7}{2} a + \dfrac{5}{2} b - \dfrac{1}{2} c$

3. Dadas las igualdades.

$$\log \sqrt{m} = p \qquad \log b^5 = q$$

Si b y m son números reales positivos, determina el valor de $\log \sqrt{bm}$.

Utilizando las propiedades de los logaritmos tenemos que:

$\log \sqrt{m} = p \Rightarrow \dfrac{1}{2} \log m = p \Rightarrow \log m = 2p$

$\log b^5 = q \Rightarrow 5\log b = q \Rightarrow \log b = \dfrac{q}{5}$

Entonces, $\log\sqrt{bm} = \dfrac{1}{2} \log bm = \dfrac{1}{2} (\log b + \log m)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{q}{5} + 2p\right) = \dfrac{q}{10} + p$