Ficha 11

Caracterizando modelos logarítmicos

Nombre: ______________________________ **Curso** __________

1. Observa las funciones y realiza lo solicitado.

$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_5 (x)$ $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \log_{\frac{1}{5}} (x)$

a. Confecciona una tabla con al menos 5 valores para f y g. Utiliza una calculadora científica en línea conectándote a *https://bit.ly/3yH3Ch7*. (Para utilizar una base distinta a 10 o e, puedes utilizar las propiedades del logaritmo).

Por ejemplo:

x	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$	1	5	25
$f(x)$	$\log_5\left(\frac{1}{25}\right) = -2$	$\log_5\left(\frac{1}{5}\right) = -1$	$\log_5(1) = 0$	$\log_5(5) = 1$	$\log_5(25) = 2$
$g(x)$	$\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{25}\right) = 2$	$\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right) = 1$	$\log_{\frac{1}{5}}(1) = 0$	$\log_{\frac{1}{5}}(5) = -1$	$\log_{\frac{1}{5}}(25) = -2$

b. ¿Para qué valor se cumple que $f(x) = g(x)$?

Para $x = 1$.

c. Grafica en un mismo plano cartesiano ambas funciones accediendo a un *software* matemático en *https://bit.ly/2N8oBRy*. ¿Cuál función es creciente y cuál es decreciente?

Dada la base de cada función se tiene que f es creciente y g es decreciente.

2. Analiza la situación.

La sonoridad es medida en decibeles (dB). Para realizar esta medición, son necesarios los logaritmos y una máquina parecida a la que se muestra en la imagen. La medición del volumen v está dada por la función logarítmica:

$$v(x) = 10 \cdot \log\,(x \cdot 10^{12})$$

En que x representa la intensidad del sonido medida en watts/m².

Archivo editorial.

a. Calcula $v(10^{-5})$, $v(10^{-10})$ y $v(10^{9})$. Utiliza una calculadora científica en línea conectándote a *https://bit.ly/3yH3Ch7*.

$v(10^{-5}) = 10\log\,(10^{-5} \cdot 10^{12})$
$= 10\log\,(10^{7})$
$= 10 \cdot 7$
$= 70$

$v(10^{-10}) = 10\log\,(10^{-10} \cdot 10^{12})$
$= 10\log\,(10^{2})$
$= 10 \cdot 2$
$= 20$

$v(10^{9}) = 10\log(10^{9} \cdot 10^{12})$
$= 10\log\,(10^{21})$
$= 10 \cdot 21$
$= 210$

Los valores son 70 dB, 20 dB y 210 dB, respectivamente.

b. ¿Se puede calcular $v(-10^{-9})$?, ¿por qué?

No, el dominio no incluye valores negativos para una función logarítmica.

c. ¿Cuál es el dominio de la función?

Los números reales positivos.

d. Calcula el valor de la función v para 5 valores distintos de x.

Por ejemplo:

x	10	10^2	10^3	10^4	10^5
$v(x)$	$10\log\,(10 \cdot 10^{12})$ $= 10\log\,(10^{13})$ $= 10 \cdot 13$ $= 130$	$10\log\,(10^2 \cdot 10^{12})$ $= 10\log\,(10^{14})$ $= 10 \cdot 14$ $= 140$	$10\log\,(10^3 \cdot 10^{12})$ $= 10\log\,(10^{15})$ $= 10 \cdot 15$ $= 150$	$10\log\,(10^4 \cdot 10^{12})$ $= 10\log\,(10^{16})$ $= 10 \cdot 16$ $= 160$	$10\log\,(10^5 \cdot 10^{12})$ $= 10\log\,(10^{17})$ $= 10 \cdot 17$ $= 170$

e. Aproximadamente, para obtener la medición de sonido que se muestra en la imagen, ¿cuál debe ser el valor de x?

Para $v(x) = 85{,}6$ se tiene:

$$85{,}6 = 10\log\,(x \cdot 10^{12}) \rightarrow 8{,}56 = \log\,(x \cdot 10^{12}) \rightarrow 10^{8{,}56} = x \cdot 10^{12} \rightarrow x = \frac{10^{8{,}56}}{10^{12}} = 10^{-3{,}44} \approx 0{,}00036\ldots$$

El valor de x debe ser 0,00036 watts/m², aproximadamente.

f. El umbral auditivo es la mínima intensidad de sonido que podemos oír y corresponde a $z = 10^{-12}$ watts/m². ¿Cuál es el valor de es $v(z)$?, ¿cómo lo interpretas?

Para una intensidad de $z = 10^{-12}$ watts/m² se tiene:

$$v(z) = 10\log(z \cdot 10^{12}) \rightarrow v(10^{-12}) = 10\log(10^{-12} \cdot 10^{12}) = 10\log(1) = 10 \cdot 0 = 0$$

El valor es $v(z) = 0$ y corresponde a un volumen de 0 dB.

g. En una sala de clases se registra una intensidad de sonido de 10 watts/m². ¿Cuál es el volumen del ruido de la sala de clases?

Para $x = 10$ se tiene:

$$v(10) = 10\log(10 \cdot 10^{12}) = 10\log(10^{13}) = 10 \cdot 13 = 130$$

El volumen es de 130 dB.

3. Analiza la situación y responde.

En un laboratorio, un cultivo de bacterias crece según la función $N(t) = 0{,}25 \cdot e^{t^2}$, donde t es el tiempo en horas y $e \approx 2{,}7182$.

a. Considerando que la función es biyectiva, ¿cuál es la función inversa?

Para determinar la inversa, se despeja t:

$$N = 0{,}25 \cdot e^{t^2} \rightarrow \frac{N}{0{,}25} = e^{t^2} \rightarrow 4N = e^{t^2} \rightarrow \ln(4N) = t^2 \rightarrow \sqrt{\ln(4N)} = t$$

La función inversa de N es $t(N) = \sqrt{\ln(4N)}$.

b. Calcula el tiempo necesario para que haya aproximadamente 2 025 bacterias.

Para $N = 2025$ se tiene:

$$t(2025) = \sqrt{\ln(4 \cdot 2025)} = \sqrt{\ln(8100)} \approx 2{,}999\ldots$$

El tiempo es de 3 h, aproximadamente.

Reflexiona y responde

- ¿Qué contenidos que ya sabías aplicaste para desarrollar estas actividades?
- ¿Cuál fue la principal dificultad que tuviste?, ¿cómo la superaste?