Logaritmos: propiedades

1. En el mundo de las finanzas, la fórmula del interés compuesto se representa como:

$$V = V_0 \cdot (1 + r)^t$$

Donde: V es el valor final.

V_0 es el valor inicial.

r es la tasa de interés.

t es el periodo.

a. Determina una fórmula para determinar la tasa de interés r.

b. Determina una fórmula para determinar el periodo t.

2. La población de un territorio se puede modelar con la relación:

$$P = P_0 \cdot (1 + r)^t$$

donde: P es la población después de t períodos.

P_0 es la población inicial.

r es el cambio porcentual por período.

a. Si la población inicial es 100 000 habitantes y después de 3 períodos la población es 120 000 habitantes, determina el cambio porcentual por período.

b. Si la población inicial es 300 000 habitantes y después de cierto tiempo alcanza los 600 000 habitantes con un crecimiento anual del 25 %, determina el número de períodos (años) transcurridos.

3. Junto a un compañero analicen la Ley de enfriamiento de Newton y respondan:

La ley de enfriamiento de Newton establece que la tasa de cambio de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura ambiente. Considera la siguiente fórmula para la temperatura $T(t)$ de una taza de café en un entorno con temperatura ambiente:

$$T(t) = T_0 + (T_i - T_0)\, e^{-kt}$$

donde: T_i es la temperatura inicial de la taza de café.
T_0 es la temperatura ambiente.
t es el tiempo en minutos.
$k = 0{,}19$ constante de enfriamiento.

a. Si la temperatura inicial del café es 80 °C y la temperatura ambiente es 15 °C, ¿cuál es la temperatura del café después de 20 minutos?

b. Si la temperatura inicial es 80 °C y después de algunos minutos la temperatura disminuye a 60 °C, ¿cuántos minutos han transcurrido?

Logaritmos: propiedades

1. En el mundo de las finanzas, la fórmula del interés compuesto se representa como:

$$V = V_0 \cdot (1 + r)^t$$

Donde: V es el valor final.

V_0 es el valor inicial.

r es la tasa de interés.

t es el periodo.

a. Determina una fórmula para determinar la tasa de interés r.

$$V = V_0 \cdot (1 + r)^t \Rightarrow r = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{1}{t}} - 1 \Rightarrow r = \sqrt[t]{\frac{V}{V_0}} - 1$$

b. Determina una fórmula para determinar el periodo t.

$$V = V_0 \cdot (1 + r)^t \Rightarrow t = log_t\left(\frac{V}{V_0}\right) - 1 \Rightarrow r = \frac{log\frac{V}{V_0}}{log\,(1 + r)}$$

2. La población de un territorio se puede modelar con la relación:

$$P = P_0 \cdot (1 + r)^t$$

donde: P es la población después de t períodos.

P_0 es la población inicial.

r es el cambio porcentual por período.

a. Si la población inicial es 100 000 habitantes y después de 3 períodos la población es 120 000 habitantes, determina el cambio porcentual por período.

$$P = P_0 \cdot (1 + r)^t \Rightarrow 120\,000 = 100\,000 \cdot (1 + r)^3$$

$$\frac{120\,000}{100\,000} = (1 + r)^3 \Rightarrow 1{,}2 = (1 + r)^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{1{,}2} - 1$$

$$r = 0{,}0627$$

Por lo tanto, el cambio porcentual por periodo es aproximadamente 6,27 %.

b. Si la población inicial es 300 000 habitantes y después de cierto tiempo alcanza los 600 000 habitantes con un crecimiento anual del 25 %, determina el número de períodos (años) transcurridos.

$$P = P_0 \cdot (1 + r)^t \Rightarrow t = \frac{log\frac{P}{P_0}}{log(1 + r)} \Rightarrow t = \frac{log\frac{600\,000}{300\,000}}{log(1 + 0{,}25)} = \frac{log(2)}{log(1{,}25)} \approx 3{,}1$$

Transcurrieron aproximadamente 3,1 años.

3. Junto a un compañero analicen la Ley de enfriamiento de Newton y respondan:

La ley de enfriamiento de Newton establece que la tasa de cambio de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura ambiente. Considera la siguiente fórmula para la temperatura $T(t)$ de una taza de café en un entorno con temperatura ambiente:

$$T(t) = T_0 + (T_i - T_0)\, e^{-kt}$$

donde: T_i es la temperatura inicial de la taza de café.
T_0 es la temperatura ambiente.
t es el tiempo en minutos.
$k = 0{,}19$ constante de enfriamiento.

a. Si la temperatura inicial del café es 80 °C y la temperatura ambiente es 15 °C, ¿cuál es la temperatura del café después de 20 minutos?

$$\begin{aligned} T(t) &= 15 + (80 - 15)\, e^{-0{,}19 \cdot 20} \\ &= 15 + 65e^{-3{,}8} \\ &= 16{,}45 \end{aligned}$$

Al cabo de 20 minutos, la temperatura del café es de 16,45 °C.

b. Si la temperatura inicial es 80 °C y después de algunos minutos la temperatura disminuye a 60 °C, ¿cuántos minutos han transcurrido?

$$60 = 15 + (80 - 15)e^{-0{,}19 \cdot t}$$

$$45 = 65e^{-0{,}19 \cdot t}$$

$$\frac{45}{65} = e^{-0{,}19 \cdot t} \Rightarrow e^{-0{,}19 \cdot t} = \frac{9}{13} \Rightarrow ln\,(e^{-0{,}19 \cdot t}) = ln\,\frac{9}{13}$$

$$\Rightarrow -0{,}19 \cdot t = ln\,\frac{9}{13}$$

$$t = ln\,\frac{9}{13} : 0{,}19$$

$$t \approx 1{,}94$$

Transcurrieron aproximadamente 1,94 minutos.