

Inversas de las funciones lineal, afín y cuadrática

1. Lee la información y completa.

En la función cuadrática definida por $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, puede definirse en dos tramos diferentes de su dominio. Estos quedan definidos por las coordenadas del vértice de la parábola que representa a f en el plano cartesiano. A las funciones así definidas las llamaremos f_1 y f_2 , ambas biyectivas, de manera que:

$$\bullet f_1: \left[-\infty, -\frac{b}{2a} \right] \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{R}, \text{ y su función inversa es } f_1^{-1}(x) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-x)}}{2a}.$$

$$\bullet f_2: \left[-\frac{b}{2a}, +\infty \right] \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{R}, \text{ y su función inversa es } f_2^{-1}(x) = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c-x)}}{2a}.$$

El recorrido de la función varía dependiendo del valor del coeficiente a :

$$\bullet \text{ Si } a > 0, \text{ el recorrido es } R = \left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), +\infty \right).$$

$$\bullet \text{ Si } a < 0, \text{ el recorrido es } R = \left(-\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right).$$

Las gráficas de f_1 y f_1^{-1} y las de f_2 y f_2^{-1} son el reflejo una de la otra respecto de la recta $y = x$.

2. Determina la inversa de la función cuadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ definida como $f(x) = x^2 - 6x + 9$.

Considera los siguientes tramos de separación de su dominio:

a. Tramo 1: $]-\infty, 3]$

$$\begin{aligned} f_1^{-1}(x) &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-x)}}{2a} \\ &= \frac{6 + \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (9-x)}}{2 \cdot (1)} \\ &= \frac{6 + \sqrt{36 - 4 \cdot (9-x)}}{2} \\ &= \frac{6 + 2\sqrt{x}}{2} = 3 + \sqrt{x} \end{aligned}$$

b. Tramo 2: $[3, +\infty[$

$$\begin{aligned} f_2^{-1}(x) &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c-x)}}{2a} \\ &= \frac{6 - \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (9-x)}}{2 \cdot (1)} \\ &= \frac{6 - \sqrt{36 - 4 \cdot (9-x)}}{2} \\ &= \frac{6 - 2\sqrt{x}}{2} = 3 - \sqrt{x} \end{aligned}$$