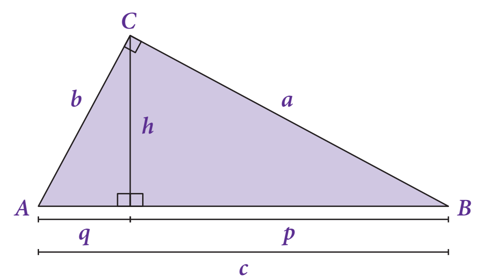
Teorema de Euclides

1. Considera las medidas dadas en cada caso y calcula los valores solicitados.



a. $q = 4$ cm y $h = 6$ cm

$p = 36 : 4 = 9$
$a^2 = 13 \cdot 9 = 117 \rightarrow a = \sqrt{117}$
$b^2 = 13 \cdot 4 = 52 \rightarrow b = \sqrt{52}$

$a = \boxed{\sqrt{117}}$ cm, $b = \boxed{\sqrt{52}}$ cm, $p = \boxed{9}$ cm.

b. $b = 8$ cm y $q = 4$ cm

$h^2 = 64 - 16 = 48$
$p = 48 : 4 = 12$
$c = 12 + 4 = 16$
$a^2 = 16 \cdot 12 = 192 \rightarrow a = 8\sqrt{3}$

$a = \boxed{8\sqrt{3}}$ cm, $c = \boxed{16}$ cm, $p = \boxed{12}$ cm.

c. $b = 12$ cm y $c = 16$ cm

$q = 144 : 16 = 9$ $a^2 = 7 \cdot 16 = 112 \rightarrow a = 4\sqrt{7}$
$p = 16 - 9 = 7$
$h^2 = 9 \cdot 7 = 63 \rightarrow h = 3\sqrt{7}$

$a = \boxed{4\sqrt{7}}$ cm, $p = \boxed{7}$ cm, $h = \boxed{3\sqrt{7}}$ cm.

d. $p = 4$ cm y $q = 12$ cm

$c = 4 + 12 = 16$
$a^2 = 16 \cdot 4 = 64 \rightarrow a = 8$
$b^2 = 16 \cdot 12 = 192 \rightarrow b = 8\sqrt{3}$

$a = \boxed{8}$ cm, $b = \boxed{8\sqrt{3}}$ cm, $c = \boxed{16}$ cm.

e. $q = 3$ cm y $b = 9$ cm

$h^2 = 81 - 9 = 72 \rightarrow h = 6\sqrt{2}$
$p = 72 : 3 = 24$
$c = 24 + 3 = 27$
$a^2 = 27 \cdot 24 = 648 \rightarrow a = 18\sqrt{2}$

$a = \boxed{18\sqrt{2}}$ cm, $c = \boxed{27}$ cm, $h = \boxed{6\sqrt{2}}$ cm.

f. $a = 6$ cm y $c = 12$ cm

$p = 36 : 12 = 3$
$q = 12 - 3 = 9$
$h^2 = 3 \cdot 9 = 27 \rightarrow h = 3\sqrt{3}$

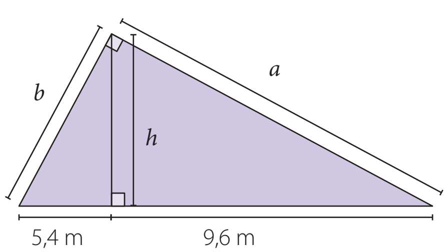
$p = \boxed{3}$ cm, $q = \boxed{9}$ cm, $h = \boxed{3\sqrt{3}}$ cm.

g. $a = 12$ cm y $p = 9{,}6$ cm

$h^2 = 144 - 92{,}16 = 51{,}84$
$q = 51{,}84 : 9{,}6 = 5{,}4$
$c = 9{,}6 + 5{,}4 = 15$
$b^2 = 15 \cdot 5{,}4 = 81 \rightarrow b = 9$

$b = \boxed{9}$ cm, $c = \boxed{15}$ cm, $q = \boxed{5{,}4}$ cm.

2. Calcula el perímetro del siguiente triángulo:



La base del triángulo mide 5,4 cm + 9,6 cm = 15 cm.
$a^2 = 15 \cdot 9{,}6 = 144 \rightarrow a = 12$ cm
$b^2 = 15 \cdot 5{,}4 = 81 \rightarrow b = 9$ cm
Entonces, el perímetro del triángulo es 15 cm + 12 cm + 9 cm = 36 cm.

3. Determina si las afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

a. F El teorema de Euclides se aplica a todo tipo de triángulos sobre la altura h que se traza desde uno de los vértices del triángulo al lado opuesto a dicho vértice.

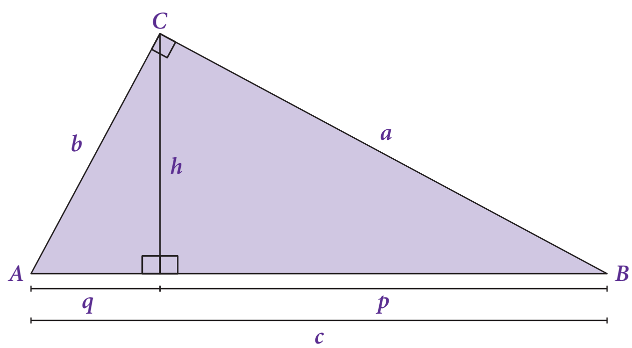
b. V El teorema de Euclides aplicado a los catetos de un triángulo establece que el cuadrado del cateto de un triángulo es equivalente al producto de su proyección sobre la hipotenusa del triángulo con la medida de la hipotenusa.

c. V En un triángulo que cumple con las condiciones del teorema de Euclides se generan 3 triángulos semejantes con la división que produce la altura trazada sobre el vértice del ángulo recto.

d. V En un triángulo isósceles rectángulo, cuando se traza la altura desde el ángulo recto, las medidas que la altura determina sobre la base son equivalentes.

e. F En un triángulo rectángulo, cuando se traza la altura desde el ángulo recto, esta siempre es mayor que cualquiera de los catetos del triángulo.

4. Evalúa cuáles de las siguientes igualdades son correctas (✔) y cuáles no lo son (✘). Considera los teoremas de Euclides en el triángulo rectángulo ABC.



a. ✘ $b^2 = c \cdot p$

b. ✔ $a^2 = p \cdot c$

c. ✔ $h^2 = q \cdot p$

d. ✔ $c^2 - b^2 = a^2$

e. ✔ $h^2 + p^2 = a$

f. ✘ $b = h^2 \cdot q$

g. ✘ $c^2 \cdot a^2 = q^2 \cdot p^2$

h. ✘ $b = q \cdot c$

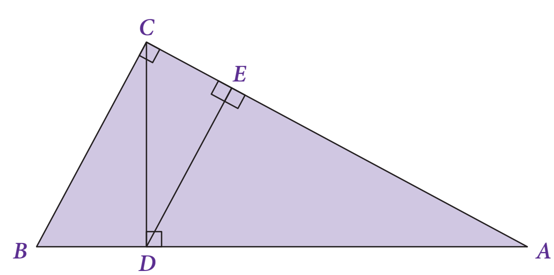
i. ✘ $a = q \cdot p$

5. ¿En cuáles pares de triángulos semejantes se puede aplicar el teorema de Euclides en la siguiente figura?

Se puede aplicar en los siguientes pares de triángulos:

• ΔBCD y ΔCAD

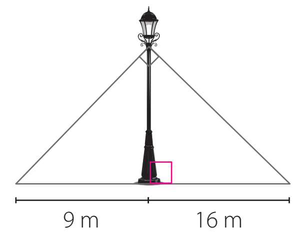
• ΔCDE y ΔDAE



6. Resuelvan los siguientes problemas:

a. Dos cables tensos atados al suelo sujetan desde su extremo superior a un poste formando un ángulo recto, como se representa en la figura. ¿Cuál es la longitud total de los cables?

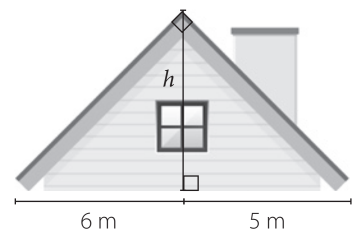
La distancia entre los cables en el suelo es 9 m + 16 m = 25 m.
Sean las longitudes de los cables a y b. Entonces, se tiene que:
$a^2 = 25 \cdot 9 = 225 \rightarrow a = 15$
$b^2 = 25 \cdot 16 = 400 \rightarrow b = 20$
Entonces, la longitud total de los cables es 15 m + 20 m = 35 m.



b. En la imagen se representa un techo que forma un ángulo recto. Si la altura h divide la horizontal de la fachada de la casa en 6 m y 5 m, respectivamente, ¿cuál es la altura máxima del techo? ¿Cuál es la longitud de la fachada frontal del techo?

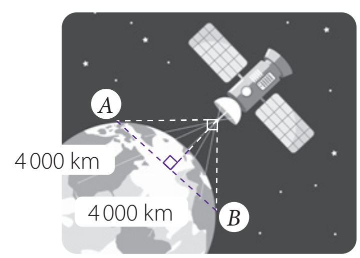
$h^2 = 6 \cdot 5 = 30 \rightarrow h = \sqrt{30}$.
La altura máxima es $\sqrt{30}$ m.

Sean las longitudes de la fachada frontal del techo a y b. Entonces:
$a^2 = 11 \cdot 6 = 66 \rightarrow a = \sqrt{66}$
$b^2 = 11 \cdot 5 = 55 \rightarrow b = \sqrt{55}$
La longitud de la fachada frontal del techo es $(\sqrt{66} + \sqrt{55})$ m.



c. Un satélite está ubicado en una posición tal que las señales de mayor amplitud sobre el globo terráqueo forman un ángulo recto, como se muestra en la imagen. ¿Cuál es la distancia aproximada que recorre la señal que llega a los extremos identificados como A y B en la imagen?

Llamando a y b a las distancias a los puntos extremos A y B, se tiene lo siguiente:
$a^2 = 4\,000 \cdot 8\,000 = 32\,000\,000 \rightarrow a \approx 5\,657$
$b^2 = 4\,000 \cdot 8\,000 = 32\,000\,000 \rightarrow b \approx 5\,657$
La señal recorre, aproximadamente, 5 657 km para llegar al punto A y 5 657 km para llegar al punto B.



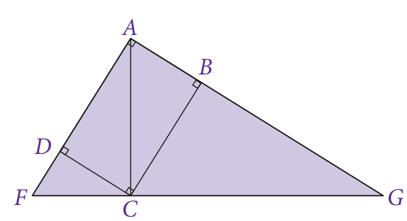
7. Apliquen el teorema de Euclides para realizar la siguiente demostración:

Demuestren que el área del rectángulo $ABCD$ en la imagen es $\sqrt{DF \cdot AD \cdot AB \cdot BG}$ si se sabe que $\overline{AC}$ es perpendicular a $\overline{FG}$.

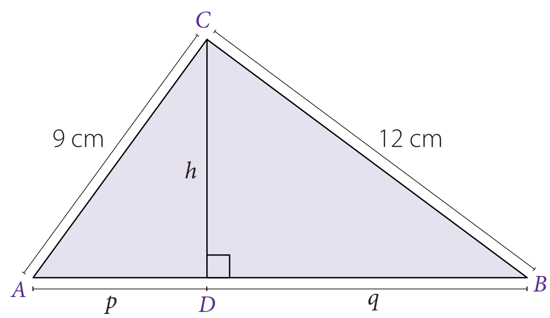
El área del rectángulo es $DC \cdot CB$. Por teorema de Euclides de la altura y las proyecciones en la hipotenusa; en los triángulos FCA y GCA, respectivamente, se tiene que:

$$CB^2 = CB \cdot BA \qquad DC^2 = DF \cdot AD$$
$$CB = \sqrt{GB \cdot BA} \qquad DC = \sqrt{DF \cdot AD}$$

Remplazamos en la expresión original de área y queda demostrado.



A partir del ΔABC, rectángulo en C, encierra la alternativa correcta de las preguntas 8 a la 15.



8. ¿Cuánto mide el segmento AB?

A. 5 cm

B. 10 cm

C. 15 cm

D. 20 cm

9. ¿Cuál es la medida de la proyección q del cateto CB?

A. 0,8 cm

B. 1,25 cm

C. 9,6 cm

D. 15 cm

10. ¿Qué expresión permite calcular la proyección de p?

A. $9^2 = p + AB$

B. $9^2 = p \cdot AB$

C. $9^2 = p - AB$

D. $9^2 = p : AB$

11. ¿Cuál de las expresiones permite calcular la medida de la altura h?

A. $h = 1 + q$

B. $h^2 = p + q$

C. $h^2 = p \cdot q$

D. $h = \sqrt{p^2 + q^2}$

12. ¿Cuál es la medida de la altura h?

A. 7,2 cm

B. 4,8 cm

C. 5,4 cm

D. 12,7 cm

13. ¿Cuál es el perímetro del ΔDBC?

A. 24,6 cm

B. 28,8 cm

C. 36 cm

D. 38,4 cm

14. ¿Cuál es el área del ΔCAD?

A. 19,44 cm^2

B. 38,88 cm^2

C. 67,5 cm^2

D. 349,92 cm^2

15. ¿Cuál es el valor de la razón de semejanza entre la medida de los lados de los triángulos CAD y BCD?

A. 0,45

B. 0,5

C. 1

D. 0,75

16. Completa el crucigrama a partir de las siguientes definiciones relacionadas con la semejanza que has estudiado:

Horizontal

3. Figura formada por dos líneas que se intersecan en un punto.
4. Criterio de semejanza de triángulos que involucra dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos.
7. El lado más largo de un triángulo rectángulo, opuesto al ángulo recto.
11. Matemático griego conocido como el padre de la geometría
12. Segmento perpendicular desde un vértice a la base opuesta en un triángulo.

.

Vertical

1. Relación entre figuras que tienen la misma forma pero diferentes tamaños.
2. Creador del teorema geométricos fundamentales relacionados con la semejanza de triángulos y la proporcionalidad.
5. Criterio de semejanza de triángulos basado en la proporcionalidad de los tres pares de lados correspondientes.
6. Criterio de semejanza de triángulos donde dos ángulos correspondientes son congruentes.
8. Relación constante entre las medidas de lados correspondientes de figuras semejantes.
9. Relación matemática que indica cuántas veces una cantidad está contenida en otra.
10. Cada uno de los dos lados más cortos de un triángulo rectángulo.