Inversas de las funciones lineal, afín y cuadrática

1. Calcula la función inversa de las siguientes funciones y luego comprueba que se cumple $f^{-1}(f(x)) = x$. Considera que todas las funciones son biyectivas.

a. $f\colon \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right[\to \left[-\frac{25}{4}, +\infty\right[, f(x) = x^2 + 5x$

$f^{-1}(x) = \dfrac{-5 + \sqrt{(4x+25)}}{2}$

$f^{-1}(x^2 + 5x) = \dfrac{-5 + \sqrt{(4x^2 + 5x) + 25}}{2}$

$= \dfrac{-5 + \sqrt{4x^2 + 20x + 25}}{2} = \dfrac{-5 + 2x + 5}{2} = x$

b. $f\colon [1, +\infty[\to [-\infty, 4[, f(x) = -x^2 + 2x + 3$

$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{(4 - x)}$

$f^{-1}(-x^2 + 2x + 3) = 1 + \sqrt{(4-(-x^2 + 2x + 3))}$

$= 1 + \sqrt{(x^2 - 2x + 1)}$

$= 1 + x - 1 = x$

2. Verifica si la función $g(x)$ es la inversa de la función $f(x)$. De no serlo, determina $f^{-1}(x)$.

a. $f\colon \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, f(x) = x^2$, y $g(x) = \sqrt{x}$.

Sí es la inversa, ya que: $y = x^2 \Rightarrow \sqrt{y} = x$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

b. $f\colon \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[\to \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[, f(x) = x^2 - 3x + 2$, y $g(x) = \dfrac{3 + \sqrt{(1 + 4x)}}{2}$.

Sí es la inversa, ya que: $f^{-1}(x) = \dfrac{3 + \sqrt{9 - 4(2 - x)}}{2} = \dfrac{3 + \sqrt{(9 - 8 + 4x)}}{2}$

$= \dfrac{3 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$

3. Identifica el error cometido en el siguiente desarrollo. Luego, corrígelo.

La función inversa de $f\colon \mathbb{R}^- \cup \{0\} \to \mathbb{R}^- \cup \{0\}$, definida por $f(x) = -2x^2$, es $f^{-1}(x) = -\sqrt{\dfrac{x}{2}}$, ya que al calcular $f(f^{-1}(x))$ se obtiene x.

El error está en que la inversa de $f(x)$ es $f^{-1}(x) = -\sqrt{\dfrac{-x}{2}}$.