Logaritmos: propiedades

1. Considera las siguientes igualdades:

$$\log 2 = a \qquad \log 3 = b \qquad \log 5 = c$$

Expresa los siguientes logaritmos en términos de a, b y c:

a. $\log\left(\frac{72}{\sqrt{18}}\right)$

Como $\frac{72}{\sqrt{18}} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{\sqrt{2^1 \cdot 3^2}} = 2^2 = 4 \Rightarrow \log\left(\frac{72}{\sqrt{18}}\right) = \log 4 = 2 \cdot \log 2$

$= 2 \cdot a$

b. $\log \sqrt[3]{\frac{15}{32}}$

Como $\sqrt[3]{\frac{15}{32}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5}{2^5}} = \frac{\sqrt[3]{3 \cdot 5}}{\sqrt[3]{2^5}} = \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}}{2} \Rightarrow \log \sqrt[3]{\frac{15}{32}} = \log\left(\frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}}{2}\right)$

$= \frac{1}{3} \log 3 + \frac{1}{3} \log 5 - \log 2$

$= \frac{1}{3} b + \frac{1}{3} c - a$

c. $\log \frac{12}{25} + 3\log\sqrt{30}$

Como $\frac{12}{25} = \frac{2^2 \cdot 3}{5^2}$ y también $\sqrt{30} \Rightarrow (2 \cdot 3 \cdot 5)^{\frac{1}{2}}$, entonces:

$\log \frac{12}{25} + 3\log\sqrt{30} = \log\left(\frac{2^2 \cdot 3}{5^2}\right) + 3\log\,(2 \cdot 3 \cdot 5)^{\frac{1}{2}}$

$= 2\log 2 + \log 3 - 2\log 5 + \frac{3}{2}(\log 2 + \log 3 + \log 5)$

$= 2a + b - 2c + \frac{3}{2} a + \frac{3}{2} b + \frac{3}{2} c = \frac{7}{2} a + \frac{5}{2} b - \frac{1}{2} c$

2. Considera las siguientes igualdades:

$$\log \sqrt{m} = p \qquad \log b^5 = q$$

Si b y m son números reales positivos, determina el valor de $\log \sqrt{bm}$.

Utilizando las propiedades de los logaritmos tenemos que:

$\log \sqrt{m} = p \Rightarrow \frac{1}{2} \log m = p \Rightarrow \log m = 2p$

$\log b^5 = q \Rightarrow 5\log b = q \Rightarrow \log b = \frac{q}{5}$

Entonces, $\log\sqrt{bm} = \frac{1}{2} \log bm = \frac{1}{2} (\log b + \log m)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{q}{5} + 2p\right) = \frac{q}{10} + p$