Logaritmos: propiedades

1. Calcula los siguientes logaritmos aplicando sus propiedades:

a. $\log\sqrt{100\,000}$

$\frac{1}{2}\log 100\,000 = \frac{5}{2}$

b. $\log_5\left(\frac{\sqrt{5}}{25}\right)$

$\frac{1}{2}\log_5 5 - \log_5 25 = -\frac{3}{2}$

c. $\log_2(\sqrt[3]{128}\cdot 16)$

$\frac{1}{3}\log_2 128 + \log_2 16 = \frac{19}{3}$

d. $\log\left(\frac{1}{10^{-2}}\right)$

$\log 1 + 2\log 10 = 2$

e. $\log_7(49\sqrt{7})$

$\log_7 49 + \frac{1}{2}\log_7 7 = \frac{5}{2}$

f. $\log_3\sqrt{\frac{243}{27}}$

$\frac{1}{2}\log_3 243 - \frac{1}{2}\log_3 27 = 1$

2. Aplica las propiedades de los logaritmos y calcula el valor de cada expresión.

a. $\log_{(x+y)}(x^2 + 2xy + y^2)$

$2\log_{(x+y)}(x+y) = 2$

b. $\log_{ab}\sqrt{ab}$

$\frac{1}{2}\log_{ab}(ab) = \frac{1}{2}$

3. Calcula aplicando la propiedad de cambio de base.

a. $\log_8\sqrt{2}$

$\frac{\log_2\sqrt{2}}{\log_2 8} = \frac{1}{6}$

b. $\log_{100} 1\,000$

$\frac{\log_{10} 1\,000}{\log_{10} 100} = \frac{3}{2}$

c. $\log_{16} 32$

$\frac{\log_2 32}{\log_2 16} = \frac{5}{4}$

d. $\log_{\sqrt{125}} 25$

$\frac{\log_5 25}{\log_5\sqrt{125}} = \frac{4}{3}$

e. $\log_{\frac{1}{27}} 243$

$\frac{\log_3 243}{\log_3\left(\frac{1}{27}\right)} = -\frac{5}{3}$

f. $\log_{\frac{1}{9}} 729$

$\frac{\log_3 729}{\log_3\left(\frac{1}{9}\right)} = -3$

g. $\log_{16} 64$

$\frac{\log_2 64}{\log_2 16} = \frac{3}{2}$

h. $\log_{\sqrt{7}}\frac{1}{49}$

$\frac{\log_7\left(\frac{1}{49}\right)}{\log_7\sqrt{7}} = -4$

i. $\log_4\frac{1}{1\,024}$

$\frac{\log_2\left(\frac{1}{1\,024}\right)}{\log_2 4} = -5$

4. Junto con un compañero, analiza las siguientes igualdades y discute sobre el posible error que se cometió. Luego, si es el caso, corrígelo.

a. $\log_9 100 = \dfrac{\log_{10} 100}{\log_3 9}$

Incorrecta aplicación de cambio de base.
Lo correcto es $\dfrac{\log_{10} 100}{\log_{10} 9}$.

d. $\log_y (y^2 - y) = \log_y y^2 - \log_y y$

Incorrecta aplicación del logaritmo de la diferencia.
El resultado correcto es $\log_y y + \log_y (y - 1)$.

b. $\log_a (\sqrt{a} \cdot a^2) = \log_a \sqrt{a} \cdot \log_a a^2$

La multiplicación de logaritmos
se separa sumando: $\log_a \sqrt{a} + \log_a a^2$.

e. $\dfrac{\log 20}{\log 7} = \log \dfrac{20}{7}$

Incorrecta aplicación del cociente de logaritmos.
Al aplicar cambio de base, se obtiene $\log_7 20$.

c. $\sqrt{\log_9 27} = \dfrac{\log_9 27}{2}$

La raíz debe calcularse de todo
el logaritmo, no solo de su argumento.
El resultado correcto es $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

f. $-\log_4 8 = \log_4 (-8)$

Incorrecta aplicación de propiedades.
El resultado correcto es $\log_4 8^{-1}$.

5. Analiza el siguiente desarrollo y escribe la propiedad que se aplicó en cada paso:

Propiedad

$\log \dfrac{10x^2}{\sqrt{y}} = \log 10x^2 - \log \sqrt{y}$ → Logaritmo de un cociente.

$= \log 10 + \log x^2 - \log \sqrt{y}$ → Logaritmo de un producto.

$= 1 + 2\log x - \dfrac{\log y}{2}$ → Logaritmo de una potencia y de una raíz.

6. Aplica el procedimiento de la actividad anterior y desarrolla cada expresión.

a. $\log_a \sqrt{5x^3}$

$\dfrac{\log_a 5 + 3\log_a x}{2}$

c. $\log \dfrac{abc}{100}$

$\log a + \log b + \log c - 2$

e. $\log 6(x^2 - y^2)$

$\log 6 + \log (x + y) + \log (x - y)$

b. $\log_b \dfrac{6xy}{z^3}$

$\log_b 6 + \log_b x + \log_b y - 3\log_b z$

d. $\log_b \sqrt[3]{\dfrac{4a}{5b}}$

$\dfrac{\log_b 4 + \log_b a - \log_a 5 - 1}{3}$

f. $\log \dfrac{9x^2 - 6x + 1}{x^2 - x - 1}$

$2\log (3x - 1) - \log (x^2 - x - 1)$

7. Junto con dos compañeros, explica cómo podrían calcular aproximadamente el valor de log 337 500, sabiendo que log 2 ≈ 0,301, log 3 ≈ 0,477 y log 5 ≈ 0,699.

$\log(2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5) = 2\log 2 + 3\log 3 + 5\log 5 \approx 5{,}528$

8. Si log 9 ≈ 0,95; log 2 ≈ 0,3 y log 4 ≈ 0,6, calcula el valor aproximado de:

a. log 8

$3\log 2 = 0{,}9$

b. log 36

$2\log(3 \cdot 2) = 1{,}56$

c. log 81

$4\log 3 = 1{,}91$

d. log 0,5

$\log 1 - \log 2 = -0{,}3$

e. log 2,25

$2\log\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}35$

f. log 1,125

$2\log 3 - 3\log 2 = 0{,}05$

9. Analiza la situación y resuelve.

> Denisse y Matías tienen como tarea obtener en la calculadora el valor de $\log_5 12$. Matías dice que es imposible, porque, por más que busca en la calculadora, no encuentra la función para ingresar el logaritmo con esa base y argumento; mientras que Denisse, más optimista, insiste en idear una estrategia utilizando la función **log** disponible en el teclado.

a. ¿Qué les sugerirías a estos dos amigos para determinar el logaritmo buscado? Explica.

Utilizar propiedad cambio de base. Por ejemplo, podrían utilizar base 10 y determinar con la calculadora el cociente entre log 12 y log 5.

b. Calcula el valor de los siguientes logaritmos. Aplica la estrategia sugerida en la actividad anterior, utiliza una calculadora y aproxima los resultados por redondeo a la cifra de las milésimas.

- $\log_6 21 =$ 1,699
- $\log_3 41 =$ 3,38
- $\log_8 10 =$ 1,107
- $-\log_{0,2} 3 =$ 0,683
- $-\log_{0,3} 2 =$ 0,576
- $-\log_{1,2} 9 =$ −12,051
- $\log_2 15 =$ 3,907
- $\log 12 =$ 1,079
- $\log_4 0{,}4 =$ −0,661

10. Utiliza las propiedades de los logaritmos y expresa como un solo logaritmo.

a. $\log m + \log n$

$\log(mn)$

b. $\log 4 - \log 2$

$\log 2$

c. $\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{3}\log y - \frac{1}{4}\log z$

$\log\left(\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y}}{\sqrt[4]{z}}\right)$

d. $\log j - \log k - \log l$

$\log\left(\frac{j}{kl}\right)$

e. $\log m - \log n + \log p - \log r$

$\log\left(\frac{mp}{nr}\right)$

f. $\log 3 + \log 5 + \log 6$

$\log 90$

g. $\log(x + y) + \log(x - y)$

$\log(x^2 - y^2)$

h. $\frac{3}{2}\log a + \frac{5}{2}\log b$

$\log(\sqrt{a^3b^5})$

i. $\log p - \log q$

$\log\left(\frac{p}{q}\right)$

j. $\frac{1}{2}\log x - \frac{1}{3}\log y + \frac{1}{4}\log z$

$\log\left(\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{z}}{\sqrt[3]{y}}\right)$

11. Evalúa si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.

a. V Si $\log_3 x$ es igual a $\log_3 7$, se tiene que $x = 7$.

b. F La expresión $\log x + 1$ es igual a $\log(x + 1)$.

Es igual a $\log(10x)$.

c. F La expresión $\log(x^2 \cdot 10y^4)$ es igual a $2\log x + 4\log y$.

Es igual a $2\log x + 4\log y + 1$.