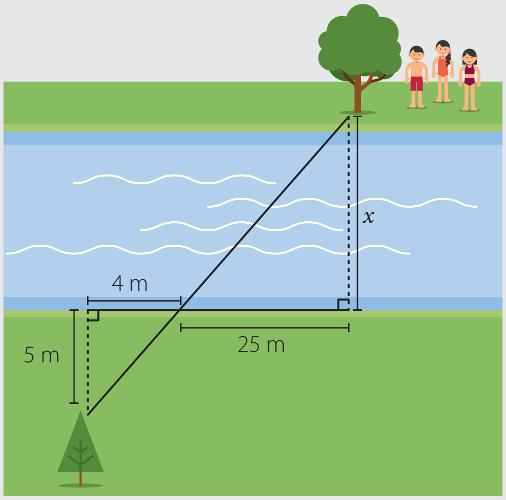
Criterios de semejanza de triángulos

1. Analiza con un compañero la siguiente situación:

Un grupo de personas quieren cruzar nadando un río de aguas no turbulentas, comenzando desde el árbol y nadando en línea recta hacia la otra orilla, como se muestra en la imagen.



Respondan.

a. ¿Son semejantes los triángulos que se forman en la imagen?, ¿por qué?

Sí, como son triángulos rectángulos y comparten un ángulo agudo opuesto por el vértice, tienen dos ángulos de igual medida, el ángulo recto y uno de los agudos, por lo tanto son semejantes por el criterio ángulo, ángulo (AA).

b. ¿Cuánto mide el ancho x del río? Muestren cómo lo calcularon.

$$\frac{x}{5} = \frac{25}{4} \rightarrow x = 5 \cdot \frac{25}{4} \Rightarrow x = 31{,}25 \text{ m}$$

c. ¿Cómo podrían comprobar su resultado?

Se puede calcular la razón de las medidas de las hipotenusas de los triángulos:

$$\frac{\sqrt{5^2 + 4^2}}{\sqrt{31{,}25^2 + 25^2}} = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{1601{,}5625}} = \sqrt{0{,}0256} = 0{,}16$$

Se calcula la razón de dos de las medidas conocidas: $\frac{4}{25} = 0{,}16$

Como las razones obtenidas son iguales, los triángulos son semejantes.

2. Demuestra utilizando semejanza de triángulos que si a un triángulo ABC se le aplica una homotecia de centro $O(0, 0)$ (puede estar dentro o fuera de la figura) y razón de homotecia $k = 2$, entonces, el triángulo imagen $A'B'C'$ es semejante al original.

Dado un triángulo ABC con vértices $A(x_A, y_A)$; $B(x_B, y_B)$ y $C(x_C, y_C)$ se le aplica una homotecia con centro $O(0, 0)$ con una razón de homotecia $k = 2$, entonces las coordenadas de la imagen son $A'(2x_A, 2y_A)$; $B'(2x_B, 2y_B)$ y $C'(2x_C, 2y_C)$.
Determinamos las longitudes de los lados de ambos triángulos:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2};$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2};$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

$$\begin{aligned} A'B' = \sqrt{(2x_B - 2x_A)^2 + (2y_B - 2y_A)^2} &= \sqrt{(4x_B - 2x_A)^2 + 4(y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{4}\sqrt{(x_B - 2x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= 2\sqrt{(x_B - 2x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= 2AB \end{aligned}$$

Analógicamente, se establecen las relaciones con las distancias $B'C'$ y $A'C'$.

Entonces $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{A'C'}{AC} = 2.$

Los triángulos son semejantes por el criterio lado, lado, lado (LLL).

3. Demuestra que si $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, entonces, la medida del segmento $\overline{AB}$ corresponde a las siguientes expresiones:

$$\frac{BC \bullet DE}{EF} \text{ y } \frac{AC \bullet DE}{DF}$$

Si $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ se pueden establecer las relaciones entre sus lados:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

1. Considerando que como $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$, se puede multiplicar DE a ambos lados de la igualdad y se tiene que:

$$\frac{AB}{DE} \bullet DE = \frac{BC}{EF} \bullet DE \Rightarrow AB = \frac{BC \bullet DE}{EF}$$

2. Considerando que como $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$, se puede multiplicar DE a ambos lados de la igualdad y se tiene que:

$$\frac{AB}{DE} \bullet DE = \frac{AC}{DF} \bullet DE \Rightarrow AB = \frac{AC \bullet DE}{DF}$$

Luego, la medida de AB equivale a las dos expresiones.