Potencias de base racional y exponente entero

1. Evalúa los siguientes desarrollos realizados por Andrea y Roberto:

Andrea:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(-\frac{8}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{8}{3}\right)^2$$
$$=\frac{8}{27}+\frac{64}{9}$$
$$=\frac{200}{27}$$

Roberto:

$$0,\overline{4}^3\bullet 2,4^{-2}=\frac{4^3}{9}\bullet\frac{5^2}{12}$$
$$=\frac{64}{9}\bullet\frac{25}{12}$$
$$=\frac{400}{27}$$

a. En cada desarrollo, encierra el error en la pizarra.

b. Corrige cada uno de los desarrollos.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{8}{27}+\frac{9}{64}$$
$$=\frac{512+243}{1\,728}$$
$$=\frac{755}{1\,728}$$

$$0,\overline{4}^3\bullet 2,4^{-2}=\left(\frac{4}{9}\right)^3\bullet\left(\frac{5}{12}\right)^2$$
$$=\frac{64}{729}\bullet\frac{25}{144}$$
$$=\frac{100}{6\,561}$$

2. Comprueba calculando que las potencias no son distributivas respecto a la adición o sustracción. Para ello, desarrolla cada parte de la no igualdad por separado y luego compáralas.

a. $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)^2\neq\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2$

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)^2=\left(\frac{11}{15}\right)^2=\frac{121}{225}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{1}{9}+\frac{4}{25}=\frac{61}{225}$$

b. $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)^2\neq\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$$\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{16}-\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$

3. Comprueba cada una de las igualdades utilizando las propiedades de las potencias. Para ello, comienza por la igualdad de la izquierda para llegar a la de la derecha.

a. $\dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}$, tal que $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{b^n}{a^n}} = 1 \cdot \frac{b^n}{a^n}$$
$$= \left(\frac{b}{a}\right)^n$$
$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$$

b. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}$, tal que $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n \cdot b^{-n}$$
$$= \left(\frac{1}{a}\right)^n \cdot b^{-n}$$
$$= \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$$

4. Calcula el valor de las siguientes expresiones considerando que $a = 2$, $b = -2$ y $c = -1$.

a. $\left(\dfrac{a}{b}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^c$

$$\left(\frac{2}{-2}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = -5$$

b. $3{,}4^b \cdot (-2{,}2)^c$

$$3{,}4^{-2} \cdot (-2{,}2)^{-1} = \left(\frac{5}{17}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{11}\right)^1 = -\frac{125}{3\,179}$$

5. Resuelve los siguientes problemas:

a. Se administran 0,8 g de un medicamento a una persona. Se sabe que, diariamente y producto de su absorción en el cuerpo humano, la masa del remedio se reduce a la mitad. ¿Cuál es la masa del remedio que queda sin absorber 5 días después de su administración?

$$0{,}8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0{,}8 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{40} = 0{,}025$$

La masa del remedio que queda sin absorber es 0,025 g.

b. Un cultivo debe ser tratado con 1,2 mililitros (mL) de insecticida por metro cuadrado, pero debido a la acción de la lluvia y el sol, la concentración de dicho insecticida en la superficie se reduce a $\dfrac{3}{5}$ de su valor inicial cada día. ¿Cuántos mililitros por metro cuadrado de insecticida quedarán en el cultivo al cabo de 3 días?

$$1{,}2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 1{,}2 \cdot \frac{27}{125} = \frac{6}{5} \cdot \frac{27}{125} = \frac{162}{625} = 0{,}2592$$

Al cabo de 3 días quedarán 0,2592 mL del insecticida por metro cuadrado de cultivo.