

# Comparación Metodos de Optimización

Sergio Acosta  
 Universidad Nacional Bogotá, Colombia  
 Email:sfacostale@unal.edu.co

**Resumen**—Las funciones RASTRIGIN, GRIEWANK y SCHWEFEL presentan diferentes niveles de dificultad en la búsqueda de sus mínimos globales. En este documento se intentan explorar y comparar la eficacia de algunos métodos de optimización sobre estas funciones.

## I. INTRODUCCIÓN

Las funciones RASTRIGIN, GRIEWANK y SCHWEFEL presentan diferentes niveles de dificultad en la búsqueda de sus mínimos globales. En este documento se intentan explorar y comparar la eficacia de algunos métodos de optimización. Entre los métodos usados están el Gradiente Descendiente, Ascenso a la Colina y Templado Simulado. En los dos últimos métodos, se implementaron variantes que usan una distribución Normal y una distribución de Ley de Potencias para generar de manera aleatoria el siguiente punto. En la sección II se hace una breve introducción a los métodos usados. Las secciones III, IV y V presentan en conjunto de gráficas correspondientes a la evaluación de diferentes métodos convencionales sobre las funciones RASTRIGIN, GRIEWANK y SCHWEFEL respectivamente. Los métodos implementados en estas secciones son: gradiente, templado simulado y ascenso de colina. En los casos en donde se aplica una distribución, fueron implementadas tanto distribuciones normales, como la distribución denominada ley de potencias. Al inicio de estas secciones se hace una introducción de la expresión de la función, la localización del mínimo global y el rango que se usó para la exploración, así mismo se relacionan los parámetros usados en cada caso. En la sección VI se muestran las gráficas de evolución de las poblaciones al ejecutar la búsqueda de los mínimos locales mediante Algoritmos Genéticos (AG). En particular el AG canónico y HAEA [2]. En la sección VII se explora el comportamiento del AG Conónico, HAEA en las funciones Deceptive 4 (40 bits) y MAXONE de 100 bits. En la sección VIII se exploran los métodos basados en números reales, en particular Estrategias Evolutivas (ES) [3] y evolución diferencial [4]. En la sección IX se construye una tabla que relaciona las medidas de centralidad y dispersión de los diferentes métodos evaluados. El documento termina con una sección de conclusiones. Los diferentes módulos de código escritos para la elaboración de este documento se encuentran disponibles en el repositorio relacionado en el ANEXO.

## II. METODOS

### II-A. Gradiente Descediente

El Gradiente Descendiente hace uso del gradiente de la función. En este método se consideran dos parámetros  $\alpha$  y  $\mu$ . El primero se denomina tasa de aprendizaje y debe ser

un valor adecuado para la función en cuestión, si se toma un valor muy pequeño el método tardará demasiado tiempo en converger, pero si se toma uno muy grande, podrá oscilar cerca del mínimo. En el caso del Gradiente Descendiente este mínimo puede ser global o local.

### II-B. Ascenso a la Colina

En este método el espacio de búsqueda es explorado a partir de un punto inicial mediante la búsqueda de puntos mejores que el actual. La generación de un nuevo candidato se hace de manera aleatoria. Para la generación del nuevo candidato es usual usar una distribución normal con una media de cero y un  $\sigma$  que determina la magnitud de los pasos durante la búsqueda. Dado que la distribución normal genera con una probabilidad muy baja valores más allá de  $\pm 2\sigma$ , otra alternativa es usar una distribución de Ley de Potencias, la cual genera valores de los extremos con más regularidad respecto a la distribución Normal. La Figura 1 muestra la expresión usada en la generación de esta distribución. Donde  $y$  es una variable uniformemente distribuida en el rango  $[0, 1]$

$$[(x_1^{n+1} - x_0^{n+1}) * y + x_0^{n+1}]^{1/(n+1)}$$

Figura 1: power-law distribution

### II-C. Templado Simulado

Sin hacer una descripción detallada del proceso físico en el cual está basado este método, la probabilidad con que un nuevo punto candidato, que NO es mejor que el actual, sustituya a este último es mayor al inicio del ciclo de templado, e ínfima al final del mismo. La Figura 2 Muestra la función central de este método. En donde  $E(x)$  es la diferencia entre el punto actual y el candidato.

$$p(x|T) = e^{-E(x)/T}$$

Figura 2: power-law distribution

Además es necesario definir un régimen de decremento de la Temperatura e incremento de pasos por cada nueva temperatura. Este régimen ha sido implementado por las siguientes funciones. Donde 0.8 y 1.2, son los factores por defecto.

```
#temperature function
tf = lambda t: 0.8*t
#iteration function
itf = lambda length: math.ceil(1.2*length)
```

#### II-D. Metodología de las Pruebas

Una vez cada método fue parametrizado se ejecutaron 30 repeticiones de 1000 iteraciones para la funciones  $R^2$ , 10000 iteraciones para las funciones  $R^{10}$ . De cada iteración se almacenaron todos los puntos evaluados durante la misma, así como los mejores puntos encontrados.

### III. RASTRIGIN

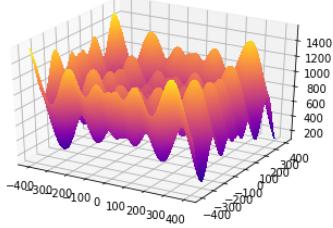


Figura 3: Funcion Rastrigin

$$f(x_1 \cdots x_n) = 10n + \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 10\cos(2\pi x_i))$$

Figura 4: Rastrigin  $f(x_1 \cdots x_n)$

$$f(x_1 \cdots x_n) = 0 \text{ at } x = (0, \dots, 0), [-5, 5]$$

Figura 5: Rastrigin Minimo Gobal e Intervalo de Evaluación

#### III-A. Power Law

III-A1. 2D: Parametros de la distribución Power Law:  
 $x0=0.5$ ,  $x1=20$ ,  $\alpha=-1.5$

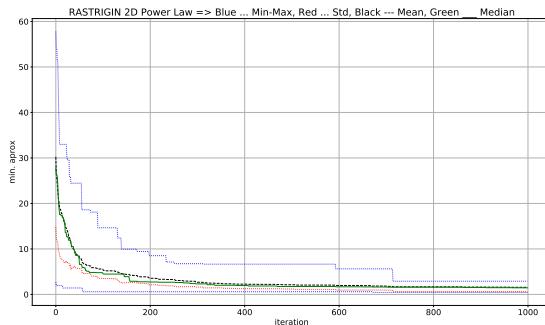


Figura 6: Curvas de Optimización  $R^2$

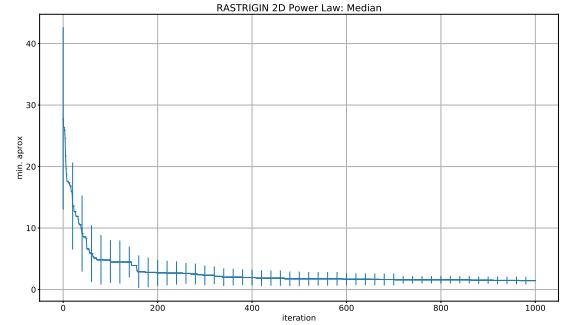


Figura 7: Curvas de Desviación Standar  $R^2$

III-A2. 10D: Parametros de la distribución Power Law:  
 $x0=0.001$ ,  $x1=1.5$ ,  $\alpha=-1.5$

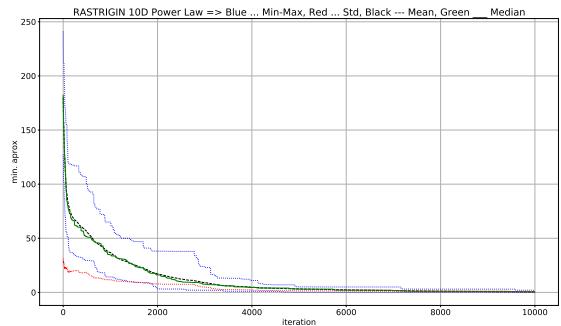


Figura 8: Curvas de Optimización  $R^{10}$

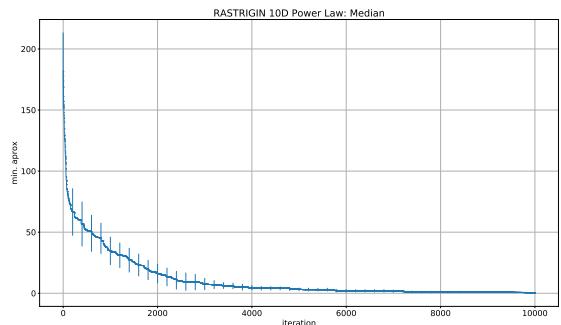


Figura 9: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$

#### III-B. Hill Climbing

III-B1. 2D:  $\sigma = 0.7$

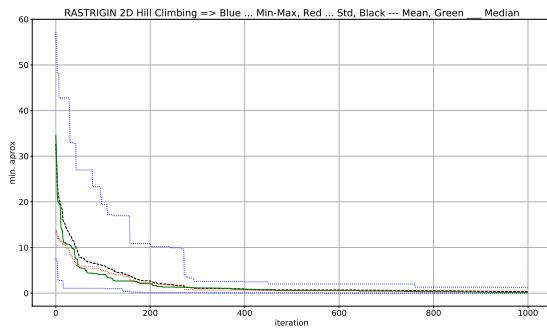


Figura 10: Curvas de Optimización  $R^2$

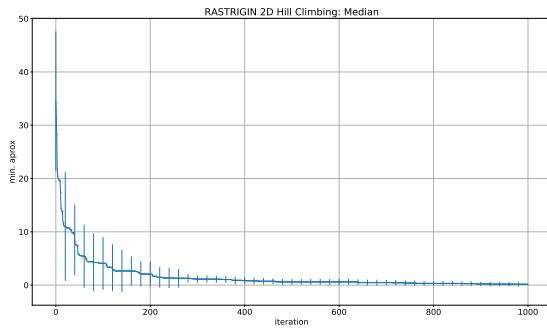


Figura 11: Curvas de Desviación Standar  $R^2$

*III-B2. 10D:  $\sigma = 0.75$*

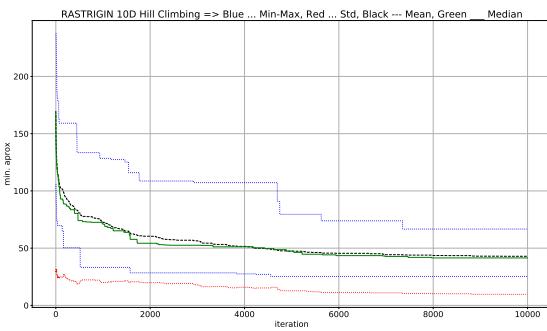


Figura 12: Curvas de Optimización  $R^{10}$

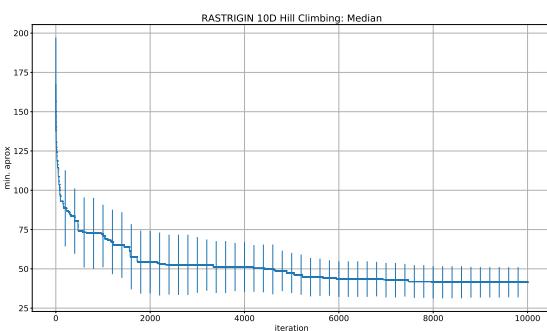


Figura 13: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$

### III-C. Gradiente

*III-C1. 2D:  $\mu=0.3$ ,  $\alpha = 0.0007$*

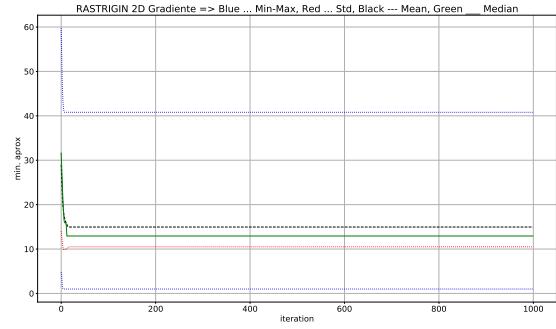


Figura 14: Curvas de Optimización  $R^2$

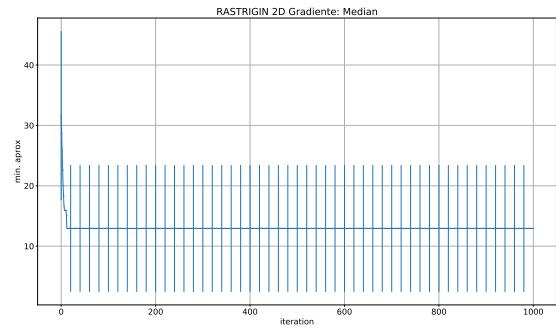


Figura 15: Curvas de Desviación Standar  $R^2$

*III-C2. 10D:  $\mu=0.0007$ ,  $\alpha = 0.00007$*

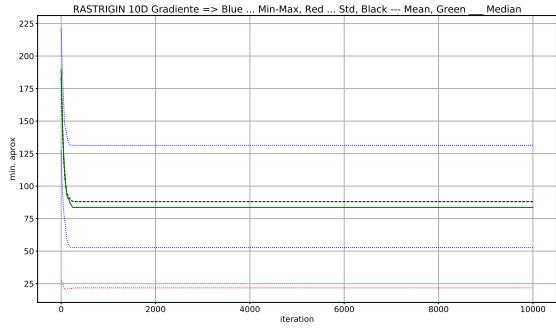


Figura 16: Curvas de Optimización  $R^{10}$

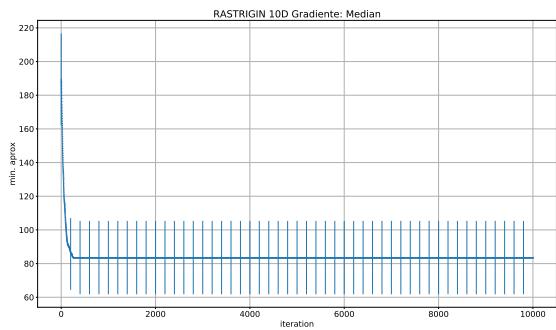


Figura 17: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$

### III-D. Tamplado Simulado + Ley de Potencias

*III-D1.* 2D:  $x_0=0.5$ ,  $x_1=20$ ,  $\alpha=-1.5$ . Temperatura e iteraciones iniciales del Templado Simulado  $T:12$ ,  $length:70$ . Factores de decremento de la temperatura e incremento de las iteraciones del Templado simulado, 0.7 y 1.2.

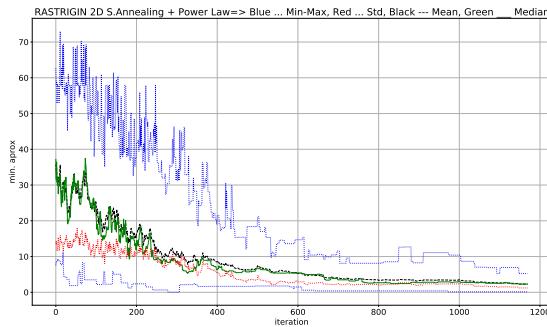


Figura 18: Curvas de Optimización  $R^2$

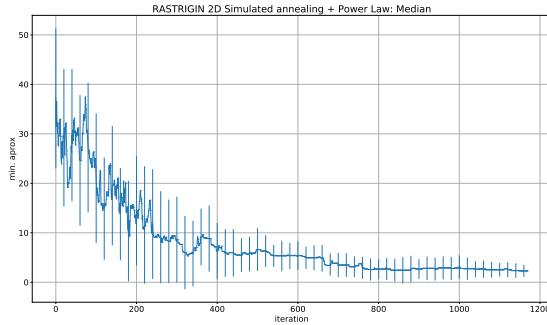


Figura 19: Curvas de Desviación Standar  $R^2$

*III-D2.* 10D:  $x_0=0.001$ ,  $x_1=1$ ,  $\alpha=-1.5$ . Temperatura e iteraciones iniciales del Templado Simulado  $T:20$ ,  $length:70$ . Factores de decremento de la temperatura e incremento de las iteraciones del Templado simulado, 0.8 y 1.2.

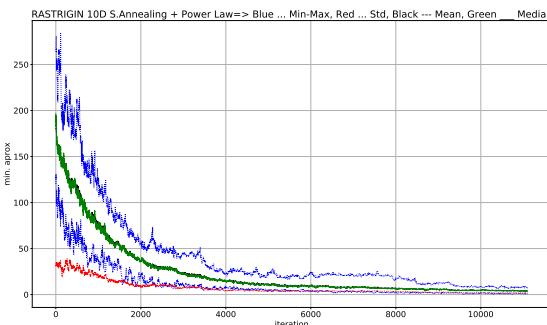


Figura 20: Curvas de Optimización  $R^{10}$

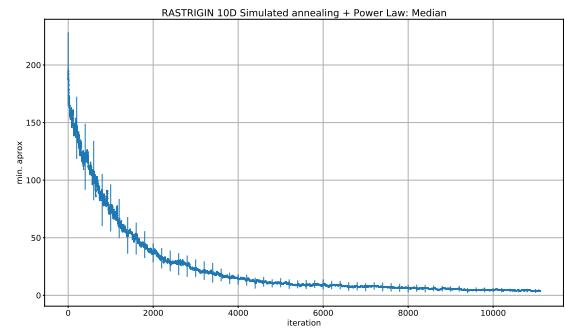


Figura 21: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$

### III-E. Tamplado Simulado + Distribución Normal

*III-E1.* 2D:  $\sigma = 0.75$ . Temperatura e iteraciones iniciales del Templado Simulado  $T:12$ ,  $length:70$ . Factores de decremento de la temperatura e incremento de las iteraciones del Templado simulado, 0.7 y 1.2.

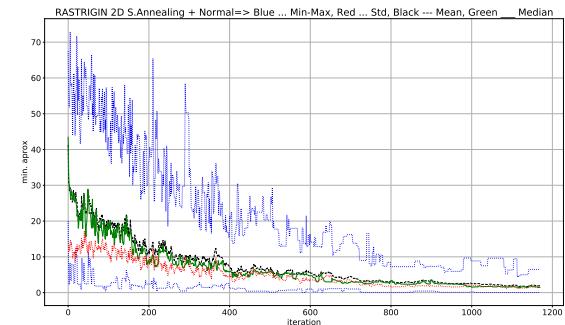


Figura 22: Curvas de Optimización  $R^2$

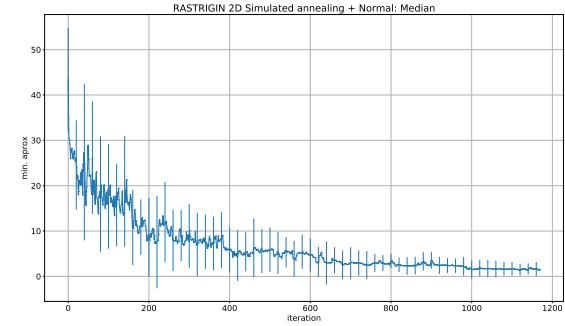
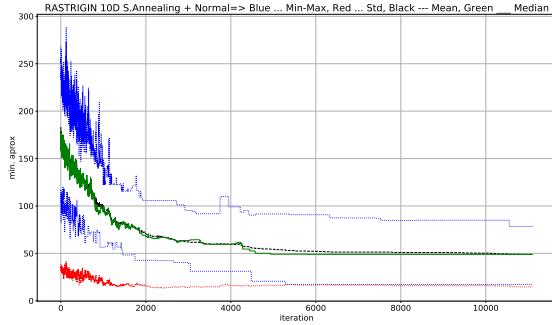
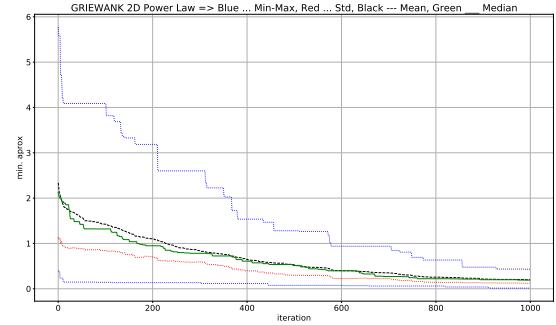
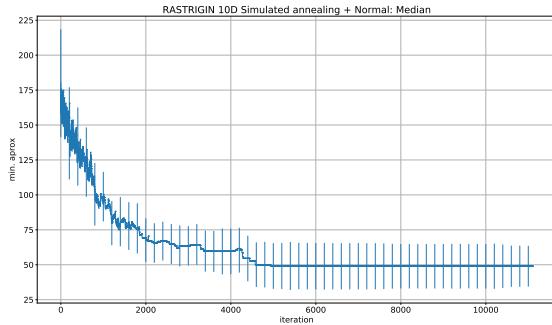
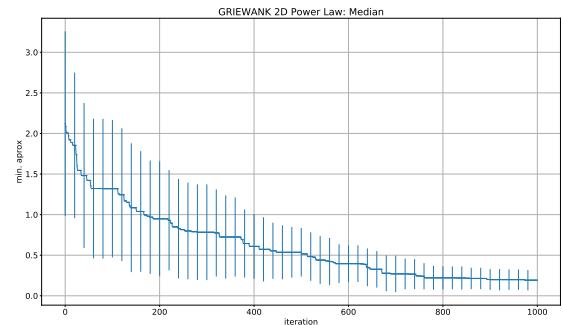


Figura 23: Curvas de Desviación Standar  $R^2$

*III-E2.* 10D:  $\sigma = 0.42345$ . Temperatura e iteraciones iniciales del Templado Simulado  $T:34$ ,  $length:70$ . Factores de decremento de la temperatura e incremento de las iteraciones del Templado simulado, 0.7 y 1.2.

Figura 24: Curvas de Optimización  $R^{10}$ Figura 29: Curvas de Optimización  $R^2$ Figura 25: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$ Figura 30: Curvas de Desviaciónn Standar  $R^2$ 

#### IV. GRIEWANK

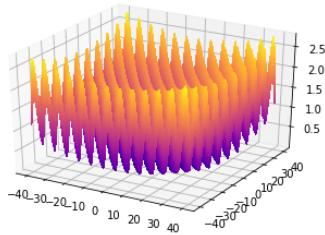


Figura 26: Funcion Griewank

$$f(x_1 \cdots x_n) = 1 + \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)$$

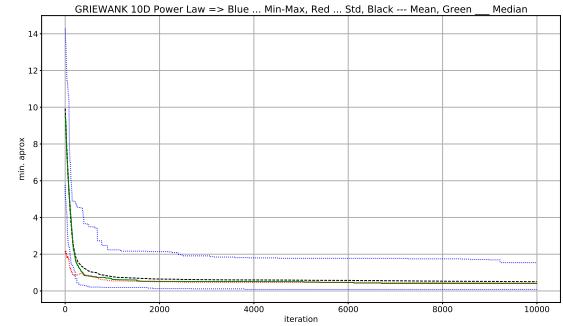
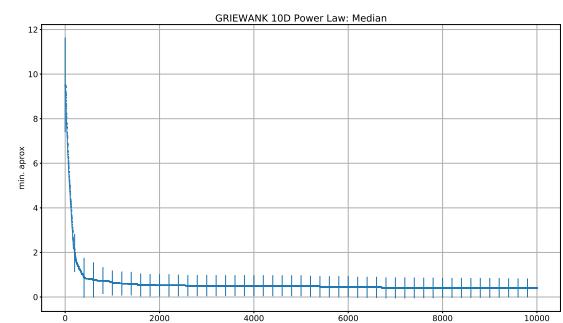
Figura 27: Griewank  $f(x_1 \cdots x_n)$ 

$$f(x_1 \cdots x_n) = 0 \text{ at } x = (0, \dots, 0), [-100, 100]$$

Figura 28: Griewank Minimo Gobal e Intervalo de Evaluación

#### IV-A. Power Law

*IV-A1. 2D: Parametros de la distribución Power Law:  $x0=1$ ,  $x1=10$ ,  $\alpha=-1.5$*

Figura 31: Curvas de Optimización  $R^{10}$ Figura 32: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$

#### IV-B. Hill Climbing

IV-B1. 2D:  $\sigma = 1.81$

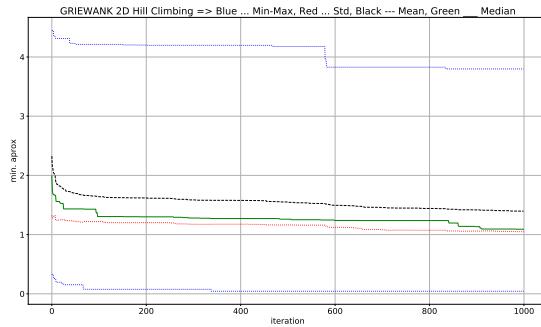


Figura 33: Curvas de Optimización  $R^2$

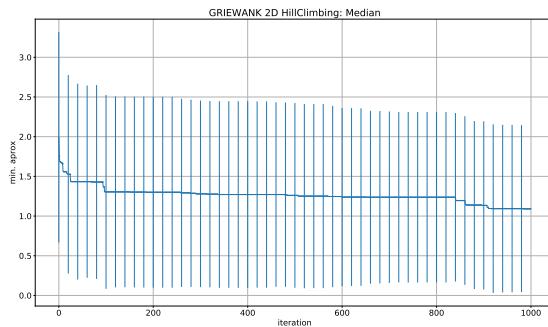


Figura 34: Curvas de Desviación Standar  $R^2$

IV-B2. 10D:  $\sigma = 5.32465478$

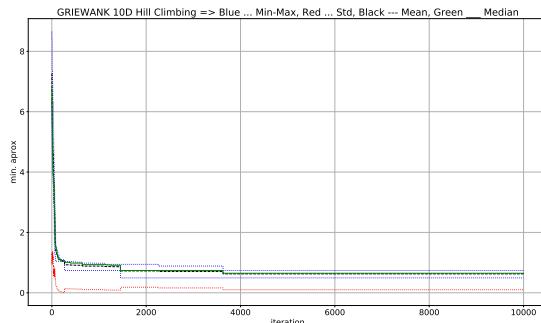


Figura 35: Curvas de Optimización  $R^{10}$

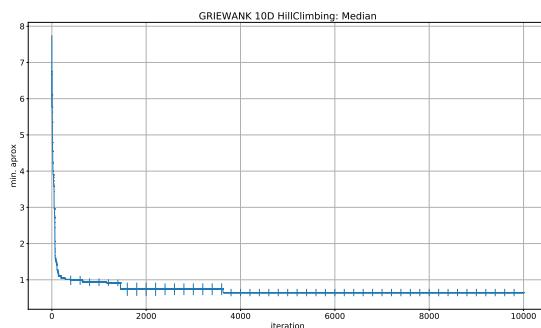


Figura 36: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$

#### IV-C. Gradiente

IV-C1. 2D:  $\mu=0.5, \alpha = 0.05$

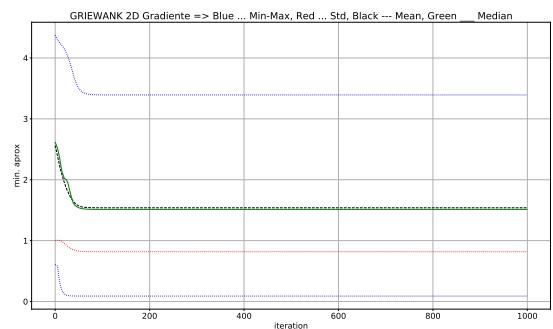


Figura 37: Curvas de Optimización  $R^2$

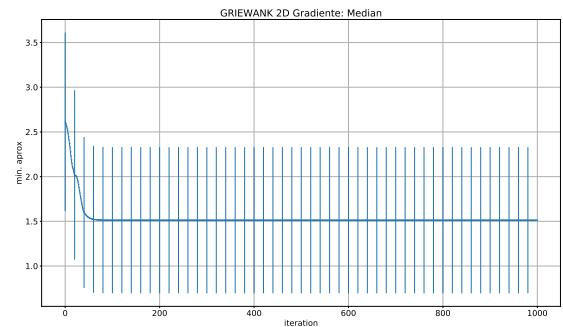


Figura 38: Curvas de Desviación Standar  $R^2$

IV-C2. 10D:  $\mu=0.01, \alpha = 0.1$

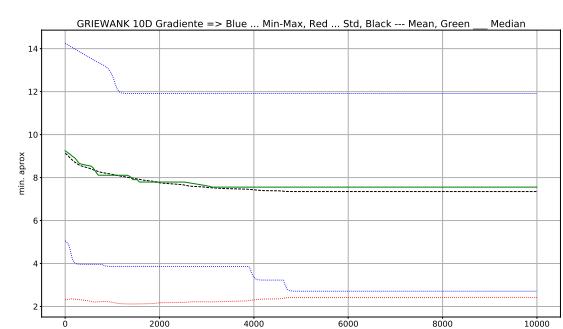
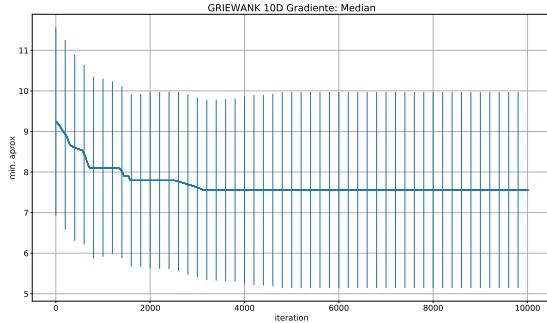
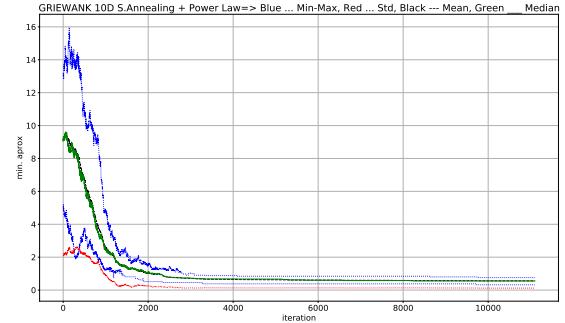
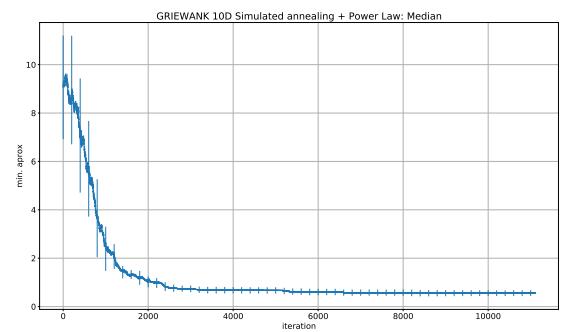
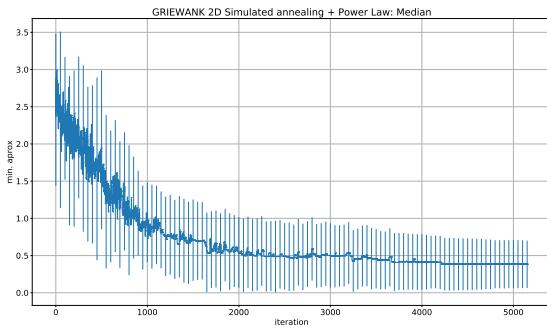


Figura 39: Curvas de Optimización  $R^{10}$

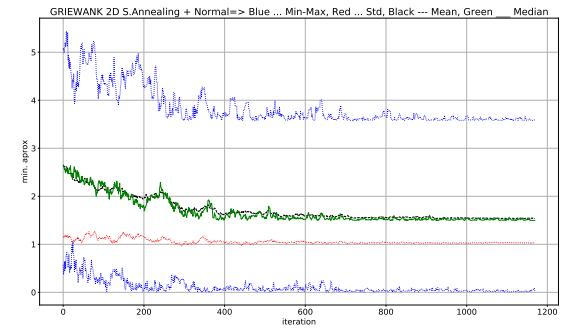
Figura 40: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$ Figura 43: Curvas de Optimización  $R^{10}$ 

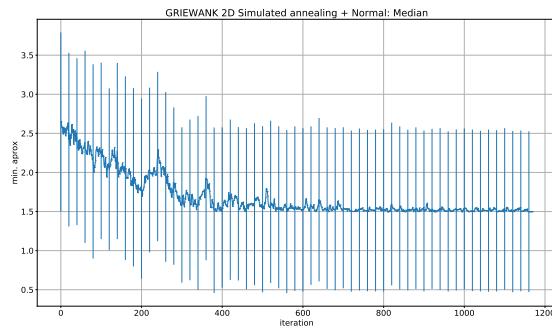
#### IV-D. Tamplado Simulado + Ley de Potencias

*IV-D1.* 2D:  $x_0=0.5$ ,  $x_1=4$ ,  $\alpha=-1.5$ . Temperatura e iteraciones iniciales del Templado Simulado  $T:2$ ,  $length:70$ . Factores de decremento de la temperatura e incremento de las iteraciones del Templado simulado, 0.7 y 1.2.

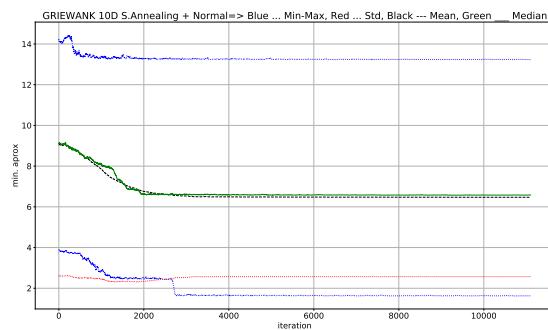
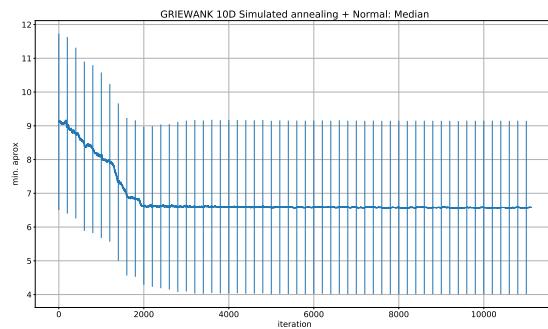
Figura 44: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$ Figura 41: Curvas de Optimización  $R^2$ Figura 42: Curvas de Desviaciónn Standar  $R^2$ 

*IV-D2.* 10D:  $x_0=0.5$ ,  $x_1=3$ ,  $\alpha=-1.5$ . Temperatura e iteraciones iniciales del Templado Simulado  $T:1.568$ ,  $length:70$ . Factores de decremento de la temperatura e incremento de las iteraciones del Templado simulado, 0.7 y 1.2.

Figura 45: Curvas de Optimización  $R^2$

Figura 46: Curvas de Desviación Standar  $R^2$ 

IV-E2. 10D:  $\sigma = 0.1234$ . Temperatura e iteraciones iniciales del Templado Simulado  $T:0.1$ ,  $length:70$ . Factores de decremento de la temperatura e incremento de las iteraciones del Templado simulado, 0.8 y 1.2.

Figura 47: Curvas de Optimización  $R^{10}$ Figura 48: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$ 

## V. SCHWEFEL

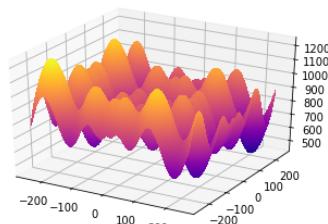


Figura 49: Funcion Schwefel

$$f(x_1 \cdots x_n) = \sum_{i=1}^n (-x_i \sin(\sqrt{|x_i|})) + \alpha \cdot n$$

$$\alpha = 418,982887$$

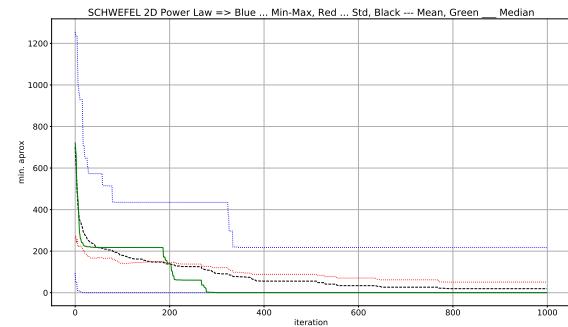
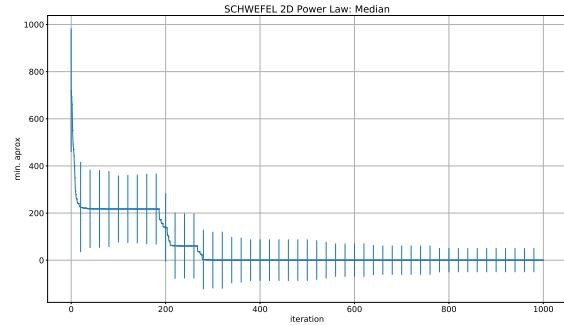
Figura 50: Schwefel  $f(x_1 \cdots x_n)$ 

$$f(x_1 \cdots x_n) = 0 \text{ at } x = (420,9686, \dots, 420,9686), [100, 500]$$

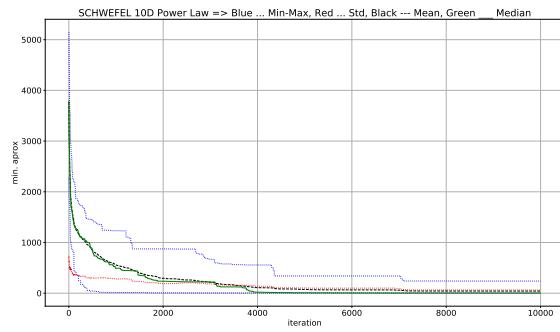
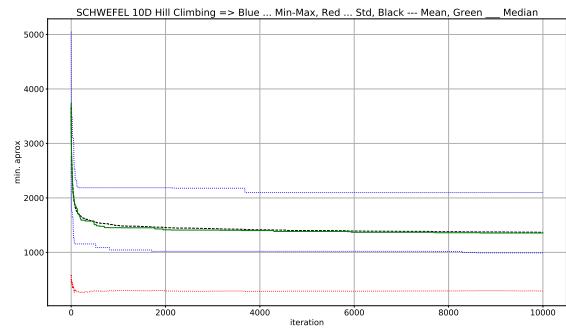
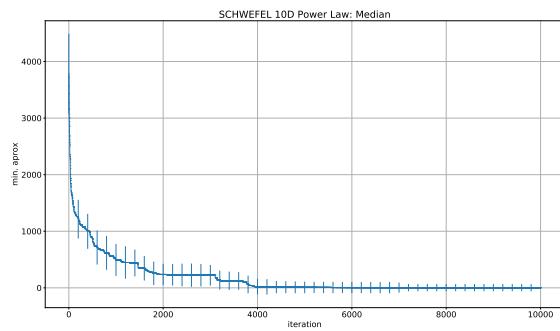
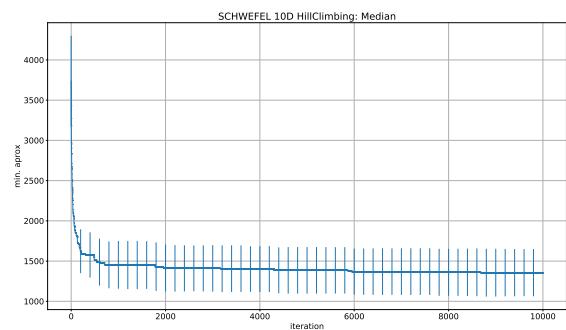
Figura 51: Schwefel Minimo Gobal e Intervalo de Evaluación

### V-A. Power Law

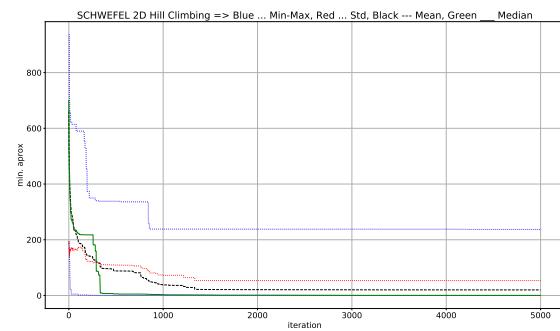
V-A1. 2D: Parametros de la distribución Power Law:  $x0=0.5$ ,  $x1=20$ ,  $\alpha=-1.5$

Figura 52: Curvas de Optimización  $R^2$ Figura 53: Curvas de Desviación Standar  $R^2$ 

V-A2. 10D: Parametros de la distribución Power Law:  $x0=0.5$ ,  $x1=20$ ,  $\alpha=-1.5$

Figura 54: Curvas de Optimización  $R^{10}$ V-B2. 10D:  $\sigma = 0.7$ Figura 58: Curvas de Optimización  $R^{10}$ Figura 55: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$ Figura 59: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$ 

## V-B. Hill Climbing

V-B1. 2D:  $\sigma = 0.7$ Figura 56: Curvas de Optimización  $R^2$ 

## V-C. Gradiente

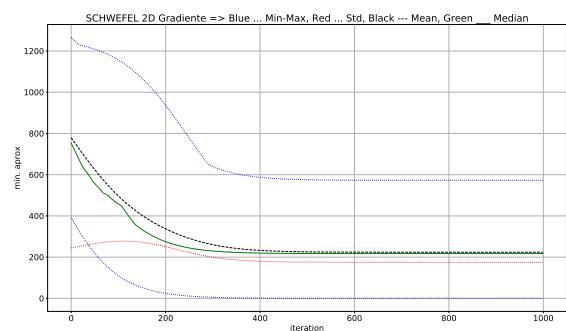
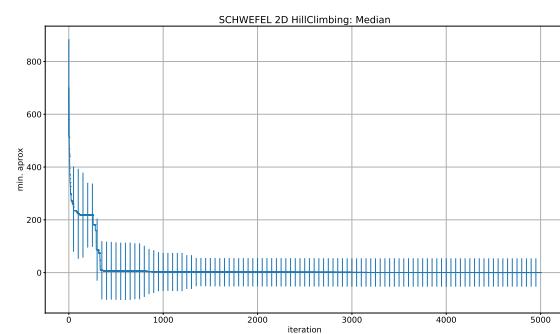
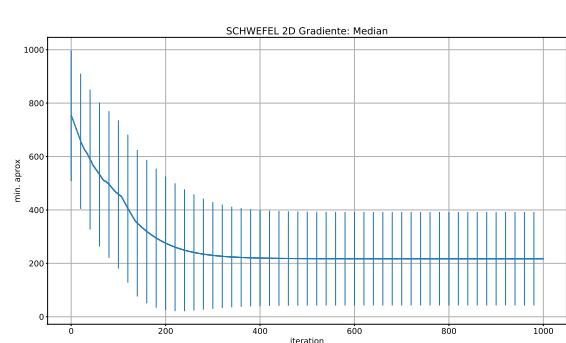
V-C1. 2D:  $\mu=0.3, \alpha = 0.0007$ Figura 60: Curvas de Optimización  $R^2$ Figura 57: Curvas de Desviación Standar  $R^2$ 

Figura 61: Curvas de Desviación Standar  $R^2$

V-C2. 10D:  $\mu=0.3$ ,  $\alpha = 0.0007$

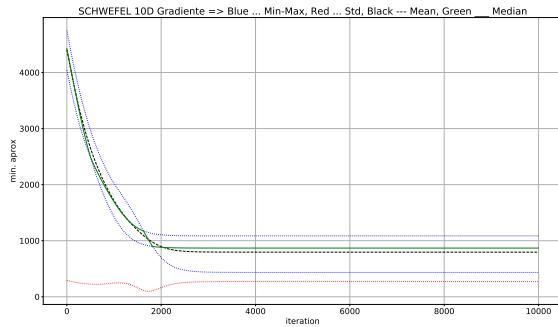


Figura 62: Curvas de Optimización  $R^{10}$

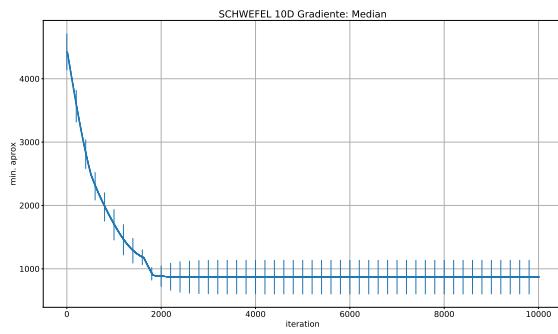


Figura 63: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$

#### V-D. Tamplado Simulado + Ley de Potencias

V-D1. 2D:  $x_0=0.5$ ,  $x_1=20$ ,  $\alpha=-1.5$ . Temperatura e iteraciones iniciales del Templado Simulado  $T:12$ ,  $length:70$ . Factores de decremento de la temperatura e incremento de las iteraciones del Templado simulado, 0.7 y 1.2.

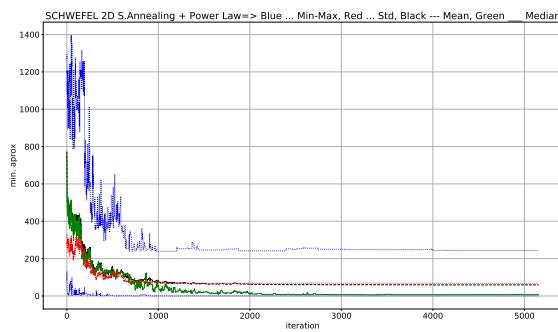


Figura 64: Curvas de Optimización  $R^2$

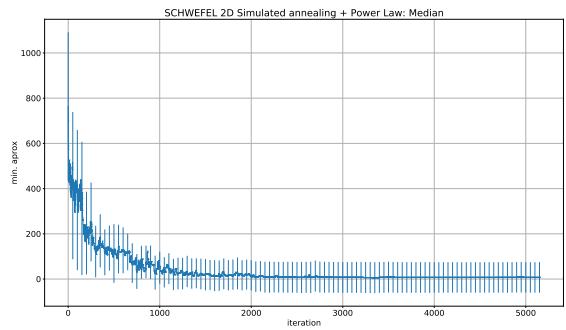


Figura 65: Curvas de Desviación Standar  $R^2$

V-D2. 10D:  $x_0=0.5$ ,  $x_1=20$ ,  $\alpha=-1.5$ . Temperatura e iteraciones iniciales del Templado Simulado  $T:12$ ,  $length:70$ . Factores de decremento de la temperatura e incremento de las iteraciones del Templado simulado, 0.7 y 1.2.

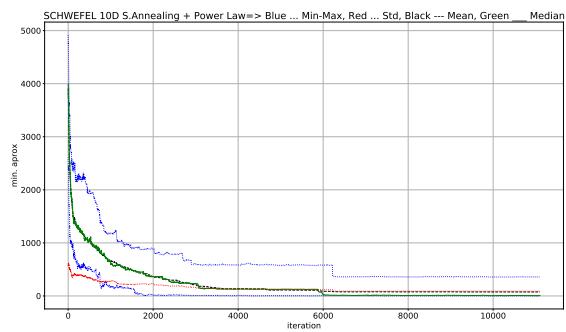


Figura 66: Curvas de Optimización  $R^{10}$

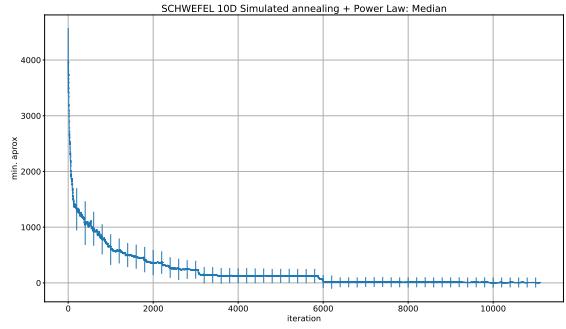
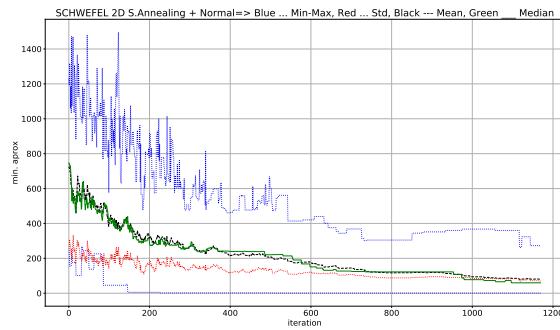
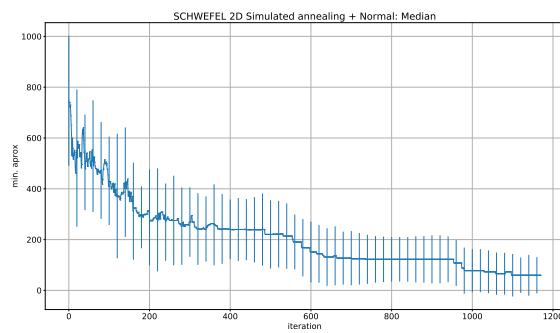


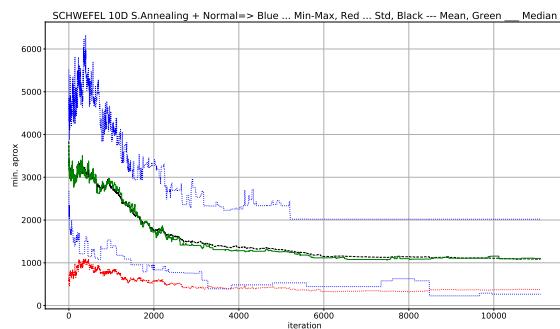
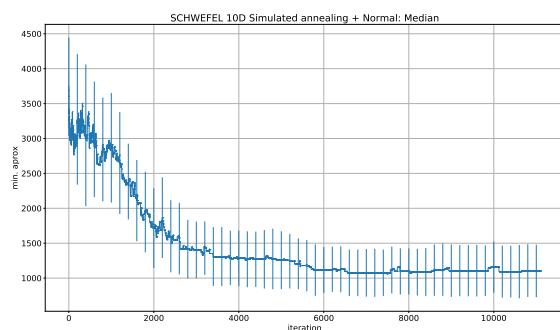
Figura 67: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$

#### V-E. Tamplado Simulado + Distribución Normal

V-E1. 2D:  $\sigma = 0.75$ . Temperatura e iteraciones iniciales del Templado Simulado  $T:12$ ,  $length:70$ . Factores de decremento de la temperatura e incremento de las iteraciones del Templado simulado, 0.7 y 1.2.

Figura 68: Curvas de Optimización  $R^2$ Figura 69: Curvas de Desviación Standar  $R^2$ 

V-E2. 10D:  $\sigma = 0.75$ . Temperatura e iteraciones iniciales del Templado Simulado  $T:12$ ,  $length:70$ . Factores de decremento de la temperatura e incremento de las iteraciones del Templado simulado, 0.7 y 1.2.

Figura 70: Curvas de Optimización  $R^{10}$ Figura 71: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$ 

## VI. ALGORITMOS GENETICOS

La seleccion de padres para generar la siguiente generacion de individuos se realizo con tres metodos [1]:

- Por Torneo: De la poblacion inicial de padres se escogen 4 aleatoriamente (uniforme), de a parejas se comparan sus respectivos costos y se escoge el menor. Se escogen tantos padres como individuos en la siguiente generación.
- Ponderación de Ranking: Este metodo encuentra la probabilidad de ser elegido de cada individuo, basada en la posicion del mismo en una lista ordenada por el costo. La probabilidad de cada individuo es estimada segun la expresion de la Figura 72
- Ponderación de Costo: Este método la probabilidad de selección de un individuo es calculada a partir de su costo y no a partir de su posición en el ranking de individuos. las expresiones presentadas en las Figuras 73 y 74 son usadas en la estomacion de cada individuo.

Tanto en el metodo de seleccion por ranking y por costo, un numero entre 0 y 1 es generado de manera aleatoria (uniforme). Iniciando con el primer individuo de la lista ordenada ascendentemente por probabilidades, el primer individuo con una probabilidad mayor al numero aleatorio es seleccionado. La poblacion de individuos fue de 32 para lo casos  $R^2$  y 128 para los casos  $R^{10}$ . Un intervalo de [0.7-0.9] fue usado para las probabilidades de cruce.

$$p_n = \frac{N_{keep} - n + 1}{\sum_{i=1}^{keep} n}$$

Figura 72: Rank weighting

### Algorithm 1 Algoritmo Gentico Canonico

---

```

1:  $P < -I$                                      ▷ Inicializar Poblacion
2: while Condicion do
3:    $Padres < -Slección(P, N)$                 ▷ Generar Hijos
4:
5:   for  $i = 0; i < N; i+ = 2$  do
6:     if  $U(0, 1) \leq P_c$  then
7:        $h_i, h_{i+1} = cruce(p_i, p_{i+1})$ 
8:        $h_i = mutacion(h_i)$ 
9:        $h_{i+1} = mutacion(h_{i+1})$ 
10:      else
11:         $h_i = p_i$ 
12:         $h_{i+1} = p_{i+1}$ 
13:      end if
14:    end for
15:     $Padres < -Remplazo(h, p)$ 
16:  end while

```

---

$$p_n = C_n = c_n - c_{N_{keep}+1}$$

Figura 73: Make Costs negative in Cost weighting

$$p_n = \left| \frac{C_n}{\sum_{i=1}^{keep} C_m} \right|$$

Figura 74: Cost weighting

#### VI-A. Griewank Selección por Torneo

##### VI-A1. 2D:

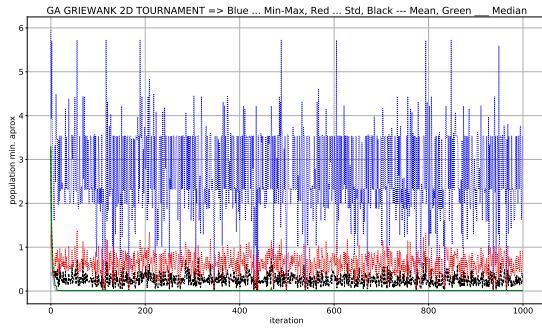


Figura 75: Curvas de Optimización  $R^2$

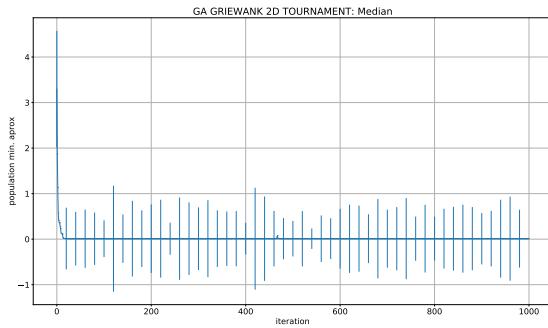


Figura 76: Curvas de Desviación Standar  $R^2$

##### VI-A2. 10D:

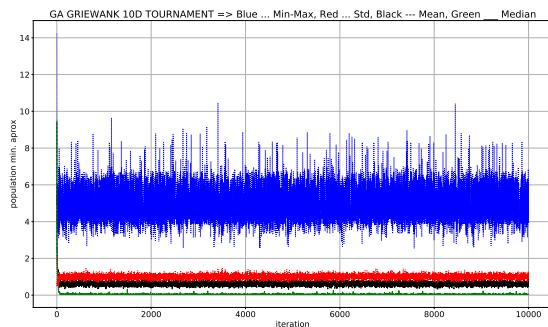


Figura 77: Curvas de Optimización  $R^{10}$

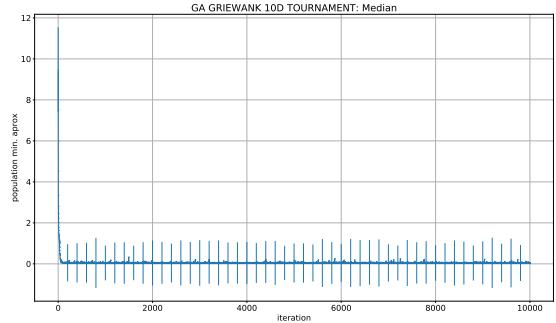


Figura 78: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$

#### VI-B. Griewank Selección por Ponderación de Ranking

##### VI-B1. 2D:

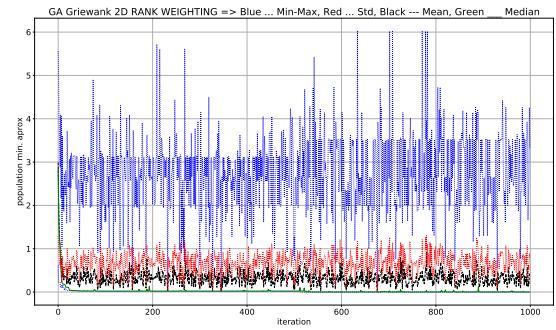


Figura 79: Curvas de Optimización  $R^2$

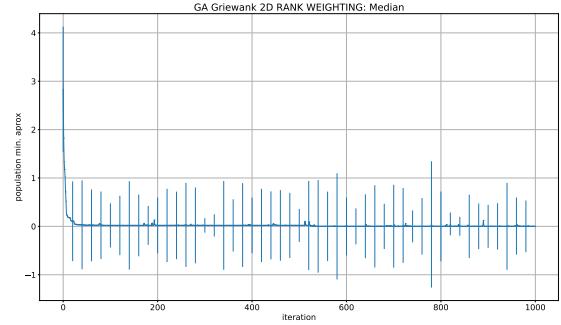


Figura 80: Curvas de Desviación Standar  $R^2$

##### VI-B2. 10D:

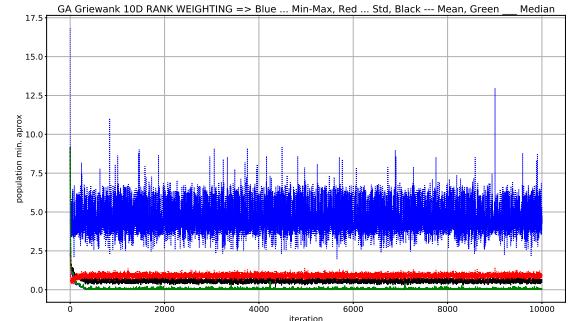


Figura 81: Curvas de Optimización  $R^{10}$

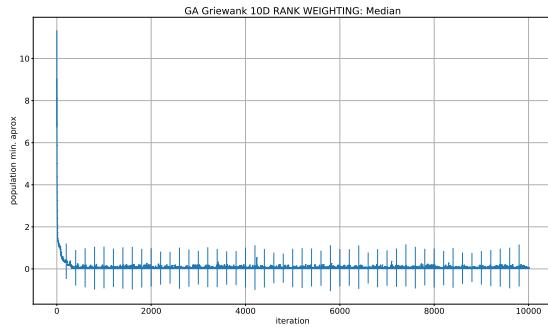


Figura 82: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$

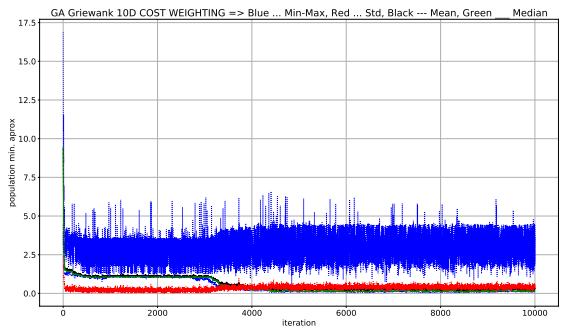


Figura 85: Curvas de Optimización  $R^{10}$

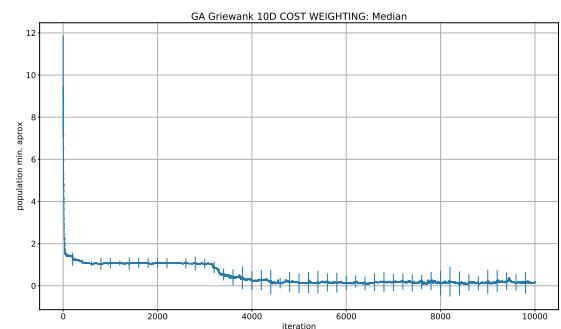


Figura 86: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$

### VI-C. Griewank Selección por Ponderación de Costo

#### VI-C1. 2D:



Figura 83: Curvas de Optimización  $R^2$

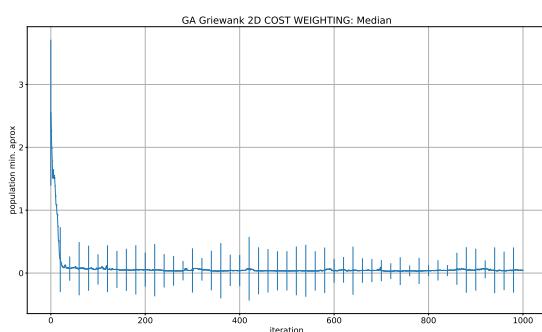


Figura 84: Curvas de Desviación Standar  $R^2$

#### VI-C2. 10D:

#### VI-D. Griewank HAEA

##### VI-D1. 2D:

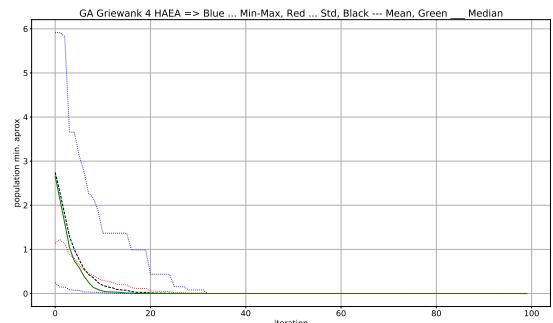


Figura 87: Curvas de Optimización  $R^2$

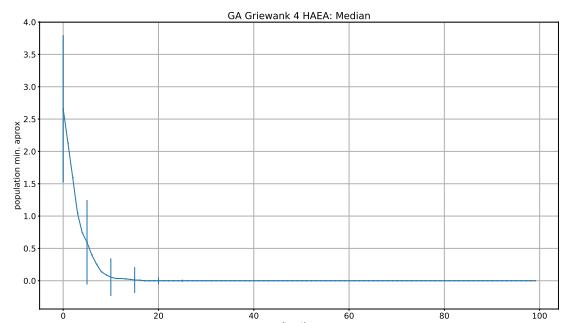
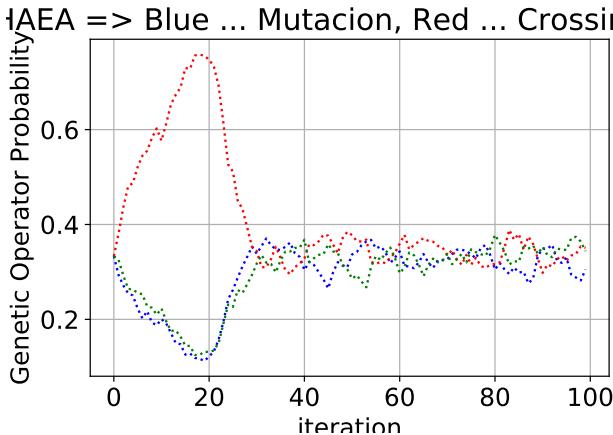
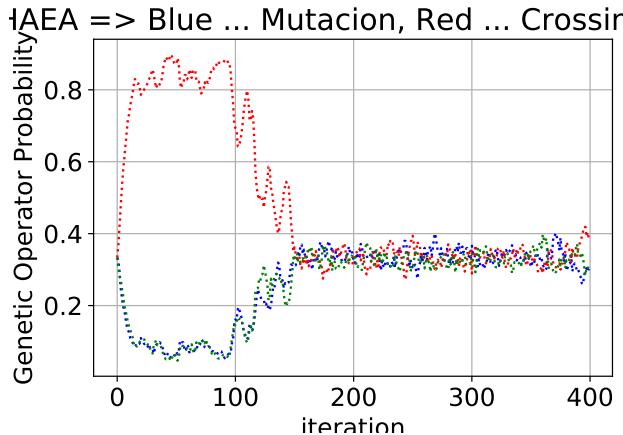


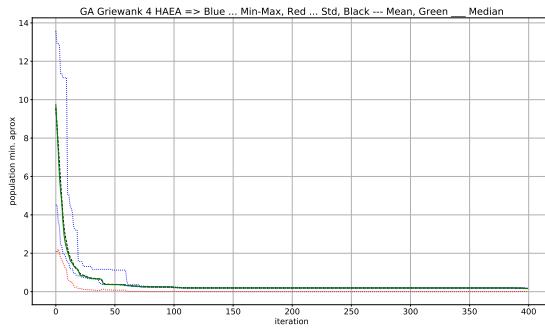
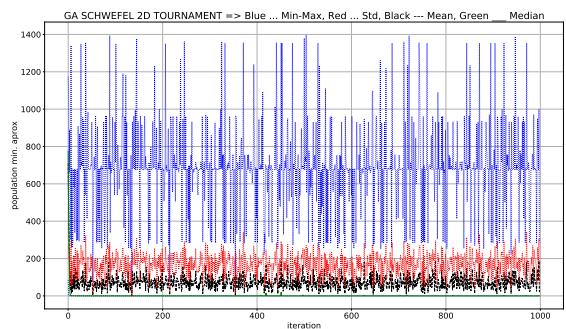
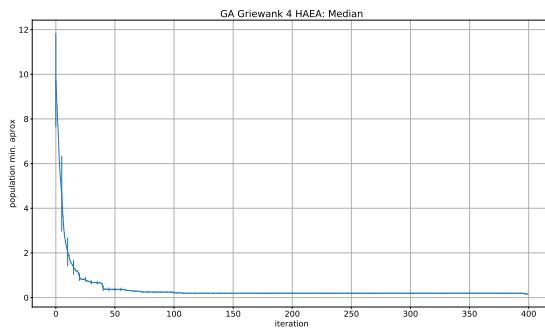
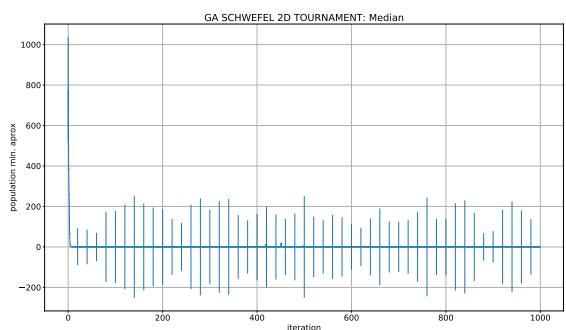
Figura 88: Curvas de Desviación Standar  $R^2$

Figura 89: Probabilidad de Operadores Genéticos  $R^2$ Figura 92: Probabilidad de Operadores Genéticos  $R^{10}$ 

VI-D2. 10D:

#### VI-E. Schwefel Selección por Torneo

VI-E1. 2D:

Figura 90: Curvas de Optimización  $R^{10}$ Figura 93: Curvas de Optimización  $R^2$ Figura 91: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$ Figura 94: Curvas de Desviación Standar  $R^2$ 

VI-E2. 10D:

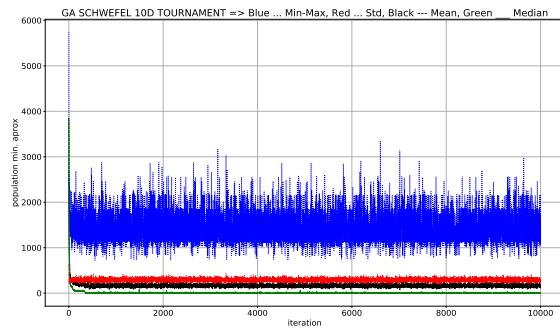
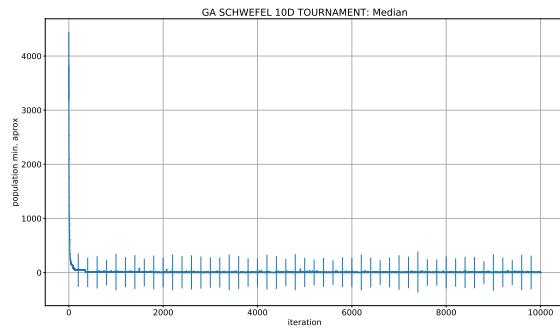
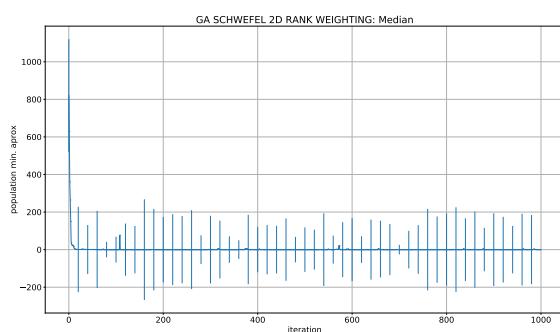
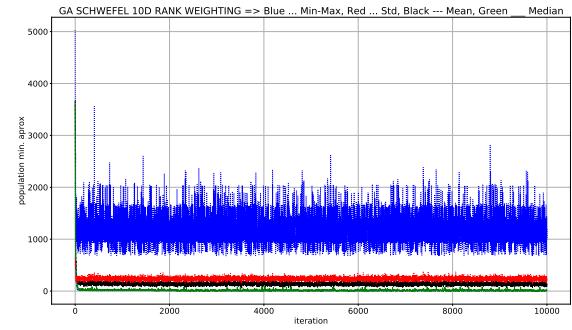
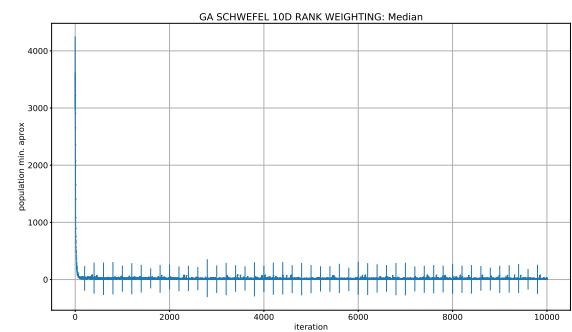
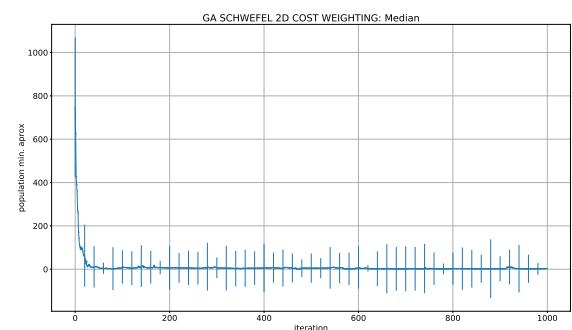
Figura 95: Curvas de Optimización  $R^{10}$ Figura 96: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$ **VI-F. Schwefel Selección por Ponderación de Ranking****VI-F1. 2D:**Figura 97: Curvas de Optimización  $R^2$ Figura 98: Curvas de Desviación Standar  $R^2$ **VI-F2. 10D:**Figura 99: Curvas de Optimización  $R^{10}$ Figura 100: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$ **VI-G. Schwefel Selección por Ponderación de Costo****VI-G1. 2D:**Figura 101: Curvas de Optimización  $R^2$ 

Figura 102: Curvas de Desviación Standar  $R^2$

VI-G2. 10D:

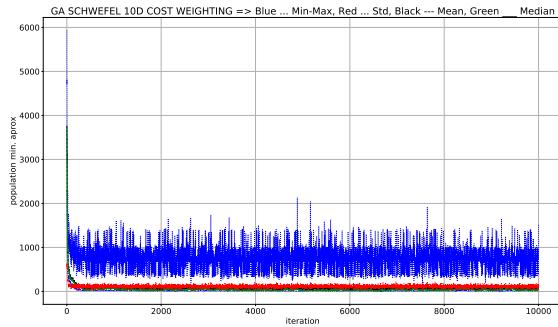


Figura 103: Curvas de Optimización  $R^{10}$

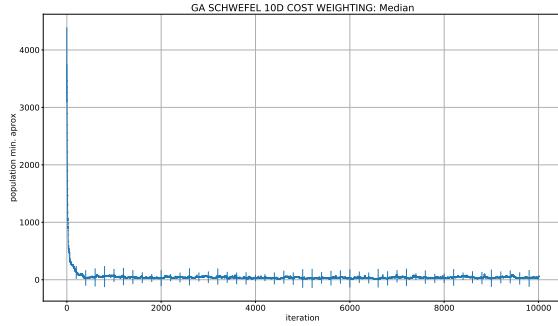


Figura 104: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$

VI-H. Schwefel HAEA

VI-H1. 2D:

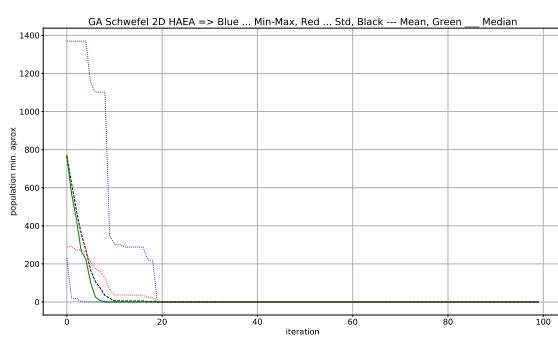


Figura 105: Curvas de Optimización  $R^2$

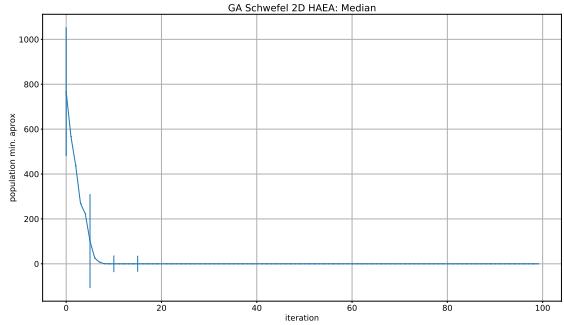


Figura 106: Curvas de Desviación Standar  $R^2$

HAEA => Blue ... Mutacion, Red ... Crossing, Green ... Recombinacion

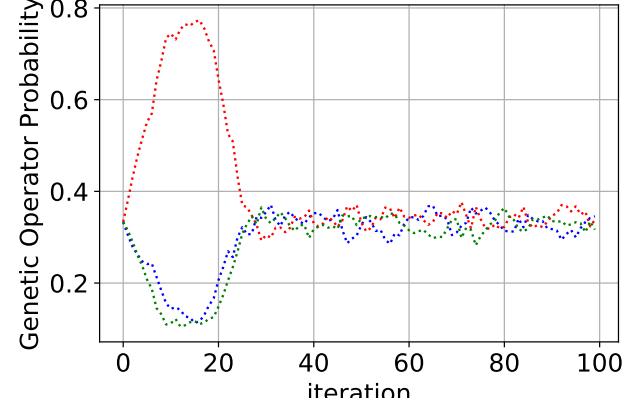


Figura 107: Probabilidad de Operadores Genéticos  $R^2$

VI-H2. 10D:

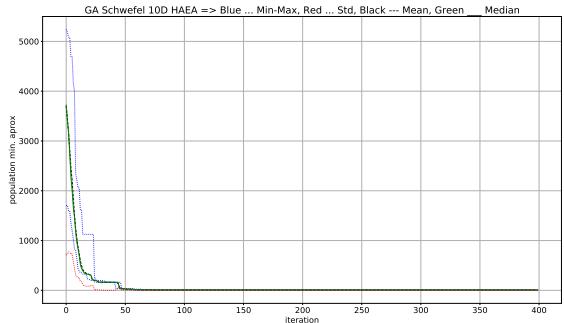


Figura 108: Curvas de Optimización  $R^{10}$

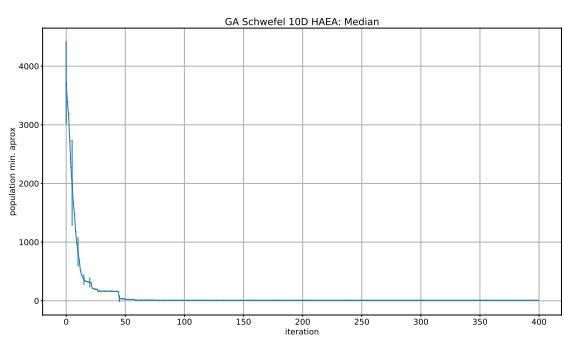


Figura 109: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$

HAEA => Blue ... Mutacion, Red ... Crossing,

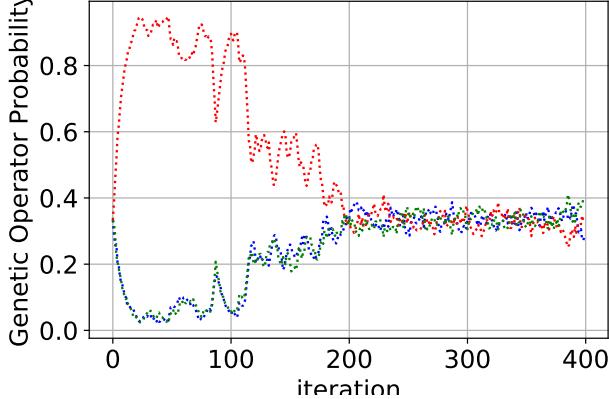


Figura 110: Probabilidad de Operadores Genéticos  $R^{10}$

#### VI-I. Rastrigin Selección por Torneo

#### VI-II. 2D:

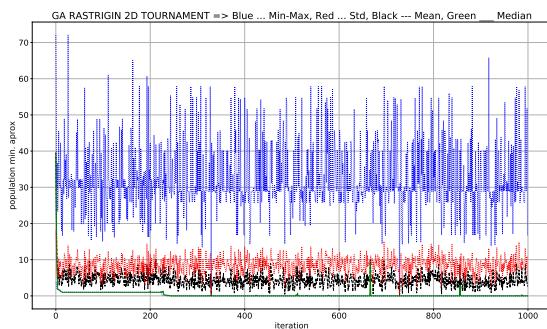


Figura 111: Curvas de Optimización  $R^2$

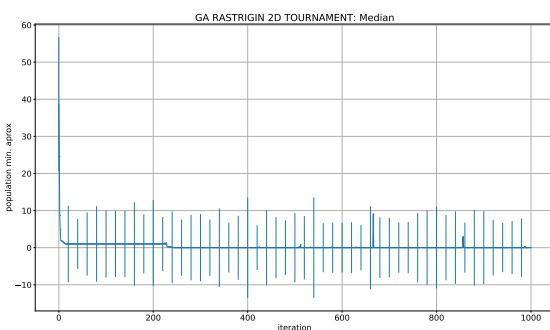


Figura 112: Curvas de Desviación Standar  $R^2$

#### VI-12. 10D:

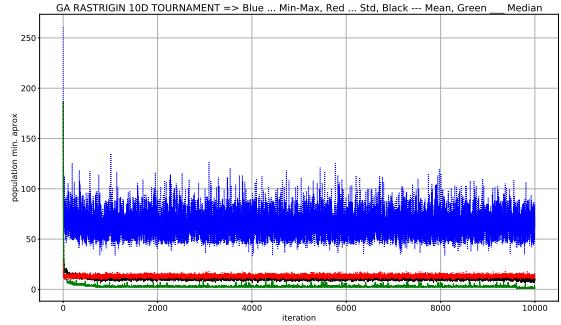


Figura 113: Curvas de Optimización  $R^{10}$

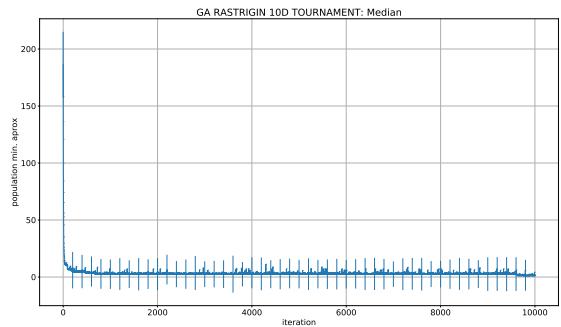


Figura 114: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$

#### VI-J. Rastrigin Selección por Ponderación de Ranking

#### VI-J1. 2D:

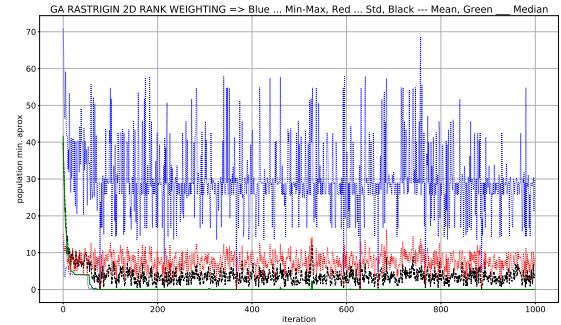


Figura 115: Curvas de Optimización  $R^2$

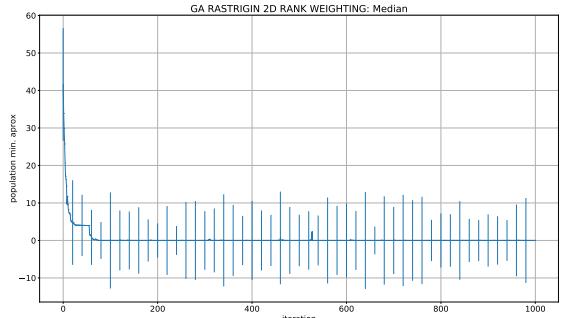


Figura 116: Curvas de Desviación Standar  $R^2$

VI-J2. 10D:

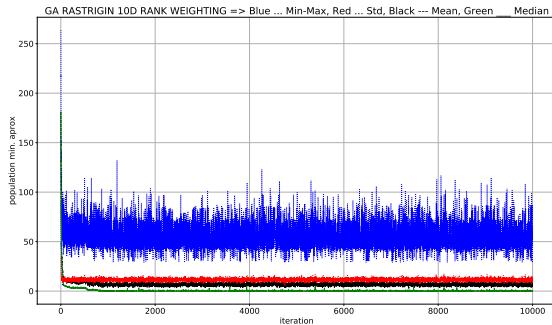


Figura 117: Curvas de Optimización  $R^{10}$

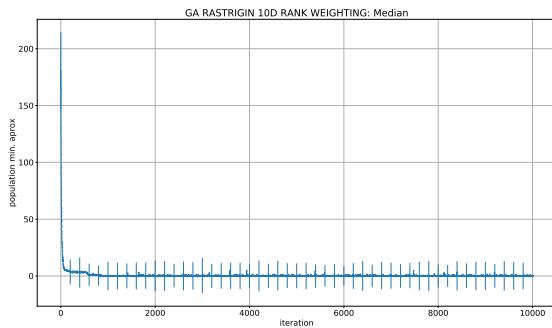


Figura 118: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$

VI-K. Rastrigin Selección por Ponderación de Costo

VI-K1. 2D:

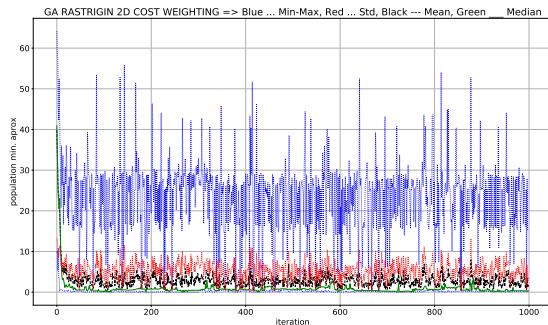


Figura 119: Curvas de Optimización  $R^2$

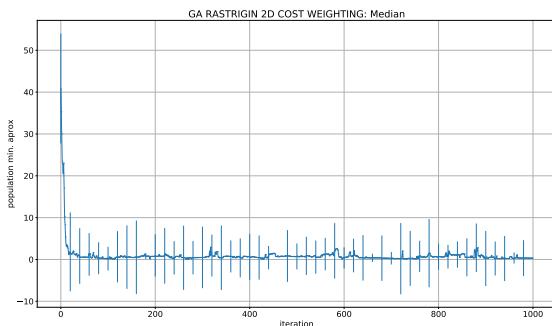


Figura 120: Curvas de Desviación Standar  $R^2$

VI-K2. 10D:

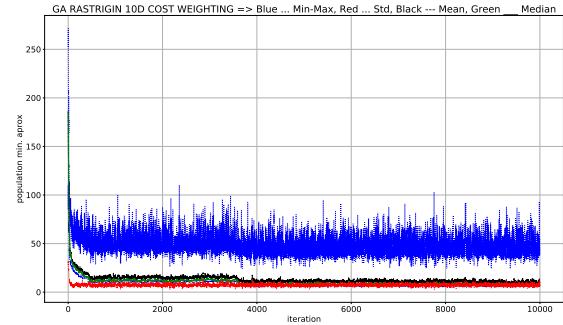


Figura 121: Curvas de Optimización  $R^{10}$

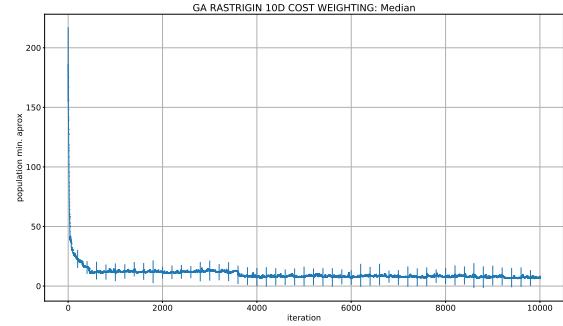


Figura 122: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$

VI-L. Rastrigin HAEA

VI-L1. 2D:

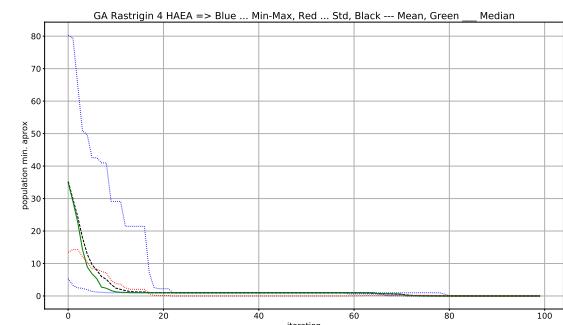
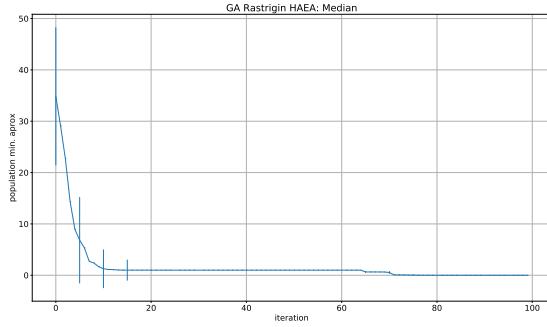
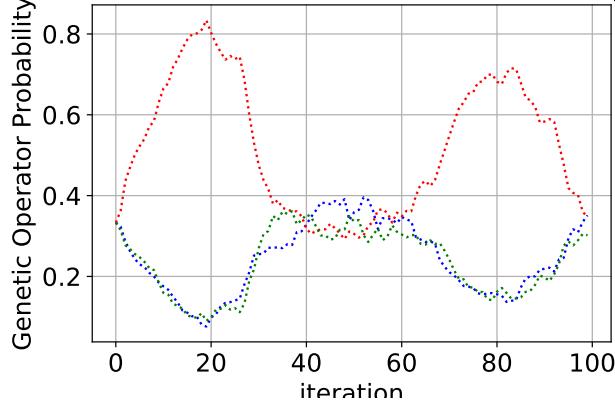


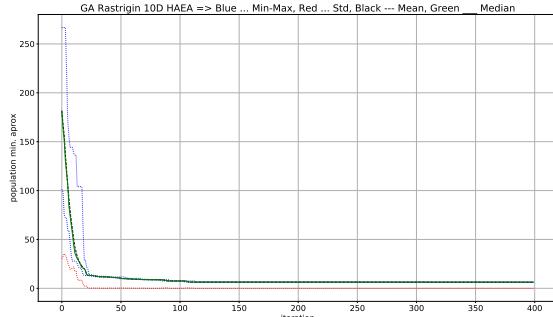
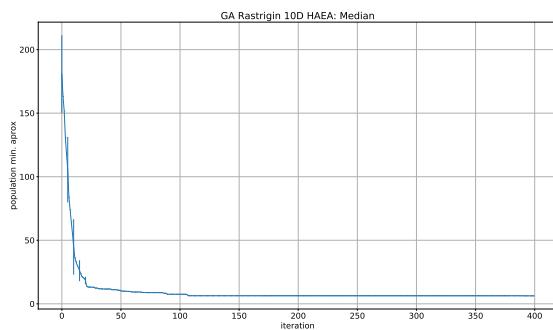
Figura 123: Curvas de Optimización  $R^2$

Figura 124: Curvas de Desviación Standar  $R^2$ 

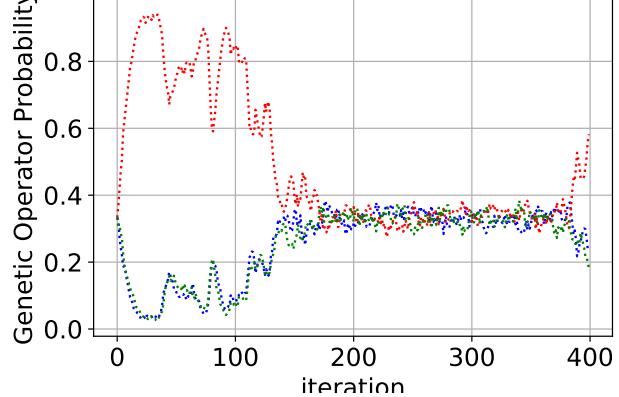
HAEA => Blue ... Mutacion, Red ... Crossing, Gr

Figura 125: Probabilidad de Operadores Genéticos  $R^2$ 

VI-L2. 10D:

Figura 126: Curvas de Optimización  $R^{10}$ Figura 127: Curvas de Desviación Standar  $R^{10}$ 

HAEA => Blue ... Mutacion, Red ... Crossing,

Figura 128: Probabilidad de Operadores Genéticos  $R^{10}$ 

## VII. DECEPTIVE 4 AND MAXONE

Funciones como Deceptive 4 fueron introducidas como una manera de examinar el comportamiento de los algoritmos genéticos, cuando la mayoría del espacio de búsqueda o muestreo <sup>empuja</sup><sup>a</sup> el algoritmo en la dirección equivocada. Equivocada en el sentido de que se aleja del óptimo global. En la función Deceptive 4 el fitness de una cadena de 4 bits es igual al numero de unos en la cadena, a excepción de la cadena '0000' cuyo fitness es de 5. Con la función MAXONE, el objetivo es encontrar una secuencia binaria particular. Una secuencia de este tipo es esencialmente un array lleno con una cadena aleatoria de 1 y 0. El objetivo es entonces encontrar la cadena binaria que es idéntica el objetivo requerido. El fitness para la función MAXONE es calculado comparando el individuo con el objetivo. Para MAXONE el fitness es un valor entre 0 y 1. Este valores corresponde a la relación entre la cantidad de dígitos del individuo que se corresponden en las mismas posiciones del objetivo, y la longitud total de la cadena binaria.

### VII-A. Deceptive 4

#### VII-A1. Deceptive 4 Selección por Torneo:

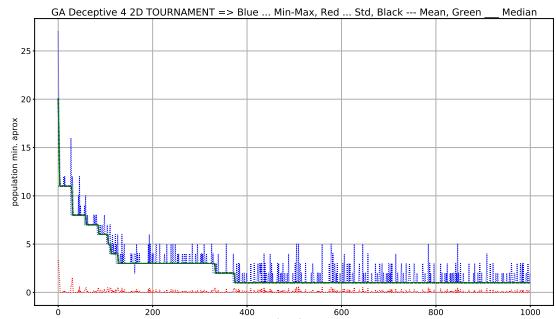


Figura 129: Curvas de Optimización

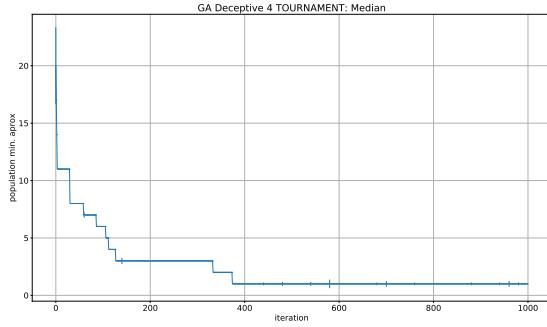


Figura 130: Curvas de Desviación Standar

VII-A2. *Deceptive 4 Selección por Ponderación de Ranking:*

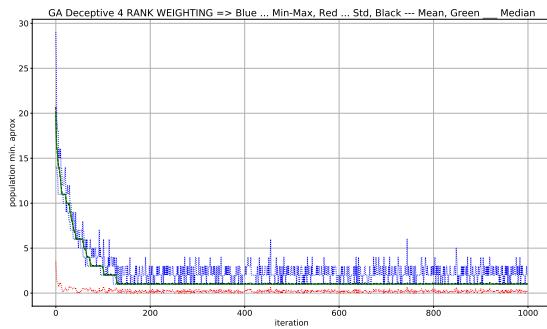


Figura 131: Curvas de Optimización

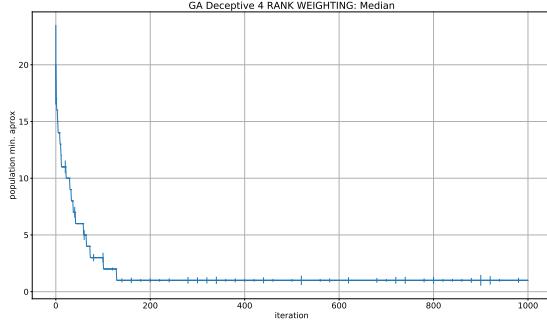


Figura 132: Curvas de Desviación Standar

VII-A3. *Deceptive 4 Selección por Ponderación de Costo:*

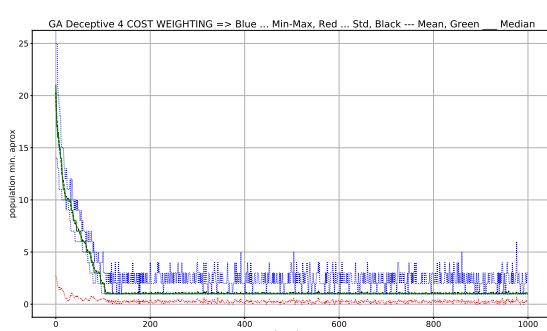


Figura 133: Curvas de Optimización

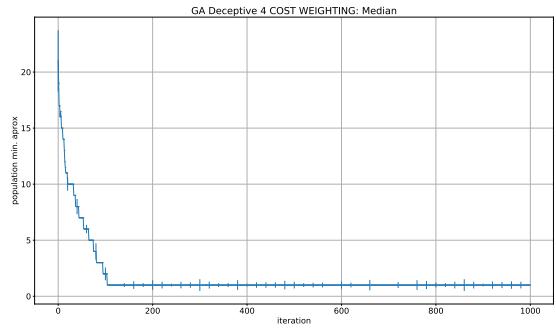


Figura 134: Curvas de Desviación Standar

VII-A4. *Deceptive 4 HAEA:*

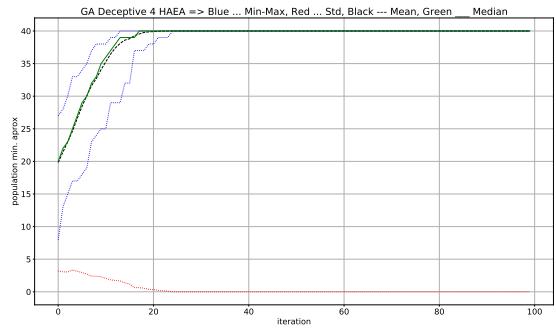


Figura 135: Curvas de Optimización

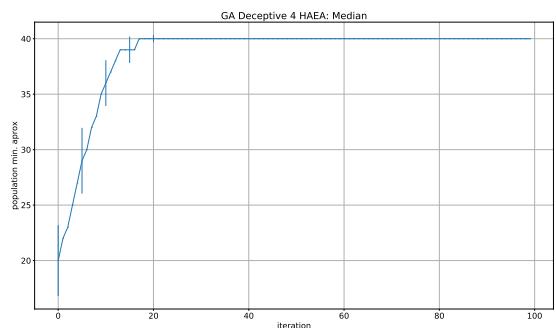


Figura 136: Curvas de Desviación Standar

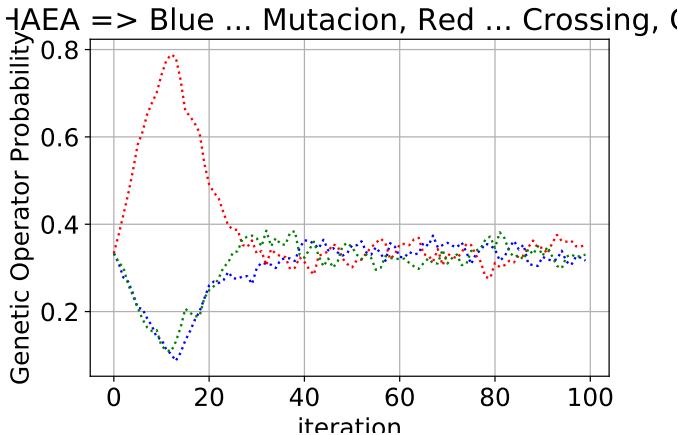


Figura 137: Probabilidad de Operadores Genéticos

### VII-B. MAXONE

#### VII-B1. MAXONE Selección por Torneo:

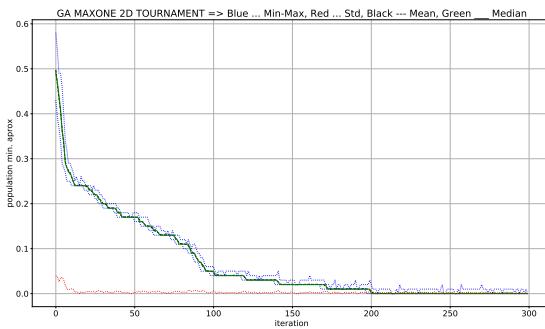


Figura 138: Curvas de Optimización



Figura 139: Curvas de Desviación Standar

#### VII-B2. MAXONE Selección por Ponderación de Ranking:

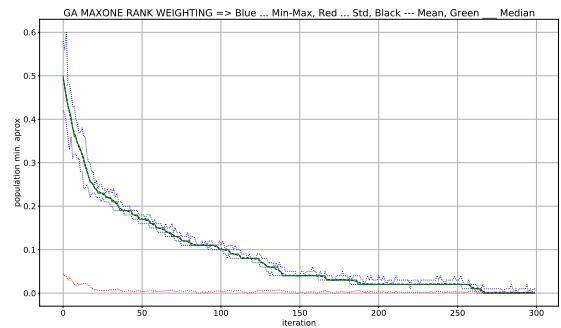


Figura 140: Curvas de Optimización

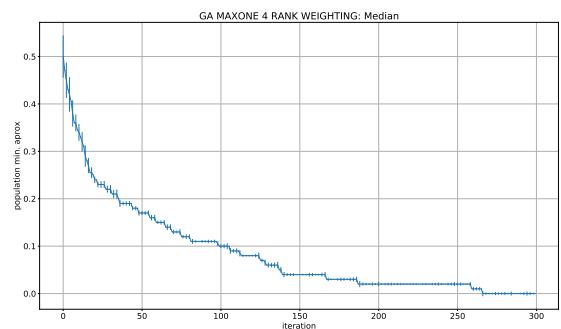


Figura 141: Curvas de Desviación Standar

#### VII-B3. MAXONE Selección por Ponderación de Costo:

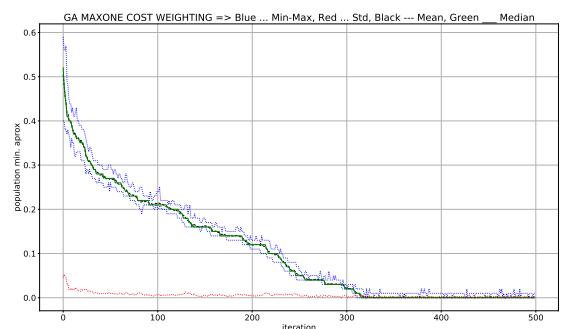


Figura 142: Curvas de Optimización

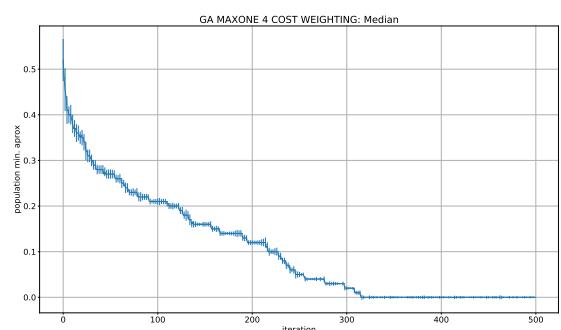


Figura 143: Curvas de Desviación Standar

#### VII-B4. MAXONE HAEA:

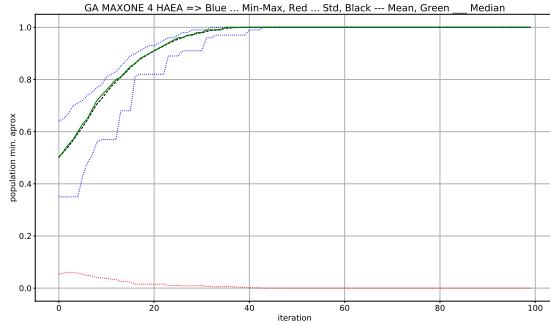


Figura 144: Curvas de Optimización

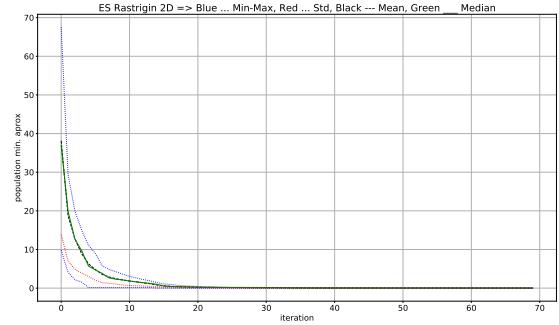


Figura 147: Curvas de Optimización

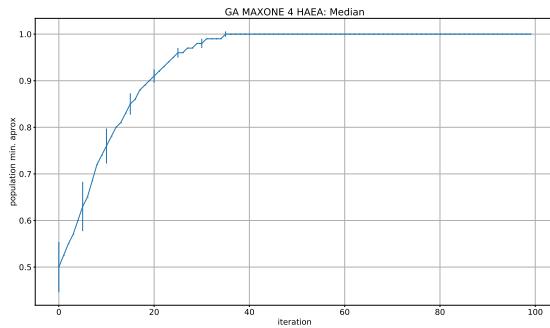


Figura 145: Curvas de Desviación Standar

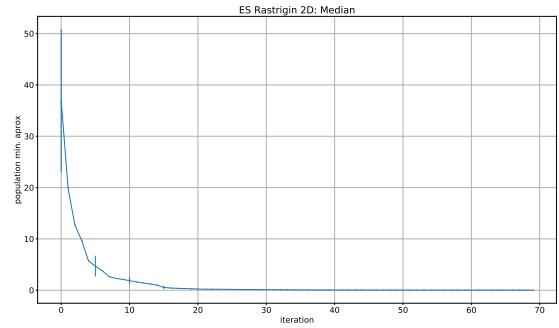


Figura 148: Curvas de Desviación Standar

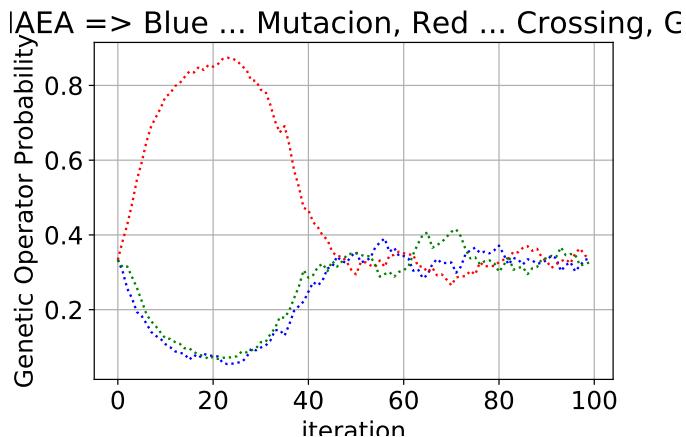


Figura 146: Probabilidad de Operadores Genéticos

## VIII. METODOS CON REALES

Todos los métodos antes presentados ejecutan los diferentes operadores genéticos sobre la representación binaria de los parámetros de la función. Otra alternativa que se ha desarrollado, ejecuta los mecanismos de mutación en el espacio de los reales. En esta sección se evalúan los métodos estrategias evolutivas y el evolucionario diferencial

### VIII-A. Rastrigin

#### VIII-A1. Rastrigin Estrategias Evolutivas 2R:

#### VIII-A2. Rastrigin Estrategias Evolutivas 10R:

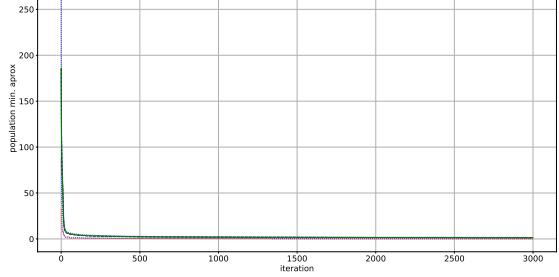


Figura 149: Curvas de Optimización

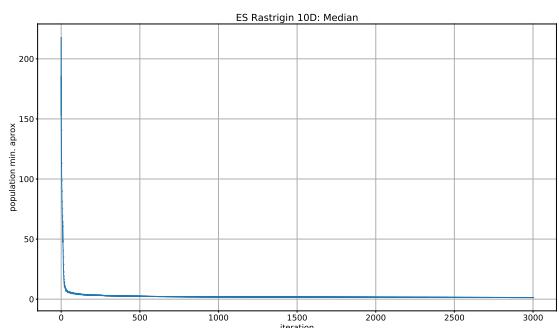


Figura 150: Curvas de Desviación Standar

#### VIII-A3. Rastrigin Estrategias Evolutivas RM 2R:

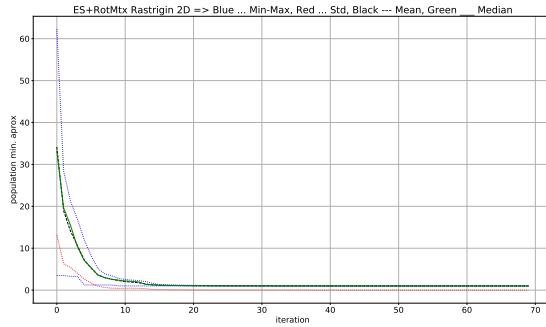


Figura 151: Curvas de Optimización

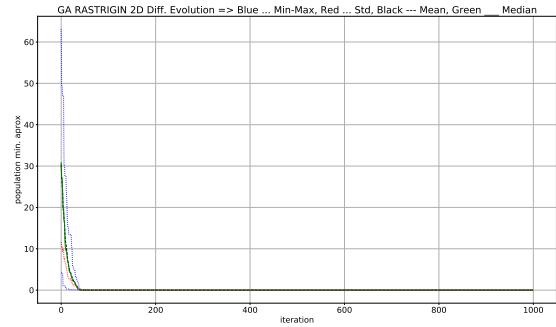


Figura 155: Curvas de Optimización

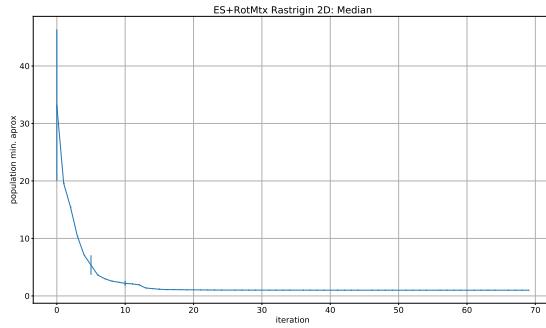


Figura 152: Curvas de Desviación Standar

VIII-A4. *Rastrigin Estrategias Evolutivas RM 10R:*

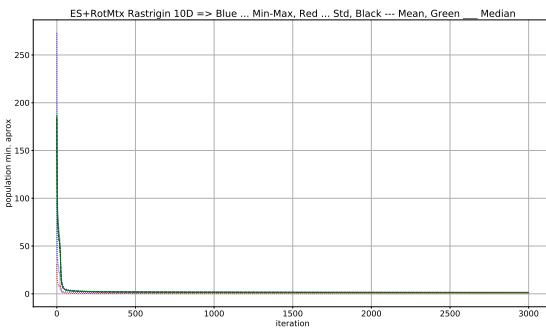


Figura 153: Curvas de Optimización

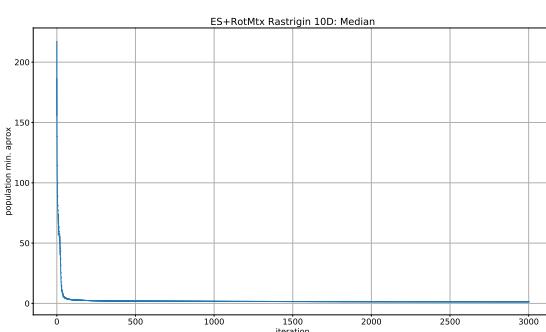


Figura 154: Curvas de Desviación Standar

VIII-A5. *Rastrigin Evolucion Diferencial 2R:*

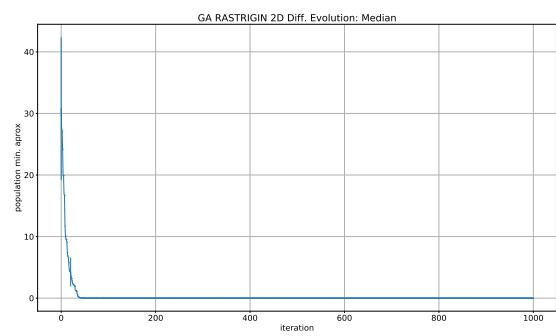


Figura 156: Curvas de Desviación Standar

VIII-A6. *Rastrigin Evolucion Diferencial 10R:*

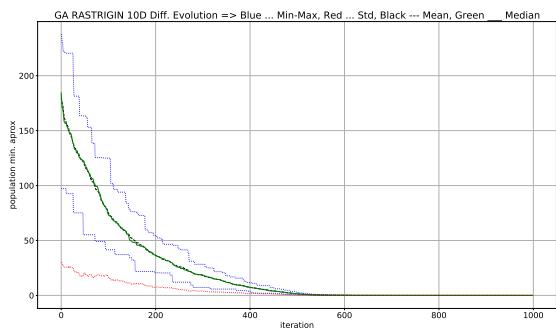


Figura 157: Curvas de Optimización

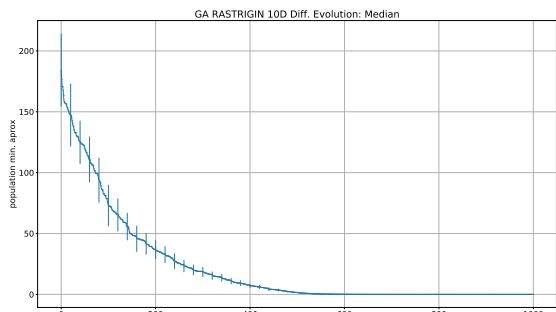


Figura 158: Curvas de Desviación Standar

### VIII-B. Griewank

#### VIII-B1. Griewank Estrategias Evolutivas 2R:

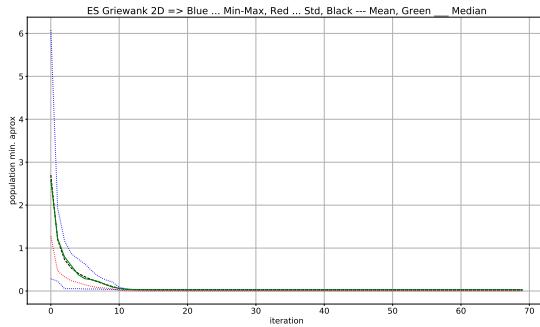


Figura 159: Curvas de Optimización

Figura 162: Curvas de Desviación Standar

#### VIII-B3. Griewank Estrategias Evolutivas RM 2R:

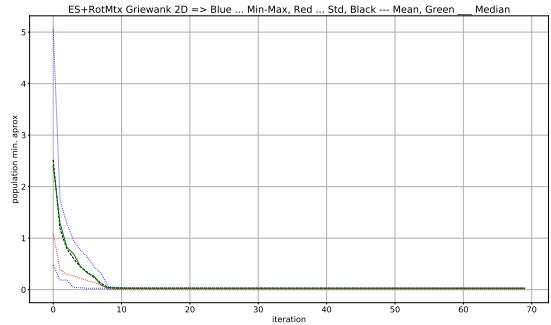


Figura 163: Curvas de Optimización

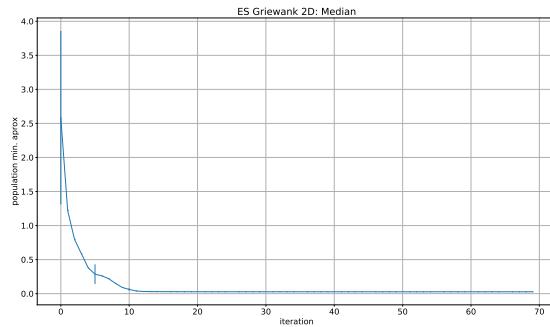


Figura 160: Curvas de Desviación Standar

#### VIII-B2. Griewank Estrategias Evolutivas 10R:

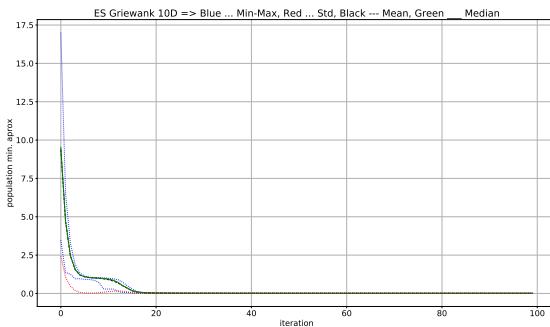


Figura 161: Curvas de Optimización

Figura 164: Curvas de Desviación Standar

#### VIII-B4. Griewank Estrategias Evolutivas RM 10R:

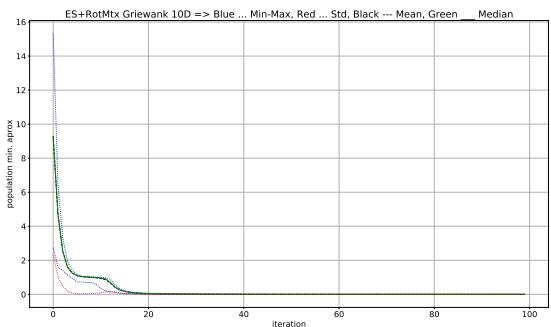


Figura 165: Curvas de Optimización

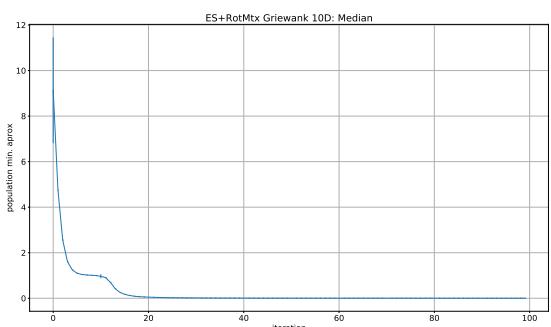
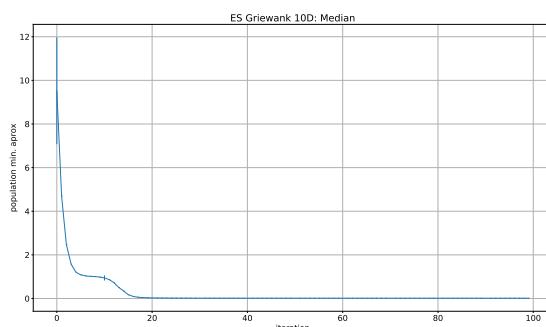


Figura 166: Curvas de Desviación Standar

#### VIII-B5. Griewank Evolucion Diferencial 2R:

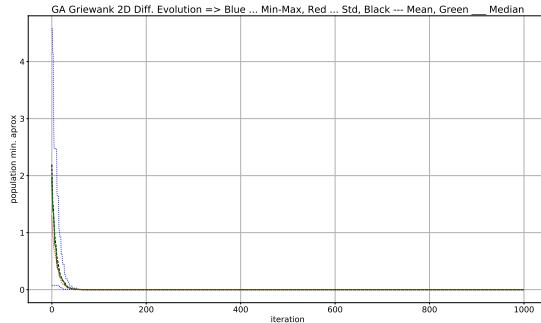


Figura 167: Curvas de Optimización

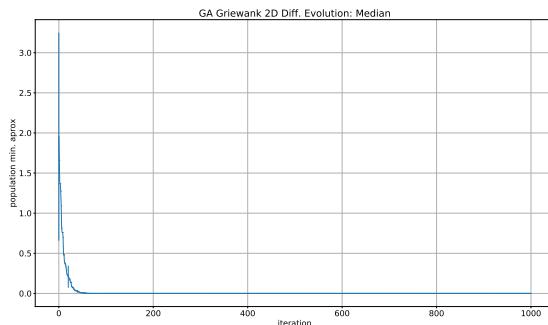


Figura 168: Curvas de Desviación Standar

#### VIII-B6. Griewank Evolucion Diferencial 10R:

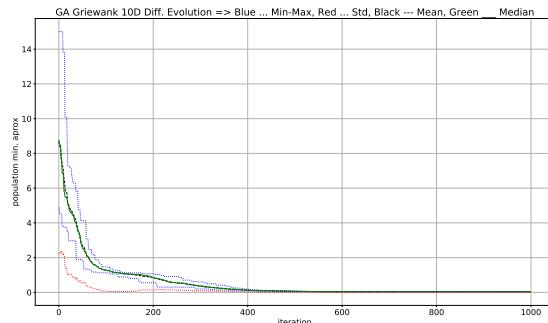


Figura 169: Curvas de Optimización

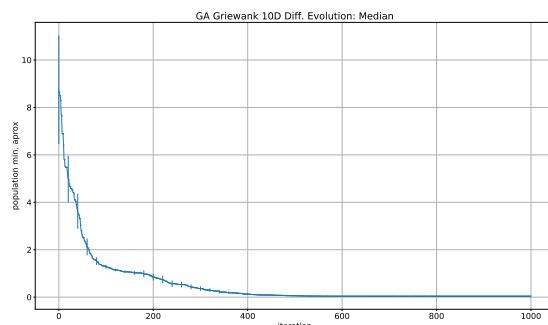


Figura 170: Curvas de Desviación Standar

#### VIII-C. Schwefel

##### VIII-C1. Schwefel Estrategias Evolutivas 2R:

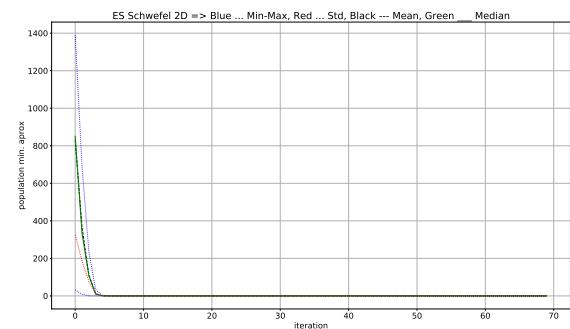


Figura 171: Curvas de Optimización

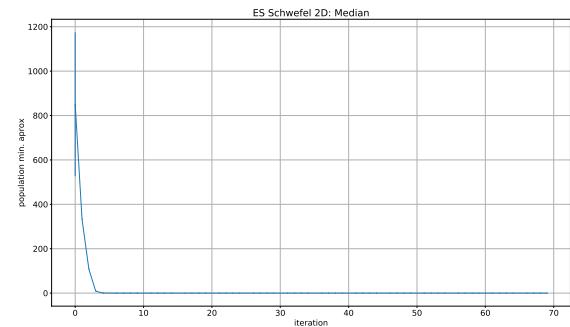


Figura 172: Curvas de Desviación Standar

##### VIII-C2. Schwefel Estrategias Evolutivas 10R:

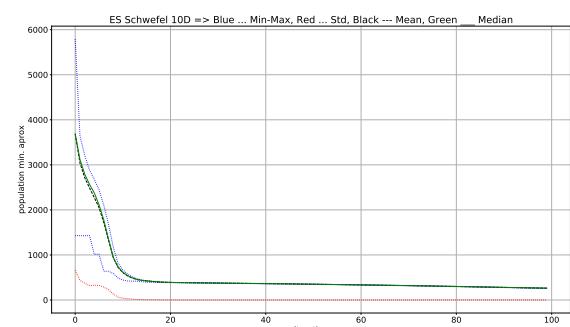


Figura 173: Curvas de Optimización

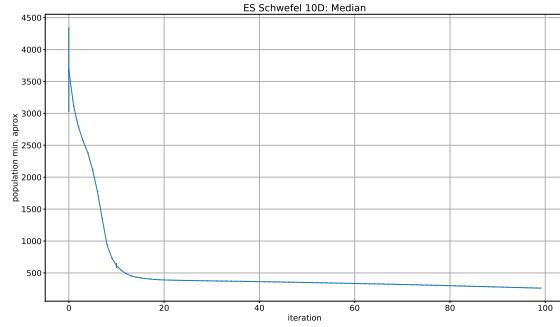


Figura 174: Curvas de Desviación Standar  
VIII-C3. Schwefel Estrategias Evolutivas RM 2R:

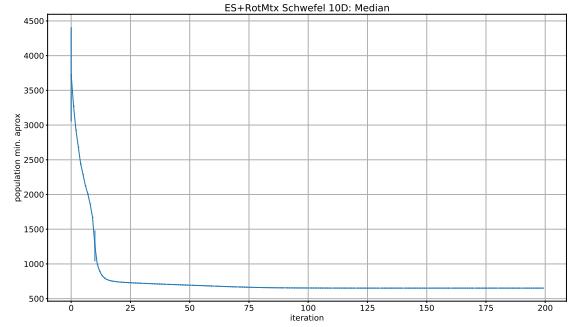


Figura 178: Curvas de Desviación Standar  
VIII-C5. Schwefel Evolucion Diferencial 2R:

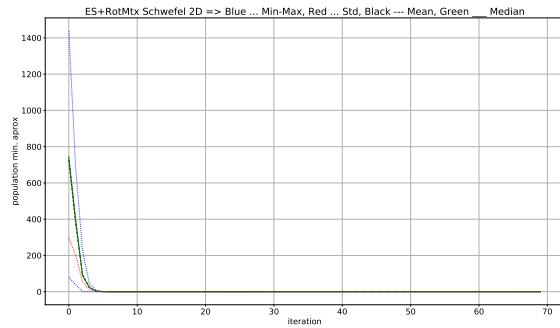


Figura 175: Curvas de Optimización

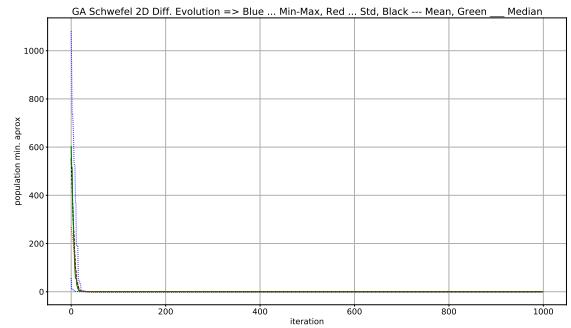


Figura 179: Curvas de Optimización

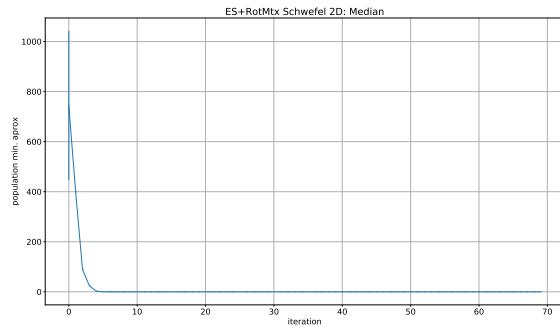


Figura 176: Curvas de Desviación Standar  
VIII-C4. Schwefel Estrategias Evolutivas RM 10R:

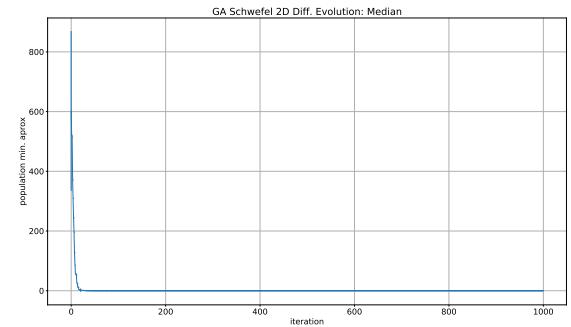


Figura 180: Curvas de Desviación Standar  
VIII-C6. Schwefel Evolucion Diferencial 10R:

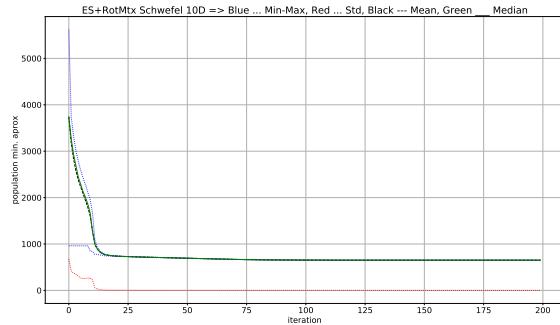


Figura 177: Curvas de Optimización

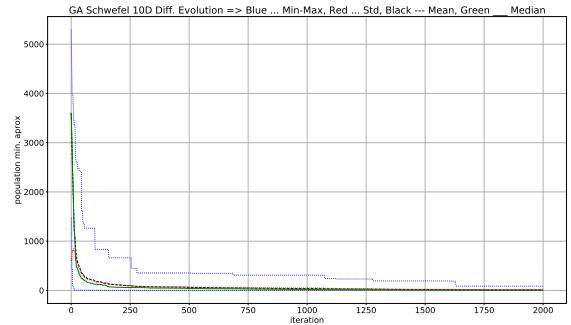


Figura 181: Curvas de Optimización

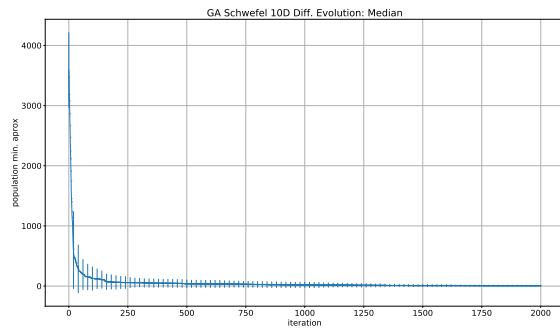


Figura 182: Curvas de Desviación Standar

## IX. RESULTADOS

Methods	
1	Power Law
2	Hill Climbing
3	Gradiente
4	Simulated Annealing + Power Law
5	Simulated Annealing + Normal
6	GA Canonico + Selección por Torneo
7	GA Canonico + Ponderación de Ranking
8	GA Canonico + Ponderación de Costo
9	GA HAEA
10	ES
11	ES + Rotation Matrix
12	Evolucion Diferencial

Mejores Valores de 30 Iteraciones						
Funct	Mean	Std	Med	Min	Max	Met.
RAST. $R^2$	1.56	0.62	1.45	0.44	2.9	1
	0.32	0.37	0.15	0.01	1.27	2
	14.95	10.50	12.93	0.99	40.79	3
	1.58	0.78	1.54	0.02	3.15	4
	0.55	0.47	0.47	0.02	2.15	5
	2.59	5.44	4e-06	4e-06	16.7	6
	3.9	8.6	4e-06	4e-06	30	7
	1.78	3.6	0.32	0.12	15.3	8
	5e-06	2e-06	4e-06	4e-06	1e-05	9
	0.012	0.008	0.012	0.00012	0.03	10
	1	0.001	1	1	1	11
	0	0	0	0	0	12
RAST. $R^{10}$	0.59	0.65	0.25	0.01	2.01	1
	42.91	9.61	41.46	25.29	66.66	2
	88.02	21.76	83.57	52.73	131	3
	2.09	1.37	1.97	0.16	6.17	4
	48.41	14.61	47.12	17.24	78.4	5
	9.6	13	1.3	1.2	86	6
	7.2	11	0	0	57	7
	10	8.3	7.14	5.6	55	8
	6.28	0.00	6.28	6.27	6.35	9
	1.32	0.23	1.4	0.2	1.6	10
	1.4	0.08	1.42	1.1	1.5	11
	5e-07	3e-07	4e-07	3e-08	1e-06	12
GRIE. $R^2$	0.19	0.11	0.19	0.01	0.43	1
	1.39	1.04	1.09	0.04	3.79	2
	1.53	0.81	1.51	0.08	3.39	3
	0.40	0.33	0.34	0.01	1.14	4
	1.5	1.03	1.49	0.01	3.57	5
	0.4	0.9	0.01	0.01	3.5	6
	0.37	0.78	4e-05	6e-06	3.3	7
	0.14	0.31	0.04	0.01	1.6	8
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	9
	0.03	6e-05	0.03	0.03	0.03	10
	0.03	9e-06	0.03	0.03	0.03	11
	0	0	0	0	0	12
GRIE. $R^{10}$	0.50	0.42	0.40	0.08	1.54	1
	0.62	0.10	0.64	0.49	0.73	2
	7.34	2.41	7.55	2.71	11.91	3
	0.55	0.11	0.55	0.32	0.75	4
	6.4	2.57	6.56	1.62	13.23	5
	0.68	0.9	0.04	0.04	3.9	6
	0.67	0.9	0.06	0.03	4.2	7
	0.3	0.54	0.1	0.09	3.6	8
	0.17	0.01	0.16	0.16	0.19	9
	0.01	0.0004	0.01	0.01	0.01	10
	0.002	0.0005	0.002	0.0003	0.003	11
	0.04	0	0.04	0.04	0.04	12

Mejores Valores de 30 Iteraciones						
Funct	Mean	Std	Med	Min	Max	Met.
SCH. $R^2$	19.37	51	0.31	0.12	217	1
	20	53.7	0.38	0.01	237	2
	223	174	217	0.01	572	3
	46	64	1.95	0.02	237	4
	69	59	50.5	0.52	200	5
	31.5	77.4	9e-05	2e-05	285	6
	54	140	0	4e-05	677	7
	16.3	35.7	2.9	0.06	276	8
	2e-05	0.0	2e-05	2e-05	2e-05	9
	4e-05	9e-06	4e-05	2e-05	5e-05	10
	3e-05	4e-07	3e-05	3e-05	3e-05	11
	3e-05	0	3e-05	3e-05	3e-05	12
SCH. $R^{10}$	42	63	3	1.41	239	1
	1368	289	1356	991	2098	2
	796	270	868	434	1085	3
	72	89	2.64	0.80	357	4
	1028	343	1053	227	1731	5
	183	315	1.4	0.7	1436	6
	125	215	6.8	0.14	966	7
	108	168	63	10	1526	8
	7.11	0.0	7.11	7.11	7.11	9
	260	1	260	256	262	10
	651	0.001	651	651	651	11
	10	13	6	0.01	85	12

## X. CONCLUSIONES

- Al permitir sustituir le punto actual por uno que no es mejor, el método de Templado simulado puede detectar mejores puntos que los demás metodos despues de un único ciclo de templado.
- Cunado la dimensionalidad de la función se incremento de 2 a 10, El templado simulado arrojo mejores resultados para las tres funciones.
- También se observo que la implementaciones que usaron la distribución de Ley de Potencias arrojaron merores resultados que las implementaciones que usaron una distribución normal.
- El gradiente descendiente siempre se va a enclavar en el primer minino que encuentre, global o no.
- Sin embargo tanto el Templado Simulado, como la distribución de Ley de Potencias requieren que mas parametros sean parametrizados.
- Durante la experimentación con la funcion Schwefel, no fue posible encontrar parametros para ninguno de los metodos evaluados, que producirán una convergencia al mínimo global conosido de esta función.
- Para la función Schwefel, el método de templado simulado junto con la distribución de ley de potencias encontró el punto candidato con el menor valor, sin embargo la convergencia a este punto no es contundente.
- El algoritmo genético canónico con los diferentes metodos de selección implementados, superaron en todos los casos a los método previos. Esto dado que al final de cada ejecución, dentro de los individuos resultates siempre se encontró al menos un individuo con un costo menos a los optenidos, con los metodos iniciales.

- El algoritmo genetico canonico require de menos interacciones para converger.
- De todos los algoritmos con que se experimento, HAEA presenta la desviacion mas reducida de todos, es decir los individuos de las poblaciones finales tienden a ser identicos con este algoritmo.
- En el dominio de los reales el método de evolución diferencial, presento un ejecución con resultados mas satisfactorios respecto a las estrategias evolutivas.

## XI. ANEXO

<https://github.com/sergiojx/minmethods>

## REFERENCIAS

- [1] Haupt, Randy L. and Haupt, Sue Ellen. *Practical Genetic Algorithms Chapter 2 The Binary Genetic Algorithm*. John Wiley & Sons, Inc.,New York, NY, USA, 1998.
- [2] Gomez J. (2004) *Self Adaptation of Operator Rates in Evolutionary Algorithms*. In: Deb K. (eds) *Genetic and Evolutionary Computation – GECCO 2004*. GECCO 2004. Lecture Notes in Computer Science, vol 3102. Springer, Berlin, Heidelberg
- [3] Beyer, HG. & Schwefel, HP. *Evolution strategies – A comprehensive introduction*. Natural Computing (2002) 1: 3. <https://doi.org/10.1023/A:1015059928466>
- [4] Gomez J. (2019) *Stochastic global optimization algorithms: A systematic formal approach*. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020025517305248> <https://doi.org/10.1023/A:1015059928466>