§ 6. Функция Грина для волнового уравнения

Волновые уравнения (6.37), (6.38) и (6.52) имеют одинаковую структуру

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\mathbf{r}, t), \tag{1}$$

где $f(\mathbf{r}, t)$ задает распределение источников, а c представляет собой скорость распространения волн в пространстве.

Для решения уравнения (1), так же как в электростатике, полезно найти сначала функцию Грина. Поскольку теперь поля зависят и от времени, функция Грина будет зависеть от переменных $(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$ и должна удовлетворять уравнению

$$\left(\nabla^2_{\mathbf{r}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t'). \tag{2}$$

Решение уравнения (1) в неограниченном пространстве без граничных поверхностей выражается через G интегралом

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t')\, d^3\mathbf{r}'\, dt'. \tag{3}$$

Нужно, конечно, потребовать, чтобы функция Грина удовлетворяла определенным граничным условиям, которые задаются физическими требованиями.

Основная функция Грина, удовлетворяющая уравнению (2), зависит только от разностей координат $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ и времен $(t - t')$. Для нахождения G представим обе части уравнения (2) в виде интегралов Фурье. Дельта-функцию в правой части можно представить следующим образом:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\mathbf{k} \int d\omega\, e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} e^{-i\omega(t-t')}. \tag{4}$$

Соответственно запишем функцию G в виде

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \int d^3\mathbf{k} \int d\omega\, g(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} e^{-i\omega(t-t')}. \tag{5}$$