

# Зміст

---

<b>1</b>	<b>Базові поняття та рівняння</b>	<b>2</b>
1.1	Величини, що спостерігаються в електродинаміці . . . .	2
1.2	Рівняння електромагнітного поля . . . . .	9
1.3	Закони збереження . . . . .	15
1.4	Межі застосовності класичної електродинаміки . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Розв'язки рівнянь Максвелла</b>	<b>21</b>
2.1	Потенціали електромагнітного поля . . . . .	21
2.2	Потенціали ізольованої системи зарядів і струмів . . . .	24
2.3	Задача Коші для рівнянь Максвелла . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Вільне електромагнітне поле</b>	<b>34</b>
3.1	Спектральний розклад і плоскі хвилі . . . . .	34
3.2	Випадкові поля випромінювання . . . . .	39
3.2.1	Параметри Стокса . . . . .	44
3.3	Співвідношення невизначеностей . . . . .	45
3.4	Загальний розв'язок рівнянь вільного поля . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Випромінювання</b>	<b>52</b>
4.1	Поле заряду, що рухається з прискоренням . . . . .	53
4.2	Довгохвильове випромінювання . . . . .	57
4.3	Розсіювання електромагнітних хвиль . . . . .	62
	<b>Література</b>	<b>67</b>

# 1

## Базові поняття та рівняння

---

### 1.1. Величини, що спостерігаються в електродинаміці

**Заряд, електричне та магнітне поле.** Основними спостережуваними величинами в електродинаміці є електричний заряд та електромагнітне поле — сукупність електричного та магнітного полів. Статичні заряди створюють електричне поле, рух зарядів спричинює магнітне поле. Навпаки, електромагнітне поле створює силу, що діє на заряджене тіло. Ця схема відповідає концепції близькодії, яка домінує в сучасній фізиці; за цією концепцією заряди взаємодіють між собою через електромагнітне поле, а не безпосередньо.

**Закон Кулона.** Числовою характеристику заряду можна дати, вимірюючи силу взаємодії  $F$  між двома точковими нерухомими зарядами. Якщо ці заряди розташовані на відстані  $R$ , за абсолютною величиною:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{R^2}, \quad (1.1)$$

де  $q_1, q_2$  — заряди тіл,  $k$  — коефіцієнт пропорційності, що залежить від вибору системи одиниць. Це співвідношення називають законом Кулона; воно неодноразово перевірялося різними експериментальними методами. Сила, з якою один заряд діє на інший, направлена вздовж лінії центрів зарядів. З спостережень відомо, що існують лише два сорти електричних зарядів, причому заряди однакового сорту завжди притягуються, а заряди різного сорту — відштовхуються. Цю обставину враховуємо, вводячи знаки зарядів в формулі (1.1). Від'ємними вважаються заряди того ж сорту, що й заряд електрона. Заряд є адитивною числовою величиною: заряд будь-якої системи є алгебраїчною сумою зарядів його підсистем.

Формула (1.1) дає змогу визначити заряд й подати процедуру його вимірювання (тобто спосіб порівняння заряду з деяким еталоном) за допомогою вимірювання сили взаємодії. В гаусовій системі одиниць два одиничних заряди створюють силу взаємодії 1 дина =  $1 \text{ г} \cdot \text{см}/\text{с}^2$ , якщо знаходяться на відстані 1 см. Відповідно в (1.1) слід покласти

$k = 1$ . Це — означення одиничного заряду в гаусовій системі (тут одиниця заряду не має спеціальної назви):

$$[q] = \text{г}^{1/2} \cdot \text{см}^{3/2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Підкреслимо, що в (1.1) йдеться про точкові сферичні заряди, тобто такі, взаємодія яких не залежить від їх орієнтації. Справа в тому, що хоча точкове тіло — це таке, розмірами якого можна знехтувати, в конкретній задачі розподіл зарядів всередині цього тіла може бути різко неоднорідним. Це спричинюватиме, взагалі кажучи, відмінність сили взаємодії від (1.1). Прикладом може служити взаємодія точкових диполів. Далі під точковим зарядом ми будемо розуміти саме сферичний точковий заряд, якщо немає інших застережень.

**Напруженість електричного поля та індукція магнітного поля.** Числову характеристику електромагнітного поля можна дати, вимірюючи сили, що діють на рухомий електричний пробний заряд. Пробний заряд — це такий, впливом якого на зовнішнє поле можна знехтувати. З експерименту відомо, що на заряджене точкове пробне тіло (сферичний точковий заряд) в електромагнітному полі діє сила Лоренца:

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right), \quad (1.2)$$

де  $q$  — заряд тіла що не залежить від швидкості,  $\mathbf{v}$  — його швидкість, а вектори  $\mathbf{E}$  та  $\mathbf{B}$  не залежать від тіла і є характеристиками поля; коефіцієнт  $c$  визначається системою одиниць.

Вектор  $\mathbf{E}$  називають напруженістю електричного поля,  $\mathbf{B}$  — індукцією магнітного поля. Сукупність цих двох векторів, заданих в кожній точці простору, повністю визначають стан електромагнітного поля в класичній фізиці. Формула (1.2) також дозволяє узагальнити процедуру визначення заряду на випадок руху тіла. Адже спосіб, що базується на законі Кулона (1.1), працює лише для нерухомих зарядів. Спостерігаючи за рухом заряджених частинок, можна визначити (див. вправу 1.1) напруженість електричного поля та індукцію магнітного поля. Звичайно, на практиці існують більш зручні методи вимірювання  $\mathbf{E}$  та  $\mathbf{B}$ .

**1.1.** Нехай в експерименті визначають прискорення в однорідному електромагнітному полі електронів з заданими початковими швидкостями. Покажіть, що це дає змогу однозначно визначити вектори  $\mathbf{E}$  та  $\mathbf{B}$  за формулою (1.2).

В гаусовій системі одиниць коефіцієнт  $= 2,9979 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$  — швидкість світла, тому розмірності  $\mathbf{E}$  та  $\mathbf{B}$  формально однакові:

$$[E] = [B] = \text{г}^{1/2} \cdot \text{см}^{-1/2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Одиниця магнітної індукції має назву «Гаусс». Її не застосовують у випадку електричного поля, хоча формально його напруженість має цю ж розмірність.

### **Основні властивості зарядів та електромагнітного поля.**

- Принцип суперпозиції.

Формула (1.2) дає змогу виміряти електромагнітне поле, вивчаючи його вплив на рух точкового заряду, але не дозволяє його розрахувати, виходячи з розподілу зарядів. Для цього потрібні рівняння, що пов'язують певним чином електромагнітне поле з його джерелами. Але перш ніж записати ці рівняння, відзначимо фундаментальний принцип суперпозиції електромагнітних полів: напруженість електричного поля  $\mathbf{E}$  та індукція  $\mathbf{B}$  магнітного поля, створюваних системою зарядів, є сумою полів  $\mathbf{E}_k$ ,  $\mathbf{B}_k$ , що створюються окремими зарядами (або підсистемами) цієї системи:

$$\mathbf{E} = \sum_k \mathbf{E}_k, \quad \mathbf{B} = \sum_k \mathbf{B}_k. \quad (1.3)$$

Тут поле  $(\mathbf{E}_k, \mathbf{B}_k)$   $k$ -ї підсистеми розглядається окремо. Це твердження, яке значно спрощує розв'язання задач електродинаміки, випливає з дослідних даних. Взагалі кажучи, можна навести приклади, коли фізичні поля не задовольняють принципу суперпозиції. Але ці явища класична електродинаміка не розглядає. В звичайних умовах принцип суперпозиції виконується з дуже високою точністю. Принцип суперпозиції тісно пов'язаний з адитивністю заряду.

- Квантування (дискретність) електричного заряду.

З експериментів відомо, що найменшим відомим зарядом є заряд електрона, що наближено дорівнює (за абсолютною величиною)  $= 4,8 \cdot 10^{-10}$  одиниць гаусової системи. Заряд електрона є від'ємним; заряд протона – додатний і дорівнює заряду електрона з оберненим знаком. Будь-які заряди, що спостерігалися, кратні заряду електрона. Пошуки вільних зарядів, менших за  $e$ , або не кратних цій величині, дали негативний результат. Зауважимо, що відхилення зарядів протона й електрона призвело б до порушення електронейтральності атомів, що суперечить експериментальним даним. Слід відзначити, що сучасні експерименти дають змогу вивчати розподіл заряду всередині елементарних часток. Але наявність неперервного розподілу густини заряду всередині, наприклад, протона чи нейтрона, яка досліджується при зіткненнях елементарних часток, не суперечить квантуванню електричного заряду. Ця властивість стосується повного заряду частинок, що можуть існувати ізольовано від інших.

- Інваріантність електричного заряду.

Величина заряду не залежить від його швидкості відносно спостерігача. Неінваріантність заряду також могла б призвести до порушення електронейтральності атомів, оскільки електрони в атомах рухаються з швидкостями до  $0,1$  с; величина швидкості електронів різна на різних оболонках і відрізняється в різних атомах.

- Збереження електричного заряду.

Якщо вважати встановленим факт квантування заряду, то збереження заряду в звичайних умовах пов'язано зі збереженням кількості протонів та електронів в атомах. Однак відомо, що електричний заряд зберігається і тоді, коли мають місце взаємоперетворення елементарних часток.

Область застосовності законів збереження, квантування та інваріантності електричного заряду виходить далеко за рамки класичної електродинаміки. На цей час порушення цих законів невідомі.

## Розподіли зарядів та струмів.

- Сила струму.

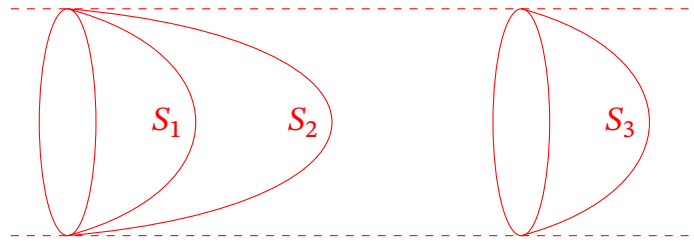
Дамо числову характеристику електричного струму — впорядкованого руху носіїв заряду. Нехай поверхня  $S$  є орієнтованою, тобто визначений певний додатній напрямок перетину цієї поверхні. Нехай  $q(t)$  — сумарний заряд, що перетнув  $S$  з урахуванням напрямку за час  $t$  з початку відліку. Тоді, за визначенням, сила струму через поверхню  $S$  (в додатному напрямку) є:

$$I_S(t) = \frac{dq(t)}{dt}. \quad (1.4)$$

У разі сталого струму — це заряд, що перетинає  $S$  за одиницю часу.

- Здавалося б, що запис (1.4) не є цілком коректний, оскільки заряди дискретні і  $q(t)$  змінюється стрибками. Однак завдяки малості цих стрибків  $q(t)$  можна апроксимувати гладкою функцією, що є цілком правомірно в макроскопічних застосуваннях.
- Необхідними елементами визначення сили струму є поверхня  $S$  та її орієнтація. Але якщо йдеться про сталий струм в провідникові, форма перерізу, через який обчислюється струм, не є суттєвою. Завдяки закону збереження заряду струм через  $S_1$ ,  $S_2$  та  $S_3$  (див. рис. 1.1) однаковий. Адже у разі супротивного заряд з часом міг би накопичуватися, наприклад, між  $S_1$  та  $S_2$ , що суперечило б умові стаціонарності.
- Мікроскопічний та макроскопічний підхід в електродинаміці.

Рис. 1.1



Мікроскопічний підхід оперує з якомога точними значеннями величин, що характеризують електромагнітні взаємодії з врахуванням будови речовини і в цьому розумінні він є найбільш повним та послідовним. Але використання мікроскопічного підходу не завжди доцільно. Приклад такої ситуації – попереднє обговорення формули (1.4)). У макроскопічних вимірюваннях амперметр вимірює усереднене значення сили струму, і тут можна не зважати на дискретну будову електрики. Це дає змогу застосовувати відповідну математичну модель процесу вимірювання, яка працює з гладкими функціями  $I_S(t)$  та  $q(t)$  в (1.4)). Якщо треба охарактеризувати нерівномірність розподілу зарядів в об'ємі, можна також використовувати ідеалізацію, коли вводиться густина заряду, яка є неперервною функцією координат. Це можливо, якщо кожна ділянка цього об'єму, де виконують вимірювання, містить досить велику кількість елементарних зарядів. Далі під макроскопічними величинами будемо розуміти такі, що отримані внаслідок деякого усереднення — за часом або у деяких просторових масштабах. З одного боку макроскопічний підхід пов'язаний з можливостями конкретного фізичного експерименту, в якому мікробудова може бути несуттєвою, з іншого боку, застосування неперервних розподілів дає змогу застосувати апарат математичного аналізу для опису явищ.

- Густина заряду.

Для опису заданого просторового розподілу заряду введемо функцію  $\rho$ , що може залежати від координат та від часу і дозволяє обчислити заряд в будь-якій області  $\Omega$  за формулою:

$$q_{\Omega} = \iiint_{\Omega} \rho(t, \mathbf{r}) dV \quad (1.5)$$

де  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ ,  $dV = dx dy dz$ .

Інакше, елемент заряду в об'ємі  $dV$  — це є  $dq = \rho(t, \mathbf{r})dV$ .

Функцію  $\rho(t, \mathbf{r})$  називають густиною заряду. Для сталого розподілу це є величина заряду в одиниці об'єму.

Якщо в середовищі присутні однакові носії з зарядом  $q$  й об'ємною густиною їх числа (концентрацією)  $n$ :

$$\rho = qn \quad (1.6)$$



а в більш загальному випадку:

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \sum_k q_k n_k(t, \mathbf{r}), \quad (1.7)$$

де індекс  $k$  відповідає різним сортам носіїв заряду, кожен із своєю концентрацією.

- Густина струму.

Цю величину можна визначити формулою для сили струму через поверхню  $S$ :

$$I_S(t) = \iint_S \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.8)$$

де  $\mathbf{j}$  — вектор густини струму, що не залежить від  $S$ ,  $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ ,  $\mathbf{n}$  — нормаль до елемента поверхні  $dS$ . Густина сили струму дає напрям руху зарядів в даному елементі об'єму і за абсолютною величиною — силу струму через одиничний переріз, проведений перпендикулярно до цього напрямку. Маємо:

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v} \quad (1.9)$$

якщо усі заряди з концентрацією  $n$  мають однакову швидкість  $\mathbf{v}$  та заряд  $q$ , або для декількох сортів носіїв заряду:

$$\mathbf{j} = \sum_k q_k n_k \mathbf{v}_k \quad (1.10)$$

Ще більш загальний вираз можна записати за наявності розподілу за швидкостями:

$$\mathbf{j} = \sum_k \int q_k f_k(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \mathbf{v}_k dV_x dV_y dV_z, \quad (1.11)$$

де  $f_k(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$  — функція розподілу  $k$ -го сорту зарядів за швидкостями.

- Поверхневі заряди та струми.

Якщо електричні заряди зосереджені у тонкому прошарку поблизу деякої поверхні, доцільно ввести поверхневу густину заряду  $\sigma$ . Аналогічно (1.5), покладемо:

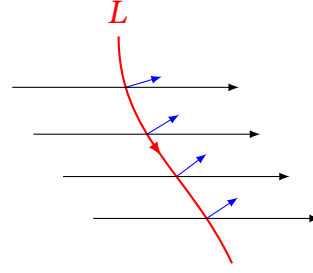
$$q_S(t) = \iint_S \sigma(t, \xi, \eta) dS(\xi, \eta). \quad (1.12)$$

де  $q_S$  — заряд на ділянці  $S$  цієї поверхні,  $\xi$  та  $\eta$  — координати на поверхні;  $\sigma$  характеризує вміст заряду на одиниці площі.

За наявності руху поверхневих зарядів визначимо силу струму через лінію  $L$  (див. рис. 1.2) на цій поверхні:

$$I_L(t) = \frac{dq_L(t)}{dt}, \quad (1.13)$$

Рис. 1.2



де  $dq_L$  — заряд, що перетинає  $L$  за час  $t$  з початку спостереження. Тут також має бути зафіксований додатній напрямок при перетині  $L$  вздовж цієї поверхні. Лінійна густина і поверхневого струму визначається формулою (для будьякої лінії  $L$  на поверхні):

$$I_L(t) = \int_L \mathbf{i}(t, \xi, \eta) d\mathbf{l}(\xi, \eta), \quad (1.14)$$

де  $d\mathbf{l} = \mathbf{n}d\ell$  — орієнтовний елемент довжини на  $L$ ,  $\mathbf{n}$  — нормаль до  $L$  на поверхні у точці інтегрування.

**Математичний запис закону збереження заряду.** Нехай  $q_\Omega$  — заряд в деякому об'ємі  $\Omega$ ,  $\partial\Omega$  — поверхня, що обмежує цей об'єм,  $I_{\partial\Omega}$  — струм, що виходить через  $\partial\Omega$  назовні з об'єму  $\Omega$  (будемо вважати, що це відповідає додатній орієнтації поверхні  $\Omega$ ). Тоді, за законом збереження заряду і за означенням струму (1.4), маємо у кожний момент часу:

$$\frac{dq_\Omega}{dt} + I_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.15)$$

Співвідношення (1.15) є інтегральною формою закону збереження заряду. Для поверхневих зарядів та струмів можна подати аналогічне співвідношення, що пов'язує швидкість зміни заряду на ділянку поверхні та струм через межу цієї ділянки.

Отримаємо з (1.15) диференціальне співвідношення для густини заряду  $\rho(t, \mathbf{r})$  та густини об'ємного струму  $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$ . Використовуючи визначення (1.5) для нерухомого об'єму:

$$\frac{dq_\Omega}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_\Omega \rho(t, \mathbf{r}) dV = \iiint_\Omega \frac{\partial \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} dV.$$

Тоді з (1.15) та за визначенням густини струму (1.4):

$$\iiint_\Omega \frac{\partial \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} dV + \iint_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Перетворимо інтеграл по замкненій поверхні  $\partial\Omega$ , що оточує об'єм  $\Omega$ , за теоремою Остроградського-Гаусса:

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_\Omega \operatorname{div} \mathbf{j} dV,$$



звідки

$$\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} \right) dV = 0.$$

Це співвідношення виконується для будь-якого об'єму  $\Omega$ , тому підінтегральний вираз має дорівнювати нулю:

$$\frac{\partial \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (1.16)$$

Це диференціальна форма закону збереження заряду або рівняння неперервності для об'ємної густини зарядів.

## 1.2. Рівняння електромагнітного поля

**Мікроскопічні рівняння Максвелла (інтегральна форма).** В цьому розділі буде розглянута система рівнянь, яка дає змогу аналізувати електродинамічні явища в усій класичній області від мікроскопічних до макроскопічних масштабів. В рамках класичної електродинаміки ці рівняння вважаються точними, вони не містять наближень і явно враховують усі заряди і струми в рамках конкретного явища або теоретичної моделі. Далі будемо називати ці рівняння мікроскопічними — на відміну від макроскопічних рівнянь, які припускають певні наближення або макроскопічні усереднення, наприклад, для опису поляризаційних зарядів і струмів намагнічення, що виникають у суцільному середовищі. Мікроскопічні рівняння отримано дослідним шляхом за допомогою узагальнення великої кількості експериментальних даних. Вихідною для нас буде інтегральна форма рівнянь Максвелла, з якої далі будуть отримані граничні умови і диференціальна форма цих рівнянь. Інтегральна форма мікроскопічних рівнянь має вид:

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q_{\Omega}, \quad (1.17)$$

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (1.18)$$

$$(1.19)$$

де  $\Omega$  — довільний нерухомий об'єм,  $\partial\Omega$  — його межа;  $S$  — довільна нерухома орієнтована поверхня,  $\partial S$  — замкнений контур, що її обмежує,  $q_{\Omega}$  — повний заряд в області  $\Omega$ .

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.20)$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} I_S + \frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.21)$$

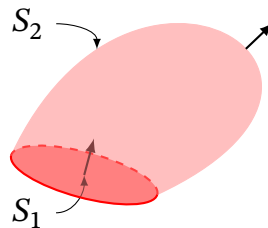
де  $S$  — довільна нерухома орієнтована поверхня,  $\partial S$  — замкнений контур, що її обмежує.  $I_S$  — струм через  $S$  у додатному напрямку.

В літературі можна зустріти форму рівнянь електродинаміки для об'ємів та поверхонь, що деформуються із часом. Зокрема, замість рівняння (1.20) часто використовують зв'язок між електрорушійною силою, що виникає у рухомому провідникові, та зміною потоку магнітного поля через поверхню, що обмежена контуром цього провідника. Цей зв'язок можна отримати з записаних рівнянь, якщо при обчисленні е.р.с. врахувати також внесок сил, що діють на носії струму з боку магнітного поля.

### Сумісність рівнянь Максвелла із законом збереження заряду.

Наявність довільного об'єму  $\Omega$  та довільної поверхні  $S$  в рівняннях Максвелла є дещо незвичайним; принаймні, треба перевірити, чи не призводить це до неоднозначностей. Наприклад, в рівнянні (1.21) ми можемо вибрати різні поверхні  $S_1$  і  $S_2$ , що мають спільну межу  $\partial S$  (рис. 1.3).

Рис. 1.3



Тоді з рівняння (1.21) легко отримати:

$$\frac{4\pi}{c} (I_{S_1} - I_{S_2}) + \frac{1}{c} \left( \iint_{S_1} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \right) = 0 \quad (1.22)$$

Чи суперечить це іншим рівнянням? Виявляється, ні, якщо врахувати закон збереження заряду. Нехай  $\Omega$  — це область, оточена поверхнями  $S_1$  та  $S_2$ . Межа  $\partial\Omega$  має орієнтацію, спільну з однією з цих поверхонь і протилежну до іншої на відповідних ділянках. Тоді рівняння (1.22) можна переписати так:

$$4\pi I_{\partial\Omega} + \frac{d}{dt} \iint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (1.23)$$

де похідну винесено за знак інтегралу. Оскільки поверхневий інтеграл тут в силу (1.17) пов'язаний із зарядом  $q_\Omega$  в області  $\Omega$ , звідси:

$$I_{\partial\Omega} + \frac{q_\Omega}{dt} = 0. \quad (1.24)$$

Таким чином, рівняння (1.22) тотожно виконується внаслідок рівняння (1.17) та закону збереження заряду (1.24). У разі рівняння (1.20) ми можемо також вибрати різні поверхні інтегрування з однаковою межею; тут аналогічні міркування з огляду на рівняння (1.18) також показують відсутність суперечностей.

**Диференціальна форма рівнянь Максвелла.** В рівнянні (1.17) за означенням:

$$q_\Omega = \iiint_{\Omega} \rho dV \quad (1.25)$$

де  $\rho$  — об'ємна густина заряду. За теоремою Остроградського-Гаусса ліва частина (1.17) також зводиться до об'ємного інтегралу, звідки:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \iiint_{\Omega} \rho dV$$

зважаючи на довільність області  $\Omega$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (1.26)$$

Аналогічно, з (1.18) маємо:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.27)$$

В рівнянні (1.20) перетворимо ліву частину за теоремою Стокса:

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

звідки, з урахуванням довільності  $S$ :

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.28)$$

Аналогічно, виражаючи також згідно до (1.24) струм у правій частині eqrefInt IV через інтеграл від густини струму  $\mathbf{j}$ , отримаємо:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.29)$$

Рівняння (1.26) – (1.29) складають систему мікроскопічних рівнянь Максвелла у диференціальній формі.

З рівнянь Максвелла (1.26), (1.29) можна виразити густини заряду та струму через напруженості полів. Виникає питання, чи не суперечитимуть ці рівняння закону збереження заряду (1.24), де цих напруженостей немає. Це питання вище було розглянуто на основі інтегральної форми рівнянь Максвелла. Покажемо це також за допомогою диференціальної форми рівнянь. Візьмемо дивергенцію від обох частин (1.24) враховуючи, що  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$ :

$$0 = \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E}.$$

Підставляючи  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  з (1.26) отримаємо:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

що збігається з рівнянням неперервності (1.24) — диференціальною формою закону збереження заряду. Зауважимо, що обчислення дивергенції від обох частин (1.28) з урахуванням (1.27) приводить до тотожності.

**Умови на поверхні розриву.** Досить часто трапляється ситуація, коли поля  $\mathbf{E}$  або  $\mathbf{B}$  мають розриви першого роду на деякій поверхні  $S$ , залишаючись скінченними і неперервними при переміщеннях вздовж цієї поверхні. Це пов'язано з існуванням поверхневих зарядів та струмів на  $S$  з густинами  $\sigma$  та  $\mathbf{i}$  відповідно.

Для отримання граничних умов на поверхні розриву, розглянемо довільний досить малий елемент поверхні  $S$ , котрий можна вважати майже плоским.

Нехай  $\mathbf{n}$  — нормаль до площини розриву, що розділяє 1 та 2, причому  $\mathbf{n}$  напрямлена з 1 в 2

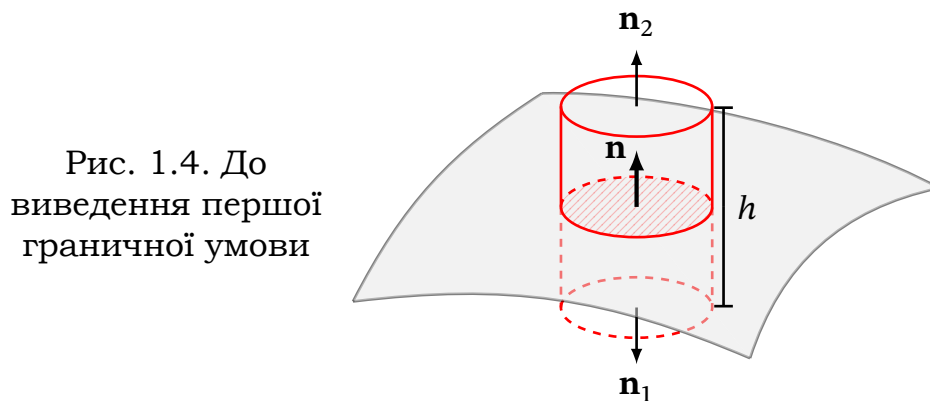


Рис. 1.4. До виведення першої граничної умови

Нехай  $\Omega$  — область всередині циліндра (рис. 1.4), з основами  $S_1$  та  $S_2$ , паралельними  $S$ , причому  $S_1$  лежить у середовищі 1,  $S_2$  — в 2, а висота циліндра дорівнює  $h$ .

Застосуємо рівняння (1.17) розбиваючи інтеграл по  $\partial\Omega$  на частини, що відповідають  $S_1$ ,  $S_2$  та боковій поверхні циліндра  $\partial\Omega'$ :

$$\iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\partial\Omega'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q_\Omega,$$

де повний заряд всередині  $\Omega$  складається в загальному випадку з неперервно розподіленого об'ємного заряду із інтегрованою об'ємною густиною  $\rho$  та поверхневого заряду з поверхневою густиною  $\sigma$  на  $S$ :

$$q_\Omega = \iiint_{\Omega} \rho dV + \iint_S \sigma dS.$$

Якщо висота  $h \rightarrow 0$ , об'єм та бокова поверхня циліндра також прямують до нуля, а з ними й інтеграли по об'єму та по бічній поверхні. Відкидаючи ці інтеграли, отримаємо:

$$\iint_{S_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q_\Omega.$$

Оскільки:

$$\iint_{S_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} = - \iint_S \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n} dS, \quad \iint_{S_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n} dS,$$

де враховано напрямки нормалей до  $\partial\Omega$  на  $S_1$  та  $S_2$ , звідки:

$$\iint_S (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi \iint_S \sigma dS.$$

Завдяки довільності  $S$ , дістаємо співвідношення в будь-якій точці поверхні розриву:

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n} = 4\pi\sigma, \quad (1.30)$$

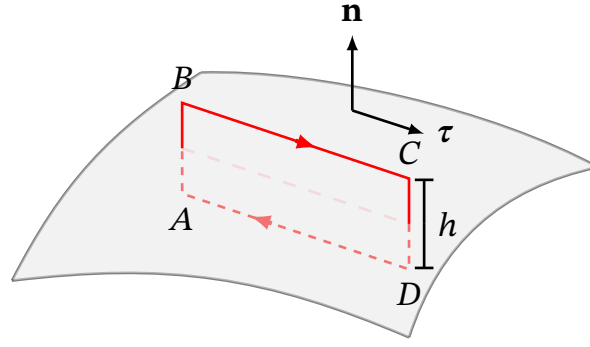
яке пов'язує нормальні до поверхні розриву складові напруженості електричного поля з обох боків розриву.

Щоб отримати зв'язок тангенціальних компонент  $\mathbf{E}$ , звернемося до рівняння (1.20). Розглянемо прямокутний контур, дві сторони  $BC$  і  $AD$  (рис. 1.5) якого паралельні до поверхні розриву.

З рівняння (1.20):

$$\int_{AB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{BC} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{CD} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{DA} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

Рис. 1.5. До виведення другої граничної умови



Інтеграл по  $S$  (за умови неперервності  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ) прямує до нуля при  $h \rightarrow 0$ . Тому, враховуючи напрямок обходу контура, що визначає знак інтегралів по  $BC$  і  $AD$ , можна записати:

$$\int_{BC} (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \boldsymbol{\tau} d\ell = 0$$

де  $\boldsymbol{\tau}$  — тангенціальний одиничний вектор вздовж  $BC$ . Звідси, завдяки довільності вибору контура  $ABCD$ ,

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (1.31)$$

Очевидно, це співвідношення справедливе, якщо  $\boldsymbol{\tau}$  — довільний тангенціальний до поверхні  $S$  одиничний вектор. Легко перевірити, розглядаючи (1.31) для двох незалежних напрямків  $\boldsymbol{\tau}$  на поверхні  $S$ , що еквівалентна формі граничних умов для тангенціальних складових може бути записана так:

$$[\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)] = 0$$

Таким чином, тангенціальна складова напруженості електричного поля не має розриву на  $S$ .

З рівняння Максвелла (1.18) отримуємо співвідношення для нормальних компонент індукції магнітного поля аналогічно (1.30):

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.32)$$

тобто нормальна компонента індукції магнітного поля не має розривів. Це є наслідком відсутності магнітних зарядів, в даному випадку, поверхневих.

На відміну від цього, тангенціальна компонента  $\mathbf{B}$  може мати розриви за наявності поверхневого струму з поверхневою густиною  $\mathbf{i}$ .

Нехай  $\mathbf{n}$  — вектор нормалі до поверхні, проведений з 1 в 2,  $\boldsymbol{\tau}$  — тангенціальний одиничний вектор вздовж  $BC$ , а  $\mathbf{b}$  — вектор, що перпендикулярний до  $\boldsymbol{\tau}$  та  $\mathbf{n}$  і утворює разом з ними праву трійку. Запишемо:

$$\mathbf{B} = B_n \mathbf{n} + B_\tau \boldsymbol{\tau} + B_b \mathbf{b},$$



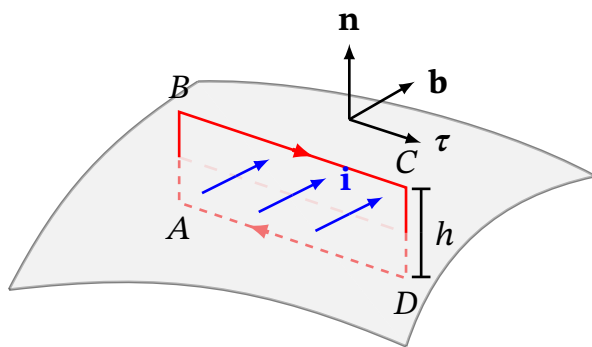


Рис. 1.6. До виведення другої граничної умови для **B**

де напрямок одиничного вектора **b** відповідає напрямку **i**, напрямок одиничного вектора **τ** перпендикулярний до **n** та **b**. З рівняння (1.21) для контура ABCD при  $h \rightarrow 0$ , враховуючи, що за цієї умови інтеграли по сторонам AB і CD прямують до нуля, маємо:

$$\int_{BC} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} + \int_{DA} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \int_{BC} (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \boldsymbol{\tau} d\ell = \frac{4\pi}{c} I_{BC},$$

де  $I_{BC} = \int_{BC} \mathbf{i} \cdot \mathbf{b} d\ell$  — поверхневий струм через BC. Звідси:

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i} \cdot \mathbf{b}. \quad (1.33)$$

Розглядаючи (1.33) для двох незалежних напрямків **τ** можемо написати:

$$[\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}. \quad (1.34)$$

### 1.3. Закони збереження

**Збереження енергії електромагнітного поля.** В електромагнітному полі на заряди діє сила Лоренца (1.2). Потужність, що витрачає ця сила, є:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}.$$

Якщо концентрація зарядів є  $n$ , маємо  $\mathbf{j} = qn\mathbf{v}$ ; тоді потужність, що витрачає електричне поле в одиничному об'ємі, є:

$$\frac{dA}{dt} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (1.35)$$

Легко перевірити, що ця формула зберігається у разі загального розподілу різних зарядів за швидкостями.

З рівняння (1.29):

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

звідси, за формулами векторного аналізу:

$$\begin{aligned}\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \\ &= -\operatorname{div} \left( \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \right) + \frac{c}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 \right)\end{aligned}$$

В силу рівняння (1.28):

$$\begin{aligned}\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} &= -\operatorname{div} \left( \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \right) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 \right) = \\ &= -\operatorname{div} \left( \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{8\pi} \mathbf{B}^2 \right)\end{aligned}$$

Звідси отримуємо важливе співвідношення:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \operatorname{div} \mathbf{\Pi} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} = 0, \quad (1.36)$$

де величину:

$$\mathbf{\Pi} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \quad (1.37)$$

називають вектором Пойнтінга; як буде видно далі, він має зміст густини потоку енергії.

Співвідношення (1.36) виражає енергетичний баланс в одиниці об'єму. Проінтегруємо його по деякій області  $\Omega$ , перетворюючи інтеграл з дивергентним членом в інтеграл по (замкненій) поверхні  $\partial\Omega$ , що оточує  $\Omega$ :

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} dV = 0. \quad (1.38)$$

Перший в доданок в (1.38) — це робота, яку виконує поле за одиницю часу в об'ємі  $\Omega$ , другий — потік енергії через поверхню  $\partial\Omega$ , останній доданок — швидкість зміни енергії електромагнітного поля в об'ємі  $\Omega$ . Величина:

$$W = \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} dV \quad (1.39)$$

являє собою енергію поля в області  $\Omega$ .

**Закон збереження імпульсу.** Імпульс, що передає поле зарядам в одиниці об'єму, визначається силою Лоренца (1.2):

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}].$$

З рівняння Максвелла (1.26):

$$\rho \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E},$$

або для  $k$ -ої компоненти:

$$4\pi\rho E_k = E_k \partial_i E_i = \partial_i (E_i E_k) - E_i \partial_i E_k.$$

Запишемо рівняння (1.28)  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  покомпонентно:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{E})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j E_k = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_i}{\partial t},$$

помножимо його на  $\varepsilon_{pqi}$  і та підсумуємо по  $i$ :

$$\varepsilon_{pqi} \varepsilon_{ijk} \partial_j E_k = -\varepsilon_{pqi} \frac{1}{c} \frac{\partial B_i}{\partial t},$$

або, за допомогою формули згортки:

$$\partial_p E_q - \partial_q E_p = -\varepsilon_{pqi} \frac{1}{c} \frac{\partial B_i}{\partial t}.$$

Враховуючи це співвідношення, дістанемо:

$$\begin{aligned} 4\pi\rho E_k &= \partial_i (E_i E_k) - E_i \partial_k E_i - \frac{1}{c} \varepsilon_{kij} E_i \frac{\partial B_j}{\partial t} = \\ &= \partial_i \left( E_k E_i - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \delta_{ik} \right) - \frac{1}{c} \left[ \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right]_k. \end{aligned}$$

З останнього рівняння Максвелла (1.29)  $\operatorname{vect} j = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]_k &= \varepsilon_{kij} j_i B_j = \frac{1}{c} \varepsilon_{kij} \left[ \frac{c}{4\pi} \varepsilon_{ipq} \partial_p B_q - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E_i}{\partial t} \right] B_j = \\ &= \frac{1}{4\pi} (\delta_{kq} \delta_{jp} - \delta_{kp} \delta_{jq}) B_j \partial_p B_q - \frac{1}{4\pi c} \varepsilon_{kij} \frac{\partial E_i}{\partial t} B_j = \\ &= \frac{1}{4\pi} (B_j \partial_j B_k - B_j \partial_k B_j) - \frac{1}{4\pi c} \left[ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right]_k. \end{aligned}$$

Це можна подати як:

$$\frac{4\pi}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]_k = \partial_j \left( B_k B_j - \delta_{ij} \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) - \frac{1}{4\pi c} \left[ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right]_k.$$

Маємо результат для балансу імпульсу в одиниці об'єму:

$$f_k + T_{kj,j} + \frac{\partial \pi_k}{\partial t} = 0, \quad \pi = \frac{\mathbf{P}}{c^2}, \quad (1.40)$$

де

$$T_{kj} = \frac{1}{4\pi}(E_k E_j + B_k B_j) - \frac{1}{8\pi}\delta_{kj}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$$

максвеллівський тензор натягу.

Інтегральне співвідношення:

$$\iiint_{\Omega} f_k dV + \oint_{\partial\Omega} T_{kj} n_j dS + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \pi_k dV = 0 \quad (1.41)$$

пов'язує зміну імпульсу в об'ємі  $\Omega$  з дією зовнішніх зовнішніх сил та потоком через бічну поверхню; тут  $\pi_k$  — імпульс поля в одиниці об'єму.

**Закон збереження моменту імпульсу.** Виходимо з рівнянь:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = [\mathbf{r} \times \mathbf{f}].$$

Момент сили, що діє на заряди в одиниці об'єму,  $\epsilon$ , за означенням,

$$M_k = \epsilon_{kij} x_i f_j.$$

Використовуючи співвідношення, отримані для балансу імпульсу, маємо:

$$\epsilon_{ijk} x_j f_k + \epsilon_{ijk} x_j T_{kj,j} + \frac{\partial L_i}{\partial t} = 0, \quad \text{де } L_i = \epsilon_{ijk} x_i \pi_k$$

можна інтерпретувати як густину моменту імпульсу поля.

Завдяки симетрії  $T_{kl}$  по індексах:

$$\epsilon_{ijk} x_j T_{kl,l} = \partial_l (\epsilon_{ijk} x_j T_{kl}) - \epsilon_{ijk} \delta_{lj} T_{kl} = \partial_l (\epsilon_{ijk} x_j T_{kl}).$$

Звідси дістаємо локальне співвідношення для зміни моменту імпульсу:

$$M_i + \partial_l (\epsilon_{ijk} x_j T_{kl}) + \frac{\partial L_i}{\partial t} = 0. \quad (1.42)$$

Рівняння балансу моменту імпульсу в об'ємі  $\Omega$  має вид:

$$\iiint_{\Omega} M_i dV + \oint_{\partial\Omega} \epsilon_{ijk} x_j T_{kl} n_l dS + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} L_i dV = 0. \quad (1.43)$$

#### 1.4. Межі застосовності класичної електродинаміки

**Квантова механіка і електродинаміка.** . На сучасному рівні знань найбільш фундаментальним є квантовий розгляд фізичних процесів,

який і визначає межі застосовності класичної теорії. Електродинамічна система складається з заряджених частинок та електромагнітного поля; тут необхідно визначити, яка з цих складових (або уся система в цілому) допускає класичний опис. Широке коло фізичних задач потребує квантового опису руху частинок в класичному електромагнітному полі. Основні зміни, у порівнянні з класичною механікою, тут стосуються рівнянь (1.1), (1.2) та інших, пов'язаних із поняттями траєкторії, сили, другим законом Ньютона, тощо. Перегляд цих понять у дослідженнях атомів та молекул – прерогатива квантової механіки, яка аналізує мікрооб'єкти з розмірами  $10^{-13} \div 10^{-16}$  см. Однак деякі мікропроцеси відзначають властивості твердих тіл і рідин також на макроскопічних масштабах. Хоча рух заряджених частинок в цих задачах визначається законами квантової механіки, досить часто залишаються незмінними класичні поняття про напруженість електричного поля та магнітну індукцію; наприклад, в рівнянні Шредингера для електрона в атомі водню фігурує класичний кулонівський потенціал поля ядра. Звичайно, що для визначення цих полів ми не завжди можемо прямо скористатися формулою (1.2), що пов'язана з механікою точкової частинки. Але зберігається класичний опис електромагнітного поля.

**Квантова будова випромінювання.** За певних умов треба враховувати квантові властивості самого електромагнітного поля. Вивчення рівноважного електромагнітного випромінювання, а також фотоелектричних явищ (М. Планк, 1900; А. Ейнштейн, 1905) привело до висновку, що електромагнітне випромінювання має корпускулярні властивості і може розглядатися як сукупність окремих квантів-фотонів, з енергією  $= h\nu$ , де  $h$  — стала Планка,  $\nu$  — частота випромінювання. Коли фотонів багато, можливий класичний опис поля випромінювання. Але в слабких пучках випромінювання рахунок йде на окремі фотони і сучасна техніка дозволяє майже поодиначку їх реєстрацію. Теоретичну базу для опису процесів, в яких суттєвими є квантові властивості і речовини, і електромагнітного поля, дає квантова електродинаміка, яка є складовою частиною квантової теорії поля. Квантова електродинаміка передбачає суттєві зміни характеру електродинамічної взаємодії також в області дуже сильних полів. В електричному полі з напруженістю  $E \sim \frac{m_e^2 c^3}{\hbar e} = 10^{20}$  В/м необхідно враховувати процеси народження та знищення електрон-позитронних пар. В цих умовах електромагнітне поле не може розглядатися окремо від електрон-позитронного поля, навіть при поширенні електромагнітної хвилі в вакуумі. Складна взаємодія цих полів робить нелінійними ефективні рівняння для класичних величин  $E$  та  $B$ ; завдяки цьому стає можливим процес розсіювання фотона фотоном. В

цьому розумінні можна говорити про порушення класичного принципу суперпозиції.

**Електродинаміка і гравітація.** Взаємодію гравітаційного та електромагнітного полів розглядає загальна теорія відносності. Сильне гравітаційне поле не міняє класичний характер електричного та магнітного полів, але вносить корективи в рівняння електродинаміки на фоні викривлення простору-часу. Вплив гравітаційних ефектів можна оцінити за допомогою параметра  $\mu = |U|/c^2$ , де  $U$  — порядок зміни ньютонівського гравітаційного потенціалу в конкретній задачі. Наприклад, при проходженні променів світла біля Сонця  $\mu = 10^{-6}$ , відповідний порядок величини має кут зміщення віддаленого джерела променів, що його спостерігають з Землі. Гравітаційно-релятивістські ефекти в Сонячній системі необхідно враховувати для правильної інтерпретації найбільш точних астрометричних спостережень.



# 2

## Розв'язки рівнянь Максвелла

### 2.1. Потенціали електромагнітного поля

Існує досить багато методів аналізу рівнянь Максвелла (1.26) – (1.29), серед яких одним з найбільш поширених є введення потенціалів, що дозволяють дещо зменшити число невідомих функцій.

З умови соленоїдальності магнітного поля (1.27) випливає, що існує деяке векторне поле  $\mathbf{A}$ , таке, що:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (2.1)$$

Підставляючи це в (1.28), після елементарних перетворень маємо:

$$\text{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

звідки випливає існування скалярного поля  $\phi$ , такого, що

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.2)$$

Таким чином, якщо шукати електромагнітне поле у вигляді (2.1), (2.2), рівняння (1.27), (1.28) виконуються автоматично.

**Калібрувальна інваріантність.** Формули (2.1), (2.2) не визначають потенціали однозначно. Розглянемо перетворення  $(\phi, \mathbf{A}) \rightarrow (\phi', \mathbf{A}')$ :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi \quad (2.3)$$

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (2.4)$$

Підставляючи в (2.1), (2.2), бачимо, що напруженості електромагнітного поля виражаються через  $\phi'$ ,  $\mathbf{A}'$  подібно до  $\phi$ ,  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}' \quad (2.5)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} \quad (2.6)$$

Таким чином, потенціали  $(\phi, \mathbf{A})$  містять деякі степені свободи, що ніяк не впливають на фізичну ситуацію. Цю обставину називають *калібрувальною інваріантністю* рівнянь поля, а перетворення (2.3), (2.4), або інші, що не впливають на спостережувані величини  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ , називають *калібрувальними перетвореннями*.

**Калібрувальна умова Лоренца.** Калібрувальна інваріантність дозволяє накладати додаткові умови на потенціали  $(\phi, \mathbf{A})$ , за допомогою яких можна привести рівняння до більш зручного вигляду.

Розглянемо умову Лоренца:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.7)$$

Цю умову можна задовольнити за допомогою перетворень (2.3), (2.4). Дійсно, припустимо, що:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = f \neq 0$$

та перейдемо до нових потенціалів  $(\phi', \mathbf{A}')$  за формулами (2.3), (2.4). Тоді:

$$\operatorname{div} \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi'}{\partial t} = f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \nabla^2 \chi$$

Підбираючи функцію  $\chi$  таким чином, щоб  $f = \square \chi$  (де  $\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  – оператор Даламбера), бачимо, що нові потенціали  $(\phi', \mathbf{A}')$  задовольняють калібрувальній умові Лоренца (2.7).

Отримаємо рівняння для  $(\phi, \mathbf{A})$ , припускаючи тепер, що умова (2.7) виконана. З подальшого буде видно, що розв'язки рівнянь, з якими матимемо справу, дійсно задовольняють цій умові. З урахуванням співвідношень (2.2) та (2.7) маємо:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \left( -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi.$$

Тоді з рівняння (1.26) маємо:

$$\square \phi = -4\pi\rho \quad (2.8)$$

Підставимо (2.1) та (2.2) в (1.29):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

де враховано умову Лоренца (2.7). Оскільки члени з скалярним потенціалом  $\phi$  в останній формулі скорочуються, отримуємо:

$$\square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (2.9)$$

Перевіримо, чи сумісні рівняння (2.8) та (2.9) з умовою Лоренца (2.7). Комбінування рівнянь  $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (2.8) + \text{div} (2.9)$  дає:

$$\square \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div} \mathbf{A} \right) = \frac{4\pi}{c} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j} \right). \quad (2.10)$$

За умови Лоренца права частина дорівнює нулю, тобто закон збереження заряду є необхідною умовою існування розв'язку. Навпаки, якщо цей закон виконується, то:

$$\square \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div} \mathbf{A} \right) = 0$$

Останнє співвідношення, якщо його розглядати як рівняння для:

$$f = \text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.11)$$

само по собі не гарантує  $f \equiv 0$ , оскільки розв'язок рівняння:

$$\square f = 0 \quad (2.12)$$

не є єдиним (воно має, наприклад, хвильові розв'язки). Але за умови відсутності зовнішнього випромінювання, коли розглядається обмежена система зарядів і струмів, рівняння (2.12) має тільки тривіальний розв'язок  $f = 0$ . Ця ситуація відповідає запізнюючим розв'язкам рівнянь (2.8) та (2.9), що розглядаються нижче.

**Калібрування Гамільтона.** Розглянемо іншу калібрувальну умову Гамільтона:

$$\phi = 0 \quad (2.13)$$

Це співвідношення також завжди можна задовольнити за допомогою калібрувальних перетворень (2.3), (2.4). Тоді за умови (2.13) рівняння поля (1.26) перепишеться, з урахуванням (2.2), так:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \mathbf{A}) = -4\pi \rho \quad (2.14)$$

Рівняння (1.29) перепишеться, з урахуванням (2.1) та (2.2), так:

$$\square \mathbf{A} + \nabla \text{div} \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (2.15)$$

Перевіримо, чи сумісні рівняння ці рівняння. Застосування дивергенції до лівої частини останнього рівняння дає:

$$\text{div}(\square \mathbf{A} + \nabla \text{div} \mathbf{A}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \text{div} \mathbf{A} + \nabla^2 \text{div} \mathbf{A},$$

або

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{A}) \right] + \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (2.16)$$

Якщо врахувати (2.15), маємо:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

тобто закон збереження заряду (1.16) є необхідною умовою розв'язку (2.15), (2.16) за умови (2.13).

**Калібрування Кулона.** Кулонівське калібрування накладає умову:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (2.17)$$

також може бути виконана за допомогою підбору калібрувального перетворення.

За умовою (2.17) з (1.26) маємо рівняння Пуассона для потенціалу  $\phi$ :

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho \quad (2.18)$$

аналогічно електростатиці.

З іншого рівняння Максвелла (1.29) дістаємо:

$$\square \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (2.19)$$

Для перевірки сумісності (2.18) та (2.19) обчислимо з останнього рівняння з урахуванням (2.17):

$$\square \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathbf{j} - \frac{1}{c} \nabla^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \left( \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right),$$

де підставлено  $\nabla^2 \phi$  з (2.18). Знову рівняння неперервності — закон збереження заряду — виступає як необхідна умова існування розв'язку при заданій калібрувальній умові. Навпаки, якщо виконується рівняння неперервності, для розв'язку (2.19) маємо  $\square \operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  і за відповідних граничних умов дістанемо (2.17).

## 2.2. Потенціали ізолюваної системи зарядів і струмів

В цьому розділі нас цікавитиме поле обмеженої системи, яка є ізолювана. Це означає, що протягом усієї історії системи, починаючи з нескінченного минулого, зовнішніх впливів немає; тобто немає джерел на нескінченності чи якогось зовнішнього випромінювання. На відміну від задачі Коші, коли поля розглядають за  $t > 0$ , а при  $t = 0$

задають початкові умови (разом з граничними умовами на нескінченності), у разі ізолюваної системи будемо розглядати поля за усіх часів, припускаючи, що функції  $\rho(t, \mathbf{r})$  та  $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$  задані на усій дійсній осі  $t$ . Це, зокрема, дозволяє оперувати з перетворенням Фур'є цих функцій за часом. Для ізолюваної системи буде отримано розв'язок рівнянь (2.8), (2.9) у вигляді запізнюючих потенціалів, який застосовується для розгляду різноманітних задач теорії випромінювання.

**Перетворення Фур'є та рівняння Гельмгольца.** Позначимо:

$$\tilde{\phi}(\omega, \vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \phi(t, \mathbf{r}). \quad (2.20)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \mathbf{A}(t, \mathbf{r}). \quad (2.21)$$

— перетворення Фур'є для потенціалів. Оскільки диференціювання за часом індукує множення фур'є-образів на  $(-i\omega)$ , аналог калібрувальної умови Лоренца (2.7) має вигляд:

$$-\frac{i\omega}{c} \tilde{\phi} + \operatorname{div} \tilde{\mathbf{A}} = 0. \quad (2.22)$$

З закону збереження заряду (1.16) маємо:

$$-i\omega \tilde{\rho} + \operatorname{div} \tilde{\mathbf{j}} = 0, \quad (2.23)$$

де

$$\tilde{\rho}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \rho(t, \mathbf{r}), \quad (2.24)$$

$$\tilde{\mathbf{j}}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \mathbf{j}(t, \mathbf{r}). \quad (2.25)$$

Далі розглянемо рівняння для потенціалів саме за умови Лоренца (2.7) або (2.3). З рівнянь (2.8), (2.9), де друга похідна за часом індукує множення на  $-\omega^2$  фур'є-образів, отримаємо рівняння Гельмгольца:

$$\Delta \tilde{\phi} + k^2 \tilde{\phi} = -4\pi \tilde{\rho}, \quad \text{де } k = \frac{\omega}{c}. \quad (2.26)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{A}} + k^2 \tilde{\mathbf{A}} = -\frac{4\pi}{c} \tilde{\mathbf{j}}. \quad (2.27)$$

**Умова випромінювання для ізольованої системи.** Систему зарядів і струмів називатимемо ізольованою, якщо вона зосереджена в обмеженій області за відсутності зовнішнього випромінювання, що йде з нескінченності. Зосередимось на пошуку розв'язку рівняння (2.8) та його фур'є-образу (2.26) для скалярного потенціалу  $\phi$ . Зараз ми зацікавлені у знаходженні розв'язку, що описує поле ізольованої системи джерел. Розглянемо спочатку розв'язок, що відповідає сферично симетричному точковому джерелу, та задовольняє рівнянню:

$$\square \phi = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\chi(t, \mathbf{r}'),$$

де  $\chi(t, \mathbf{r}') = 4\pi\rho(t, \mathbf{r}_0)$ . Очевидно, розв'язок (2.8) можна подати, як суперпозицію таких розв'язків з різними  $\mathbf{r}'$ .

Нехай  $\mathbf{r}' = 0$ . Поле, що створюється точковим джерелом у точці  $\mathbf{r}$ , є сферично-симетричним  $\phi = \phi(t, r)$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ . Завдяки сферичній симетрії:

$$\square \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right).$$

Покладемо  $\phi = \frac{\psi}{r}$ , тоді за  $r > 0$ :

$$\square \phi = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) = 0.$$

Це одновимірне хвильове рівняння, яке має загальний розв'язок:

$$\psi = f_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{c}\right),$$

де  $f_1$  та  $f_2$  — довільні функції однієї змінної. Тут  $f_1$  описує хвилі, що випромінюються джерелом, а  $f_2$  — хвилі, що приходять з нескінченності. За відсутності зовнішнього випромінювання слід покласти  $f_2 = 0$ . Звідси:

$$\phi = \frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Якщо джерело знаходиться у точці  $\mathbf{r}' \neq 0$ , очевидно:

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} f_1\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right). \quad (2.28)$$

**Умова випромінювання і рівняння Гельмгольца.** Для фур'є-образів розв'язку (2.28) маємо:

$$\tilde{\phi}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \exp\left[i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|\right] \tilde{f}_1(\omega), \quad (2.29)$$



де

$$\tilde{f}_1(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\xi e^{i\omega\xi} f_1(\xi). \quad (2.30)$$

На великих відстанях

$$\tilde{\phi}(\omega, \mathbf{r}) \sim \frac{e^{i\omega(r-\mathbf{nr}_0)/c}}{r} + O(r^{-2}). \quad (2.31)$$

Очевидно, для будь-якого сферично-симетричного розв'язку рівняння Гельмгольца (2.26) зовні області, де права частина цього рівняння відмінна від нуля, за умови відсутності зовнішнього випромінювання

$$\tilde{\phi}(\omega, \mathbf{r}) \sim \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (2.32)$$

Розв'язок рівняння Гельмгольца, що задовольняє умовам випромінювання, у випадку обмеженої системи джерел має бути суперпозицією розв'язків типу (2.32) з різними  $\mathbf{r}'$  і мати асимптотику

$$\tilde{\phi}(\omega, \mathbf{r}) \approx C(\mathbf{n}) \frac{e^{ikr}}{r} + O(r^{-2}), \quad (2.33)$$

де амплітуда  $C(\mathbf{n})$  залежить лише від кутів.

**Запізнаючі потенціали.** Умови випромінювання однозначно задають поля ізолюваної системи струмів і розв'язки хвильових рівнянь (2.8), (2.9) для потенціалів, а також рівнянь Гельмгольца (2.26), (2.27) для їх Фур'є-перетворень. Розв'язки (2.8), (2.9) можна отримати безпосередньо, використовуючи сферично-симетричний розв'язок (2.28). Але ми проведемо аналогічний розгляд з використанням сферично-симетричного розв'язку рівнянь Гельмгольца, а потім перейдемо до розв'язків (2.8), (2.9) через перетворення Фур'є. Розглянемо рівняння для скалярного потенціалу (2.26) і шукатимемо фундаментальний розв'язок оператора в лівій частині (2.26):

$$\nabla^2 \tilde{G} + k^2 \tilde{G} = \delta(\mathbf{r}) \quad (2.34)$$

Поле, створюване сферично-симетричним точковим джерелом, також є сферично-симетричним, тому можна покласти

$$\tilde{G}(\mathbf{r}) = \frac{g(r)}{r} \quad (2.35)$$

Тоді з (2.32) за  $r > 0$  маємо

$$\frac{d^2 g}{dr^2} + k^2 g = 0 \quad \Rightarrow \quad g = C_1(k) e^{ikr} + C_2(k) e^{-ikr}. \quad (2.36)$$

Враховуючи умову випромінювання, слід покласти  $C_2(k) = 0$ :

$$\tilde{G}(r) = C_1(k) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \text{за } r > 0. \quad (2.37)$$

Залишається визначити  $C_1(k)$ . Коли  $r \rightarrow 0$ , поведінку розв'язку визначає співмножник  $C_1/r$ , а в лівій частині рівняння (2.32) домінує доданок  $\Delta\varphi$ . Тому асимптотика розв'язку за  $r \rightarrow 0$  повинна збігатися з розв'язком рівняння Пуассона для точкового заряду:

$$\Delta\left(\frac{q}{r}\right) = -4\pi q\delta(\mathbf{r}). \quad (2.38)$$

Співставлення за  $r > 0$  дає:

$$\tilde{G}(r) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}. \quad (2.39)$$

Більш послідовний розгляд фундаментальних розв'язків операторів Даламбера та Гельмгольца з точки зору узагальнених функцій див. Додаток 1.

З урахуванням (2.39), за принципом суперпозиції розв'язки рівнянь (2.20), (2.21) за умови випромінювання можна подати згортками:

$$\tilde{\varphi}(\omega, \mathbf{r}) = \int \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp\left[i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right] \tilde{\rho}(\omega, \mathbf{r}'), \quad (2.40)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(\omega, \mathbf{r}) = \int \frac{dV'}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp\left[i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right] \tilde{\mathbf{j}}(\omega, \mathbf{r}'). \quad (2.41)$$

За допомогою оберненого до (2.20), (2.21) перетворення Фур'є маємо:

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \tilde{\varphi}(\omega, \mathbf{r}) d\omega, \quad (2.42)$$

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \tilde{\rho}(\omega, \mathbf{r}) d\omega. \quad (2.43)$$

Звідси та з (2.40)

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \int \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} \tilde{\rho}(\omega, \mathbf{r}') = \int \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(t_{\text{ret}}, \mathbf{r}'), \quad (2.44)$$

де  $t_{\text{ret}} = t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ .

Остаточно запишемо:

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = \int \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho\left(t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \mathbf{r}'\right), \quad (2.45)$$

а також, аналогічно, для розв'язку (2.9):

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{j} \left( t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \mathbf{r}' \right). \quad (2.46)$$

Формули (2.45), (2.46) подають записуючі розв'язки рівнянь (2.8), (2.9), що задовольняють умовам випромінювання в разі обмеженої ізольованої системи зарядів та струмів.

Зауважимо, що (2.45), (2.46) можна записати у вигляді згортки фундаментального розв'язку оператора Даламбера з правими частинами рівнянь (2.8), (2.9) (див. Додаток 1). Цей фундаментальний розв'язок має вигляд:

$$D(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi c} \delta(t^2 - r^2/c^2) \theta(t). \quad (2.47)$$

Згортка з правою частиною (2.8):

$$\phi(t, \mathbf{r}) = 4\pi \int dt' dV' D(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(t', \mathbf{r}'). \quad (2.48)$$

Підставимо (2.47):

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{r}) &= \frac{2}{c} \int dt' dV' \delta \left[ (t - t')^2 - \frac{(r - r')^2}{c^2} \right] \theta(t - t') \rho(t', \mathbf{r}') = \\ &= \frac{1}{c} \int dV' \int \delta \left[ t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right] \rho(t', \mathbf{r}') dt', \end{aligned}$$

що збігається з (2.45) після інтегрування по  $t'$ .

Аналогічно:

$$\mathbf{A}'(t, \mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \int dt' dV' G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{j}(t', \mathbf{r}'). \quad (2.49)$$

Перевіримо виконання калібрувальної умови Лоренца для розв'язків (2.48), (2.49):

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} &= \\ &= \frac{4\pi}{c} \int dt' dV' \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t'} G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) \rho(t, \mathbf{r}) + \left( \frac{\partial}{\partial x_i} G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) J_i(t', \mathbf{r}') \right] = \\ &= \frac{4\pi}{c} \int dt' dV' \left[ - \left( \frac{\partial}{\partial t'} G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) \rho(t', \mathbf{r}') - \left( \frac{\partial}{\partial x_i} G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) J_i(t', \mathbf{r}') \right] = \\ &= \frac{4\pi}{c} \int dt' dV' \left[ G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial t'} \rho(t', \mathbf{r}') + G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial x_i} J_i(t', \mathbf{r}') \right] = \\ &= \frac{4\pi}{c} \int dt' dV' G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \left[ \frac{\partial}{\partial t'} \rho(t', \mathbf{r}') + \text{div } \mathbf{j}(t', \mathbf{r}') \right] = 0 \end{aligned}$$

де  $\mathbf{r} = \{x_i\}$ ,  $\mathbf{r}' = \{x'_i\}$ , в останньому перетворенні проведено інтегрування частинами по  $t'$  та по  $x'_i$  з урахуванням обмеженості області, де густини зарядів та струмів відмінні від нуля.

Таким чином, виконання умови Лоренца для (2.48), (2.49) забезпечено законом збереження заряду.

### 2.3. Задача Коші для рівнянь Максвелла

Як зазначено на початку попереднього розділу, задача Коші, на відміну від розгляду ізолюваної системи, оперує лише з полями  $t \geq t_0$ . Поведінка джерел та полів за  $t < t_0$ , яка може впливати на стан системи за  $t \geq t_0$ , є невідомою. Тому, на відміну від п. 2.2, окрім задання функцій  $\rho(t, \mathbf{r})$ ,  $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$  за  $t \geq t_0$  необхідно задавати певні початкові умови.

Далі для простоти виберемо відлік часу так, що початковий момент  $t_0 = 0$ . Поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  визначають стан електромагнітного поля, якщо вони задані в усьому просторі. З'ясуємо, чи дозволяють рівняння Максвелла однозначно передбачати стан поля при  $t > 0$ , якщо цей стан відомий за  $t = 0$ . Розподіли густини заряду  $\rho(t, \mathbf{r})$  та густини струму  $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$  за  $t \geq 0$  вважаємо заданими, причому при  $t = 0$  задаємо поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , причому вони мають задовольняти рівняння:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (2.50)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.51)$$

Еволюцію полів  $\mathbf{E}$  та  $\mathbf{B}$  визначає інша пара рівнянь Максвелла, що містить похідні за часом:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} - 4\pi \cdot \mathbf{j} \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} \quad (2.53)$$

З будови системи рівнянь видно, що ми можемо задати електромагнітне поле при  $t = 0$ , яке задовольняє рівнянням (2.50) та (2.51), і розв'язувати потім рівняння (2.52) та (2.53) при  $t > 0$ . Однак виникає питання, чи зберігаються при цьому рівняння (2.50) та (2.51) також і при  $t > 0$ ?

Покажемо, що це дійсно так. З рівняння (2.52) маємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} = -4\pi \cdot \operatorname{div} \mathbf{j} = 4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

де враховано закон збереження заряду, або:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\operatorname{div} \mathbf{E} - 4\pi\rho\} = 0.$$

Звідси видно, що співвідношення (2.50) справедливо при  $t > 0$ , якщо воно має місце при  $t = 0$ .

З рівняння (2.53) маємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

звідки видно, що рівняння (2.51) також зберігається при  $t > 0$ .

**Єдиність розв'язків.** Покажемо, що початкові умови, задані при  $t = 0$  всередині кулі

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq c^2 T^2 \quad (2.54)$$

однозначно визначають напруженості поля у точці  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  в момент  $t = T$ . Припустимо, що існують два розв'язки рівнянь Максвелла  $\{\mathbf{E}(t, \mathbf{r}), \mathbf{B}(t, \mathbf{r})\}$  та  $\{\mathbf{E}'(t, \mathbf{r}), \mathbf{B}'(t, \mathbf{r})\}$  з однаковими початковими умовами в області (2.54) та розглянемо їхню різницю  $\Delta\mathbf{E} = \mathbf{E} - \mathbf{E}'$ ,  $\Delta\mathbf{B} = \mathbf{B} - \mathbf{B}'$ , яка, очевидно, задовольняє рівняння:

$$\frac{\partial \Delta\mathbf{E}}{\partial t} = c \cdot \operatorname{rot}(\Delta\mathbf{B}), \quad \frac{\partial \Delta\mathbf{B}}{\partial t} = -c \cdot \operatorname{rot}(\Delta\mathbf{E}).$$

Обчислюючи похідну з урахуванням цих рівнянь:

$$\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta\mathbf{E}^2 + \Delta\mathbf{B}^2) = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div}[\Delta\mathbf{E} \times \Delta\mathbf{B}],$$

маємо співвідношення, аналогічне закону збереження енергії в диференціальній формі:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div}[\Delta\mathbf{E} \times \Delta\mathbf{B}],$$

де  $W = \frac{1}{8\pi} (\Delta\mathbf{E}^2 + \Delta\mathbf{B}^2)$ .

Розглянемо невід'ємну величину:

$$U(t) = \int_{K(t)} W dV, \quad (2.55)$$

де областю інтегрування  $K(t)$  є куля з центром у точці  $\{\mathbf{r}_0\} = \{x_0, y_0, z_0\}$ :

$$K(t) = \{\mathbf{r} : |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \leq R(t)\}, \quad \text{де} \quad R(t) = c(T - t), \quad t \leq T.$$

Перейдемо в інтегралі (2.55) до сферичних координат з центром у  $\mathbf{r}_0$ :

$$U(t) = \int d\Omega \int_0^{R(t)} dr r^2 W(t, r, \theta, \varphi),$$

де інтегрування по кутовій частині  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  виконується по усій одиничній сфері. Враховуючи (2.3), обчислимо:

$$\frac{dU}{dt} = -cR^2(t) \int d\Omega W(t, R(t), \theta, \varphi) + \int_{K(t)} \frac{\partial W}{\partial t} dV =$$

$$= -cR^2 \int d\Omega W - \frac{c}{4\pi} \int_{K(t)} \operatorname{div}[\Delta \mathbf{E} \times \Delta \mathbf{B}] dV =$$

(за формулою Остроградського-Гаусса)

$$= -cR^2 \int d\Omega W - \frac{c}{4\pi} \int_{\partial K(t)} (d\mathbf{S} \cdot [\Delta \mathbf{E} \times \Delta \mathbf{B}]) =$$

$$= -cR^2 \int d\Omega W - \frac{c}{4\pi} \int d\Omega R^2(t) [\Delta \mathbf{E} \times \Delta \mathbf{B}] \cdot \mathbf{n},$$

де  $\partial K(t)$  — поверхня сфери  $r = R(t)$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r = \{\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta\}$  — одиничний вектор нормалі до цієї поверхні;  $d\mathbf{S} = \mathbf{n} R^2 d\Omega$ .

Оскільки:

$$\|\Delta \mathbf{E} \times \Delta \mathbf{B}\| \cdot \mathbf{n} \leq \|\Delta \mathbf{E}\| \cdot \|\Delta \mathbf{B}\| \leq \frac{\Delta \mathbf{E}^2 + \Delta \mathbf{B}^2}{2} \leq 4\pi W,$$

з (2.3) випливає:

$$\frac{dU}{dt} = -cR^2 \int d\Omega W + \frac{c}{4\pi} \int d\Omega [\Delta \mathbf{E} \times \Delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}] \leq 0.$$

Якщо початковий момент  $t = 0$  поля збігаються:

$$\Delta \mathbf{E}(0, \mathbf{r}) = \Delta \mathbf{B}(0, \mathbf{r}) \equiv 0,$$

тому  $U(0) = 0$ . За означенням  $U(t) \geq 0$ , тому нерівність (2.3) означає, що  $U(t) \equiv 0$ , тобто  $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$  у будь-якій кулі  $K(t)$ ,  $t \in [0, T]$ .

Таким чином, розв'язки з однаковими початковими умовами співпадають, тобто ці умови, задані в області (2.54), однозначно задають поле у будь-якій кулі  $K(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

Як видно з наведених міркувань, зміни початкових умов за  $t = 0$  поза областю (2.54) не впливають на поле у точці  $\mathbf{r}_0$ . Це очевидний наслідок скінченості швидкості поширення взаємодій. Аналогічно, збурення поля, що відбуваються в момент  $t$  поза кулею  $K(t)$ , не встигають поширитися до точки  $\mathbf{r}_0$  за час  $R(t)/c = T - t$ . Чим ближче  $t$  до  $T$ , тим меншою є область впливу на цю точку.



Природно, що для визначення поля при  $t = T$  в усьому просторі треба задавати початкові умови також в усьому просторі. Поля, що задають у початковий момент, мають задовольнити рівнянням (2.50) та (2.51); тому стан поля та його майбутня еволюція визначаються чотирма функціями від трьох просторових змінних. Наприклад, можна незалежно задати дві компоненти електричного поля та дві — магнітного.

## Задачі

**2.1.** Вектор-потенціал стаціонарного магнітного поля обмеженої системи струмів на великих відстанях можна наближено подати як  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = c^{-1}r^{-3} \int dV \mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')$ . Записати цей вираз через магнітний момент  $\mathbf{m} = (2c)^{-1} \int dV \mathbf{r} \times \mathbf{j}$ . Відповідь:  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{m} \times \mathbf{r}/r^3$ .

**2.2.** Знайти загальний сферично симетричний розв'язок  $\delta \equiv \delta(k, r)$  рівняння Гельмгольца в вакуумі:

$$\Delta \delta + k^2 \delta = 0 \quad \text{в області} \quad r \geq R > 0.$$

Що в цьому розв'язку залишиться після врахування умови випромінювання (тобто за відсутності зовнішніх хвиль, що приходять до центру)?

**2.3.** Знайти розв'язок  $\delta \equiv \delta(k, r)$  рівняння Гельмгольца  $\Delta \delta + k^2 \delta = -4\pi\rho$  у випадку сферичної симетрії  $\rho \equiv \rho(k, r)$ , за умови відсутності зовнішнього випромінювання. Функція  $\rho \equiv \rho(k, r)$  відмінна від нуля лише в області  $r < R$ . Розв'язок подати у вигляді квадратур. Показати, що при  $R \rightarrow 0$  за умови фіксованого  $\int dV \rho(k, r) = 4\pi \int_0^R dr r^2 \rho(k, r) = q$ , матимемо  $\delta(k, r) = q \exp(ikr)/r$ .

# 3

## Вільне електромагнітне поле

В цьому розділі розглянуто питання, що стосуються вільних електромагнітних полів у вакуумі, тобто за відсутності зарядів та струмів.

### 3.1. Спектральний розклад і плоскі хвилі

**Зведення до додатних частот.** Нехай  $\phi(t)$  — будь-яка функція, пов'язана з електромагнітним полем (наприклад, компонента електричного поля), для якої існує образ Фур'є:

$$\tilde{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \phi(t) \quad (3.1)$$

Обернене перетворення дозволяє обчислити  $\phi(t)$  по функції  $\tilde{\phi}(\omega)$ :

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\phi}(\omega) \quad (3.2)$$

Для функцій  $f(t)$ ,  $g(t)$  та їх образів Фур'є  $\tilde{f}(\omega)$ ,  $\tilde{g}(\omega)$  має місце рівність Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)\tilde{g}^*(\omega)d\omega \quad (3.3)$$

Практично будь-який реальний сигнал можна подати у вигляді суперпозиції монохроматичних сигналів. За допомогою технічних пристроїв можна виділяти, підсилювати чи послабляти певні ділянки спектру сигналу, що відповідають певній області частот. При цьому формальний запис гармонічних сигналів, пропорційних  $\sim e^{i\omega t}$  та  $\sim e^{-i\omega t}$ , відповідає однаковій частоті  $\omega > 0$ . Тому перепишемо усі співвідношення через додатні значення  $\omega$ , враховуючи, що фізичні напруженості полів описуються дійсними функціями.

Якщо  $\phi(t)$  — дійсна функція, то:

$$\tilde{\phi}^*(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \phi(t) = \tilde{\phi}(-\omega) \quad (3.4)$$

Завдяки цьому формулу (3.2) можна переписати так:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\phi}(\omega) + \int_{-\infty}^0 d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\phi}(\omega) \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} d\omega (\hat{\phi}(\omega)e^{-i\omega t} + \hat{\phi}^*(\omega)e^{i\omega t}) \end{aligned}$$

В цю формулу входять значення  $\tilde{\phi}'(\omega)$  лише з додатними частотами, які можна задавати незалежно на відміну від  $\phi(-\omega)$  при  $\omega > 0$ , які пов'язані з  $\phi(\omega)$  формулою (3.4). Формулу зведення до додатних частот можна переписати так:

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Re \int_0^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\phi}(\omega) \quad (3.5)$$

З урахуванням (3.4) для дійсної функції  $f(t)$  можна записати:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 2 \int_0^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (3.6)$$

**Енергетичні співвідношення.** Повна енергія, що проходить через поверхню, що оточує об'єм  $\Omega$  за весь час випромінювання:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_{-\infty}^{\infty} \oint_{\Omega} \Pi dS dt = \frac{c}{4\pi} \oint_{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] dt dS = \\ &= \frac{c}{4\pi} \oint_{\Omega} dS \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\omega) \times \mathbf{B}^*(\omega) \right] d\omega \end{aligned}$$

де  $\mathbf{E}(\omega), \mathbf{B}(\omega)$  — спектральні характеристики дійсних полів  $\mathbf{E}(t), \mathbf{B}(t)$ . Аналогічно (3.4):

$$\mathbf{E}(-\omega) = \mathbf{E}^*(\omega), \quad \mathbf{B}(-\omega) = \mathbf{B}^*(\omega).$$

Тоді, розбиваючи інтеграл по  $d\omega$  на два додатки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \{ \dots \} = \int_{-\infty}^0 d\omega \{ \dots \} + \int_0^{\infty} d\omega \{ \dots \},$$

кожне з яких є комплексним спряженням іншого, аналогічно (3.5), маємо:

$$\mathcal{E} = \frac{c}{2\pi} \oint_{\Omega} dS \left[ \int_0^{\infty} \mathbf{E}(\omega) \times \mathbf{B}^*(\omega) \right] d\omega \quad (3.7)$$

де фігурують вже тільки додатні частоти.

Якщо експериментальна техніка дає змогу виділяти внесок окремих інтервалів частот, доцільно ввести спектральну густину енергії випромінювання.

$$\frac{dg}{d\omega} = \frac{c}{2\pi} \int dS \Re (\mathbf{E}(\omega) \times \mathbf{B}^*(\omega)), \quad \omega > 0 \quad (3.8)$$

Тоді з (3.7):

$$g = \int \frac{dg}{d\omega} d\omega \quad (3.9)$$

**Комплексний формалізм та енергетичні співвідношення для монохроматичних полів.** В попередніх співвідношеннях комплексні величини  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  — це образи Фур'є відповідних дійсних полів. Доцільно розглядати також комплексні поля, які є розв'язками рівнянь Максвелла. Завдяки лінійності рівнянь, дійсні та уявні частини комплексних розв'язків також є розв'язками, але розрахунки з комплексними величинами часто є більш зручними. При розгляді ж спостережних величин або нелінійних (наприклад, енергетичних) співвідношень слід повернутися до дійсних частин розв'язків, які саме мають фізичний зміст.

Проілюструємо це на прикладі комплексних монохроматичних полів, тобто таких, що залежать від часу як  $\exp(-i\omega t)$ ,  $\omega \neq 0$ . Нехай електричне та магнітне поля монохроматичними, тобто

$$\mathbf{E}_{\text{real}}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}'_0(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \alpha), \quad \mathbf{B}_{\text{real}}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{B}'_0(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \alpha) \quad (3.10)$$

Ми зіставляємо їм комплексні поля

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\alpha} \exp(-i\omega t), \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) e^{-i\alpha} \exp(-i\omega t) \quad (3.11)$$

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{E}'_0(\mathbf{r}) e^{-i\alpha}, \quad \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{B}'_0(\mathbf{r}) e^{-i\alpha},$$

дійсні частини яких збігаються з полями  $\mathbf{E}_{\text{real}}$ ,  $\mathbf{B}_{\text{real}}$ .

Вектор Пойнґінга густини потоку енергії виражаємо, як звичайно, через дійсні частини полів:

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{c}{4\pi} \left( \frac{\mathbf{E} + \mathbf{E}^*}{2} \times \frac{\mathbf{B} + \mathbf{B}^*}{2} \right) = \\ &= \frac{c}{8\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{B}) + \frac{c}{16\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}^* \times \mathbf{B}^*).\end{aligned}$$

Складові другого доданку осцилюють як  $\exp(\pm 2i\omega t)$ ; їх середнє за часом дорівнює нулю. Усереднюючи за часом, маємо:

$$\langle \Pi \rangle_t = \frac{c}{8\pi} \Re (\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) \quad (3.12)$$

де символ  $\langle F(t) \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T}^T F(t) dt \right\}$  означає усереднення за часом. Фактично, (3.12) — це вираз для середньої за часом густини потоку енергії через амплітуди монохроматичних електричного та магнітного полів.

Аналогічним чином легко отримати середнє за часом значення густини енергії електромагнітного поля:

$$\langle W \rangle_t = \frac{|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2}{16\pi} \quad (3.13)$$

Зауважимо, що формули (3.12), (3.13) не змінять свого вигляду у разі суперпозиції монохроматичних хвиль з різними частотами. Це очевидно, коли врахувати, що  $\langle \exp[i(\omega_1 - \omega_2)t] \rangle_t = 0$ ,  $\omega_1 \neq \omega_2$ .

Розглянемо монохроматичні плоскі хвилі

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

Підставимо це в рівняння Максвелла. Маємо, за відсутності зарядів та струмів:

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{E} &= i[\mathbf{k} \times \mathbf{E}] = \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}, \\ \text{rot } \mathbf{B} &= i[\mathbf{k} \times \mathbf{B}] = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{E}\end{aligned}$$

а також умову поперечності:

$$\begin{aligned}\text{div } \mathbf{E} &= i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) = 0, \\ \text{div } \mathbf{B} &= i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) = 0\end{aligned}$$

З першого рівняння:

$$[\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]] = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E}k^2 = \frac{\omega}{c} [\mathbf{k} \times \mathbf{B}] = -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}$$

Завдяки умові поперечності маємо:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

— зв'язок між хвильовим вектором та частотою, який називають дисперсійним рівнянням.

Таким чином:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}], \quad (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = 0$$

де  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$  визначає напрям поширення хвилі.

**Плоскі хвилі у загальному випадку.** Монохроматичні плоскі хвилі є частковим видом плоских хвиль, що визначаються, як розв'язки рівнянь електродинаміки, параметри яких не змінюються при переміщеннях вздовж деякої площини — фронту хвилі, нормаль до якої  $\mathbf{n}$  не змінюється з часом. Інакше, просторова залежність цих розв'язків зводиться до залежності від деякої змінної  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})$ ,  $\mathbf{n}^2 = 1$ . Тоді

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}, t), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}, t)$$

Підставляючи в рівняння Максвелла, маємо:

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.14)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.15)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})} = 0 \quad (3.16)$$

Обчислимо  $\text{rot}((3.14))$ :

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{E}) = \nabla(\text{div } \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

З (3.14):

$$-\text{rot} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Тобто:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (3.17)$$

Підставляючи сюди вираз для плоских хвиль  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}, t)$ :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Заміна  $U = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct$ ,  $V = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + ct$  приводить до рівняння:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial U \partial V} = 0$$

загальним розв'язком якого є  $\mathbf{E} = \mathbf{F}_1(U) + \mathbf{F}_2(V)$ , де  $\mathbf{F}_1$  та  $\mathbf{F}_2$  — довільні вектор-функції одної змінної. Розв'язок є суперпозицією двох хвиль, що рухаються в протилежних напрямках.

Якщо  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}, t)$ , з рівняння (3.14) маємо:

$$\mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Якщо перед фронтом  $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$ , звідси  $\mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]$ , як і в плоскій монохроматичній хвилі.

Аналогічно, з (3.15):

$$\mathbf{E} = [\mathbf{B} \times \mathbf{n}], \quad (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) = 0$$

### 3.2. Випадкові поля випромінювання

**Основні характеристики випадкових полів.** Монохроматичні хвилі являють дуже ідеалізований випадок хвильового поля. Найчастіше в природі ми зустрічаємось із суперпозиціями полів, створених випадковими реалізаціями випромінювачів (атомів, молекул тощо). Фізичний опис процесу вимірювання цих величин має справу з обчисленням середніх значень за часом або середніх за деякими просторовими масштабами. Розмір області усереднення в кожному фізичному процесі визначається окремо. Але за певних широких умов цей спосіб усереднення еквівалентний статистичному усередненню, коли замість одного поля розглядають велику кількість реалізацій — ансамбль хвильових полів — і обчислення проводять за допомогою усереднень за ансамблем<sup>1</sup>. Цей підхід добре відомий з статистичної механіки. Його можна застосовувати також при обчисленні електричних та магнітних величин, що вимірюють за допомогою макроскопічних приладів.

Розглянемо спочатку електромагнітне поле, для простоти не звертаючи уваги на ефекти, пов'язані з поляризацією. Тоді це поле можна описувати за допомогою скалярної функції  $\phi(t)$ , що представляє, наприклад, одну з компонент електричного чи магнітного поля, маючи на увазі, що інші компоненти можна розглянути аналогічно. Будемо користуватися комплексним формалізмом (див. п. 3.1); нагадаємо,

<sup>1</sup>Стационарні процеси, для яких часові середні збігаються з середніми за ансамблем, називають ергодичними. Дослідник має вирішити, наскільки модель ергодичного процесу адекватна конкретній фізичній ситуації.

що при цьому в виразі для густини енергії (3.13) фігурують квадрати модулів полів.

Математичний опис стохастичних полів використовує поняття випадкового процесу. Нагадаємо, що випадковий процес  $\phi(t)$  заданий, якщо для будь-якого набору  $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$  заданий спільний розподіл ймовірностей

$$w(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N; t_1, t_2, \dots, t_N)$$

величин  $\phi(t_1), \phi(t_2), \dots, \phi(t_N)$ . Процес називають стаціонарним, якщо спільний розподіл

$$w(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_N + \tau)$$

величин  $\phi(t_1 + \tau), \phi(t_2 + \tau), \dots, \phi(t_N + \tau)$  не залежить від часового зсуву  $\tau$ . Знаючи розподіл ймовірностей значень поля для будь-яких часів  $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ , можна обчислювати середні від лінійних, квадратичних за полем величин тощо. Ці середні в цьому підрозділі ми позначаємо знаком  $\langle \dots \rangle$ . З фізичної точки зору процедуру усереднення можна інтерпретувати, як обчислення середньоарифметичних величин за даними великої кількості експериментів-реалізацій. Така інтерпретація часто є цілком достатньою для проведення обчислень.

Для стаціонарного процесу середнє  $\langle \phi(t) \rangle = \langle \phi \rangle$ . При розгляді випадкових полів випромінювання вважають  $\langle \phi \rangle = 0$ .

Важливою характеристикою випадкового процесу є кореляційна (автокореляційна) функція<sup>1</sup>:

$$A(\tau) = \langle \phi^*(t) \phi(t + \tau) \rangle \quad (3.18)$$

Для стаціонарного процесу:

$$A(-\tau) = \langle \phi^*(t) \phi(t - \tau) \rangle = \langle \phi^*(t + \tau) \phi(t) \rangle = A^*(\tau)$$

не залежить від  $t$ .

Розглянемо формально перетворення Фур'є випадкової функції:

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \phi(t)$$

Щоб надати змісту цьому невластному інтегралу в разі стаціонарного випадкового процесу, для кожної реалізації можна розглядати вираз:

<sup>1</sup>У деяких підручниках у визначенні (3.18) від правої частини віднімають  $\langle \phi(t) \rangle \langle \phi^*(t + \tau) \rangle$ .



$$\Phi_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T dt e^{i\omega t} \phi(t)$$

Обчислимо для стаціонарного процесу:

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\omega) \Phi^*(\omega') \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega-\omega')t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega(t-t')} \langle \phi^*(t') \phi(t) \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega-\omega')t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega(t-t')} A(t-t') \end{aligned}$$

Користуючись відомим співвідношенням:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T dt e^{i(\omega-\omega')t} = 2\pi \delta(\omega - \omega')$$

дістанемо:

$$\langle \Phi(\omega) \Phi^*(\omega') \rangle = \delta(\omega - \omega') S(\omega) \quad (3.19)$$

де

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} A(\tau)$$

називають спектральною густиною (чи спектром потужності) випадкового процесу. Очевидно

$$A(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega\tau} S(\omega)$$

**Когерентність.** Для суперпозиції двох хвильових полів  $\phi_1$  та  $\phi_2$  сумарна інтенсивність визначається квадратичною величиною:

$$I = |\phi_1 + \phi_2|^2 = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + 2\Re(\phi_1 \phi_2^*)$$

а для середніх:

$$\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + 2\Re \langle \phi_1 \phi_2^* \rangle \quad (3.20)$$

де  $I_i = \langle |\phi_i|^2 \rangle$  — інтенсивності окремих полів,  $i = 1, 2$ .

Розглянемо дві протилежних ситуації — повної когерентності та некогерентності двох полів.

**Повна когерентність.** Суперпозиція двох полів, що пов'язані умовою:

$$\phi_2 = \alpha\phi_1 = |\alpha|\phi_1 e^{i\delta}, \quad \text{де } \delta = \text{Arg}\alpha.$$

В цьому разі:

$$\langle \phi_1 \phi_2^* \rangle = \phi_1 \phi_2^* = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

Умова зв'язку між  $\phi_1$  та  $\phi_2$  є випадком ідеальної корельованості, або когерентності цих полів. Такі поля можна отримати при розділенні світлового пучка в інтерферометрі, або, наприклад, у разі двох монохроматичних радіо-джерел, що мають однакову частоту.

**Некогерентність.** Суперпозиція двох незалежних полів, генерованих двома незалежними випадковими випромінювачами:

$$\langle \phi_1 \phi_2^* \rangle = \langle \phi_1 \rangle \langle \phi_2^* \rangle$$

Як правило, для хвильового випадкового поля його середнє значення є нуль:

$$\langle \phi_1 \rangle = \langle \phi_2 \rangle = 0,$$

тому  $\langle \phi_1 \phi_2^* \rangle = 0$ , і загальна інтенсивність є сумою інтенсивностей окремих випромінювачів:

$$I = I_1 + I_2.$$

Випромінювання двох різних природних джерел світла є некогерентним.

**Функція взаємної когерентності.** Величину  $I' = \langle \phi_1 \phi_2^* \rangle$ , яку можна вимірювати за допомогою радіофізичних та оптичних пристроїв, називають функцією взаємної когерентності. Тут  $\phi_1$  та  $\phi_2$  можуть бути двома різними полями, або значеннями одного й того ж поля у різних точках:

$$\phi_1 = \phi(t_1, \mathbf{r}_1), \quad \phi_2 = \phi(t_2, \mathbf{r}_2)$$

Величину

$$\gamma = \frac{\langle \phi_1 \phi_2^* \rangle}{|\phi_1| |\phi_2|}, \quad \text{де } |\phi_i| \equiv \sqrt{\langle \phi_i \phi_i^* \rangle}, \quad i = 1, 2,$$

називають степінню взаємної когерентності. Саме ця величина визначає контрастність смуг в інтерференційній картині від двох пучків світла.

Оскільки, за нерівністю Коші-Буняковського<sup>1</sup>,  $|\langle \phi_1 \phi_2^* \rangle| \leq |\phi_1| |\phi_2|$ , маємо  $|\gamma| \leq 1$ .

**Поляризація.** При розгляді поляризації треба зважати на векторну природу польових функцій, зокрема, напруженості електричного поля. Зауважимо, що для фіксованого напрямку випромінювання досить розглядати лише електричне поле; воно визначає також і вектор напруженості магнітного поля.

Розглянемо поле випромінювання, що поширюється в напрямку осі  $x_3$ , з напруженістю електричного поля  $\mathbf{E} = (E_1, E_2, 0)$ , причому будемо вважати, що поле є суперпозицією монохроматичних хвиль  $\sim e^{-i\omega t}$  з близькими частотами. Напрямок вектора  $\mathbf{E}$ , що є ортогональним напрямку поширення хвилі, визначає поляризацію. Для випадкового поля  $\mathbf{E}$  введемо тензор поляризації:

$$\rho_{ij} = \frac{\langle E_i E_j^* \rangle}{\langle |E_1|^2 \rangle + \langle |E_2|^2 \rangle}, \quad i, j = 1, 2 \quad (3.21)$$

Очевидно, матриця  $\rho$  є ермітовою, а її шпур дорівнює одиниці:

$$\rho_{ji} = \rho_{ij}^*, \quad \rho_{11} + \rho_{22} = 1$$

Для цілком поляризованого випромінювання маємо  $E_i = N_i f(t)$ , де  $f$  може бути випадковою функцією, але вектор  $N_i$ , що визначає напрямок поля, є фіксованим. В цьому разі  $\rho_{ij}$  пропорційне  $N_i N_j^*$  і:

$$\det \rho = 0$$

У разі природного світла присутні усі можливі поляризації, що є рівноправними, причому  $\langle E_1 E_2^* \rangle = 0$ ,  $\langle |E_1|^2 \rangle = \langle |E_2|^2 \rangle$ . В цьому разі:

$$\rho_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij}$$

В загальному випадку визначник матриці  $\rho$  є:

$$\det \rho = \rho_{11} \rho_{22} - |\rho_{12}|^2 = \frac{\langle |E_1|^2 \rangle \langle |E_2|^2 \rangle - |\langle E_1 E_2^* \rangle|^2}{(\langle |E_1|^2 \rangle + \langle |E_2|^2 \rangle)^2}$$

Оскільки  $|\langle E_1 E_2^* \rangle|^2 \leq \langle |E_1|^2 \rangle \langle |E_2|^2 \rangle$ , цей визначник додатний:

$$\det \rho \geq 0$$

З іншого боку, очевидно:

---

<sup>1</sup>Для будь-якого комплексного  $\lambda$  величина  $Z = \langle (\phi + \lambda \psi)(\phi^* + \lambda^* \psi^*) \rangle$  — невід'ємна. Покладемо  $\lambda = -\langle \psi \phi^* \rangle / \langle |\psi|^2 \rangle$ , тоді  $Z = \langle |\phi|^2 \rangle - |\langle \psi \phi^* \rangle|^2 / \langle |\psi|^2 \rangle$ , звідки й випливає потрібне.

$$\det \rho \leq \frac{1}{4}$$

Оскільки область значень  $\det \rho$  є відрізком  $[0, 1/4]$ , можна записати:

$$\det \rho = \frac{1}{4}(1 - p^2), \quad 0 \leq p \leq 1 \quad (3.22)$$

де параметр  $p$  називають ступінню поляризації; він приймає значення від 0 (неполяризоване світло) до 1.

Завдяки властивості ермітовості, власні числа  $\lambda_1, \lambda_2$  матриці  $\rho_{ij}$  є дійсними, причому  $\det \rho = \lambda_1 \lambda_2$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . Зважаючи на (3.22), добуток власних чисел додатний, тобто вони мають один знак. Звідси легко бачити, що ці числа є додатними. Величину  $\lambda_{\min}/\lambda_{\max}$  називають коефіцієнтом деполаризації.

**3.2.1. Параметри Стокса.** Виходячи з властивостей тензора поляризації, поданих формулою (3.21), його компоненти  $\rho_{ij}$  можна виразити через три незалежні дійсні параметри Стокса  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , які приймають значення від -1 до 1:

$$\rho_{11} = \frac{1}{2}(1 + \xi_3), \quad \rho_{22} = \frac{1}{2}(1 - \xi_3), \quad \rho_{12} = \frac{1}{2}(\xi_1 - i\xi_2) = \rho_{21}^*$$

Очевидно:

$$\det \rho = \frac{1}{4}(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2)$$

$$P = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2, \quad 0 \leq \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \leq 1$$

Розглянемо стани поляризації для деяких полів, що відповідають різним параметрам Стокса.

- Лінійна поляризація під кутом  $45^\circ$

Тобто  $E_1 = \pm E_2$ :

$$\rho_{11} = \rho_{22} = \frac{1}{2} \rightarrow \xi_3 = 0; \quad \text{Im } \rho_{12} = 0 \rightarrow \xi_2 = 0;$$

Таким чином:

$$\xi_1 = \pm 1, \quad \xi_3 = \xi_2 = 0$$

- Кутова поляризація

$E_1 = Ae^{-i\omega t}$ ,  $E_2 = \pm iE_1$ . Як видно з поведінки дійсних частин компонент, вектор  $\mathbf{E}$  обертається в площині  $X_1 - X_2$ . Маємо:

$$\rho_{11} = \frac{1}{2}, \quad \rho_{22} = \frac{1}{2}, \quad \rho_{12} = \mp \frac{i}{2}$$

Звідси:

$$\xi_1 = \xi_3 = 0, \quad \xi_2 = \pm 1$$

- Лінійна поляризація вздовж однієї з осей  
 $E_1 \neq 0, E_2 = 0$  або  $E_2 \neq 0, E_1 = 0$ :

$$\rho_{11} = 1, \quad \rho_{22} = 0 \rightarrow \xi_3 = 1,$$

або

$$\rho_{11} = 0, \quad \rho_{22} = 1 \rightarrow \xi_3 = -1,$$

при цьому  $\rho_{12} = 0 \rightarrow \xi_1 = \xi_2 = 0$ .

Таким чином:

$$\xi_1 = \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = \pm 1$$

### 3.3. Співвідношення невизначеностей

Міркування цього розділу застосовні до будь-яких процесів, що можна аналізувати за допомогою перетворення Фур'є, зокрема, до хвильових пакетів, які є суперпозицією плоских хвиль з різними частотами.

Нехай маємо деякий процес, що можна описати за допомогою функції (взагалі кажучи, комплексної) від дійсної змінної  $t$ :

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \cdot e^{-i\omega t} \phi(\omega)$$

Вважатимемо, що  $|\phi(t)|$  та  $|\phi(\omega)|$  досить швидко спадають, якщо відповідно  $|t| \rightarrow \infty$  та  $|\omega| \rightarrow \infty$ .

Введемо величини, що характеризують тривалість процесу, що відповідає функції  $\phi(t)$ , та ширину його спектру відповідно до  $\phi(\omega)$ . Середні значення в  $t$ -просторі обчислюватимемо з вагою  $|\phi(t)|^2$ , а в  $\omega$ -просторі — з вагою  $|\phi(\omega)|^2$ , причому, не зменшуючи загальності, приймемо умову нормування:

$$\int dt \cdot |\phi(t)|^2 = 1$$

Звідси, за рівністю Парсеваля, в  $\omega$ -просторі також:

$$\int d\omega \cdot |\phi(\omega)|^2 = 1$$

Відповідно, середнє значення деякої величини  $F(t)$  у  $t$ -просторі буде:

$$\langle F \rangle_\phi = \int dt \cdot F(t) |\phi(t)|^2,$$

а для  $F(\omega)$  в  $\omega$ -просторі:

$$\langle F \rangle_\phi = \int d\omega \cdot F(\omega) |\phi(\omega)|^2$$

Виберемо відлік часу таким чином, щоби:

$$\int dt \cdot t |\phi(t)|^2 = 0$$

Тоді тривалість процесу  $\phi(t)$  можна описати середньоквадратичним значенням:

$$\langle \Delta t^2 \rangle_\phi = \int dt \cdot t^2 |\phi(t)|^2 \quad (3.23)$$

Відповідно, в  $\omega$ -просторі середнє значення частоти є:

$$\omega_a = \langle \omega \rangle_\phi = \int d\omega \cdot \omega |\phi(\omega)|^2,$$

а ширину спектру частот можна описати величиною:

$$\langle \Delta \omega^2 \rangle_\phi = \langle (\omega - \omega_a)^2 \rangle_\phi = \int d\omega \cdot (\omega - \omega_a)^2 |\phi(\omega)|^2 \quad (3.24)$$

Покажемо, що існує спільне обмеження на ці величини. Для цього перепишемо (3.23) через перетворення Фур'є.

Маємо:

$$t\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \cdot i \frac{de^{-i\omega t}}{d\omega} \phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \cdot e^{-i\omega t} \left\{ -i \frac{d\phi}{d\omega} \right\},$$

тобто помноження на  $t$  індукує диференціювання у просторі частот. Тоді формулу (3.23) можна переписати так:

$$\langle \Delta t^2 \rangle_\phi = \int dt \cdot |t\phi(t)|^2 = \int d\omega \left| \frac{d\phi}{d\omega} \right|^2 \quad (3.25)$$

де застосовано рівність Парсеваля.

Для будь-якого дійсного  $x$ :

$$0 \leq \int d\omega \left| x \frac{d\phi}{d\omega} + (\omega - \omega_a) \phi \right|^2 \equiv \int d\omega \left| x \frac{d\phi}{d\omega} + (\omega - \omega_a) \phi \right| \left[ x \frac{d\phi^*}{d\omega} + (\omega - \omega_a) \phi^* \right].$$

Звідси, за допомогою (3.24) та (3.25), маємо:

$$0 \leq x^2 \langle \Delta t^2 \rangle_\phi + \langle \Delta \omega^2 \rangle_\phi + x \int d\omega (\omega - \omega_a) \left[ \frac{d\phi}{d\omega} \phi^* + \frac{d\phi^*}{d\omega} \phi \right].$$

Вираз у квадратних дужках в останньому доданку є повною похідною, тому інтеграл у правій частині нерівності перетворимо так:

$$\int d\omega (\omega - \omega_a) \frac{d}{d\omega} (\phi \phi^*) = - \int d\omega |\phi|^2 \frac{d}{d\omega} (\omega - \omega_a) = -1.$$

Таким чином:

$$x^2 \langle \Delta t^2 \rangle_\phi + \langle \Delta \omega^2 \rangle_\phi - x \geq 0.$$

Це співвідношення має виконуватися для будь-яких  $x$ , тому дискримінант квадратного тричлена має бути від'ємний. Звідси маємо нерівність:

$$\langle \Delta t^2 \rangle_\phi \langle \Delta \omega^2 \rangle_\phi \geq \frac{1}{4} \quad (3.26)$$

яку називають співвідношенням невизначеностей.

Зауважимо, що в квантовій механіці це дає зв'язок між тривалістю процесу та невизначеністю енергії.

З (3.26) випливає, що сигнал, що близький до монохроматичного, тобто такий, що має малий розкид частот, має бути досить тривалим. Навпаки, короткочасний імпульсний сигнал має широкий спектр частот. Нерівність, аналогічну (3.26), можна отримати для довжини хвильового пакету та ширини інтервалу хвильових векторів у певному напрямі. Квантовий відповідник — співвідношення невизначеностей для імпульсу та координати.

### 3.4. Загальний розв'язок рівнянь вільного поля

Далі буде отримано загальний розв'язок рівнянь Максвелла за відсутності джерел ( $\rho = 0$ ,  $\mathbf{j} = 0$ ). В цьому разі система рівнянь поля є однорідною і описує вільні електромагнітні хвилі. *Загальний розв'язок неоднорідних рівнянь* Максвелла (за наявності зарядів та струмів) може бути побудований як суперпозиція загального розв'язку однорідних рівнянь вільного поля та часткового розв'язку неоднорідних рівнянь.

Скористуємось калібруванням Гамільтона (2.13):

$$\phi = 0 \quad (3.27)$$

З рівняння (3.16) за умови  $\rho = 0$  маємо:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \mathbf{A}) = 0$$

Відкидаючи ненульові розв'язки, які не залежать від часу (що описують статичні поля, а не електромагнітні хвилі), дістанемо:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (3.28)$$

За цією умовою рівняння (2.15) зводиться до однорідного хвильового рівняння:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (3.29)$$

Шукатимемо розв'язок рівняння (3.29) в усьому просторі за допомогою просторового перетворення Фур'є:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r \cdot e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \quad (3.30)$$

Обернене перетворення:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \cdot e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) \quad (3.31)$$

дозволяє знайти напруженості електромагнітного поля за формулами (2.1) та (2.2) за відомим  $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)$ .

Дія оператора Лапласа:

$$\nabla^2 \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \nabla^2 (e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} (-k^2) \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)$$

індукує домноження Фур'є-образу на  $(-k^2)$ . Тому з рівняння (3.29) дістаємо:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = 0 \quad (3.32)$$

де  $\omega_{\mathbf{k}} = ck = c|\mathbf{k}|$ .

Рівняння (3.28) дає умову поперечності:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = 0 \quad (3.33)$$

Загальний розв'язок рівняння (3.32) запишемо у вигляді:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{C}_1(\mathbf{k}) e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} + \mathbf{C}_2(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}, \quad (3.34)$$

де в силу (3.33):



$$\mathbf{C}_1(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{C}_2(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0$$

Звідси розв'язок хвильового рівняння (3.29) має вигляд:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \{ \mathbf{C}_1(\mathbf{k}) e^{i\omega_{\mathbf{k}}t} + \mathbf{C}_2(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} \} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.35)$$

Оскільки вихідне поле  $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$  є дійсним, функції  $\mathbf{C}_1(\mathbf{k})$  та  $\mathbf{C}_2(\mathbf{k})$  не є незалежні. Маємо:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{A}^*(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \{ \mathbf{C}_1^*(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + \mathbf{C}_2^*(\mathbf{k}) e^{i\omega_{\mathbf{k}}t} \} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

Після заміни  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$  легко отримати:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \{ \mathbf{C}_1^*(-\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + \mathbf{C}_2^*(-\mathbf{k}) e^{i\omega_{\mathbf{k}}t} \} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}},$$

де враховано  $\omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}| = \omega(-\mathbf{k})$ .

Порівнюючи це з (3.35) і приймаючи до уваги незалежність  $\exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t)$  та  $\exp(i\omega_{\mathbf{k}}t)$ , отримаємо:

$$\mathbf{C}_1^*(-\mathbf{k}) = \mathbf{C}_2(\mathbf{k}) \quad \text{або} \quad \mathbf{C}_1(\mathbf{k}) = \mathbf{C}_2^*(-\mathbf{k}), \quad (3.36)$$

причому  $\mathbf{C}_1(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0$ .

Подано цей розв'язок у дещо іншій формі, виділивши лоренц-інваріантні комбінації  $\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ .

У першому доданку в (3.35) за допомогою заміни  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$  зробимо очевидні перетворення:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{C}_1(\mathbf{k}) \exp[i(\omega_{\mathbf{k}}t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] d^3k &= \int \mathbf{C}_1(-\mathbf{k}) \exp[i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] d^3k = \\ &= \int \mathbf{C}_2^*(\mathbf{k}) \exp[i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] d^3k. \end{aligned}$$

Позначаючи  $\mathbf{a}(\mathbf{k}) = \mathbf{C}_2(\mathbf{k}) = \mathbf{C}_1^*(-\mathbf{k})$ , маємо представлення розв'язку у вигляді:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \{ \mathbf{a}(\mathbf{k}) e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + \mathbf{a}^*(\mathbf{k}) e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \} \quad (3.37)$$

Формула (3.37) з умовою поперечності  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{k}) = 0$  подає загальний розв'язок хвильового рівняння (3.29) з умовою (3.28).

Доданок, що містить  $\exp[-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$ , називають додатно-частотною частиною поля, а комплексно-спряжений йому доданок — від'ємно-частотною частиною. Представлення (3.37) називають розбиттям на додатно-частотні та від'ємно-частотні компоненти.

Як бачимо з (3.37), стан вільного електромагнітного поля визначається, з огляду на умову поперечності  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = 0$ , двома комплексними функціями від трьох змінних  $\mathbf{k}$ , або — еквівалентно — чотирма дійсними функціями від  $\mathbf{k}$ . Кількість цих незалежних функцій (яка відповідає степеням вільності поля) така ж, як у задачі Коші згідно з п. 2.3.

Кожному  $\mathbf{k}$  відповідає плоска хвиля  $\mathbf{a}(\mathbf{k}) \exp[i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$  — частковий розв'язок рівняння (3.29), причому напрямок вектора  $\mathbf{a}(\mathbf{k})$  задає поляризацію.

**Розклад поля на осцилятори.** За допомогою заміни  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$  у від'ємно-частотній частині перепишемо (3.37) у вигляді:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \{ \mathbf{a}(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + \mathbf{a}^*(-\mathbf{k}) e^{i\omega_{\mathbf{k}}t} \} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.38)$$

Згідно з (2.2), (2.1) та калібрувальною умовою (3.27):

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \omega_{\mathbf{k}} \{ \mathbf{a}(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} - \mathbf{a}^*(-\mathbf{k}) e^{i\omega_{\mathbf{k}}t} \} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.39)$$

Обчислимо енергію електричного поля за допомогою формули Парсеваля:

$$W_E = \frac{1}{8\pi} \int dV \mathbf{E}^2 = \frac{1}{8\pi c^2} \int d^3k \omega_{\mathbf{k}}^2 \{ \mathbf{a}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{k}) - \Re [\mathbf{a}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(-\mathbf{k}) e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t}] \} \quad (3.40)$$

Оскільки:

$$\int d^3k \mathbf{a}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{k}) = \int d^3k \mathbf{a}^*(-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(-\mathbf{k}),$$

маємо:

$$W_E = \frac{1}{4\pi c^2} \int d^3k \omega_{\mathbf{k}}^2 \{ \mathbf{a}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{k}) - \Re [\mathbf{a}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(-\mathbf{k}) e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t}] \} \quad (3.41)$$

Аналогічно:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k [\mathbf{k} \times (\mathbf{a}(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + \mathbf{a}^*(-\mathbf{k}) e^{i\omega_{\mathbf{k}}t})] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.42)$$

а енергія магнітного поля:

$$W_B = \frac{1}{8\pi} \int dV \mathbf{B}^2 = \frac{1}{8\pi} \int d^3k |\mathbf{k} \times (\mathbf{a}(\mathbf{k})e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + \mathbf{a}^*(-\mathbf{k})e^{i\omega_{\mathbf{k}}t})|^2 \quad (3.43)$$

Оскільки  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{k}) = 0$ , маємо:

$$|\mathbf{k} \times \mathbf{a}(\mathbf{k})|^2 = k^2 \mathbf{a}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{k}),$$

а також:

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{a}(\mathbf{k})] \cdot [\mathbf{k} \times \mathbf{a}(-\mathbf{k})] = k^2 \mathbf{a}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(-\mathbf{k}).$$

Звідси, аналогічно (3.41):

$$W_B = \frac{1}{4\pi} \int d^3k k^2 \{ \mathbf{a}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{k}) + \Re [\mathbf{a}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(-\mathbf{k})e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t}] \} \quad (3.44)$$

Оскільки  $\omega_{\mathbf{k}} = ck$ , загальна енергія вільного електромагнітного поля:

$$W = W_E + W_B = \frac{1}{2\pi c^2} \int d^3k \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{a}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{k}) \quad (3.45)$$

Подано цей вираз через нові змінні:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k}} = \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2c\sqrt{\pi}} [\mathbf{a}^*(\mathbf{k})e^{i\omega_{\mathbf{k}}t} + \mathbf{a}(\mathbf{k})e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}] \quad (3.46)$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2ic\sqrt{\pi}} [\mathbf{a}^*(\mathbf{k})e^{i\omega_{\mathbf{k}}t} - \mathbf{a}(\mathbf{k})e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}] \quad (3.47)$$

Звідси:

$$\mathbf{a}(\mathbf{k}) = c\sqrt{\pi} \left[ \frac{\mathbf{P}_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} - i\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} \right] e^{i\omega_{\mathbf{k}}t},$$

$$\mathbf{a}^*(\mathbf{k}) = c\sqrt{\pi} \left[ \frac{\mathbf{P}_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} + i\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} \right] e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}.$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = 0$$

# 4

## Випромінювання

Перед тим, як перейти до конкретних задач, пов'язаних з вивченням випромінювання електромагнітних хвиль, зауважимо, що при цьому нас цікавить передусім характер поля на великих відстанях:  $r \gg \lambda$ , де  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$  — довжина хвилі; також вважаємо, що  $r$  значно більше за розміри системи, що випромінює. Цю область називають хвильовою зоною. Тут, далеко від джерел, поле можна подати як суперпозицію сферичних хвиль  $\sim \frac{\exp\{i(kr - \omega t)\}}{r}$ , де  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$ . Похідні від хвильового поля в основному визначаються експоненціальним співмножинком. Зокрема:

$$\left(\frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}\right) \approx \left(\frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}\right) \left(1 + \frac{1}{r^2}\right), \quad (4.1)$$

де позначено:

$$\mathbf{k} = nk = n\frac{\omega}{c}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (4.2)$$

Відповідно до цього, на поверхні сфери радіуса  $r \gg \lambda$  на невеликих, порівняно із  $r$ , ділянках можна наближено вважати хвилі плоскими. Можна показати, що поправки до цього наближення дають малі внески в потік енергії, які прямують до нуля за  $r \rightarrow \infty$ .

Враховуючи ці обставини, з рівнянь Максвелла легко отримати співвідношення, аналогічні формулам для плоских хвиль:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}], \quad \mathbf{E} = -[\mathbf{n} \times \mathbf{B}]. \quad (4.3)$$

Ці співвідношення справедливі в хвильовій зоні будь-якої обмеженої системи з точністю до членів  $\frac{1}{r}$  включно; лише ці члени дають ненульовий внесок при обчисленні потоку енергії за  $r \rightarrow \infty$ .

Як буде видно далі, складові напруженостей поля, що спадають як  $\frac{1}{r}$ , з'являються лише тоді, коли в системі є прискорені заряди. Завдяки цим складовим маємо ненульовий потік енергії випромінювання.

#### 4.1. Поле заряду, що рухається з прискоренням

**Потенціали Ліенара-Віхерта.** Для точкового заряду  $q$  з траєкторією  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_q(t)$  густина заряду і густина струму мають вигляд:

$$\rho(t, \mathbf{r}) = q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t)), \quad (4.4)$$

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = q\dot{\mathbf{r}}_q(t)\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t)), \quad (4.5)$$

де  $\delta^3$  — тривимірна  $\delta$ -функція.

За загальними формулами (2.47), (2.48), (2.49) для потенціалів:

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = \frac{2}{c} \int dt' \int d^3\mathbf{r}' \delta \left[ (t - t')^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 \right] \theta(t - t') \rho(t', \mathbf{r}'), \quad (4.6)$$

Враховуючи (4.4), дістанемо:

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = \frac{2q}{c} \int dt' \delta \left[ (t - t')^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t'))^2 \right] \theta(t - t'). \quad (4.7)$$

Підінтегральна функція відмінна від нуля при  $t = t_q(t, \mathbf{r})$ , де  $t_q$  є розв'язком рівняння:

$$c(t - t_q) = R_q, \quad R_q = |\mathbf{R}_q|, \quad \mathbf{R}_q = \mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t_q), \quad (4.8)$$

яке пов'язує час випромінювання сигналу  $t_q$  (запізнюючий час) у точці  $\mathbf{r}_q(t_q)$  та час  $t$  прийому сигналу у точці  $\mathbf{r}$ . За властивістю  $\delta$ -функції від складного аргументу:

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mathbf{r}) &= \frac{2q}{c} \left[ \frac{d}{dt'} \left( (t - t')^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t'))^2 \right) \right]_{t'=t_q}^{-1} = \\ &= \frac{q}{c} \left[ \left( t - t' - \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{r}}_q(t') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')) \right) \right]_{t'=t_q}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Перепишемо це у більш компактному виді, врахувавши зв'язок (4.8):

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{R_q - (\mathbf{R}_q \cdot \mathbf{v}_q)/c}, \quad (4.10)$$

тут і далі позначено  $\mathbf{v}_q = \dot{\mathbf{r}}_q(t_q)$ .

Аналогічно отримуємо вектор-потенціал:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{v}_q(t_q)}{c [R_q - (\mathbf{R}_q \cdot \mathbf{v}_q)/c]}. \quad (4.11)$$

Формули (4.10)), (4.11) подають *потенціали Лієнара-Віхерта* точкового заряду. Звідси, за формулами (2.1), (2.2) отримуємо напруженості полів.

Якщо заряд рухається зі сталою швидкістю  $\mathbf{v}_q = \text{const}$ , обчислення напруженостей полів виходячи з (4.10), (4.11) дає нульовий потік на нескінченності, оскільки поля спадають, як  $1/r^2$ . Це найбільш очевидно в системі спокою заряду. Таким чином, випромінювання можливе лише для прискореного руху заряду.

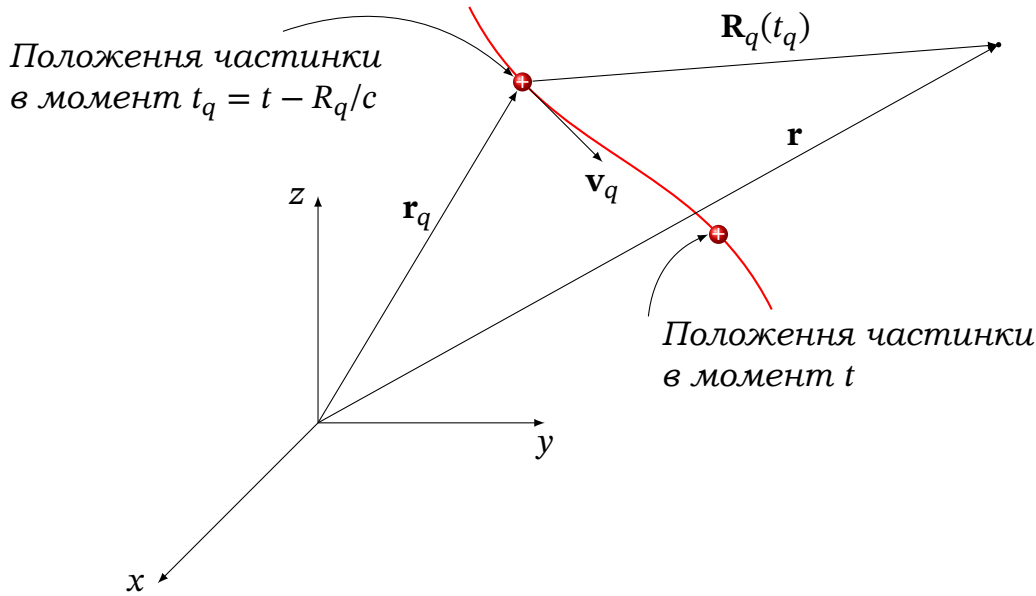


Рис. 4.1. До розрахунку запізнюючих потенціалів

**Випромінювання.** Нас цікавить лише та частина напруженостей полів, що спадає як  $\frac{1}{r}$  на нескінченності. Це значно полегшує обчислення за формулами (2.1), (2.2). Але обчислювати  $\mathbf{E}$  за формулою (2.2) немає необхідності, оскільки в хвильовій зоні:

$$\mathbf{E} = [\mathbf{B} \times \mathbf{n}], \quad \mathbf{\Pi} = \frac{c}{4\pi} B^2 \mathbf{n},$$

де вектор  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$  вказує напрямок випромінювання.

Обчислимо індукцію магнітного поля:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Ненульовий внесок в члені  $\sim \frac{1}{r}$  дає лише величина  $\mathbf{v}(t_q)$ , яка залежить від  $\mathbf{r}$  через час запізнення  $t_q = t_q(t, \mathbf{r})$ . Похідні від  $t_q$  визначаються з рівняння (4.8), що задає цю функцію неявно:

$$\nabla t_q = \frac{\mathbf{n}_q}{cZ_q}, \quad (4.12)$$

де позначено:

$$Z_q = 1 - (\mathbf{n}_q \cdot \mathbf{v}_q), \quad \mathbf{n}_q = \frac{\mathbf{R}_q}{R_q}.$$

На великих відстанях, відкидаючи члени порядку  $\sim \frac{1}{r^2}$ , дістанемо:

$$\mathbf{B} \approx -\frac{q}{c} \left[ \frac{\mathbf{n}_q \times (\mathbf{n}_q \times \dot{\mathbf{v}}_q)}{Z_q^3 R_q} + \frac{\mathbf{n}_q \times \mathbf{v}_q}{c Z_q^2 R_q} \right], \quad (4.13)$$

де  $\dot{\mathbf{v}}_q = \frac{d\mathbf{v}_q}{dt_q}$ .

Інтенсивність випромінювання в тілесний кут  $d\Omega$  у фіксований запізнюючий момент часу  $t_q$ :

$$dI = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n} R_q^2 d\Omega = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{B}|^2 R_q^2 d\omega, \quad R_q \rightarrow \infty.$$

Після дещо громіздких обчислень з використанням (4.13) отримуємо потужність випромінювання в тілесний кут  $d\Omega$  в напрямку  $\mathbf{n}_q$ :

$$dI = \frac{q^2}{4\pi c^3} \left[ \frac{|\mathbf{n}_q \times (\mathbf{n}_q \times \dot{\mathbf{v}}_q)|^2}{Z_q^5} + \frac{|\mathbf{n}_q \times \mathbf{v}_q|^2}{c^2 Z_q^4} \right] d\omega. \quad (4.14)$$

Нагадаємо, що всі величини на траєкторії частинки (що входять з індексом  $q$ ) обчислюються в момент часу запізнення  $t_q$ .

Як було зазначено вище, випромінює лише прискорений заряд. Це також очевидно з формули (4.14).

У випадку нерелятивістських рухів  $|\mathbf{v}_q| \ll c$ :

$$dI(\mathbf{n}) = \frac{q^2}{4\pi c^3} [\dot{\mathbf{v}}_q^2 - (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}_q)^2] d\Omega = \frac{q^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta \dot{\mathbf{v}}_q^2 d\Omega.$$

Повна потужність випромінювання в усіх напрямках:

$$N = \int_{4\pi} dI(\mathbf{n}) = \frac{2q^2 \dot{\mathbf{v}}_q^2}{3c^3}. \quad (4.15)$$

В ультрарелятивістському випадку, коли швидкість частинки, що випромінює, близька до швидкості світла, значну роль відіграє вираз  $1 - \frac{\mathbf{v}_q \cdot \mathbf{n}}{c}$  в знаменнику формули (4.14). Якщо  $1 - \frac{v_q}{c} \ll 1$ , завдяки цьому виразу інтенсивність зосереджена в області малих кутів  $\theta$  між напрямком швидкості  $\mathbf{v}_q(t_q)$  і напрямком випромінювання  $\mathbf{n}_q$ . Якщо записати:

$$1 - \frac{\mathbf{n}_q \cdot \mathbf{v}_q}{c} = 1 - \frac{v_q \cos \theta}{c} \approx 1 - \frac{v_q}{c} + \frac{\theta^2}{2}, \quad v_q = |\mathbf{v}_q|,$$

маємо оцінку кутів, для яких випромінювання найбільш ефективно:

$$\theta \approx \left(1 - \frac{v_q}{c}\right)^{1/2}. \quad (4.16)$$

Для паралельних  $\mathbf{v}_q$  та  $\dot{\mathbf{v}}_q$  маємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &\approx -\frac{q}{c^2 R_q Z_q^3} [\mathbf{n}_q \times \dot{\mathbf{v}}_q], \\ dI &= \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{\dot{\mathbf{v}}_q^2 \sin^2 \theta}{Z_q^6} do. \end{aligned} \quad (4.17)$$

В області малих кутів (4.16) маємо:

$$dI \approx \frac{q^2}{4\pi c^3} \dot{\mathbf{v}}_q^2 \left(1 - \frac{v_q}{c} + \frac{\theta^2}{2}\right)^{-6} \theta^2 do.$$

Якщо швидкість та прискорення взаємно перпендикулярні  $\mathbf{v}_q \perp \dot{\mathbf{v}}_q$  (наприклад, рух по колу), тоді з (4.14):

$$dI = \frac{q^2}{4\pi c^3} \left[ \frac{\dot{\mathbf{v}}_q^2}{Z^4} - \frac{\left(1 - \frac{v_q^2}{c^2}\right) (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}_q)^2}{Z^6} \right] do, \quad (4.18)$$

де

$$Z = 1 - \frac{\mathbf{v}_q \cdot \mathbf{n}}{c}.$$

**Коловий рух.** Ця формула описує середню інтенсивність випромінювання для релятивістської частинки, що рухається по колу в магнітному полі.

Формулу (4.14) можна застосувати у разі руху частинки в одній площині по колу під дією однорідного магнітного поля. В цьому разі випромінювання концентрується у площині руху в межах кутів, що визначаються формулою (4.16). Внаслідок того, що релятивістська частинка випромінює переважно в напрямку руху, випромінювання складатиметься з дуже коротких імпульсів, період повторення яких дорівнює періоду обертання.

Для колового руху в магнітному полі  $\mathbf{B}$  частота обертання:

$$\omega = \frac{eB}{\gamma mc},$$

де  $\gamma$  — релятивістський фактор,  $m$  — маса частинки,  $c$  — швидкість світла.



Прискорення:

$$\dot{\mathbf{v}}_q = \omega \mathbf{v}_q \times \mathbf{n}_B,$$

де  $\mathbf{n}_B$  — одиничний вектор у напрямку магнітного поля.

Систему координат виберемо таким чином, що:

$$\mathbf{n}_B = (0, 0, 1), \quad \mathbf{n}_q = (\sin \theta, 0, \cos \theta),$$

і зафіксуємо напрямки  $\mathbf{n}_q = \{\sin \theta, 0, \cos \theta\}$ .

Середнє значення інтенсивності випромінювання можна отримати за допомогою інтегрування формули (4.18) по  $dt$ , причому слід перейти до інтегрування по часу запізнення:

$$t_q = t_q(t),$$

де  $t_q = t_q(t)$  неявно задано формулою (4.9).

Після тривалих обчислень дістанемо середнє (за часом) значення інтенсивності в тілесний кут  $d\Omega$  в напрямку під кутом  $\theta$  до площини орбіти:

$$\langle dI \rangle = \frac{q^2 B^2 v_q}{8\pi m^2 c^5} \left(1 - \frac{v_q^2}{c^2}\right) \left[ \frac{2 - \cos^2 \theta - \frac{v_q^2}{4c^2} \left(1 + \frac{3v_q^2}{c^2}\right) \cos^4 \theta}{\left(1 - \frac{v_q^2}{c^2} \cos^2 \theta\right)^{7/2}} \right] d\omega.$$

## 4.2. Довгохвильове випромінювання

**Дипольне випромінювання.** Розглянемо систему зарядів, розмір якої  $L$  значно менший за довжину хвилі:

$$\lambda \gg L. \quad (4.19)$$

За цією умовою сигнал встигає поширитися всередині системи значно раніше, ніж відбудуться суттєві зміни у розподілі зарядів. Обчислимо потік енергії, виходячи з формули для вектор-потенціалу:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}, \mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (4.20)$$

де вважаємо, що початок координат знаходиться в області, де розташована система струмів.

Густина потоку енергії подається вектором Пойнтінга:

$$\mathbf{\Pi} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}].$$

На великій відстані від системи зарядів, що випромінює, можна користуватися співвідношеннями для плоских хвиль, тому:

$$\mathbf{\Pi} = \frac{c}{4\pi} B^2 \mathbf{n}, \quad (4.21)$$

де  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$  — напрямок поширення хвилі.

Наша мета — оцінити головні внески в напруженості поля, що спадають як  $\frac{1}{r}$ , завдяки чому маємо ненульовий потік енергії через сферу великого радіусу  $r \rightarrow \infty$ :

$$|\mathbf{\Pi}| = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{B}|^2 \sim \frac{1}{r^2}, \quad \int \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \int d\Omega r^2 |\mathbf{B}|^2 \neq 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty.$$

Практично умова  $r \rightarrow \infty$  означає, що обчислення виконують в зоні випромінювання, яка визначена умовою  $r \gg \lambda$ . За умови  $r \gg \lambda \gg L$  маємо:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

звідки

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}, \mathbf{r}'\right) dV'.$$

Розкладемо запізнюючий аргумент по малій величині  $\frac{|\mathbf{r}'|}{r}$ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1, \quad (4.22)$$

де утримано два перших члени розкладу:

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(t_r, \mathbf{r}') dV', \quad (4.23)$$

де  $t_r = t - \frac{r}{c}$  не залежить від змінної інтегрування  $\mathbf{r}'$ ,

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(t_r, \mathbf{r}') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') dV'. \quad (4.24)$$

Перетворимо (4.23), користуючись тотожністю  $\nabla \cdot (x_j \mathbf{j}) = J_j + x_j \nabla \cdot \mathbf{j}$  і законом збереження заряду  $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ . Звідси:

$$J_j = \frac{\partial}{\partial t} (x_j \rho) - \nabla \cdot (x_j \mathbf{j}).$$

Проінтегруємо це співвідношення:

$$\int \mathbf{j} dV = \frac{d}{dt} \int \mathbf{r} \rho dV,$$

де враховано, що поза межами системи, що розглядається,  $\mathbf{j} = 0$ . Підстановка цього співвідношення в (4.23) дає:

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\dot{\mathbf{d}}(t_r)}{cr}, \quad (4.25)$$

де  $\mathbf{d}(t) = \int \mathbf{r}\rho(t, \mathbf{r}) dV$  – дипольний момент системи.

Оскільки  $\nabla t_r = \nabla \left( t - \frac{r}{c} \right) = -\frac{\mathbf{n}}{c}$ , звідси:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_0 = -\frac{[\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{d}}(t_r)]}{cr}.$$

З урахуванням (4.21) дістанемо потік енергії системи через сферу радіусу  $r \gg \lambda$ :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \int \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \dot{\mathbf{d}}^2 \sin^3 \theta = \frac{2}{3c} \dot{\mathbf{d}}^2.$$

Потік енергії системи через сферу радіусу  $r \gg \lambda$  задається формулою:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2}{3c^3} \dot{\mathbf{d}}^2(t_r). \quad (4.26)$$

Якщо випромінює система з  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos(\omega t)$ , тоді усереднена за часом потужність випромінювання пропорційна четвертій степені частоти:

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle = \frac{\omega^4 \mathbf{d}_0^2}{3c^3}.$$

**Квадрупольне і магнітодипольне випромінювання.** Якщо дипольний момент системи відсутній, основний внесок у вектор-потенціал (4.22) дає наступний після дипольного член розкладу (4.24).

Скористаємося співвідношенням:

$$\operatorname{div}\{x_i x_j \mathbf{j}\} = x_i J_j + x_j J_i + x_i x_j \operatorname{div} \mathbf{j} = x_i J_j + x_j J_i - x_i x_j \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Для обмеженої системи струмів інтеграл від лівої частини дорівнює нулю. Звідси:

$$\int dV (x_i J_j + x_j J_i) = \int dV x_i x_j \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \int dV (x_i J_j + x_j J_i) = \int dV x_i x_j \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}.$$

Тоді:

$$\int dV \cdot j_i x_j = \frac{1}{2} \int dV (j_i x_j - j_j x_i) + \frac{1}{2} \int dV (j_i x_j + j_j x_i).$$

Зауважимо, що перший доданок містить компоненти магнітного моменту:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] dV.$$

З отриманих співвідношень та формули (4.24) випливає:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{md}} + \mathbf{A}_Q,$$

де:

$$\mathbf{A}_{\text{md}} = \frac{[\mathbf{m} \times \mathbf{n}]}{cr}, \quad (4.27)$$

$$\mathbf{A}_Q = \{A_{Q,i}\}, \quad A_{Q,i} = \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int x_i (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) \rho dV', \quad (4.28)$$

де штрихом позначено величини, що залежать від змінної інтегрування  $\mathbf{x}'$ . Останній доданок можна виразити через тензор квадрупольного моменту:

$$Q_{ij} = \int \{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}\} \rho dV, \quad \sum_{i=1}^3 Q_{ii} = 0. \quad (4.29)$$

Тоді можна записати:

$$\mathbf{A}_Q = \frac{1}{6c^2 r} \tilde{\mathbf{D}}(t_r) + \frac{\mathbf{n}}{6c^2 r^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int r^2 \rho dV, \quad (4.30)$$

де введено позначення:

$$D_i = Q_{ij} n_j, \quad \mathbf{D} = \{D_i\}. \quad (4.31)$$

Другий доданок в (4.30) має вигляд  $\mathbf{n}f(r)$ , тобто це градієнт від деякої функції; він не впливає на обчислення напруженості  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Цей доданок можна знищити за допомогою калібрувального перетворення, тоді:

$$\mathbf{A}_Q = \frac{\mathbf{D}(t_r)}{6c^2 r}. \quad (4.32)$$

Повний вектор-потенціал (4.23) є сумою дипольної, магніто-дипольної і квадрупольної складової:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{дип}} + \mathbf{A}_{\text{мд}} + \mathbf{A}_Q,$$

де відповідні співвідношення подано формулами (4.25), (4.27), (4.30).

Нехтуючи членами більш високого порядку при диференціюванні (4.25), (4.27), (4.30), маємо:

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{c^2 r} [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}] + [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{m}}]] + \frac{1}{6c} [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{D}}]. \quad (4.33)$$

В цій формулі залежність від кутів входить лише через  $n_i$ , в тому числі в  $D_i = Q_{ij}n_j$ , де  $\{n_i\} = \{\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta\}$  — одиничний вектор. Інтегруючи по кутових змінних ( $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ ) дістанемо, в силу симетрії:

$$\int d\Omega \cdot n_i n_j = 0, \quad i \neq j; \quad \int d\Omega \cdot n_1^2 = \int d\Omega \cdot n_2^2 = \int d\Omega \cdot n_3^2.$$

Оскільки  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ , інтегруючи по  $d\Omega$  отримаємо суму трьох однакових доданків  $= 4\pi$ ; звідси:

$$\int d\Omega \cdot n_i n_j = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij}. \quad (4.34)$$

Це легко перевірити і прямим обчисленням.

Очевидно,

$$\int d\Omega \cdot n_i = 0, \quad \int d\Omega \cdot n_i n_j n_k = 0 \quad (4.35)$$

(підінтегральний вираз міняє знак при зміні напрямку координатних осей, а результат інтегрування по кутах має бути незалежним від такої зміни).

**Квадрупольне і магнітодипольне випромінювання.** Обчислимо тензор:

$$X_{ijkl} = \int d\Omega \cdot n_i n_j n_k n_l, \quad (4.36)$$

що є симетричний за усіма індексами.

Очевидно, тут можливі лише два ненульових значення компонент: коли усі індекси співпадають, наприклад  $X_{3333} = \frac{4\pi}{5}$ , та коли серед індексів є дві різні пари, наприклад  $X_{1133} = \frac{4\pi}{15}$ .

Тензор, що задовольняє цим умовам, легко побудувати шляхом симетризації квадратичних комбінацій символів Кронекера:

$$X_{ijkl} = \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (4.37)$$

Для перевірки відзначимо, що подвійна згортка дає:

$$X_{ijlj} = 4\pi = \int d\Omega \cdot 1.$$

Обчислимо потік через сферу великого радіусу  $r$ , виходячи з (4.33). Квадрат першого (дипольного) доданку в (4.33) дає внесок, що вже обчислено і подано формулою (4.26). При обчисленні  $\mathbf{B}^2$  добуток першого (дипольного) доданку в (4.33) на інші в кінцевому результаті дасть нуль в силу (4.35), оскільки тут під інтегралом з'являються лише непарні комбінації компонент  $n_i$  (нагадаємо, що квадрупольний доданок в (4.33) містить квадратичні комбінації цих компонент).

Також:

$$\begin{aligned} \int [\mathbf{n} \times [\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}] \cdot [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{D}}] d\Omega &= \int (m_i - n_i n_j m_j) (\varepsilon_{ipq} n_p \ddot{Q}_{qr} n_r) d\Omega = \\ &= \int \ddot{m}_i \varepsilon_{ipq} n_p \ddot{Q}_{qr} n_r = \frac{4\pi}{c} \varepsilon_{ipq} n_p \ddot{Q}_{qp} \ddot{m}_i = 0 \end{aligned}$$

де враховано симетрію  $Q_{qp}$  та формули (4.34) та (4.37). Таким чином, потужність є сумою окремих потужностей дипольного, магнітодипольного та квадрупольного внесків.

Далі маємо:

$$\int [\mathbf{n} \times [\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}]]^2 d\Omega = \int (\ddot{\mathbf{m}}^2 - (\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{m}})^2) d\Omega = \frac{8\pi}{3} \ddot{\mathbf{m}}^2.$$

За допомогою (4.34) та (4.37) дістанемо:

$$\int [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{D}}]^2 d\Omega = \int [\ddot{\mathbf{D}}^2 - (\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{D}})^2] d\Omega = \frac{4\pi}{5} \ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{kl}.$$

Звідси потужність випромінювання:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2}{3c^3} \dot{\mathbf{d}}^2 + \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{m}}^2 + \frac{1}{180c^5} \ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{kl}.$$

### 4.3. Розсіювання електромагнітних хвиль

**Загальні поняття.** Коли електромагнітна хвиля падає на систему зарядів, вони починають рухатися і стають джерелами вторинного випромінювання. Оскільки загальна енергія зберігається, це означає, що частина енергії хвилі, що падає, переходить в енергію вторинних хвиль. Цей процес називають *розсіюванням*. Він може також супроводжуватися *поглинанням* енергії, коли частина енергії хвилі, що падає, втрачається в розсіювачі, трансформуючись в інші види енергії.

Для опису цих процесів вводять *диференціальний переріз розсіювання в тілесний кут  $d\Omega$* :

$$d\sigma = \frac{dI}{\Pi}, \quad (4.38)$$

де  $dI$  — середня (за часом) енергія вторинного випромінювання за одиницю часу в тілесний кут  $d\Omega$ ,  $\Pi$  — середня густина потоку енергії хвилі, що падає, яка визначається вектором Пойнтінга.

*Повний переріз розсіювання  $\sigma$ :*

$$\sigma = \int d\sigma, \quad (4.39)$$

де інтеграл береться по усіх можливих напрямках розсіяного випромінювання.

*Перерізом поглинання називають величину:*

$$\sigma_a = \frac{Q}{\Pi}, \quad (4.40)$$

де  $Q$  — середня енергія, що поглинається системою за одиницю часу.

**Розсіювання електромагнітних хвиль точковим вільним зарядом.** Задача опису процесу розсіювання розбивається на дві: визначити рух заряду під дією електромагнітної хвилі, а потім визначити вторинне, тобто розсіяне, випромінювання.

Нехай електричне поле хвилі, що падає, є:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (4.41)$$

в точці, де розташований заряд.

Будемо вважати рух заряду нерелятивістським ( $V \ll c$ ), що дає змогу знехтувати магнітним полем в формулі для сили Лоренца, що діє на заряд з боку електромагнітної хвилі. Силою реакції розсіяного випромінювання також знехтуємо.

Якщо інших сил тут немає, основний рух заряду буде періодичним з амплітудою:

$$r \ll \frac{c}{\omega}.$$

Ця умова дозволяє відкинути доданок  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$  під аргументом косінуса в (4.41). Звідси з рівнянь руху:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}_0 \cos(\omega t),$$

отримуємо:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{q\mathbf{E}_0}{m\omega^2} \cos(\omega t).$$

Дипольний момент системи:

$$\mathbf{d} = q\mathbf{r} = -\frac{q^2\mathbf{E}_0}{m\omega^2} \cos(\omega t),$$

причому:

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{q^2\mathbf{E}}{m}. \quad (4.42)$$

Для нерелятивістського руху можна скористатися співвідношеннями для дипольного випромінювання. Це дає інтенсивність, випромінєну в напрямку  $\mathbf{n}$  в тілесний кут  $d\Omega$ :

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} |\ddot{\mathbf{d}}|^2 \sin^2 \theta d\Omega, \quad (4.43)$$

де  $\theta$  — кут між  $\ddot{\mathbf{d}}$  та напрямком спостереження  $\mathbf{n}$ . Враховуючи (4.42):

$$dI = \frac{q^4 |\mathbf{E}_0|^2}{4\pi m^2 c^3} \sin^2 \theta d\Omega.$$

Оскільки вектор Пойнтінга хвилі, що падає, є:

$$\mathbf{\Pi} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}],$$

де  $\Pi_0$  — напрямок хвилі, що падає, за визначенням перерізу (4.38) маємо:

$$d\sigma = \left( \frac{q^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega. \quad (4.44)$$

Цікаво, що цей вираз не залежить від частоти. Повний переріз отримаємо, інтегруючи (4.44) по усіх напрямках:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{q^2}{mc^2} \right)^2. \quad (4.45)$$

(формула Томсона). Ця формула втрачає силу, коли  $\hbar\omega > mc^2$ , в цьому разі потрібно враховувати квантово-електродинамічні ефекти.



**Неполяризована хвиля.** Формула (3.20) дає диференціальний переріз розсіювання для фіксованого напрямку поляризації хвилі, що падає. У природному світлі присутні усі напрямки  $\mathbf{E}$ . Будемо припускати, що усі ці напрямки еквівалентні, а значить, згідно з (4.42), рівноймовірними є усі напрямки дипольного моменту з (3.20).

Зафіксуємо напрямки спостереження:

$$\mathbf{n} = \{\sin \theta_0 \cos \phi, \sin \theta_0 \sin \phi, \cos \theta_0\}$$

та напрямком падіння хвилі:

$$\mathbf{n}_0 = \{0, 0, 1\}.$$

Відповідно, напрямком  $\mathbf{d} = \mathbf{n}_d |\mathbf{d}|$  визначимо формулою:

$$\mathbf{n}_d = \{\cos \phi, \sin \phi, 0\},$$

де усі значення  $\phi \in [0, 2\pi]$  рівноймовірні.

Для кута  $\theta$  між  $\mathbf{n}_d$  та  $\mathbf{n}$  маємо:

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta_0 \cos^2(\phi - \phi_0) = \frac{1 + \cos^2 \theta_0}{2}.$$

Звідси з (3.20) та за визначенням (4.38):

$$\langle d\sigma \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{q^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \theta_0) d\Omega,$$

де  $d\Omega = \sin \theta_0 d\theta_0 d\phi$ .

**Розсіювання на малих макроскопічних частинках.** Якщо довжина плоскої хвилі  $\lambda$ , що падає, значно більша за розміри макроскопічних частинок, можна вважати поле в околі частинок однорідним. Припустимо також, що частота хвилі  $\omega$  значно менша за резонансні частоти усіх складових частинки. Це дає змогу обчислювати поляризованість  $\alpha$  частинки, яка дає зв'язок між дипольним моментом:

$$\mathbf{d} = \alpha \mathbf{E}, \quad (4.46)$$

та зовнішнім однорідним полем  $\mathbf{E}$  в наближенні електростатики, тобто  $\alpha$  не залежить від  $\omega$ . Тоді за формулами дипольного випромінювання:

$$d\sigma = \frac{\omega^4 \alpha^2}{c^4} \sin^2 \theta d\Omega, \quad (4.47)$$

$$\sigma = \frac{8\pi \omega^4 \alpha^2}{3 c^4}. \quad (4.48)$$

Якщо поле хвилі можна вважати однорідним, але умова квазістатичності не виконується, поляризованість  $\alpha$  залежатиме від частоти і може бути комплексною. В цьому разі:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{|\alpha|^2 \omega^4}{c^4}.$$

## А. Основні формули векторного аналізу

**А.1. Тривимірний символ Леві-Чівіти.** Тривимірний символ Леві-Чівіти визначений співвідношеннями

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj}. \quad (\text{A.49})$$

Деякі співвідношення з цим символом:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}, \quad (\text{A.50})$$

$$\varepsilon_{iqk}\varepsilon_{pqk} = 2\delta_{ip}. \quad (\text{A.51})$$

Ротор та векторний добуток у декартових координатах  $\{x, y, z\} = \{x_1, x_2, x_3\}$ :

$$[\nabla \times \mathbf{A}]_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k, \quad (\text{A.52})$$

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_i = \varepsilon_{ijk}A_j B_k, \quad (\text{A.53})$$

всі індекси пробігають значення 1, 2, 3.

## А.2. Диференціальні операції в різних системах координат.

### Декартова система координат

$$\text{grad } \psi \equiv \nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (\text{A.54})$$

$$\text{div} (\text{grad } \psi) \equiv \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (\text{A.55})$$

$$\text{div } \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.56})$$

$$\text{rot } \mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \quad (\text{A.57})$$

**Циліндрична система координат**

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_z \quad (\text{A.58})$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \quad (\text{A.59})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.60})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\phi + \\ & + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Орти циліндричної системи координат зв'язані з декартовими ортами як:

$$\mathbf{e}_r = \cos\phi\mathbf{e}_x + \sin\phi\mathbf{e}_y, \quad (\text{A.62})$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin\phi\mathbf{e}_x + \cos\phi\mathbf{e}_y, \quad (\text{A.63})$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z. \quad (\text{A.64})$$

**Сферична система координат**

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi \quad (\text{A.65})$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \quad (\text{A.66})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \quad (\text{A.67})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right)\mathbf{e}_\theta + \\ & + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

Орти сферичної системи координат зв'язані з декартовими ортами як:

$$\mathbf{e}_r = \sin\theta\cos\phi\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\phi\mathbf{e}_y + \cos\theta\mathbf{e}_z, \quad (\text{A.69})$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\mathbf{e}_x + \cos\theta\sin\phi\mathbf{e}_y - \sin\theta\mathbf{e}_z, \quad (\text{A.70})$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin\phi\mathbf{e}_x + \cos\phi\mathbf{e}_y. \quad (\text{A.71})$$

$$(\text{A.72})$$

**А.3. Другі похідні.**

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = \nabla \times (\nabla \phi) = 0 \quad (\text{A.73})$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (\text{A.74})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \quad (\text{A.75})$$

**А.4. Похідні від добутків.**

$$\operatorname{grad}(\phi\psi) = \psi \operatorname{grad} \phi + \phi \operatorname{grad} \psi \quad (\text{A.76})$$

$$\operatorname{div}(\phi \mathbf{A}) = \phi \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \operatorname{grad} \phi \quad (\text{A.77})$$

$$\operatorname{rot}(\phi \mathbf{A}) = \phi \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{grad} \phi \times \mathbf{A} \quad (\text{A.78})$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B} \quad (\text{A.79})$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad (\text{A.80})$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A} \quad (\text{A.81})$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad} A^2 = (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (\text{A.82})$$

**А.5. Інтегральні характеристики та теореми.** Теорема Остроградського-Гаусса:

$$\oint_{\partial \Omega} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{A} dV, \quad (\text{A.83})$$

де  $\Omega$  — об'єм,  $\partial \Omega$  — його межа.

Теорема Стокса:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (\text{A.84})$$

де  $S$  — поверхня, що спирається на контур  $\partial S$ .

Теорема Гріна:

$$\iiint_{\Omega} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \iint_{\partial \Omega} (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{A.85})$$

**Б. Поліноми Лежандра**

Поліноми Лежандра застосовуються у теорії потенціалу при розкладанні виразу в околі точки  $\mathbf{r}$ :

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_0 \cos \chi + r_0^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \chi),$$

де  $r_>$ ,  $r_<$  — більша і менша із величин  $|\mathbf{r}|$  та  $r_0$ , відповідно,  $\cos \chi$  — кут між векторами  $\mathbf{r}$  та  $|\mathbf{r}_0|$ .

### Деякі поліноми Лежандра

$$\begin{aligned} P_0(\cos \chi) &= 1, & P_1(\cos \chi) &= \cos \chi, \\ P_2(\cos \chi) &= \frac{1}{2}(3 \cos^2 \chi - 1), & P_3(\cos \chi) &= \frac{1}{2}(5 \cos^2 \chi - 3 \cos \chi). \end{aligned}$$

## В. Сферичні гармоніки

Сферичні функції, що залежать від полярних кутів визначаються формулою:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^{(m+|m|)/2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi},$$

де  $l = 0, 1, 2, \dots$ ,  $m$  пробігає значення від  $-l$  до  $l$ , а  $P_l^{|m|}(x)$  — приєднані функції Лежандра.

Вони утворюють повну ортонормовану систему функцій:

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} Y_{l',m'}^*(\theta, \phi) Y_{l,m}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}.$$

Деякі сферичні гармоніки:

$$\begin{aligned} Y_{0,0}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \\ Y_{1,\pm 1}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}, \\ Y_{1,0}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \\ Y_{2,0}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), \\ Y_{2,\pm 1}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}, \\ Y_{2,\pm 2}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}. \end{aligned}$$

## Г. Циліндричні функції

Рівняння, що виникають в задачах з циліндричною симетрією, мають вигляд:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0, \quad (\text{Г.1})$$

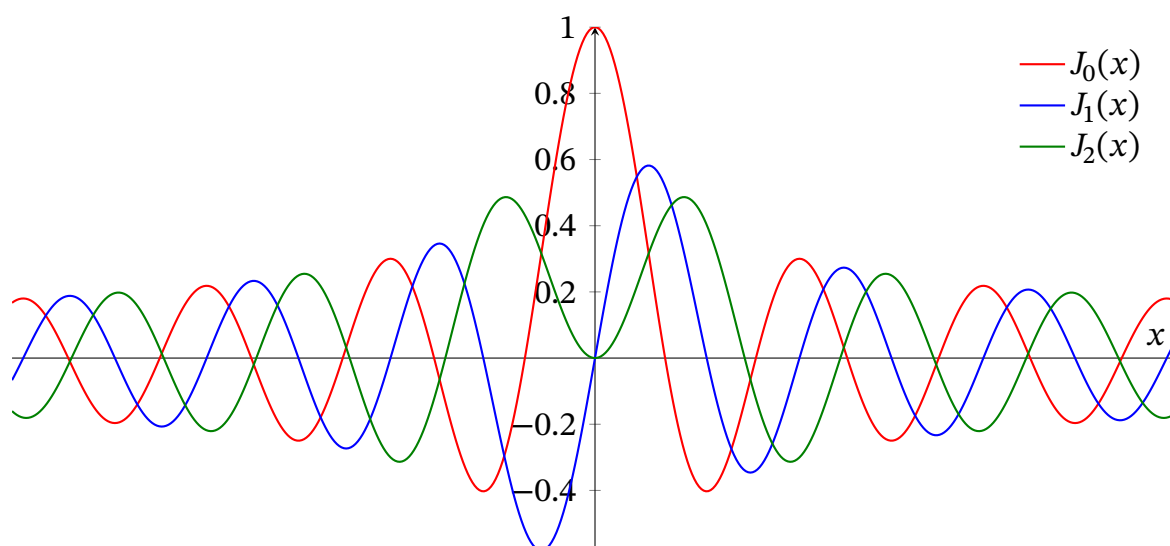
розв'язок яких можна представити за допомогою функцій Бесселя  $J_m(x)$  та Неймана  $N_m$  у вигляді лінійної комбінації  $y(x) = AJ_m(x) + BN_m(x)$  або у вигляді лінійної комбінації  $y(x) = AH_m^{(1)}(x) + BH_m^{(2)}(x)$ , де функції  $H_m^{(1,2)} = J_m \pm iN_m$  — називаються функціями Ганкеля 1-го та 2-го роду, відповідно. Доцільність введення функцій Ганкеля обумовлена тим, що вони мають прості асимптотичні розкладання при  $|x| \gg 1$  і зручні для задач, пов'язаних з поширенням хвиль.

Для  $m = 0, 1, 2, \dots$  функції Неймана нескінченні в точці  $x = 0$ , тобто  $\lim_{x \rightarrow 0} N_m(x) = -\infty$ .

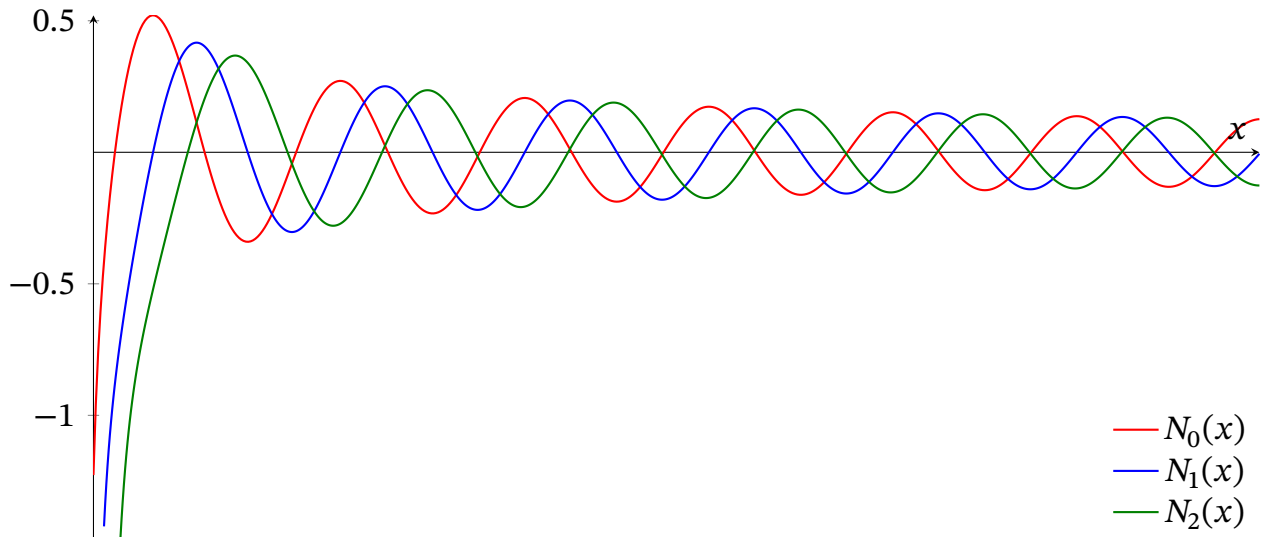
Функції Бесселя можна представити за допомогою ряду (в околі точки  $x = 0$  для цілих, або невід'ємних  $m$ ):

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + m + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}, \quad (\text{Г.2})$$

де  $\Gamma$  — [гамма-функція](#). Для  $m \in \mathbb{Z}$  має місце рівність  $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$ .



Графіки функцій Бесселя  $J_m$  для  $m = 0, 1, 2$ .



Графіки функцій Неймана  $N_m$  для  $m = 0, 1, 2$ .

Функції Неймана визначаються через функції Бесселя як:

$$N_m(x) = \frac{J_m(x) \cos m\pi - J_{-m}(x)}{\sin m\pi}. \quad (\Gamma.3)$$

Деякі рекурентні співвідношення:

$$J_{m+1}(x) + J_{m-1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x). \quad (\Gamma.4)$$

Деякі диференціальні та інтегральні співвідношення для нецілих  $m$  (для цілих  $m$  ці функції можна визначити за допомогою граничного переходу):

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x), \quad (\Gamma.5)$$

$$\frac{d}{dx} (x^{-m} J_m(x)) = -x^{-m} J_{m+1}(x), \quad (\Gamma.6)$$

$$\int_0^x x'^{m+1} J_m(x') dx' = x^{m+1} J_{m+1}. \quad (\Gamma.7)$$

Інтеграли від добутків:

$$\int_0^x J_m(k_1 x') J_m(k_2 x') x' dx' = \frac{x (k_2 J_m(k_1 x) J'_m(k_2 x) - k_1 J_m(k_2 x) J'_m(k_1 x))}{k_1^2 - k_2^2}. \quad (\Gamma.8)$$

В задачах, зазвичай, часто необхідно знайти наближений вигляд циліндричних функцій при малих та великих значеннях аргументу  $x$ : при  $|x| \ll 1$  з (??)

$$J_0(x) \approx 1 - \frac{x^2}{4}, \quad J_m \approx \frac{x^m}{2^m m!}, \quad m \geq 1, \quad m \in \mathbb{N}; \quad (\Gamma.9)$$



при  $|x| \gg 1$

$$J_m \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{Г.10})$$

$$N_m \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{Г.11})$$

$$H_m^{(1,2)} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{\pm i\left(x - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (\text{Г.12})$$

Співвідношення Якобі-Ангера (розкладання за функціями Бесселя):

$$e^{ix \cos \theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(x) e^{im\theta}, \quad e^{ix \sin \theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) e^{im\theta}. \quad (\text{Г.13})$$

## Д. Дельта-функція Дірака

Дельта-функція Дірака (або  $\delta$ -функція) є узагальненою функцією і була введена фізиком Полем Діраком для моделювання густини ідеалізованої точкової маси або точкового заряду.

На «фізичному рівні строгості» можна визначити  $\delta$ -функцію формальним співвідношенням:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0), \quad (\text{Д.1})$$

У випадку інтегрування по скінченному об'єму  $V$ :

$$\int_V f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = f(\mathbf{r}_0), \quad (\text{Д.2})$$

де точка  $\mathbf{r}_0$  знаходиться всередині об'єму  $V$ .

## Властивості дельта-функції

- а) Дельта-функція парна  $\delta(-x) = \delta(x)$ ,
- б)  $x\delta(x) = 0$ ,
- в)  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ ,
- г)  $x\delta'(x) = -\delta(x)$ ,
- д)  $\delta(f(x)) = \sum_k \frac{\delta(x-x_k)}{|f'(x_k)|}$ , де  $x_k$  — нулі функції  $f(x)$ ,

# Література

---

## Підручники та посібники

1. *Greiner W.* Classical electrodynamics. — Springer, 1998. — 556 с. — ISBN 978-1-4612-0587-6.
2. *Griffiths D. J.* Introduction to Electrodynamics. — Addison Wesley, 2012. — 625 с. — ISBN 0-321-85656-2.
3. *Zangwill A.* Modern electrodynamics. — Cambridge University Press, 2013. — 977 с. — ISBN 978-0-521-89697-9.
4. *Власов А. А.* Макроскопическая электродинамика. — 2-е изд. — М. : Физматлит, 2005. — 236 с. — ISBN 5-9221-0560-4.
5. *Джексон Д.* Классическая электродинамика. — М. : Мир, 1965. — 703 с.
6. *Жданов В. І.* [Вступ до електродинаміки суцільних середовищ](#). — ФТІ, КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. — 101 с.
7. *Жданов В. І.* Вступ до теорії відносності. — ВПЦ «Київський університет», 2008. — 290 с. — ISBN 978-966-439-050-4.
8. *Жданов В. І.* [Класична теорія електромагнітного поля. Мікроскопічна теорія](#). — ФТІ, НТУУ «КПІ», 2014. — 84 с.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика : в 10 т. Том II. Теория поля. — 8-е. — М. : Физматлит, 2003. — 534 с. — ISBN 5922100564.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика : в 10 т. Том VIII. Электродинамика сплошных сред. — 4-е, стереотипное. — М. : Физматлит, 2005. — 656 с. — ISBN 5-9221-0123-4.
11. *Пеннер Д. И., Угаров В. А.* Электродинамика и специальная теория относительности. — М. : Просвещение, 1980. — 271 с.
12. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. — 11-е изд. — М.: Физматлит, 2003. — 618 с.
13. *Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П.* Электродинамика. — 2-е переработ. — М. : Высшая школа, 1990. — 352 с.

**Задачники**

14. *Алексеев А. И.* Сборник задач по классической электродинамике. — М. : Наука, 1977. — 319 с.
15. *Батыгин В. В., Топтыгин И. Н.* Сборник задач по электродинамике и специальной теории относительности. — 4-е, переработанное. — Лань, 2010. — 480 с. — ISBN 978-5-8114-0921-1.
16. *Векиштейн Е. Г.* Сборник задач по электродинамике. — М.: Высшая школа, 1966. — 288 с.
17. *Гильденбург В. Б.* Сборник задач по электродинамике. — 2-е изд. — М. : Физматлит, 2001. — 198 с. — ISBN 5-9221-0113-7.
18. *Жирнов Н. И.* Задачник-практикум по электродинамике. — 3-е изд. — Просвещение, 1970. — 352 с.
19. *Крамм М. Н.* Сборник задач по основам электродинамики: Учебное пособие. — М. : Лань, 2011. — 256 с. — ISBN 978811411221.
20. Сборник задач по теоретической физике / Л. Г. Гречко [и др.]. — 2-е изд. — М. : Высшая школа, 1984. — 319 с.