Енергія електричного поля

Лекції з електрики та магнетизму

Пономаренко С. М.

Зміст

Ємність провідника

Якщо провідник має заряд q, то його потенціал дорівнює φ.

Якщо заряд збільшити в n разів, то через принцип суперпозиції в n разів збільшиться і робота по переміщенню пробного заряду в полі провідника від його поверхні на нескінченність. Це означає, що в n разів зросте і потенціал. Отже, відношення q/φ не повинно залежати від заряду провідника і характеризує сам провідник.

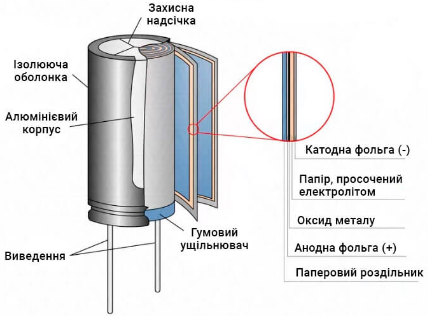
Відповідно можна ввести ємність провідника як: $$\boxed{C = \frac{q}{\varphi}.}$$

Якщо маємо систему двох провідників. Нанесемо на один провідник заряд $(-q)$, а на інший — заряд $(+q)$. Різниця потенціалів провідників $\varphi_+ - \varphi_-$ пропорційна заряду q.

Ємність (взаємна ємність) пари провідників визначається співвідношенням: $$\boxed{C = \frac{q}{\varphi_+ - \varphi_-}.}$$

Конденсатори

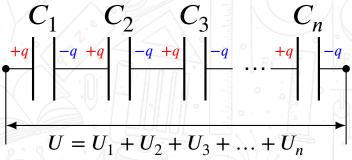
Конденсатор складається з двох металевих пластин — електродів, які називаються також обкладками, між якими знаходиться тонкий шар діелектрика.



Відео: Заряд та розряд конденсатора

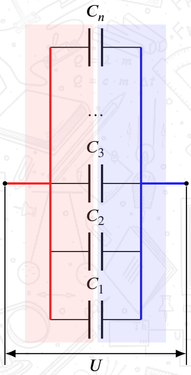
З'єднання конденсаторів

Послідовне з'єднання



$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}.$$

Паралельне з'єднання



$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i.$$

Задачі

Задача 1

Знайдіть ємність сферичного провідника радіусом R.

Задача 2

Знайдіть ємність плоского конденсатора, відстань між обкладками якого дорівнює d, площа пластин S, простір заповнено діелектриком з проникністю ε.

Відповідь: $C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$.

Задача 3

Знайдіть ємність сферичного конденсатора, радіуси обкладок R_1 та R_2, простір заповнено діелектриком з проникністю ε.

Відповідь: $C = \frac{\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$.

Задача 4

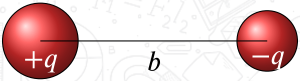
Знайдіть ємність циліндричного конденсатора висотою ℓ, радіуси обкладок R_1 та R_2, простір заповнено діелектриком з проникністю ε.

Відповідь: $C = \frac{\varepsilon \ell}{2 \ln \frac{R_1}{R_2} d}$.

Взаємна ємність двох куль

Задача 5

Знайдемо (взаємну) ємність системи з двох металевих тіл (куль), що мають власні ємності C_1 і C_2 і перебувають на відстані d одна від одної, вважаючи $d \gg C_1, C_2$. Останнє означає, що одна відносно одної кулі можна вважати точковими.



Розв'язок

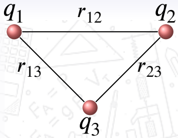
Нанесемо заряд $+q$ на кулю ємністю C_1 і заряд $-q$ на кулю ємністю C_2. Запишемо потенціали кульок з урахуванням їхнього взаємного впливу:

$$\begin{cases} \varphi_+ = \frac{q}{C_1} - \frac{q}{b}, \\ \varphi_- = -\frac{q}{C_1} + \frac{q}{b}. \end{cases}$$

Різниця потенціалів $\varphi_+ - \varphi_- = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{2}{b}\right)$, а ємність системи:

$$C = \frac{q}{\varphi_+ - \varphi_-} \approx \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\left(1 + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\frac{2}{b}\right).$$

Взаємна енергія системи зарядів



Щоб зблизити два заряди q_1 і q_2 до відстані r_{12}, потрібно здійснити роботу проти сил поля $A = \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$, тобто, пара зарядів, яку ми розглядаємо, має енергію $U = \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$.

Для системи зарядів взаємна енергія дорівнює: $U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$.

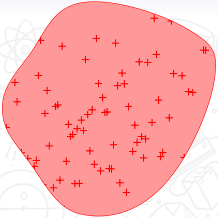
Потенціал поля в точці знаходження i-го заряду, створюваний усіма зарядами (крім i-го):

$$\varphi_i = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{q_j}{r_{ij}}.$$

Потенціальна енергія всієї системи зарядів:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$$

Електростатична енергія тіл



Якщо заряди розподілені в просторі з об'ємною густиною $\rho(\vec{r})$, а також на поверхнях — з поверхневою густиною $\sigma(\vec{r})$, формула

$$W = \sum_i q_i \varphi_i$$

узагальнюється як:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})dV + \frac{1}{2} \iint\limits_S \sigma(\vec{r})\varphi(\vec{r})dS.}$$

Задачі

Задача 1

Нехай куля радіуса R несе повний заряд Q, що рівномірно розподілений по поверхні. Знайти електростатичну енергію кулі.

Розв'язок

Енерргію знайдемо як:

$$W = \frac{1}{2}\iint\limits_S \sigma(\vec{r})\varphi(\vec{r})dS = \frac{1}{2}\sigma\frac{Q}{R}4\pi R^2 = \frac{Q^2}{2R}$$

Задача 2

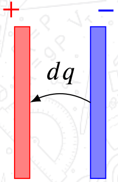
Нехай куля радіуса R несе повний заряд Q, що рівномірно розподілений по об'єму. Знайти електростатичну енергію кулі.

Відповідь: $W = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{R}$

Де локалізована енергія поля?

Енергія електричного поля в конденсаторі

Зарядимо конденсатора за допомогою перенесення заряду з правої пластини на ліву. Робота з перенесення заряду dq дорівнює $dW = \Delta\varphi dq$, де $\Delta\varphi$ — різниця потенціалів пластин. Оскільки $\varphi = \frac{q}{C}$, то енергія буде дорівнювати:



$$dW = \Delta\varphi dq = \frac{qdq}{C} \Rightarrow W = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\Delta\varphi^2}{2}.$$

В плоскому конденсаторі поле однорідне $\Delta\varphi = Ed$, ємність плоского конденсатора $C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$, то для енергії конденсатора отримуємо:

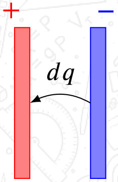
$$W = \frac{1}{2}C\Delta\varphi^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{4\pi d}(Ed)^2 = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}V.$$

де $V = Sd$ — об'єм конденсатора. Густина енергії дорівнює

$$w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}, \quad \text{якщо } D = \varepsilon E \Rightarrow w = \frac{ED}{8\pi}.$$

Енергія електричного поля в конденсаторі

Зарядимо конденсатора за допомогою перенесення заряду з правої пластини на ліву. Робота з перенесення заряду dq дорівнює $dW = \Delta\varphi dq$, де $\Delta\varphi$ — різниця потенціалів пластин. Оскільки $\varphi = \frac{q}{C}$, то енергія буде дорівнювати:



$$dW = \Delta\varphi dq = \frac{q dq}{C} \Rightarrow W = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\Delta\varphi^2}{2}.$$

Енергія конденсатора виражена через характеристики поля (а не заряди):

$$w = \frac{ED}{8\pi}$$

що дозволяє дати нову інтерпретацію результату. Переносником взаємодії зарядів є електричне поле, так що воно і є носієм енергії, передає енергію від одного заряду до іншого. Електричне поле присутнє тільки в об'ємі конденсатора, тож і його енергія локалізована в тих областях простору, де присутнє поле.

Енергія електричного поля (загальне виведення)

Отримана формула для енергії електричного поля для окремого випадку, коли поле однорідне і локалізоване в конденсаторі. Наведемо тепер більш загальний висновок.

При зміні заряду системи на $\delta\rho$, енергія змінюється на величину

$$\delta W = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \delta\rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})dV.$$

З теореми Гаусса $\delta\rho = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\delta\vec{D}$:

$$\delta W = \frac{1}{8\pi}\iiint\limits_V \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\delta\vec{D}\varphi dV = \frac{1}{8\pi}\iiint\limits_V \left(\operatorname{div}(\delta\vec{D}\varphi) - \delta\vec{D}\cdot\vec{\nabla}\varphi\right).$$

Інтегрування поширене на весь нескінченний простір. Але на великій відстані від системи зарядів поле обертається в нуль. Тому,перший доданок у правій частині $\iiint\limits_V \left(\operatorname{div}(\delta\vec{D}\varphi\right) dV = \oint\limits_{S\to\infty} (\varphi\delta\vec{D})\cdot d\vec{S} = 0$

У другому доданку врахуємо зв'язок потенціалу та напруженості поля: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$:

$$\delta W = \iiint\limits_V \frac{\vec{E}\cdot\delta\vec{D}}{8\pi}dV, \;\Rightarrow\; w = \frac{\vec{E}\cdot\delta\vec{D}}{8\pi}.$$

Власна та взаємна енергія зарядів

Взаємна енергія зарядів:

$$W = \frac{1}{2}\sum \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

Енергія поля:

$$W = \int\limits_V \frac{E^2}{8\pi} dV.$$

Формула ліворуч може бути як додатною так і від'ємною. Формула праворуч дає значення енергії завжди позитивне, оскільки містить інтеграл від невід'ємної величини.

Поле системи двох зарядів $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ має енергію:

$$W = \int\limits_V \frac{E^2}{8\pi} dV = \int\limits_V \frac{(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2}{8\pi} dV = \int\limits_V \frac{E_1^2}{8\pi} dV + \int\limits_V \frac{E_2^2}{8\pi} dV + \int\limits_V \frac{\vec{E}_1 \vec{E}_2}{8\pi} dV$$

Власна енергія зарядів:

$$\int\limits_V \frac{E_1^2}{8\pi} dV > 0, \int\limits_V \frac{E_2^2}{8\pi} dV > 0.$$

Взаємна енергія:

$$W_{\text{вз}} = \int\limits_V \frac{\vec{E}_1 \vec{E}_2}{8\pi} dV \lesseqgtr 0.$$

Енергетичний метод обчислення сил

Теорія

Одним з ефективних прийомів розрахунку сил є метод віртуальних переміщень, у якому обчислюють роботу сил поля $\delta A = F dx$ у разі нескінченно малого зсуву dx, після чого сила знаходиться з рівності $F = \delta A / dx$.

Метод є універсальним, без вияснення причин виникнення сил і автоматично враховувати всі силові взаємодії (електричні та механічні).

Енергетичний метод обчислення сил

Теорія

Нехай на провідниках підтримуються постійними заряди, $q = \mathrm{const}$, тобто немає зовнішніх джерел енергії.

За таких умов робота δA всіх внутрішніх сил системи під час віртуальних переміщень провідників і діелектриків відбувається за рахунок зменшення електричної енергії dW системи: $\delta A = -(dW)_{q=\mathrm{const}}$.

Нехай нас цікавить сила, що діє на дане тіло (провідник або діелектрик). Зробимо нескінченно мале поступальне переміщення dx цього тіла в цікавому для нас напрямку x. Тоді робота шуканої сили F_x визначиться як $\delta A = F_x dx$, звідки:

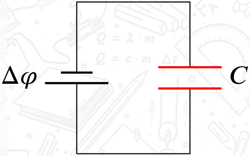
$$\boxed{F_x = -\left.\frac{dW}{dx}\right|_{q=\mathrm{const}} .}$$

Для обчислення сили за цією формулою не треба підбирати такий режим, за якого обов'язково всі заряди провідників залишалися б постійними. Треба просто знайти приріст dW за умови, що $q = \mathrm{const}$ — це суто математична операція.

Енергетичний метод обчислення сил

Теорія

Нехай тепер на провідниках підтримуються постійними потенціали $\varphi = \mathrm{const}$. Для цього всистемі є джерело, що постачає заряди і витрачають енергію на здійснення роботи. Із закону збереження енергії, робота джерела йде на виконання механічної роботи $F_x dx$ та на зміну енергії поля dW:



$$\delta A_{\text{дж}} = F_x dx + dW$$

З іншого боку робота джерела по переміщенню заряду дорівнює $\delta A_{\text{дж}} = \delta q \Delta\varphi = \Delta\varphi^2 \delta C$, а $dW = \frac{1}{2}\Delta\varphi^2\delta C$, звідки $F_x dx = \frac{1}{2}\Delta\varphi^2\delta C = dW$, тобто:

$$\boxed{F_x = +\left.\frac{dW}{dx}\right|_{\Delta\varphi=\mathrm{const}}.}$$

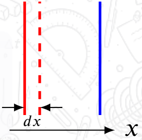
Енергетичний метод обчислення сил

Приклади

Приклад 1

Знайдемо силу тяжіння пластин зарядженого конденсатора.

За умов, коли пластини конденсатора нерухомі, сила їхнього притягання не залежить від способу обчислення.



Обчислимо силу у випадку $q = \mathrm{const}$. Зміна енергії поля при зміні відстані між пластинами:

$$dW = d\left(\frac{q^2}{2C}\right) = -\frac{q^2}{2C^2}dC, \quad C = \frac{\varepsilon S}{4\pi x}, \quad dC = -\frac{C}{x}dx \Rightarrow dW = \frac{q^2}{2Cx}dx.$$

$$dW = \frac{\Delta\varphi^2 C}{2d}dx = \frac{E^2 \cancel{d^2} \varepsilon S}{2\cancel{d}\, 4\pi \cancel{d}}dx, \quad F_x = -\frac{dW}{dx} = -\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}S$$

Знак «мінус» свідчить про те, що пластини притягуються одна до одної.

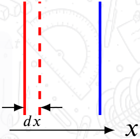
Енергетичний метод обчислення сил

Приклади

Приклад 1

Знайдемо силу тяжіння пластин зарядженого конденсатора.

За умов, коли пластини конденсатора нерухомі, сила їхнього притягання не залежить від способу обчислення.



Обчислимо силу у випадку $\Delta\varphi = \mathrm{const}$. Зміна енергії поля при зміні відстані між пластинами:

$$dW = d\left(\frac{C\Delta\varphi^2}{2}\right) = \frac{\Delta\varphi^2}{2}dC,\ C = \frac{\varepsilon S}{4\pi x},\ dC = -\frac{C}{x}dx \Rightarrow dW = -\frac{\Delta\varphi^2 C}{2x}dx.$$

$$dW = -\frac{\Delta\varphi^2 C}{2d}dx = -\frac{E^2\cancel{d^2}\varepsilon S}{2\cancel{d}\,4\pi\cancel{d}}dx, \quad F_x = \frac{dW}{dx} = -\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}S$$

Знак «мінус» свідчить про те, що пластини притягуються одна до одної.

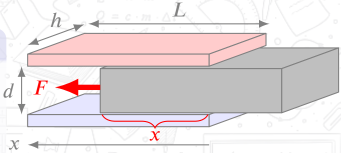
Енергетичний метод обчислення сил

Приклад 2

Знайдемо силу, з якою пластина з діелектрика з діелектричною проникністю ε втягується в конденсатор.

Модель

Замінимо конденсатор із частково всунутою в нього пластиною діелектрика двома паралельно з'єднаними конденсаторами, з яких один — вакуумний, а інший заповнений діелектриком.



Ємність системи з двох паралельно з'єднаних конденсаторів дорівнює:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{S_1}{4\pi d} + \frac{\varepsilon S_2}{4\pi d}.$$

Сумарна площа пластин конденсаторів незмінна, і можна записати

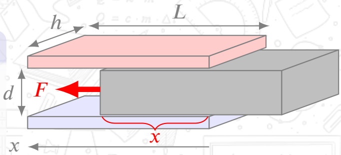
$$S = S_1 + S_2, S_1 = \left(1 - \frac{x}{L}\right) S, S_2 = \frac{x}{L} S, S = Lh$$

Енергетичний метод обчислення сил

Приклади

Приклад 2

Знайдемо силу, з якою пластина з діелектрика з діелектричною проникністю ε втягується в конденсатор.



Модель

Замінимо конденсатор із частково всунутою в нього пластиною діелектрика двома паралельно з'єднаними конденсаторами, з яких один — вакуумний, а інший заповнений діелектриком.

$$C = \frac{S}{4\pi d}\left(1 + (\varepsilon - 1)\frac{x}{L}\right)$$

$$F_x = -\frac{dW}{dx} = -\frac{dW}{dC}\frac{dC}{dx}, \quad \frac{dW}{dC} = -\frac{q^2}{2C^2}, \quad \frac{dC}{dx} = \frac{S}{4\pi d}\frac{\varepsilon - 1}{L}.$$

$$F_x = \frac{q^2}{2C^2}\frac{S}{4\pi d}\frac{\varepsilon - 1}{L} \overset{q=CEd}{=} \frac{(\varepsilon - 1)E^2}{8\pi}hd.$$

Підсумки

1. Електрична ємність

- Ємність провідника: $C = \frac{q}{\varphi}$.
- Ємність пари провідників: $C = \frac{q}{\Delta\varphi}$.
- Послідовне з'єднання конденсаторів: $\frac{1}{C} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$.
- Паралельне з'єднання конденсаторів: $C = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i$.
- Ємність плоского конденсатора: $C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$.
- Ємність сферичного конденсатора: $C = \frac{\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$.
- Ємність циліндричного конденсатора: $C = \frac{\varepsilon \ell}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}}$.

Підсумки

2. Енергія електричного поля

- Енергія системи зарядів: $U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$.
- Енергія системи зарядів через потенціал: $W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$.
- Енергія тіла $W = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})dV + \frac{1}{2}\iint\limits_S \sigma(\vec{r})\varphi(\vec{r})dS$.
- Енергія електричного поля в конденсаторі: $W = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\Delta\varphi^2}{2}$
- Енергія через напруженість поля: $W = \iiint\limits_V \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}dV$

Підсумки

3. Пондеромоторні сили

- Сила при $q = \text{const}$: $F_x = -\left(\frac{dW}{dx}\right)_{q=\text{const}} = +\left(\frac{dW}{dx}\right)_{\Delta\varphi=\text{const}}$.
- Сила втягування діелектрика в конденсатор: $F_x = \frac{(\varepsilon-1)E^2}{8\pi} S_{\text{торця}}$.