

Явище електромагнітної індукції

Лекції з електрики та магнетизму

Пономаренко С. М.

Зміст

1. Явище електромагнітної індукції

Вихрове електричне поле

2. Явище самоіндукції

Перехідні процеси в колі з індуктивністю

3. Взаємна індукція

Принцип роботи трансформаторів

4. Енергія магнітного поля

Явище електромагнітної індукції

Явище електромагнітної індукції (Фарадей)

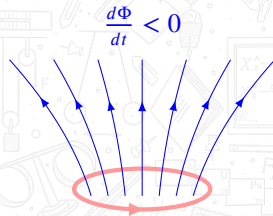
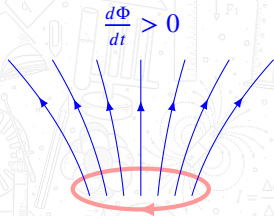
У 1831 р. Фарадеєм було зроблено одне з найбільш фундаментальних відкриттів в електродинаміці — **явище електромагнітної індукції**. Воно полягає в тому, що в замкнутому провідному контурі при зміні магнітного потоку, охопленого цим контуром, виникає електричний струм — його назвали індукційним.

Досліди Фарадея

Закон електромагнітної індукції

Електрорішійна сила (ЕРС), що виникає в контурі пропорційна швидкості зміни магнітного потоку, що пронизує площу, охоплену даним контуром:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_S.$$



Правило Ленца

Індукований струм має такий напрямок, щоб за допомогою створюваного ним магнітного поля перешкоджати зміні магнітного потоку, тобто щоб послабити дію причини, яка збуджує цей струм.

Струми Фуко, як і індукційні струми в лінійних провідниках, підпорядковані правилу Ленца: їх магнітне поле направлене так, щоб протидіяти змінам магнітного потоку, що індукували ці струми.

Вихрове електричне поле

Оскільки магнітний потік дорівнює $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$, а ЕРС індукції $\mathcal{E} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$, то із закону індукції випливає:

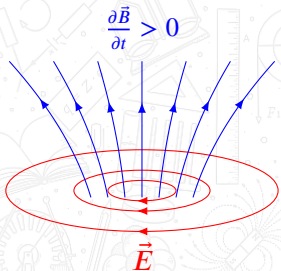
$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Скориставшись теоремою Стокса, останнє інтегральне рівняння можна переписати у диференціальній формі:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Вихрове електричне поле

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$



Згідно Максвеллу **явище електромагнітної індукції** полягає в тому, що будь-яке змінне магнітне поле збуджує в просторі електричне поле; провідники для цього не потрібні. Індукційні ж струми збуджуються в провідниках індукованим електричним полем.

На відміну від електростатики, де $\text{rot } \vec{E} = 0$, у випадку змінного в часі магнітного поля $\text{rot } \vec{E} \neq 0$. Це означає, що індуковане електричне поле, індується (виникає) за рахунок зміни магнітного поля і не є потенційним, а вихровим.

Вираз електричного поля через потенціали

Скористаємося законом електромагнітної індукції. Підставимо сюди вираз для магнітного поля через векторний потенціал $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$:

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

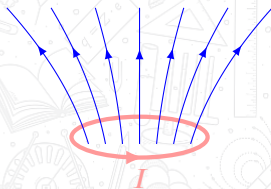
Рівність нулю ротора деякого векторного поля означає, що це поле потенційне і може бути представлене як градієнт скалярної функції. Таким чином, отримуємо

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

У окремому випадку постійних у часі полів приходимо до відомої рівності: $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$, звідки видно, що введена тут функція φ збігається зі скалярним потенціалом.

Явище самоіндукції

Зміна струму в контурі викликає зміну магнітного поля, що створює змінний магнітний потік через цей же контур і, як наслідок, ЕРС індукції. Це явище називають **самоіндукцією**.



Якщо в просторі, де розташований контур зі струмом I , немає феромагнетиків, поле \vec{B} , а отже, і повний магнітний потік Φ через контур будуть пропорційні силі струму I :

$$\Phi = \frac{1}{c} L I$$

Коефіцієнт L називається **індуктивністю контуру**.

Явище самоіндукції

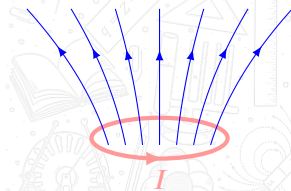
Зміна струму в контурі викликає зміну магнітного поля, що створює змінний магнітний потік через цей же контур і, як наслідок, ЕРС індукції. Це явище називають **самоіндукцією**.

При зміні сили струму в контурі згідно закону Фарадея виникає ЕРС самоіндукції:

$$\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt}$$

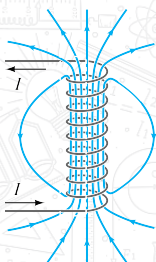
Тут знак мінус показує, що \mathcal{E} завжди спрямована так, щоб перешкоджати зміні сили струму відповідно до правила Ленца. Ця ЕРС прагне зберегти струм незмінним: вона протидіє струму, коли він збільшується, і підтримує струм, коли він зменшується.

Коефіцієнт L називається **індуктивністю контуру**.



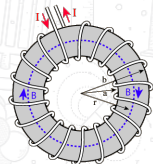
Приклади розрахунку індуктивності

Соленоїд



Магнітне поле в середині соленоїда $B = \frac{4\pi\mu NI}{cl}$. Магнітний потік через всі витки $\Phi = NBS = N\frac{4\pi\mu}{c}\frac{N}{l}IS$. Порівнюючи з формулою $\Phi = \frac{1}{c}LI$, індуктивність соленоїда дорівнює: $L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}$

Тороїд



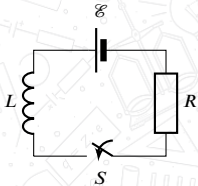
Нехай тороїд має прямокутний переріз шириною $b - a$ і висоту d .

$$L = 2N^2 d \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Одиницею індуктивності в системі СГС є сантиметр: $[L] = \text{см}$. Це означає, що індуктивність є **геометричною** характеристикою.

Перехідні процеси в колі з індуктивністю

Встановлення струму в LR -контурі



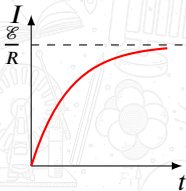
Закон Ома для кола $\mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{si}} = IR$. Враховуючи що $\mathcal{E}_{\text{si}} = -L dI/dt$, закон набуде вигляду

$$L \frac{dI}{dt} + IR = \mathcal{E}.$$

Після інтегрування ми отримаємо:

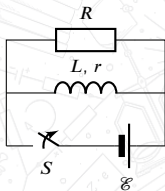
$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right),$$

де $\tau = \frac{L}{R}$ — називають **часом релаксації**.



Перехідні процеси в колі з індуктивністю

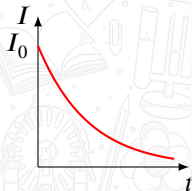
Екстраструми при розмиканні



Спочатку ключ S замкнутий. Тоді через опір R і через котушку індуктивності L тече струм:

$$I_0 = \mathcal{E}/r.$$

Після розмикання ключа (відключення ЕРС) магнітне поле почне убувати. Це збудить електрорушійну \mathcal{E}_{si} силу та індукційний струм I у контурі. Такий струм називається **екстраструмом розмикання**. По закону Ома:

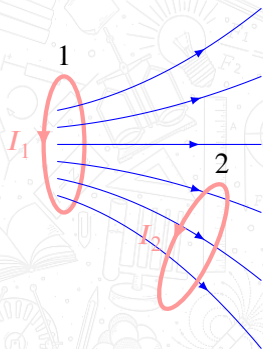


$$I(R + r) = -L \frac{dI}{dt}.$$

Після інтегрування ми отримаємо: $I(t) = I_0 e^{-\frac{R+r}{L}t}$.

Якщо $R \gg r$, то $\mathcal{E}_{si} = \frac{R}{r} \mathcal{E} e^{-\frac{R}{L}t}$. При розмиканні ця величина може значно перевершити ЕРС батареї, тобто може статись пробій, що спостерігається під час вимкнення струму в колах з великими індуктивностями.

Взаємна індукція



Нехай два нерухомих контури 1 і 2 розташовані близько один до одного. Якщо в контурі 1 тече струм I_1 , він створює через контур 2 магнітний потік Φ_2 , пропорційний струму I_1 :

$$\Phi_2 = \frac{1}{c} L_{21} I_1$$

Аналогічно, якщо в контурі 2 тече струм I_2 , то він створює через контур 1 магнітний потік:

$$\Phi_1 = \frac{1}{c} L_{12} I_2.$$

Коефіцієнти пропорційності L_{12} і L_{21} називають **коефіцієнтами взаємної індуктивності** контурів.

Теорема взаємності

Теоремою взаємності стверджує, що коефіцієнтами взаємної індуктивності контурів однаков:

$$L_{12} = L_{21}.$$

Завдяки цій теоремі можна не робити різниці між L_{12} і L_{21} і просто говорити про взаємну індуктивність двох контурів.

Практичне застосування

Практичне застосування теореми взаємності полягає у тому, що якщо по контурам течуть однакові струми I , то

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

Ця обставина нерідко дає змогу сильно спрощувати вирішення питання про знаходження, наприклад, магнітних потоків.

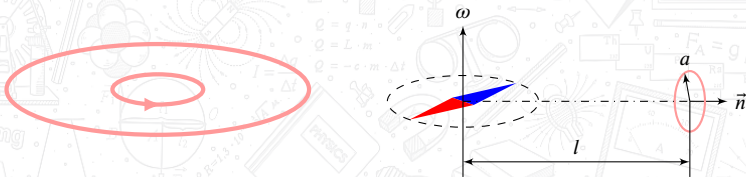
Задачі на застосування теореми взаємності

Задача 1

Два тонкі колові провідники, осі яких співпадають, лежать в одній площині. Радіус зовнішнього провідника R_1 внутрішнього R_2 ($R_2 \ll R_1$). Знайдіть магнітний потік, що пронизує площу зовнішнього провідника, якщо по внутрішньому провіднику тече струм I .

Задача 2

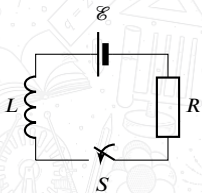
Магнітний диполь з моментом p_m обертається з частотою ω навколо осі, яка проходить через його центр і перпендикулярна магнітному моменту (див. рис.). Знайти струм в плоскому нерухомому кільці радіусом a з опором R , яке знаходиться на відстані $l \gg a$ від диполя. Нормаль \vec{n} до площини кільця перпендикулярна осі обертання диполя. Самоіндукцією рамки знехтувати.



Трансформатор

Енергія магнітного поля

Провідник зі струмом створює магнітне поле, яке з'являється та зникає разом зі струмом. **Магнітне поле є носієм енергії**, що дорівнює роботі струму на його створення. Розглянемо роботу, яку виконує джерело при замиканні ключа в колі по переміщенню заряду $dq = Idt$:



$$\begin{aligned} \delta A &= \mathcal{E} dq = I^2 R dt - \mathcal{E}_{si} I dt = \\ &= \underbrace{I^2 R dt}_{\text{Теплота}} + \underbrace{\frac{1}{c^2} L I dI}_{\text{Енергія магнітного поля}}. \end{aligned}$$

Енергія магнітного поля:
$$W = \frac{1}{c^2} \int_0^I L I dI = \frac{1}{c^2} \frac{L I^2}{2}.$$

Енергія магнітного поля

Енергію магнітного поля визначається через характеристики поля.

Розглянемо однорідне магнітне поле всередині довгого соленоїда.

Індуктивність соленоїда:

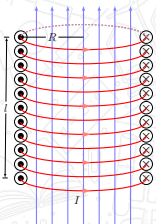
$$L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}.$$

Магнітне поле в середині соленоїда:

$$B = \frac{4\pi\mu NI}{cl}$$

Енергія магнітного поля:

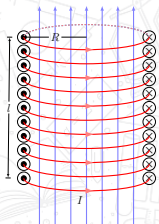
$$W = \frac{1}{c^2} \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{c^2} \frac{(4\pi\mu NI)^2 Sl}{8\pi\mu l^2} = \frac{B^2}{8\pi\mu} V = \frac{BH}{8\pi} V.$$



Енергія магнітного поля

Енергію магнітного поля визначається через характеристики поля.

Розглянемо однорідне магнітне поле всередині довгого соленоїда.



Індуктивність соленоїда:

$$L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}.$$

Магнітне поле в середині соленоїда:

$$B = \frac{4\pi\mu NI}{cl}$$

Густина енергії магнітного поля:

$$w = \frac{BH}{8\pi}.$$

Магнітна енергія зосереджена в об'ємі соленоїда — в тій області простору, де присутнє магнітне поле.