

Явище електромагнітної індукції

Лекції з електрики та магнетизму

Пономаренко С. М.

Зміст

1. Явище електромагнітної індукції

Вихрове електричне поле

2. Явище самоіндукції

Перехідні процеси в колі з індуктивністю

3. Взаємна індукція

Принцип роботи трансформаторів

4. Енергія магнітного поля

5. Пондеромоторні сили в магнітному полі

Явище електромагнітної індукції

Явище електромагнітної індукції (Фарадей)

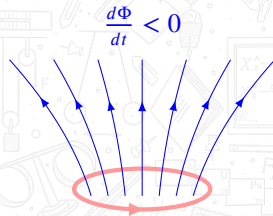
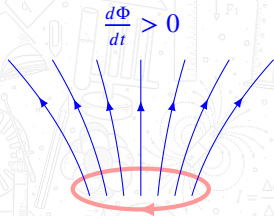
У 1831 р. Фарадеєм було зроблено одне з найбільш фундаментальних відкриттів в електродинаміці — **явище електромагнітної індукції**. Воно полягає в тому, що в замкнутому провідному контурі при зміні магнітного потоку, охопленого цим контуром, виникає електричний струм — його назвали індукційним.

Досліди Фарадея

Закон електромагнітної індукції

Електрорішійна сила (ЕРС), що виникає в контурі пропорційна швидкості зміни магнітного потоку, що пронизує площу, охоплену даним контуром:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{S}.$$

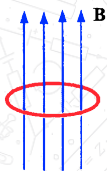


Правило Ленца

Індукований струм має такий напрямок, щоб за допомогою створюваного ним магнітного поля перешкоджати зміні магнітного потоку, тобто щоб послабити дію причини, яка збуджує цей струм.

Закон збереження магнітного потоку

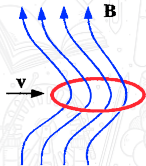
Нехай замкнутий виток з опором R перебуває в зовнішньому магнітному полі.



За будь-якої зміни магнітного поля у витку збуджується ЕРС індукції. Струм, що виникає у витку:

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{cR} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Якщо опір контуру $R = 0$ (для надпровідника), то:



$$\frac{d\Phi}{dt} = 0, \Rightarrow \Phi = \text{const}$$

інакше навіть малі зміни Φ викликали б нескінченні струми. Тобто, **магнітний потік через контур з малим опором зберігається.**

Це означає, що **число силових ліній, що пронизують виток незмінне.**

Силкові лінії ніби «вморожені» в провідний контур, при зміщенні контура він захоплює силкові лінії магнітного поля.

Вихрове електричне поле

Оскільки магнітний потік дорівнює $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$, а ЕРС індукції $\mathcal{E} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$, то із закону індукції випливає:

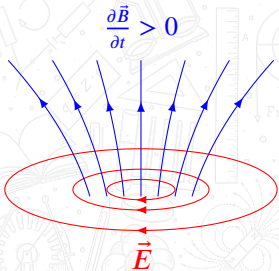
$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Скориставшись теоремою Стокса, останнє інтегральне рівняння можна переписати у диференціальній формі:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Вихрове електричне поле

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$



Згідно Максвеллу **явище електромагнітної індукції** полягає в тому, що будь-яке змінне магнітне поле збуджує в просторі електричне поле; провідники для цього не потрібні. Індукційні ж струми збуджуються в провідниках індукованим електричним полем.

На відміну від електростатики, де $\text{rot } \vec{E} = 0$, у випадку змінного в часі магнітного поля $\text{rot } \vec{E} \neq 0$. Це означає, що індуковане електричне поле, індується (виникає) за рахунок зміни магнітного поля і не є потенційним, а вихровим.

Вираз електричного поля через потенціали

Скористаємося законом електромагнітної індукції. Підставимо сюди вираз для магнітного поля через векторний потенціал $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$:

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

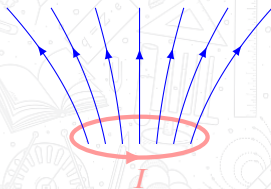
Рівність нулю ротора деякого векторного поля означає, що це поле потенційне і може бути представлене як градієнт скалярної функції. Таким чином, отримуємо

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

У окремому випадку постійних у часі полів приходимо до відомої рівності: $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$, звідки видно, що введена тут функція φ збігається зі скалярним потенціалом.

Явище самоіндукції

Зміна струму в контурі викликає зміну магнітного поля, що створює змінний магнітний потік через цей же контур і, як наслідок, ЕРС індукції. Це явище називають **самоіндукцією**.



Якщо в просторі, де розташований контур зі струмом I , немає феромагнетиків, поле \vec{B} , а отже, і повний магнітний потік Φ через контур будуть пропорційні силі струму I :

$$\Phi = \frac{1}{c} L I$$

Коефіцієнт L називається **індуктивністю контуру**.

Явище самоіндукції

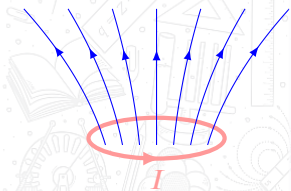
Зміна струму в контурі викликає зміну магнітного поля, що створює змінний магнітний потік через цей же контур і, як наслідок, ЕРС індукції. Це явище називають **самоіндукцією**.

При зміні сили струму в контурі згідно закону Фарадея виникає ЕРС самоіндукції:

$$\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt}$$

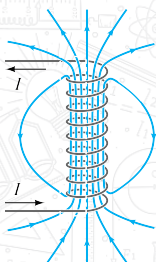
Тут знак мінус показує, що \mathcal{E} завжди спрямована так, щоб перешкоджати зміні сили струму відповідно до правила Ленца. Ця ЕРС прагне зберегти струм незмінним: вона протидіє струму, коли він збільшується, і підтримує струм, коли він зменшується.

Коефіцієнт L називається **індуктивністю контуру**.



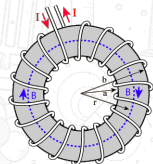
Приклади розрахунку індуктивності

Соленоїд



Магнітне поле в середині соленоїда $B = \frac{4\pi\mu NI}{cl}$. Магнітний потік через всі витки $\Phi = NBS = N\frac{4\pi\mu}{c}\frac{N}{l}IS$. Порівнюючи з формулою $\Phi = \frac{1}{c}LI$, індуктивність соленоїда дорівнює: $L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}$

Тороїд



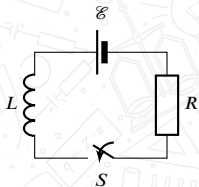
Нехай тороїд має прямокутний переріз шириною $b - a$ і висоту d .

$$L = 2N^2 d \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Одиницею індуктивності в системі СГС є сантиметр: $[L] = \text{см}$. Це означає, що індуктивність є **геометричною** характеристикою.

Перехідні процеси в колі з індуктивністю

Встановлення струму в LR -контурі



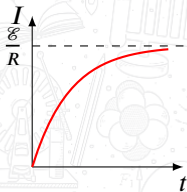
Закон Ома для кола $\mathcal{E} + \mathcal{E}_{si} = IR$. Враховуючи що $\mathcal{E}_{si} = -L dI/dt$, закон набуде вигляду

$$L \frac{dI}{dt} + IR = \mathcal{E}.$$

Після інтегрування ми отримаємо:

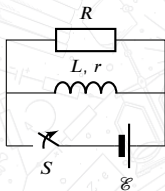
$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right),$$

де $\tau = \frac{L}{R}$ — називають **часом релаксації**.



Перехідні процеси в колі з індуктивністю

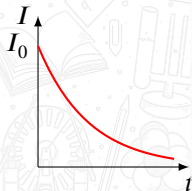
Екстраструми при розмиканні



Спочатку ключ S замкнутий. Тоді через опір R і через котушку індуктивності L тече струм:

$$I_0 = \mathcal{E}/r.$$

Після розмикання ключа (відключення ЕРС) магнітне поле почне убувати. Це збудить електрорушійну \mathcal{E}_{si} силу та індукційний струм I у контурі. Такий струм називається **екстраструмом розмикання**. По закону Ома:

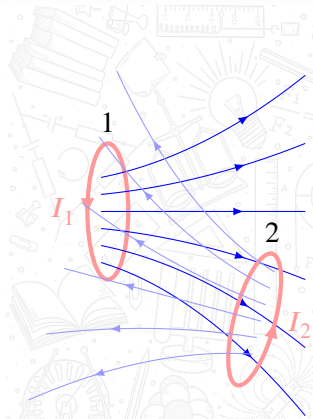


$$I(R + r) = -L \frac{dI}{dt}.$$

Після інтегрування ми отримаємо: $I(t) = I_0 e^{-\frac{R+r}{L}t}$.

Якщо $R \gg r$, то $\mathcal{E}_{si} = \frac{R}{r} \mathcal{E} e^{-\frac{R}{L}t}$. При розмиканні ця величина може значно перевершити ЕРС батареї, тобто може статись пробій, що спостерігається під час вимкнення струму в колах з великими індуктивностями.

Взаємна індукція



Нехай два нерухомих контури 1 і 2 розташовані близько один до одного. Якщо в контурі 1 тече струм I_1 , він створює через контур 2 магнітний потік Φ_2 , пропорційний струму I_1 :

$$\Phi_{21} = \frac{1}{c} L_{21} I_1$$

Аналогічно, якщо в контурі 2 тече струм I_2 , то він створює через контур 1 магнітний потік:

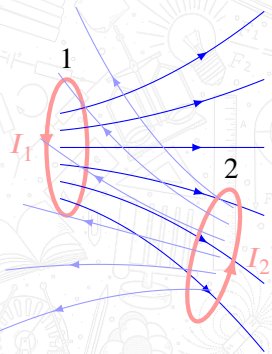
$$\Phi_{12} = \frac{1}{c} L_{12} I_2.$$

Коефіцієнти пропорційності L_{12} і L_{21} називають **коефіцієнтами взаємної індуктивності** контурів.

Взаємна індукція

Закони Ома для контурів:

$$\begin{cases} I_1 R_1 = \mathcal{E}_1 - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (L_{11} I_1) - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (L_{12} I_2), \\ I_2 R_2 = \mathcal{E}_2 - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (L_{21} I_1) - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (L_{22} I_2). \end{cases}$$



Наявність магнітного зв'язку між контурами проявляється в тому, що за будь-якої зміни струму в одному з контурів в іншому контурі виникає ЕРС індукції. е явище називають **взаємною індукцією**.

L_{12} — алгебраїчна величина, яка може мати різний знак, а також дорівнювати нулю.

Розрахунок коефіцієнтів взаємної індуктивності

Приклад

Довгий парамагнітний циліндр об'ємом V має дві обмотки (одна на іншій). Одна обмотка містить n_1 витків на одиницю довжини, інша — n_2 . Знайдемо їхню взаємну індуктивність, нехтуючи крайовими ефектами.

Розв'язок

Оскільки $L_{21} = \Phi_2/I_1$. Це означає, що ми повинні створити струм I_1 в обмотці 1 і обчислити повний магнітний потік через всі витки обмотки 2. Якщо в обмотці 2 міститься N_2 витків, то

$$\Phi_2 = N_2 B_1 S,$$

де S — площа поперечного перерізу циліндра. Оскільки $N_2 = n_2 l$, l — довжина циліндра, $B_1 = \frac{4\pi}{c} \mu n_1 I_1$, то

$$\Phi_2 = \frac{4\pi}{c} \mu N_2 n_1 I_1 S.$$

Отже

$$L_{21} = \frac{4\pi}{c} \mu \frac{N_2 N_1}{l} S.$$

Аналогічно знаходимо і L_{12} :

$$L_{12} = \frac{4\pi}{c} \mu \frac{N_1 N_2}{l} S.$$

Розрахунок коефіцієнтів взаємної індуктивності

Приклад

Довгий парамагнітний циліндр об'ємом V має дві обмотки (одна на іншій). Одна обмотка містить n_1 витків на одиницю довжини, інша — n_2 . Знайдемо їхню взаємну індуктивність, нехтуючи крайовими ефектами.

Зауваження

В розглянутому прикладі коефіцієнти індуктивності задовольняють співвідношенням:

$$L_{21} = L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$$

Їх справедливність пов'язана, по-перше, з тим, що ми знехтували розсіюванням магнітного потоку, а по-друге, з тим, що магнітна проникність осердя не залежить від величини магнітного поля. Співвідношення $L_{21} = L_{12}$ не буде виконуватись для феромагнетика, для якого $\mu = \mu(H)$ і за умови що $N_1 \neq N_2$. Тоді обмотки при однакових струмах створюють в осерді різні магнітні поля, так що вирази для L_{21} і L_{12} міститимуть різні коефіцієнти μ , що й призводить до нерівності.

Теорема взаємності

Теоремою взаємності стверджує, що коефіцієнтами взаємної індуктивності контурів однаков:

$$L_{12} = L_{21}.$$

Завдяки цій теоремі можна не робити різниці між L_{12} і L_{21} і просто говорити про взаємну індуктивність двох контурів.

Практичне застосування

Практичне застосування теореми взаємності полягає у тому, що якщо по контурам течуть однакові струми I , то

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

Ця обставина нерідко дає змогу сильно спростувати вирішення питання про знаходження, наприклад, магнітних потоків.

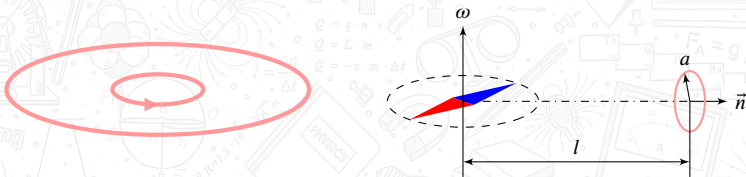
Задачі на застосування теореми взаємності

Задача 1

Два тонкі колові провідники, осі яких співпадають, лежать в одній площині. Радіус зовнішнього провідника R_1 внутрішнього R_2 ($R_2 \ll R_1$). Знайдіть магнітний потік, що пронизує площу зовнішнього провідника, якщо по внутрішньому провіднику тече струм I .

Задача 2

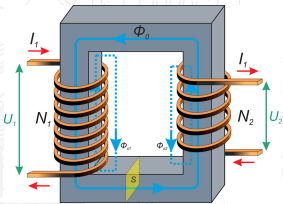
Магнітний диполь з моментом p_m обертається з частотою ω навколо осі, яка проходить через його центр і перпендикулярна магнітному моменту (див. рис.). Знайти струм в плоскому нерухомому кільці радіусом a з опором R , яке знаходиться на відстані $l \gg a$ від диполя. Нормаль \vec{n} до площини кільця перпендикулярна осі обертання диполя. Самоіндукцією рамки знехтувати.



Трансформатор

Принцип роботи

Принцип дії трансформаторів — пристроїв, що застосовуються для підвищення або зниження напруги змінного струму, заснований на явищі взаємної індукції.



Первинна і вторинна обмотки з N_1 і N_2 витками укріплені на замкнутому залізному осердді. Змінна напруга \mathcal{E}_1 у первинній обмотці створює струм I_1 і змінний магнітний потік Φ , локалізований в осердді. Потік пронизує витки вторинної обмотки, викликаючи ЕРС взаємної індукції, а в первинній — ЕРС самоіндукції.

Трансформатор

Теорія

Струм I_1 у первинній обмотці визначається за законом Ома:

$$\mathcal{E}_1 - \frac{d}{dt}(N_1\Phi) = I_1 R_1.$$

При швидкозмінних полях $I_1 R_1 \ll \mathcal{E}_1, \frac{d}{dt}(N_1\Phi)$:

$$\mathcal{E}_1 \approx N_1 \frac{d\Phi}{dt}.$$

ЕРС у вторинній обмотці:

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}_1, \quad \text{знак «-» вказує на протилежність фаз.}$$

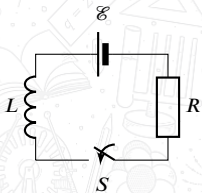
Відношення $\eta = \frac{N_2}{N_1}$ називається **коефіцієнтом трансформації**.

Якщо $\eta > 1$, то це підвищувальний трансформатор, що збільшує ЕРС і зменшує струм.

Якщо $\eta < 1$, то це знижувальний трансформатор, що зменшує ЕРС і збільшує струм.

Енергія магнітного поля

Провідник зі струмом створює магнітне поле, яке з'являється та зникає разом зі струмом. **Магнітне поле є носієм енергії**, що дорівнює роботі струму на його створення. Розглянемо роботу, яку виконує джерело при замиканні ключа в колі по переміщенню заряду $dq = Idt$:



$$\begin{aligned} \delta A &= \mathcal{E} dq = I^2 R dt - \mathcal{E}_{\text{si}} I dt = \\ &= \underbrace{I^2 R dt}_{\text{Теплота}} + \underbrace{\frac{1}{c^2} L I dI}_{\text{Енергія магнітного поля}}. \end{aligned}$$

Енергія магнітного поля:
$$W = \frac{1}{c^2} \int_0^I L I dI = \frac{1}{c^2} \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{c} I \Phi = \frac{\Phi^2}{2L}.$$

Енергія магнітного поля

Енергію магнітного поля визначається через характеристики поля.

Розглянемо однорідне магнітне поле всередині довгого соленоїда.

Індуктивність соленоїда:

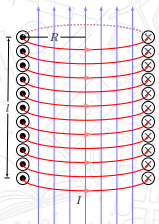
$$L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}.$$

Магнітне поле в середині соленоїда:

$$B = \frac{4\pi\mu NI}{cl}$$

Енергія магнітного поля:

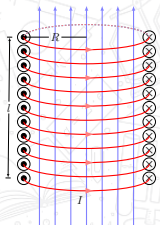
$$W = \frac{1}{c^2} \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{c^2} \frac{(4\pi\mu NI)^2 Sl}{8\pi\mu l^2} = \frac{B^2}{8\pi\mu} V = \frac{BH}{8\pi} V.$$



Енергія магнітного поля

Енергію магнітного поля визначається через характеристики поля.

Розглянемо однорідне магнітне поле всередині довгого соленоїда.



Індуктивність соленоїда:

$$L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}.$$

Магнітне поле в середині соленоїда:

$$B = \frac{4\pi\mu NI}{cl}$$

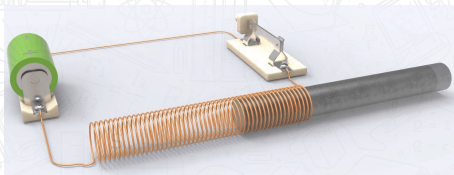
Густина енергії магнітного поля:

$$w = \frac{BH}{8\pi}.$$

Магнітна енергія зосереджена в об'ємі соленоїда — в тій області простору, де присутнє магнітне поле.

Пондеромоторні сили в магнітному полі

Закон збереження енергії



По **закону збереження енергії** робота, яку виконують джерела струму, йде на теплоту, на збільшення магнітної енергії і на механічну роботу:

$$\delta A_{\text{дж}} = \delta Q + dW + \delta A_{\text{мех.}}$$

З іншого боку, та ж робота визначається як:

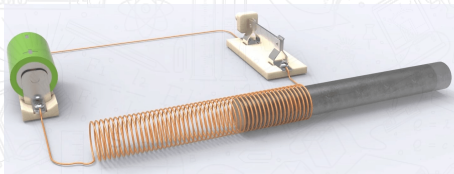
$$\delta A_{\text{дж}} = \delta Q - \mathcal{E}_{\text{in}} I dt,$$

Звідки

$$-\mathcal{E}_{\text{in}} I dt = dW + \delta A_{\text{мех.}}$$

Пондеромоторні сили в магнітному полі

Випадок $I = \text{const}$



$$-\mathcal{E}_{\text{in}} I dt = dW + \delta A_{\text{мех}}$$

Розглянемо умову, коли в колі підтримується постійним струм.

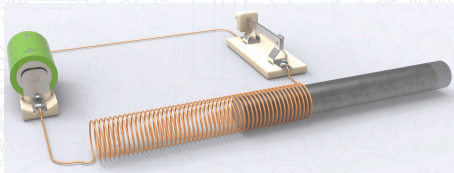
$$-\mathcal{E}_{\text{in}} I dt = + \frac{I^2}{c^2} dL.$$

При цьому, зміна магнітної енергії $dW = \frac{I^2}{2c^2} dL$. Отже, $\delta A_{\text{мех}} = +dW$, а сила втягування:

$$F_x = + \left(\frac{dW}{dx} \right)_I$$

Пондеромоторні сили в магнітному полі

Випадок $\Phi = \text{const}$



$$-\mathcal{E}_{\text{in}} I dt = dW + \delta A_{\text{mex}}$$

Розглянемо умову, коли в колі підтримується потік, що пронизує котушку (наприклад якщо котушка із надпровідника).

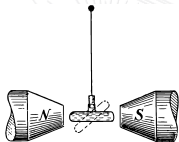
$$-\mathcal{E}_{\text{in}} I dt = 0.$$

Отже, $\delta A_{\text{mex}} = -dW$, а сила втягування:

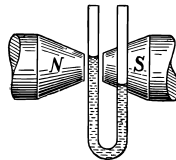
$$F_x = - \left(\frac{dW}{dx} \right)_{\Phi}$$

Приклади

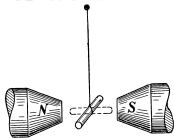
Поведінка різних тіл в магнітному полі



Ампула з парамагнітним розчином хлористого заліза в магнітному полі



Втягування розчину хлористого заліза в магнітне поле

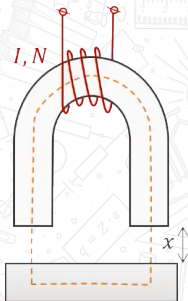


Діамагнітна паличка вісмута в магнітному полі



Діамагнетизм полум'я

Підйомна сила електромагніта



За теоремою про циркуляцію для \vec{H} :

$$\frac{B}{\mu}l + B 2x = \frac{4\pi}{c}IN, \Rightarrow B = \frac{4\pi\mu}{c} \frac{NI}{l + 2\mu x},$$

де l — довжина контура в середині магніту. Потік магнітного поля через площу перерізу S магніту:

$$\Phi = NBS = \frac{4\pi\mu}{c} \frac{N^2 I}{l + 2\mu x} S.$$

За умови, що струм постійний, зміна енергії магнітного поля при віртуальній зміні x дорівнює $dW = \frac{Id\Phi}{2c}$, і силу можна знайти як:

$$F_x = \left(\frac{dW}{dx} \right)_I = \frac{I}{2c} \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)_I = -\frac{4\pi\mu^2}{c^2} \frac{N^2 I^2}{(l + 2\mu x)^2} S = \frac{B^2}{8\pi} 2S.$$

Сила $F_x < 0$ означає, що це сила притягання.