

Магнітне поле у вакуумі

Лекції з електрики та магнетизму

Пономаренко С. М.

Зміст лекції

1. Означення
2. Характеристика магнітного поля
3. Дія магнітного поля на заряджені частинки та струми
4. Закон Біо-Савара-Лапласа
5. Вектор-потенціал магнітного поля
6. Теореми магнітостатики
7. Магнітний момент
8. Потенціальна енергія диполя та сила, що діє на диполь в магнітному полі

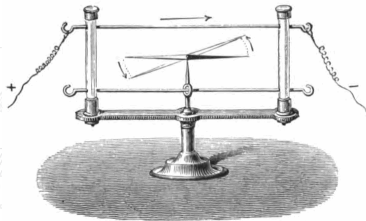
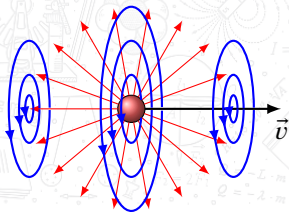
Означення



Дослід Ерстеда, проведений 1820 року Ерстедом — є першим експериментальним доказом впливу електричного струму на магніт (магнітну стрілку).

Магнітним полем називається силове поле, що **діє на рухомі заряди** і як наслідок — на електричні струми і на тіла, які мають магнітний момент.

Магнітне поле створюється рухомими зарядами (електричним струмом). Незмінні в часі струми створюють постійні магнітні поля.



Характеристика магнітного поля

Магнітних зарядів (магнітних монополів) у в природі немає (експериментальний факт). Характеристику магнітного поля, аналогічно до $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ ввести не можна. Однак в природі є магнітні диполі (магнітна стрілка, коловий виток зі струмом тощо), тому використовуючи аналогію з моментом сил, що діє на електричний диполь в електричному полі $\vec{M} = [\vec{p}_e \times \vec{E}]$, можна ввести характеристику магнітного поля:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}], \quad M_{\max} = p_m B$$

Характеристику магнітного поля, вектор \vec{B} , по історичним причинам називають не **напруженістю**, а **індукцією** магнітного поля.

Величина вектора індукції чисельно дорівнює максимальному обертовому моменту, що діє на одиничний магнітний момент вміщений у магнітне поле:

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m}.$$

Характеристика магнітного поля

Магнітних зарядів (магнітних монополів) у в природі немає (експериментальний факт). Характеристику магнітного поля, аналогічно до $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ ввести не можна. Однак в природі є магнітні диполі (магнітна стрілка, коловий виток зі струмом тощо), тому використовуючи аналогію з моментом сил, що діє на електричний диполь в електричному полі $\vec{M} = [\vec{p}_e \times \vec{E}]$, можна ввести характеристику магнітного поля:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}], \quad M_{\max} = p_m B$$

Характеристику магнітного поля, вектор \vec{B} , по історичним причинам називають не **напруженістю**, а **індукцією** магнітного поля.

В гауссовій системі одиниць величину магнітного поля називають Гауссом (Гс). С системі СІ Теслою (Тл):

$$1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс.}$$

Сила Лоренца та сила Ампера

Магнітною складовою сили Лоренца називається сила, що діє на рухомий заряд q з боку магнітного поля:

$$\vec{F} = q \left[\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right].$$

Повна сила (власне і є сила Лоренца), що діє на заряд, включає також силу з боку електричного поля:

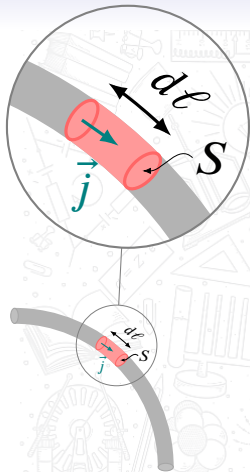
$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right] \right).$$

Силою Ампера називають силу, що діє на струми з боку магнітного поля:

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} \left[\vec{j} dV \times \vec{B} \right],$$

де $\vec{j} dV$ — називається **елементом об'ємного струму**.

Елемент струму



Якщо в задачі не цікавляться внутрішньою будовою провідника, та розподілом струму в його товщі, то можна ввести **елемент лінійного струму**.

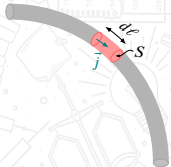
Нехай струм тече провідником із площею поперечного перерізу S . Уведемо вектор ділянки провідника завдовжки $d\vec{\ell}$ за формулою $d\vec{\ell} = \vec{n}\ell$, де \vec{n} — одиничний вектор уздовж осі провідника. Тоді $\vec{j} = j\vec{n}$, а $I = jS$ і вираз для елемента об'ємного струму можна переписати у вигляді:

$$\vec{j}dV = j\vec{n}Sd\ell = Id\vec{\ell}.$$

Для елемента лінійного струму сила Ампера:

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} \left[Id\vec{\ell} \times \vec{B} \right].$$

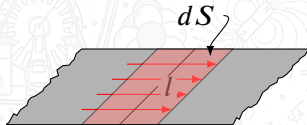
Елемент струму



Елемент об'ємного струму $\vec{j}dV$



Елемент лінійного струму $I d\vec{\ell}$



Поверхнева густина струму $i = \frac{I}{l}$.
 Елемент струму $I\ell = i\ell = iS$, де ℓ та l — сторони виділеного елемента, площа якого $S = l \cdot \ell$.
 Елемент поверхневого струму $\vec{i}dS$

Зв'язок сили Лоренца та сили Ампера

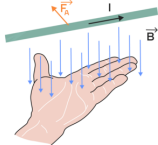
Сила Лоренца, що діє на заряд dq , дорівнює

$$d\vec{F} = \left[\frac{dq\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right].$$

Оскільки $dq\vec{v} = \rho\vec{v}dV = \vec{j}dV$, то одразу отримуємо силу Ампера, що діє на об'ємний елемент струму:

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} \left[\vec{j}dV \times \vec{B} \right].$$

Для рухомого заряду q , що рухається з швидкістю \vec{v} — елементом струму струму є $q\vec{v}$.



Робота магнітного поля

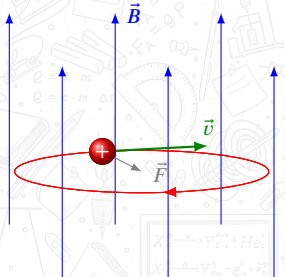
Робота сили Лоренца:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \left[\frac{q\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right] \cdot \vec{v} dt.$$

$$\vec{A} \cdot [\vec{B} \times \vec{C}] = \vec{C} \cdot [\vec{A} \times \vec{B}].$$

$$\vec{v} \cdot [\vec{v} \times \vec{B}] = \vec{B} \cdot [\vec{v} \times \vec{v}] = 0.$$

$$\delta A = 0.$$

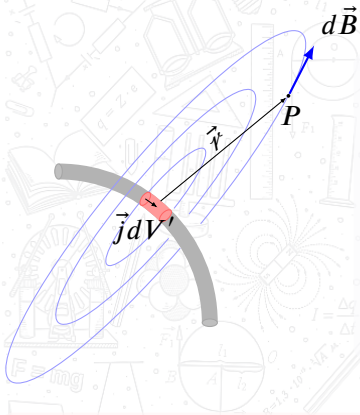


За теоремою про зміну кінетичної енергії $A = \Delta \left(\frac{mv^2}{2} \right) = 0$,
кінетична енергія частинки не змінюється.

Магнітне поле не виконує роботи над частинкою!

Закон Біо-Савара-Лапласа

Закон Біо-Савара встановлено експериментально (1820 р.) шляхом аналізу експериментальних даних і **визначає магнітне поле, що створюється елементом струму.**

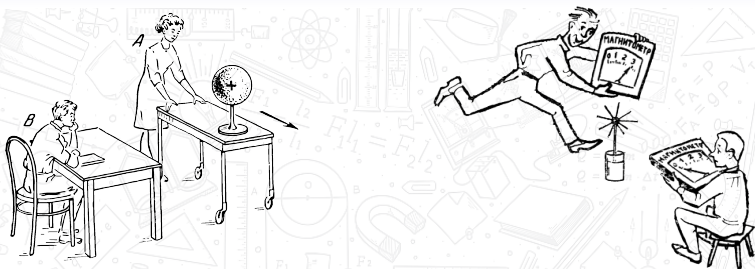


Якщо радіус-вектор точки спостереження відносно розглянутого елемента струму є \vec{r} , то поле, створюване елементом струму $\vec{j}dV'$, дорівнює

$$d\vec{B} = \frac{1}{c} \frac{[\vec{j}dV' \times \vec{r}]}{r^3}.$$

Магнітне поле підкоряється принципу суперпозиції: $\vec{B} = \int d\vec{B}$.

Відносність величини магнітного поля



Магнітного поля навколо заряду відносно спостерігача *A* немає. Відносно спостерігача *B* буде магнітне поле:

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{v}}{c} \times \frac{q\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}.$$

Електричне і магнітне поле — є прояв єдиного цілого, яке можна назвати електромагнітним полем.

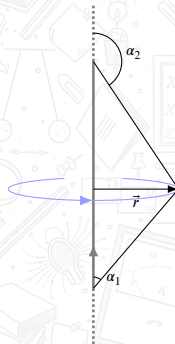
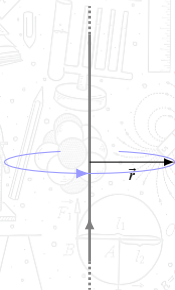
Приклади застосування закону Біо-Савара-Лапласа

Задача 1

Визначити магнітне поле на відстані r від нескінченно довгого провідника зі струмом I .

Задача 2

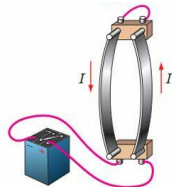
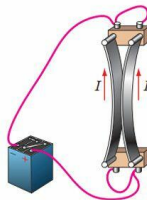
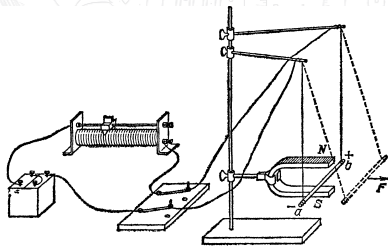
Визначте магнітне поле в точці P на відстані r від короткого провідника зі струмом. Положення точки P визначається кутами α_1 та α_2 .



Взаємодія струмі

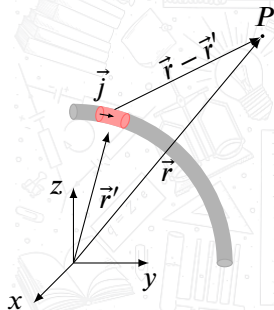
Досліди Ампера

У 1820 р. А. Ампером було встановлено закон, що визначає силу, яка діє на елемент струму в магнітному полі. Оскільки створити відокремлений елемент не можна, то Ампер вивчав вплив паралельних дротів один на одного та поведінку дротяних замкнутих контурів різної форми в магнітному полі.



Вектор-потенціал магнітного поля

Введення поняття



Закон Біо-Савара-Лапласа

$$\vec{B}(\vec{r}) = \iiint_{V'} \frac{1}{c} \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

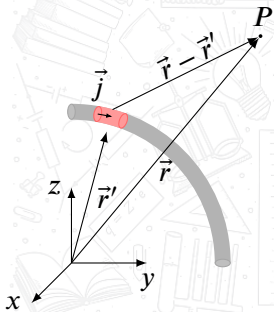
Використаємо тотожність: $\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$, у якому операція $\vec{\nabla}$ діє на координати \vec{r} , а також рівність $\text{rot}(\varphi \vec{C}) = \varphi \text{rot } \vec{C} + [\vec{\nabla} \varphi \times \vec{C}]$.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times \vec{j}(\vec{r}') dV' = \text{rot} \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\vec{j} dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}),$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}).$$

Вектор-потенціал магнітного поля

Калібруванні вектор-потенціалу



$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A},$$

Введений тут вектор \vec{A} називається
вектор-потенціалом:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \sum_i \frac{q_i \vec{v}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Вектор-потенціал вводиться при цьому неоднозначно. Векторні потенціали \vec{A} і $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f(\vec{r})$ призводять до одного й того ж магнітного поля \vec{B} . Цією обставиною можна скористатися для того, щоб накласти на \vec{A} яке-небудь обмеження, Зручно накласти на \vec{A} умову

$$\text{div } \vec{A} = 0,$$

кулонівське калібрування.

Теорема Гауса для магнітного поля

Маючи на увазі тотожність $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$, з формули $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ отримуємо теорему Гауса в диференціальній формі:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Застосовуючи теорему Остроградського-Гауса отримуємо теорему Гауса в інтегральній формі:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Теорема Гауса стверджує, що немає вільних (незв'язаних) магнітних зарядів, на яких могли б починатися або закінчуватися силові лінії індукції магнітного поля.

Теорема про циркуляцію магнітного поля у вакуумі

Знайдемо ротор вектора \vec{B} :

$$\text{rot } \vec{B} = \text{rot rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}] = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \stackrel{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}=0}{=} -\nabla^2 \vec{A}.$$

Аналогія з рівнянням Пуассона з електростатики

Рівняння Пуассона та його розв'язок:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho, \quad \varphi = \iiint_{V'} \frac{\rho dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad \nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \iiint_{V'} \frac{\vec{j} dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Однакові рівняння мають однакові розв'язки!

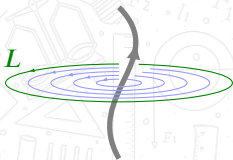
Теорема про циркуляцію для вектора \vec{B} :

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

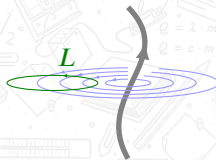
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

Приклади на теорему про циркуляцію №1

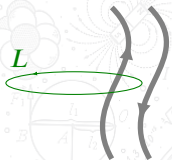
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} \sum_i I_i$$



$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} I$$



$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = 0$$



$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} I$$

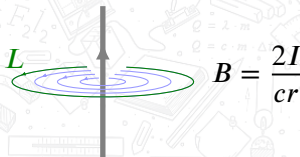


$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} (I + (-I)) = 0$$

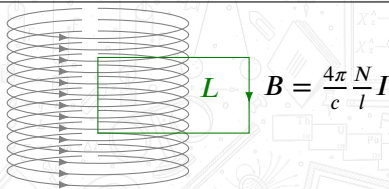
Приклади на теорему про циркуляцію №1

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} \sum_i I_i$$

Поле
нескінченного
провідника



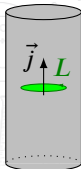
Поле
нескінченного
соленоїда



Приклади на теорему про циркуляцію №2

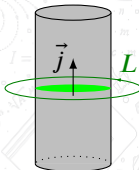
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Поле всередині
нескінченного
циліндричного
провідника



$$B = \frac{2\pi}{c} jr$$

Поле зовні
нескінченного
циліндричного
провідника



$$B = \frac{2}{cr} j\pi R^2 = \frac{2I}{cr}$$

Порівняння законів електро- та магнітостатики у вакуумі

Диференціальні теореми

Теорема	Електростатика	Зміст	Магнітостатика	Зміст
Зв'язок потенціалу та поля	$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$	Скалярний потенціал, поле потенціальне	$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$	Вектор-потенціал. Поле вихрове.
Теорема Гаусса	$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$	Джерелами поля є електричні заряди	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	Джерел у магнітного поля немає
Теорема про циркуляцію	$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$	Електростатичне поле є потенціальним	$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$	Магнітне поле є вихровим. Вихором є струм.

Інтегральні теореми

Теорема	Електростатика	Магнітостатика
Теорема Гаусса	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \iiint_V \rho dV$	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
Теорема про циркуляцію	$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$	$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$

Магнітний момент

Моменту імпульсу $\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v})$ для руху мас є аналогом магнітного моменту для руху зарядів!

Момент імпульсу

$$\vec{L} = \iiint_V \vec{r} \times \rho \vec{v} dV$$

Магнітний момент

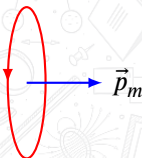
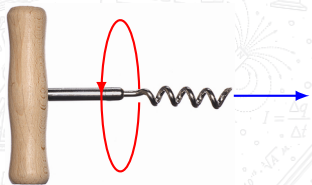
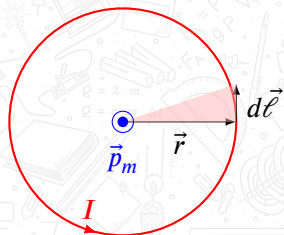
$$\vec{p}_m = \frac{1}{2c} \iiint_V \vec{r} \times \rho \vec{v} dV$$

Оскільки густина струму $\vec{j} = \rho \vec{v}$, а $\vec{j}dV$ — є елементом струму, то можна для різних випадків записати різні варіації формули магнітного моменту:

Випадок	Магнітний момент
Об'ємні струми	$\vec{p}_m = \frac{1}{2c} \iiint_V \vec{r} \times \vec{j} dV$
Лінійні замкнені постійні струми	$\vec{p}_m = \frac{I}{2c} \oint_L \vec{r} \times d\vec{\ell}$

Магнітний момент колового витка

$$\vec{p}_m = \frac{I}{2c} \oint_L \vec{r} \times d\vec{\ell} = \frac{1}{c} I \pi R^2 \vec{n} = \frac{1}{c} I S \vec{n}$$

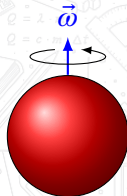


Магнітні та механічні моменти різних тіл

Відношення магнітного моменту зарядженого тіла, до його механічного моменту називається гіромагнітним відношенням:

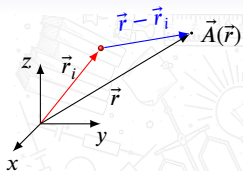
$$\vec{p}_m = \gamma \vec{L}.$$

Для любых **класичних** тіл $\gamma = \frac{Q}{2Mc}$



Тіло	Момент імпульсу	Магнітний момент	Гіромагнітне відношення γ
Куля	$\vec{L} = \frac{2}{5} m R^2 \vec{\omega}$	$\vec{p}_m = \frac{1}{5c} Q R^2 \vec{\omega}$	$\frac{Q}{2Mc}$
Електрон	$L = \frac{1}{2} \hbar$	$p_m = \frac{e}{2mc} \hbar$	$-\frac{e}{m_e c}$

Вектор-потенціал на далеких відстанях



Магнітний момент системи тіл:

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \sum_i \frac{q_i \vec{v}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

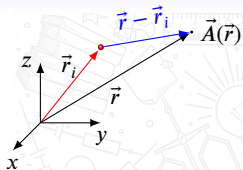
На далеких відстанях $r_i \ll r$ наближено $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r^2} \right)$.

Для стаціонарних рухів, які відбуваються в малих областях, можна зробити усереднення вектор-потенціалу, при цьому $\frac{d}{dt} \dots = 0$.

$$\vec{A} = \frac{1}{cr^3} \sum_i q_i v_i (\vec{r} \cdot \vec{r}_i)$$

$$v_i (\vec{r} \cdot \vec{r}_i) = \frac{1}{2} [v_i (\vec{r} \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i (\vec{r} \cdot \vec{v}_i)] + \frac{1}{2} [v_i (\vec{r} \cdot \vec{r}_i) + \vec{r}_i (\vec{r} \cdot \vec{v}_i)] = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}_i \times \vec{r}_i + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{r}_i (\vec{r} \cdot \vec{r}_i)) .$$

Вектор-потенціал на далеких відстанях



Магнітний момент системи тіл:

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \sum_i \frac{q_i \vec{v}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{r^3} \left(\frac{1}{2c} \sum_i \vec{r}_i \times (q_i \vec{v}_i) \right) \times \vec{r} = \frac{\vec{p}_m \times \vec{r}}{r^3}.$$

Магнітне поле знаходиться за формулою $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$:

$$\text{rot} [\vec{A} \times \vec{B}] = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{A} \text{div } \vec{B} - \vec{B} \text{div } \vec{A}$$

$$\vec{B} = \text{rot} \left(\vec{p}_m \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -(\vec{p}_m \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{3(\vec{p}_m \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3}.$$

$$\vec{B} = \frac{3(\vec{p}_m \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3}.$$

Детальные выведения

$$\text{rot} [\vec{A} \times \vec{B}] = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{A} \text{div} \vec{B} - \vec{B} \text{div} \vec{A}$$

$$\vec{B} = \text{rot} \left(\vec{p}_m \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -(\vec{p}_m \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{3(\vec{p}_m \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3}$$

$$\vec{A} = \vec{p}_m$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$\vec{p}_m = \text{const}$

$$\text{div} \vec{B} = \text{div} \frac{q \vec{r}}{r^3} = 0 \quad (\vec{r} \neq 0)$$

$$\vec{B} = \text{rot} \left(\vec{p}_m \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \cancel{\left(\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{p}_m} - \left(\vec{p}_m \cdot \vec{\nabla} \right) \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{p}_m \cancel{\text{div} \frac{\vec{r}}{r^3}} - \frac{\vec{r}}{r^3} \cancel{\text{div} \vec{p}_m}$$

$$\vec{B} = - \left(\vec{p}_m \cdot \vec{\nabla} \right) \frac{\vec{r}}{r^3} = - \frac{(\vec{p}_m \cdot \vec{\nabla}) \vec{r}}{r^3} - \vec{r} \frac{(\vec{p}_m \cdot \vec{\nabla})}{r^3}$$

$$\left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) = p_x \vec{e}_1 + p_y \vec{e}_2 + p_z \vec{e}_3 = \vec{p}_m$$

$$\left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{3}{r^5} (p_x x + p_y y + p_z z) = -\frac{3(\vec{p}_m \cdot \vec{r})}{r^5}$$

$$\vec{B} = \frac{3(\vec{p}_m \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3}$$

Магнітний диполь

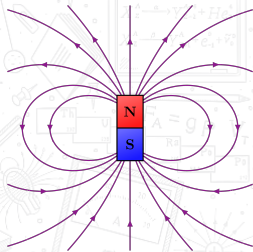
Полюса магніту

Отримана формула збігається за виглядом із формулою для електричного поля точкового електричного диполя.

$$\vec{B} = \frac{3(\vec{p}_m \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3}.$$

Це означає, що точковий магнітний момент можна розглядати формально як точковий диполь, складений з *ефективних магнітних зарядів*:

N (північного) та *S* (південного).



Магнітний диполь

Порівняння електричного та магнітного диполів

	Електричний диполь	Магнітний диполь
Потенціал	$\varphi = \frac{\vec{p}_e \cdot \vec{r}}{r^3}$	$\vec{A} = \frac{\vec{p}_m \times \vec{r}}{r^3}$
Поле	$\vec{E} = \frac{3(\vec{p}_e \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_e}{r^3}$	$\vec{B} = \frac{3(\vec{p}_m \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3}$

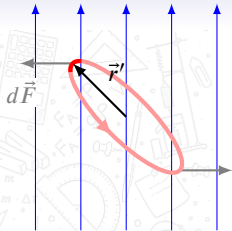
Позначаючи величину ефективного магнітного заряду q_m і плече магнітного диполя $\vec{\ell}$, дипольний момент ефективного магнітного диполя можна записати як $\vec{p}_m = q_m \vec{\ell}$. Якщо не розглядати поле усередині такого магнітного диполя, то воно усюди буде таким самим, як і поле системи струмів із магнітним моментом \vec{p}_m .



Момент сили, що діє на контур в магнітному полі

Якщо виток перебуває в однорідному магнітному полі, то виникає момент сил, який орієнтує його магнітний момент за напрямком поля. За означенням моменту сил:

$$\vec{M} = \frac{1}{c} \oint_L \vec{r} \times (I d\vec{\ell} \times \vec{B}).$$



Треба витягнути \vec{B} з-під інтегралу. Всі інтеграли типу $\oint_L d(\dots) = 0$, як інтеграли повних диференціалів.

$$\vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}) = d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{r} \cdot d\vec{r}), \quad \oint_L d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) - \vec{B} \oint_L d\left(\frac{r^2}{2}\right) \xrightarrow{0}$$

$$d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) = \frac{1}{2} \left[d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) + \vec{r} (d\vec{r} \cdot \vec{B}) \right] + \frac{1}{2} \left[d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) - \vec{r} (d\vec{r} \cdot \vec{B}) \right] = \frac{1}{2} \left[d\vec{r} (\vec{B} \cdot \vec{r}) + \vec{r} (\vec{B} \cdot d\vec{r}) \right] - \frac{1}{2} \vec{B} \times (\vec{r} \times d\vec{r}).$$

$$d\vec{r} (\vec{B} \cdot \vec{r}) + \vec{r} (\vec{B} \cdot d\vec{r}) = d(\vec{r} \cdot \vec{B}), \quad \oint_L d(\vec{r} \cdot \vec{B}) = 0.$$

$$\vec{M} = \left(\frac{I}{c} \oint_L (\vec{r} \times d\vec{r}) \right) \times \vec{B} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

Потенціальна енергія диполя в магнітному полі

Розглянемо виток площею S , у якому циркулює **постійний** струм I . Магнітний момент цього витка $\vec{p}_m = \frac{1}{c} I S \vec{n}$.

Якщо виток перебуває в однорідному магнітному полі, то виникає момент сил, які прагнуть орієнтувати його магнітний момент за напрямком поля:

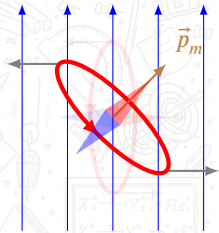
$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}]$$

З визначення потенціальної енергії знаходимо

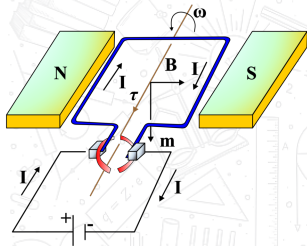
$$U = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$$

Той факт, що потенціальна енергія досягає мінімуму $\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$, означає, що момент прагне орієнтуватися за напрямком поля.

Якщо магнітний диполь представляє собою виток, через який тече постійний струм, і магнітне поле орієнтує його, то потенційна енергія витка змінюється. Однак, оскільки магнітне поле не є потенційним і не може виконувати роботу, постає питання: за рахунок чого відбувається зміна енергії витка? **Відповідь**



Принцип роботи електричного двигуна



На основі дії магнітного поля на рамку, через яку проходить електричний струм, ґрунтується принцип роботи електродвигуна.

1. Ротор (провідник), через який тече струм, поміщений у зовнішнє магнітне поле між полюсами магнітів (N і S).
2. Відповідно до правила лівої руки, на провідник діє сила з боку магнітного поля (сила Ампера), що створює обертальний момент.
3. Магнітний момент системи намагається вирівнятися з напрямом зовнішнього поля.
4. Комутатор змінює напрям струму в обмотці після кожного півоберта, забезпечуючи постійне обертання у одному напрямку.

Сила, що діє на диполь в магнітному полі

У зовнішньому магнітному полі потенціальна енергія магнітного моменту дорівнює $U = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$, а сила, що діє на момент:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = \vec{\nabla}(\vec{p}_m \cdot \vec{B}).$$

У зовнішньому магнітному полі потенціальна енергія магнітного моменту дорівнює $U = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$, а сила, що діє на момент:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = \vec{\nabla}(\vec{p}_m \cdot \vec{B}).$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = [\vec{B} \times \text{rot } \vec{A}] + [\vec{A} \times \text{rot } \vec{B}] + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}.$$

Якщо в середовищі, в якому перебуває момент, відсутні струми провідності, то $\text{rot } \vec{B} = 0$. Тоді має місце тотожність:

$$\vec{F} = (\vec{p}_m \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}.$$

