Магнітне поле у вакуумі

Лекції з електрики та магнетизму

Пономаренко С. М.

Зміст лекції

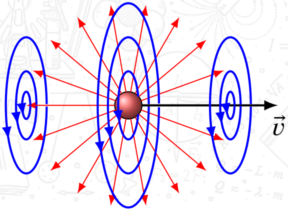
1. Означення
2. Характеристика магнітного поля
3. Дія магнітного поля на заряджені частинки та сруми
4. Закон Біо-Савара-Лапласа
5. Вектор-потенціал магнітного поля
6. Теореми магнітостатики
7. Магнітний момент
8. Потенціальна енергія диполя та сила, що діє на диполь в магнітному полі

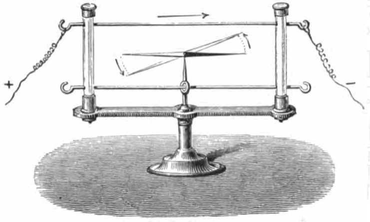
Означення

Дослід Ерстеда, проведений 1820 року Ерстедом — є першим експериментальним доказом впливу електричного струму на магніт (магнітну стрілку).

Магнітним полем називається силове поле, що діє на рухомі заряди і як наслідок — на електричні струми і на тіла, які мають магнітний момент.

Магнітне поле створюється рухомими зарядами (електричним струмом). Незмінні в часі струми створюють постійні магнітні поля.





Характеристика магнітного поля

Магнітних зарядів (магнітних монополів) у в природі немає (експериментальний факт). Характеристику магнітного поля, аналогічно до $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ ввести не можна. Однак в природі є магнітні диполі (магнітна стрілка, коловий виток зі струмом тощо), тому використовуючи аналогію з моментом сил, що діє на електричний диполь в електричному полі $\vec{M} = \left[\vec{p}_e \times \vec{E}\right]$, можна ввести характеристику магнітного поля:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m \times \vec{B}\right], \quad M_{\max} = p_m B$$

Характеристику магнітного поля, вектор $\vec{B}$, по історичним причинам називають не напруженістю, а індукцією магнітного поля.

Величина вектора індукції чисельно дорівнює максимальному обертальному моменту, що діє на одиничний магнітний момент вміщений у магнітне поле:

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m}.$$

Характеристика магнітного поля

Магнітних зарядів (магнітних монополів) у в природі немає (експериментальний факт). Характеристику магнітного поля, аналогічно до $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ ввести не можна. Однак в природі є магнітні диполі (магнітна стрілка, коловий виток зі струмом тощо), тому використовуючи аналогію з моментом сил, що діє на електричний диполь в електричному полі $\vec{M} = \left[\vec{p}_e \times \vec{E}\right]$, можна ввести характеристику магнітного поля:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m \times \vec{B}\right], \quad M_{\max} = p_m B$$

Характеристику магнітного поля, вектор $\vec{B}$, по історичним причинам називають не напруженістю, а індукцією магнітного поля.

В гауссовій системі одиниць величину магнітного поля називають Гаусом (Гс). С системі СІ Теслою (Тл):

$$1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс}.$$

Сила Лоренца та сила Ампера

Магнітною складовою сили Лоренца називається сила, що діє на рухомий заряд q з боку магнітного поля:

$$\vec{F} = q\left[\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right].$$

Повна сила (власне і є сила Лоренца), що діє на заряд, включає також силу з боку електричного поля:

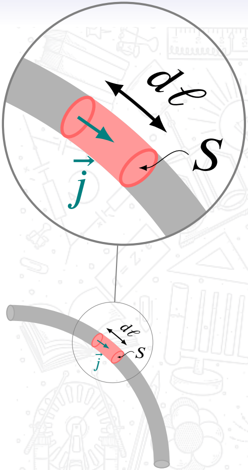
$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right]\right).$$

Силою Ампера називають силу, що діє на струми з боку магнітного поля:

$$d\vec{F} = \frac{1}{c}\left[\vec{j}dV \times \vec{B}\right],$$

де $\vec{j}dV$ — називається об'ємним елементом струму.

Елемент струму



Якщо в задачі не цікавляться внутрішньою будовою провідника, та розподілом струму в його товщі, то можна ввести лінійний елемент струму.

Нехай струм тече провідником із площею поперечного перерізу S. Уведемо вектор ділянки провідника завдовжки $d\vec{\ell}$ за формулою $d\vec{\ell} = \vec{n}\ell$, де $\vec{n}$ — одиничний вектор уздовж осі провідника. Тоді $\vec{j} = j\vec{n}$, а $I = jS$ і вираз для об'ємного елемента струму можна переписати у вигляді:

$$\vec{j}dV = j\vec{n}Sd\ell = Id\vec{\ell}.$$

Для лінійного елемента струму сила Ампера:

$$d\vec{F} = \frac{1}{c}\left[Id\vec{\ell} \times \vec{B}\right].$$

Зв'язок сили Лоренца та сили Ампера

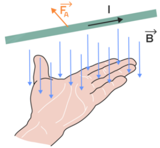
Сила Лоренца, що діє на заряд dq, дорівнює

$$d\vec{F} = \left[\frac{dq\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right].$$

Оскільки $dq\vec{v} = \rho\vec{v}dV = \vec{j}dV$, то одразу отримуємо силу Ампера, що діє на об'ємний елемент струму:

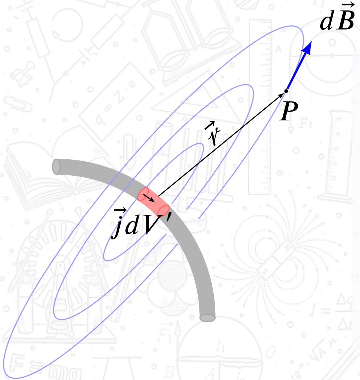
$$d\vec{F} = \frac{1}{c}\left[\vec{j}dV \times \vec{B}\right].$$

Для рухомого заряду q, що рухається з швидкістю $\vec{v}$ — елементом струму струму є $q\vec{v}$.



Закон Біо-Савара-Лапласа

Закон Біо-Савара встановлено експериментально (1820 р.) шляхом аналізу експериментальних даних і визначає магнітне поле, що створюється елементом струму.

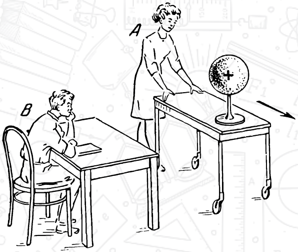


Якщо радіус-вектор точки спостереження відносно розглянутого елемента струму є $\vec{r}$, то поле, створюване елементом струму $\vec{j}dV'$, дорівнює

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\left[\vec{j}dV' \times \vec{r}\right]}{r^3}.}$$

Магнітне поле підкоряється принципу суперпозиції: $\vec{B} = \int d\vec{B}$.

Відносність величини магнітного поля



Магнітного поля навколо заряду відносно спостерігача A немає. Відносно спостерігача B буде магнітне поле:

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{v}}{c}\times\frac{q\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{E}.$$

Електричне і магнітне поле — є прояв єдиного цілого, яке можна назвати електромагнітним полем.

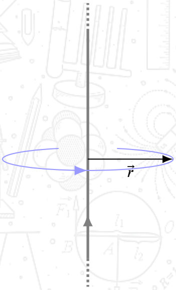
Приклади застосування закону Біо-Савара-Лапласа

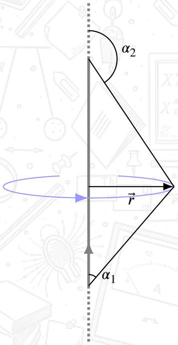
Задача 1

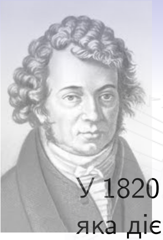
Визначити магнітне поле на відстані r від нескінченно довгого провідника зі струмом I.

Задача 2

Визначте магнітне поле в точці P на відстані r від короткого провідника зі струмом. Положення точки P визначається кутами α_1 та α_2.



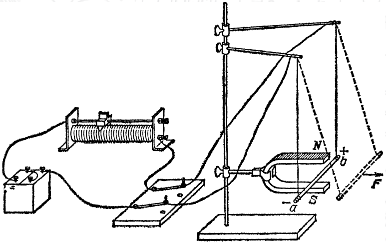


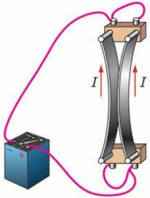


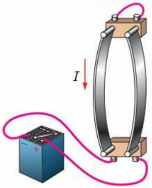
Взаємодія струмі

Досліди Ампера

У 1820 р. А. Ампером було встановлено закон, що визначає силу, яка діє на елемент струму в магнітному полі. Оскільки створити відокремлений елемент не можна, то Ампер вивчав вплив паралельних дротів один на одного та поведінку дротяних замкнутих контурів різної форми в магнітному полі.

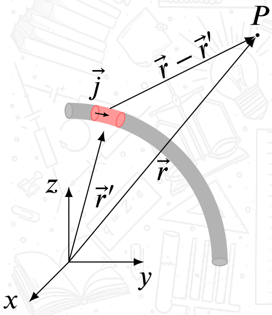






Вектор-потенціал магнітного поля

Введення поняття



Закон Біо-Савара-Лапласа

$$\vec B(\vec r) = \iiint\limits_{V'} \frac{1}{c} \frac{\vec j(\vec r')dV' \times (\vec r - \vec r')}{|\vec r - \vec r'|^3}$$

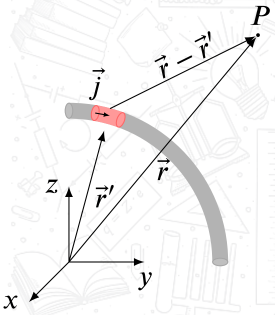
Використаємо тотожність: $\frac{(\vec r - \vec r')}{|\vec r - \vec r'|^3} = -\vec\nabla_{\vec r} \frac{1}{|\vec r - \vec r'|}$, у якому операція $\vec\nabla$ діє на координати $\vec r$, а також рівність $\mathrm{rot}(\varphi \vec C) = \varphi\, \mathrm{rot}\, \vec C + \left[\vec\nabla\varphi \times \vec C\right]$:

$$\vec B(\vec r) = \int\limits_{V'} \frac{1}{c} \vec\nabla \frac{1}{|\vec r - \vec r'|} \times \vec j(\vec r')dV' = \mathrm{rot}\, \frac{1}{c} \int\limits_{V'} \frac{\vec j dV'}{|\vec r - \vec r'|} = \mathrm{rot}\, \vec A(\vec r),$$

$$\vec B(\vec r) = \mathrm{rot}\, \vec A(\vec r).$$

Вектор-потенціал магнітного поля

Калібруванні вектор-потенціалу



$$\boxed{\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A},}$$

Введений тут вектор $\vec{A}$ називається вектор-потенціалом:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int\limits_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV', \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\sum_i \frac{q_i\vec{v}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

Вектор-потенціал вводиться при цьому неоднозначно. Векторні потенціали $\vec{A}$ і $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f(\vec{r})$ призводять до одного й того ж магнітного поля $\vec{B}$. Цією обставиною можна скористатися для того, щоб накласти на $\vec{A}$ яке-небудь обмеження, Зручно накласти на $\vec{A}$ умову

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{A} = 0,}$$ кулонівське калібрування.

Теорема Гаусса для магнітного поля

Маючи на увазі тотожність $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = 0$, з формули $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ отримуємо теорему Гауса в диференціальній формі:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$$

Застосовуючи теорему Остроградського-Гауса отримуємо теорему Гауса в інтегральній формі:

$$\boxed{\oint\!\!\!\!\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0.}$$

Теорема Гауса стверджує, що немає вільних (незв'язаних) магнітних зарядів, на яких могли б починатися або закінчуватися силові лінії індукції магнітного поля.

Теорема про циркуляцію магнітного поля у вакуумі

Знайдемо ротор вектора $\vec{B}$:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right] = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A} \overset{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0}{=} -\nabla^2\vec{A}.$$

Аналогія з рівнянням Пуассона з електростатики

Рівняння Пуассона та його розв'язок:

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho,\ \ \varphi = \iiint\limits_{V'} \frac{\rho dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \qquad \nabla^2\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j},\ \ \vec{A} = \frac{1}{c}\iiint\limits_{V'}\frac{\vec{j}dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Однакові рівняння мають однакові розв'язки!

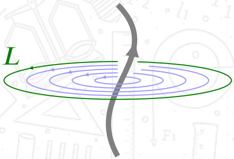
Теорема про циркуляцію для вектора $\vec{B}$:

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}.}$$

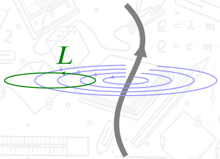
$$\boxed{\oint\limits_{L}\vec{B}\cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c}\iint\limits_{S}\vec{j}\cdot d\vec{S}.}$$

Приклади на теорему про циркуляцію №1

$$\oint\limits_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} \sum_i I_i$$



$$\oint\limits_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} I$$



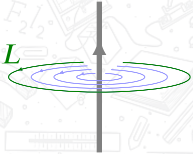
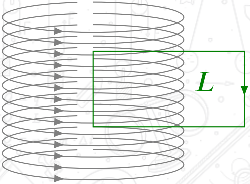
$$\oint\limits_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\oint\limits_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} I$$

$$\oint\limits_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} (I + (-I)) = 0$$

Приклади на теорему про циркуляцію №1

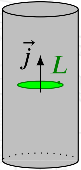
$$\oint\limits_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} \sum_i I_i$$

Поле нескінченного провідника	 $B = \dfrac{2I}{cr}$
Поле нескінченного соленоїда	 $B = \dfrac{4\pi}{c}\dfrac{N}{l} I$

Приклади на теорему про циркуляцію №2

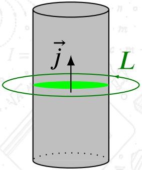
$$\oint\limits_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} \iint\limits_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Поле всередині нескінченного циліндричного провідника



$$B = \frac{2\pi}{c} j r$$

Поле зовні нескінченного циліндричного провідника



$$B = \frac{2}{cr} j \pi R^2 = \frac{2I}{cr}$$

Порівняння законів електро- та магнітостатики у вакуумі

Диференціальні теореми

Теорема	Електростатика	Зміст	Магнітостатика	Зміст
Зв'язок потенціалу та поля	$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$	Скалярний потенціал, поле потенціальне	$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$	Вектор-потенціал. Поле вихрове.
Теорема Гаусса	$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$	Джерелами поля є електричні заряди	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	Джерел у магнітного поля немає
Теорема про циркуляцію	$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$	Електростатичне поле є потенціальним	$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$	Магнітне поле є вихровим. Вихором є струм.

Інтегральні теореми

Теорема	Електростатика	Магнітостатика
Теорема Гаусса	$\oiint\limits_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \iiint\limits_V \rho dV$	$\oiint\limits_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
Теорема про циркуляцію	$\oint\limits_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$	$\oint\limits_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} \iint\limits_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$

Магнітний момент

Моменту імпульсу $\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v})$ для руху мас є аналогом магнітного моменту для руху зарядів!

Момент імпульсу

$$\vec{L} = \iiint\limits_V \vec{r} \times \rho\vec{v}\, dV$$

Магнітний момент

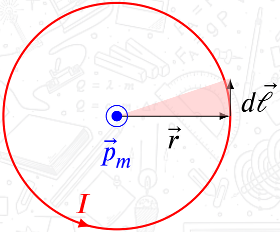
$$\vec{p}_m = \frac{1}{2c} \iiint\limits_V \vec{r} \times \rho\vec{v}\, dV$$

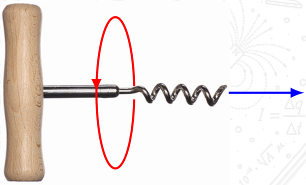
Оскільки густина струму $\vec{j} = \rho\vec{v}$, а $\vec{j}dV$ — є елементом струму, то можна для різних випадків записати різні варіації формули магнітного моменту:

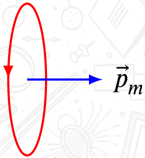
Випадок	Магнітний момент
Об'ємні струми	$\vec{p}_m = \frac{1}{2c} \iiint\limits_V \vec{r} \times \vec{j}dV$
Лінійні замкнені постійні струми	$\vec{p}_m = \frac{I}{2c} \oint\limits_L \vec{r} \times d\vec{\ell}$

Магнітний момент колового витка

$$\vec{p}_m = \frac{I}{2c}\oint\limits_L \vec{r}\times d\vec{\ell} = \frac{1}{c}I\pi R^2\vec{n} = \frac{1}{c}IS\vec{n}$$



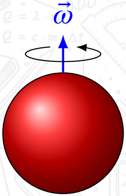




Магнітні та механічні моменти різних тіл

Відношення магнітного моменту зарядженого тіла, до його механічного моменту називається гіромагнітним відношенням:

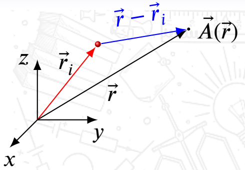
$$\boxed{\vec{p}_m = \gamma \vec{L}.}$$



Для любих класичних тіл $\gamma = \dfrac{Q}{2Mc}$

Тіло	Момент імпульсу	Магнітний момент	Гіромагнітне відношення γ
Куля	$\vec{L} = \frac{2}{5} m R^2 \vec{\omega}$	$\vec{p}_m = \frac{1}{5c} Q R^2 \vec{\omega}$	$\frac{Q}{2Mc}$
Електрон	$L = \frac{1}{2}\hbar$	$p_m = \frac{e}{2mc}\hbar$	$-\frac{e}{m_e c}$

Вектор-потенціал на далеких відстанях



Магнітний момент системи тіл:

$$\vec A = \frac{1}{c}\sum_i \frac{q_i\vec v_i}{|\vec r - \vec r_i|}$$

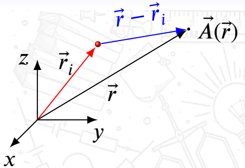
На далеких відстанях $r_i \ll r$ наближено $\frac{1}{|\vec r - \vec r_i|} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\vec r\ \vec r_i}{r^2}\right)$.

Для стаціонарних рухів, які відбуваються в малих областях, можна зробити усереднення вектор-потенціалу, при цьому $\frac{d}{dt}\ldots = 0$.

$$\overline{\vec A} = \frac{1}{cr^3}\sum_i q_i\overline{v_i(\vec r\ \vec r_i)}$$

$$v_i(\vec r\ \vec r_i) = \frac{1}{2}\left[v_i(\vec r\ \vec r_i) - \vec r_i(\vec r\ \vec v_i)\right] + \frac{1}{2}\left[v_i(\vec r\ \vec r_i) + \vec r_i(\vec r\ \vec v_i)\right] = \frac{1}{2}\vec r\times\vec v_i\times\vec r_i + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\vec r_i(\vec r\ \vec r_i)\right).$$

Вектор-потенціал на далеких відстанях



Магнітний момент системи тіл:

$$\vec A = \frac{1}{c}\sum_i \frac{q_i \vec v_i}{|\vec r - \vec r_i|}$$

$$\overline{\vec A} = \frac{1}{r^3}\left(\frac{1}{2c}\sum_i \vec r_i \times (q_i \vec v_i)\right)\times \vec r = \frac{\vec p_m \times \vec r}{r^3}.$$

Магнітне поле знаходиться за формулою $\vec B = \mathrm{rot}\,\vec A$:

$$\mathrm{rot}\left[\vec A \times \vec B\right] = \left(\vec B \cdot \vec\nabla\right)\vec A - \left(\vec A \cdot \vec\nabla\right)\vec B + \vec A\,\mathrm{div}\,\vec B - \vec B\,\mathrm{div}\,\vec A$$

$$\vec B = \mathrm{rot}\left(\vec p_m \times \frac{\vec r}{r^3}\right) = -\left(\vec p_m \cdot \vec\nabla\right)\frac{\vec r}{r^3} = \frac{3\left(\vec p_m \cdot \vec r\right)\vec r}{r^5} - \frac{\vec p_m}{r^3}.$$

$$\vec B = \frac{3\left(\vec p_m \cdot \vec r\right)\vec r}{r^5} - \frac{\vec p_m}{r^3}.$$

Детальние виведення

$$\operatorname{rot}\left[\vec{A}\times\vec{B}\right]=\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}-\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}+\vec{A}\operatorname{div}\vec{B}-\vec{B}\operatorname{div}\vec{A}$$

$$\vec{B}=\operatorname{rot}\left(\vec{p}_m\times\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=-\left(\vec{p}_m\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{\vec{r}}{r^3}=\frac{3\left(\vec{p}_m\cdot\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{p}_m}{r^3}.$$

$\vec{A}=\vec{p}_m \qquad \vec{B}=\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad \vec{p}_m=\text{const} \qquad \operatorname{div}\vec{E}=\operatorname{div}\frac{q\vec{r}}{r^3}=0 \ (\vec{r}\neq 0)$

$$\vec{B}=\operatorname{rot}\left(\vec{p}_m\times\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=\cancelto{0}{\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{p}_m}-\left(\vec{p}_m\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{\vec{r}}{r^3}+\vec{p}_m\cancelto{0}{\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3}}-\cancelto{0}{\frac{\vec{r}}{r^3}\operatorname{div}\vec{p}_m}$$

$$\vec{B}=-\left(\vec{p}_m\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{\vec{r}}{r^3}=-\frac{\left(\vec{p}_m\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{r}}{r^3}-\vec{r}\left(\vec{p}_m\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{1}{r^3}$$

$$\left(p_x\frac{\partial}{\partial x}+p_y\frac{\partial}{\partial y}+p_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)=p_x\vec{i}+p_y\vec{j}+p_z\vec{k}=\vec{p}_m$$

$$\left(p_x\frac{\partial}{\partial x}+p_y\frac{\partial}{\partial y}+p_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=-\frac{3}{r^5}\left(p_x x+p_y y+p_z z\right)=-\frac{3\left(\vec{p}_m\cdot\vec{r}\right)}{r^5}$$

$$\vec{B}=\frac{3\left(\vec{p}_m\cdot\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{p}_m}{r^3}$$

Магнітний диполь

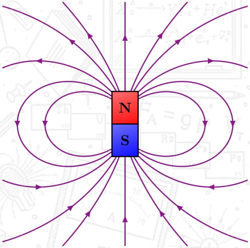
Полюса магніту

Отримана формула збігається за виглядом із формулою для електричного поля точкового електричного диполя.

$$\boxed{\vec{B} = \frac{3\left(\vec{p}_m \cdot \vec{r}\right)\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3}.}$$

Це означає, що точковий магнітний момент можна розглядати формально як точковий диполь, складений з *ефективних магнітних зарядів*:

N (північного) та S (південного).

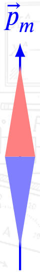


Магнітний диполь

Порівняння електричного та магнітного диполів

	Електричний диполь	Магнітний диполь
Потенціал	$\varphi = \dfrac{\vec{p}_e \cdot \vec{r}}{r^3}$	$\vec{A} = \dfrac{\vec{p}_m \times \vec{r}}{r^3}$
Поле	$\vec{E} = \dfrac{3\left(\vec{p}_e \cdot \vec{r}\right)\vec{r}}{r^5} - \dfrac{\vec{p}_e}{r^3}$	$\vec{B} = \dfrac{3\left(\vec{p}_m \cdot \vec{r}\right)\vec{r}}{r^5} - \dfrac{\vec{p}_m}{r^3}$

Позначаючи величину ефективного магнітного заряду q_m і плече магнітного диполя $\vec{\ell}$, дипольний момент ефективного магнітного диполя можна записати як $\vec{p}_m = q_m\vec{\ell}$. Якщо не розглядати поле усередині такого магнітного диполя, то воно усюди буде таким самим, як і поле системи струмів із магнітним моментом $\vec{p}_m$.



Потенціальна енергія диполя в магнітному полі

Розглянемо виток площею S, у якому циркулює струм I, магнітний момент якого $\vec{p}_m = \frac{1}{c} I S \vec{n}$. Вважаємо, що магнітний момент не змінюється за величиною, тільки може змінювати напрямок у просторі. Останнє припущення істотне, і воно передбачає, що в коло витка ввімкнене джерело енергії (ЕРС), що підтримує струм незмінним. Якщо виток перебуває в магнітному полі, то виникає момент сил, які прагнуть орієнтувати його магнітний момент за напрямком поля:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m \times \vec{B}\right]$$

З визначення потенціальної енергії знаходимо

$$U = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$$

Той факт, що потенціальна енергія досягає мінімуму $\vec{p}_m \uparrow\uparrow \vec{B}$, означає, що момент прагне орієнтуватися за напрямом поля.

Сила, що діє на диполь в магнітному полі

У зовнішньому магнітному полі потенціальна енергія магнітного моменту дорівнює $U = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$, а сила, що діє на момент:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = \vec{\nabla}(\vec{p}_m \cdot \vec{B}).$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) = \left[\vec{B}\times \operatorname{rot}\vec{A}\right] + \left[\vec{A}\times \operatorname{rot}\vec{B}\right] + \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}.$$

Якщо в середовищі, в якому перебуває момент, відсутні струми провідності, то $\operatorname{rot}\vec{B} = 0$. Тоді має місце тотожність:

$$\boxed{\vec{F} = \left(\vec{p}_m \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{B}.}$$

У окремому випадку, коли момент спрямований уздовж поля $\vec{p}_m \uparrow\uparrow \vec{B}$, а поле залежить тільки від координати z, сила спрямована по осі z і дорівнює:

$$F_z = p_m \frac{dB}{dz}.$$

Порівняйте з випадком електричного диполя в неоднорідному електричному полі