Енергія магнітного поля

Лекції з квантової хімії

Пономаренко С. М.

8 грудня 2022 р.

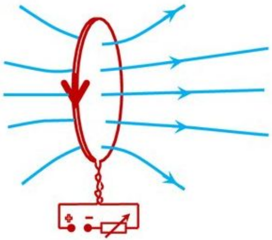
Явище самоіндукції

ЕРС у контурі виникає за будь-якої зміни магнітного потоку через його площу, незалежно від причини цієї зміни:

$$\mathscr{E}_{\text{ind}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$$

Явище самоіндукції

Змінний магнітний потік може викликатись змінним струмом самого контуру. У цьому випадку в контурі також з'являється ЕРС — вона називається електрорушійною силою самоіндукції.



Явище самоіндукції

Індуктивність

Якщо електричний струм від зовнішнього джерела тече через контур, то навколишньому просторі виникає магнітне поле. У свою чергу, це поле створює магнітний потік, величина якого пропорційна силі струму:

$$\Phi = \frac{L}{c} I$$

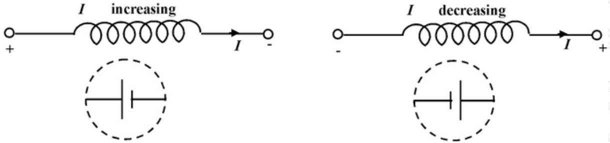
Коефіцієнт пропорційності L називається *коефіцієнтом самоіндукції*, або *індуктивністю* контуру. Він, подібно до ємності конденсатора, залежить від геометричної форми контуру та магнітної проникності навколишнього середовища. Для довгого соленоїда, що має N витків, довжину l та площу перерізу S, і в середині якого вміщене осердя магнітною проникністю μ, індуктивність дорівнює:

$$L = \frac{4\pi \mu N^2 S}{l}, \quad [L] = \text{см (в СГС)}.$$

Явища при замиканні та розмиканні кіл

Якщо спробувати змінити силу струму, то в колі з'явиться ЕРС самоіндукції, пропорційна швидкості зміни сили струму. ЕРС самоіндукції спрямована таким чином, щоб перешкодити зміні струму:

$$\mathscr{E}_{\text{si}} = -\frac{L}{c^2}\frac{dI}{dt}.$$



Закон Ома для кіл з індуктивністю:

$$I = \frac{\mathscr{E} + \mathscr{E}_{\text{si}}}{R},$$

звідки

$$\mathscr{E} = -\mathscr{E}_{\text{si}} + IR$$

Енергія магнітного поля

Розглянемо ізольований контур. Контур нерухомий.
Закон Ома:

$$\mathscr{E} = -\mathscr{E}_{\text{si}} + IR \quad / \quad \cdot\, dq = Idt$$

$$\underbrace{\mathscr{E} I dt}_{\text{Робота джерела}} = \underbrace{d\left(\frac{LI^2}{2c^2}\right)}_{\text{Зміна енергії магнітного поля}} + \underbrace{I^2 R dt}_{\text{Теплота}}$$

Робота джерела частково розсіюється у вигляді теплоти і частково йде на утворення магнітного поля.

$$W_m = \frac{LI^2}{2c^2} = \frac{\Phi^2}{2L} = \frac{I\Phi}{2c}.$$

Локалізація енергії магнітного поля. Густина енергії

Вираз для магнітної енергії можна перетворити на іншу форму, яка відповідає зовсім іншому уявленню про місце знаходження енергії.

Покажемо це на прикладі довгого соленоїда. Для соленоїда потік власного магнітного поля $\Phi = NBS$, індуктивність — $L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}$, отже

$$W_m = \frac{\Phi^2}{2L} = \frac{N^2B^2S^2}{2}\frac{l}{4\pi\mu N^2 S} = \frac{B^2}{8\pi\mu}V = \frac{BH}{8\pi}V.$$

В загальному випадку:

$$W_m = \iiint\limits_V \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}}{8\pi}dV = \iiint\limits_V w_m dV, \quad w_m = \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}}{8\pi}$$

де w_m — густина енергії магнітного поля.

Магнітна енергія локалізована у просторі з об'ємною густиною w_m. Це відповідає уявленням теорії поля.

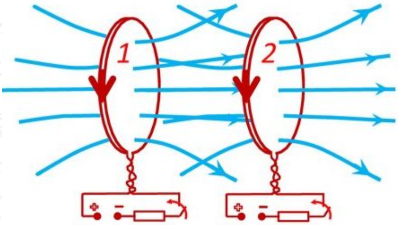
Явище взаємоіндукції

ЕРС у контурі виникає за будь-якої зміни магнітного потоку через його площу, незалежно від причини цієї зміни:

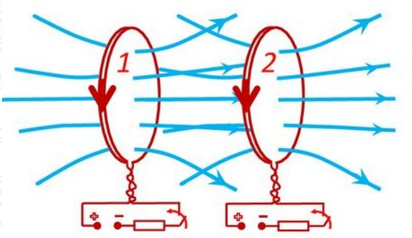
$$\mathscr{E}_{\text{ind}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$$

Явище взаємоіндукції

Змінний струм, що протікає в одному з контурів, наприклад, у контурі 1, створює змінне магнітне поле, яке викликає появу індукції у провідному контурі 2. Таке явище називається *взаємною індукцією*.



Коефіцієнти взаємної індукції



Потоки через контури:

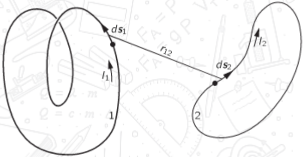
$$\begin{cases} \Phi_1 = \dfrac{L_{11}}{c} I_1 + \dfrac{L_{12}}{c} I_2, \\ \Phi_2 = \dfrac{L_{21}}{c} I_1 + \dfrac{L_{22}}{c} I_2. \end{cases}$$

Коефіцієнти L_{11} і L_{22} є *індуктивностями* відповідних контурів. Коефіцієнти L_{12} і L_{21} називаються *коефіцієнтами взаємної індукції*. Вони характеризують магнітний зв'язок між контурами. У вакуумі коефіцієнти залежать від форми контурів та їхнього взаємного розташування.

Теорема взаємності

Коефіцієнти взаємної індукції дорівнюють:

$$\boxed{L_{12} = L_{21}}.$$



Взаємні потоки $\Phi_{21} = \frac{1}{c} L_{21} I_1 = \iint\limits_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2$,

$\Phi_{12} = \frac{1}{c} L_{12} I_2 = \iint\limits_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_1$.

$$\Phi_{21} = \iint\limits_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 = \iint\limits_{S_2} \nabla \times \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 = \oint\limits_{L_1} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = \frac{1}{c} \oint\limits_{L_1} \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{r_{12}} I_1,$$

звідки

$$L_{21} = \oint\limits_{L_1} \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{r_{12}}.$$

Енергія магнітного поля в загальному вигляді

При зміні струму I_1 у другому 2 контурі виникне ЕРС, що дорівнює:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -\frac{1}{c^2} L_{21} I_1$$

Аналогічно, при зміні струму I_2 у першому 1 контурі виникне ЕРС, що дорівнює:

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{1}{c^2} L_{12} I_2$$

Вся робота, що виконується джерелами (за винятком джоулевої теплоти) за час dt проти $\mathcal{E}_{\text{ind}}$ і йде на зміну магнітної енергії:

$$\delta(A - Q) = \overbrace{-\mathcal{E}_1^{\text{ind}} I_1 dt - \mathcal{E}_2^{\text{ind}} I_2 dt}^{dW_m} =$$

$$= \frac{1}{c^2}(L_{11} I_1 dI_1 + L_{12} I_1 dI_2 + L_{21} I_2 dI_1 + L_{22} I_2 dI_1) =$$

$$= d\left(\frac{L_{11} I_1^2}{2c^2} + \frac{L_{22} I_2^2}{2c^2} + L_{12} I_1 I_2\right).$$

Енергія магнітного поля в загальному вигляді

При зміні струму I_1 у другому 2 контурі виникне ЕРС, що дорівнює:

$$\mathscr{E}_2 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -\frac{1}{c^2} L_{21} I_1$$

Аналогічно, при зміні струму I_2 у першому 1 контурі виникне ЕРС, що дорівнює:

$$\mathscr{E}_1 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{1}{c^2} L_{12} I_2$$

Вся робота, що виконується джерелами (за винятком джоулевої теплоти) за час dt проти $\mathscr{E}_{\text{ind}}$ і йде на зміну магнітної енергії:
В загальному вигляді

$$W_m = \frac{1}{2c^2} \sum_i \sum_j L_i j I_i I_j.$$

Через поле (у вакуумі) $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$

$$W_m = \iiint\limits_V \frac{(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)^2}{8\pi} dV = \iiint\limits_V \frac{B_1^2}{8\pi} dV + \iiint\limits_V \frac{B_2^2}{8\pi} dV + \iiint\limits_V \frac{\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2}{4\pi} dV$$

Обчислення сил з виразу для енергії

Розглянемо випадок, коли робота джерела також йде на виконання механічної роботи:

$$\mathscr{E} I\,dt - \delta Q = -\mathscr{E}_{\text{ind}} I\,dt = dW_m + \delta A_{\text{мех}}$$

$$\frac{I}{c} d\Phi = dW_m + \delta A_{\text{мех}}$$

Розглянемо віртуальні процеси, у яких зберігаються магнітні потоки $d\Phi = 0$, тоді:

$$\delta A = -dW_m,$$

$$\mathbf{F} = \frac{\delta A_{\text{мех}}}{d\mathbf{r}} = -\left(\frac{dW_m}{d\mathbf{r}}\right)_{\Phi=\text{const}}$$

Обчислення сил з виразу для енергії

Розглянемо випадок, коли робота джерела також йде на виконання механічної роботи:

$$\mathscr{E} I dt - \delta Q = -\mathscr{E}_{\text{ind}} I dt = dW_m + \delta A_{\text{мех}}$$

$$\frac{I}{c} d\Phi = dW_m + \delta A_{\text{мех}}$$

Розглянемо віртуальні процеси, у яких зберігаються сили струму $I = \text{const}$. В такому випадку $dW_m = \frac{1}{c}\frac{I d\Phi}{2}$, отже $\delta A_{\text{мех}} = +dW_m$, звідки

$$\mathbf{F} = \frac{\delta A_{\text{мех}}}{d\mathbf{r}} = +\left(\frac{dW_m}{d\mathbf{r}}\right)_{I=\text{const}}$$

Приклади

У центрі тонкої котушки радіусом, що містить N витків, знаходиться невеликий циліндричний магніт. Котушка підключена до балістичного гальванометра. Опір кола R. Після того, як магніт швидко видалили з котушки, через гальванометр пройшов заряд q. Визначити магнітний момент магніту p_m.

Приклад

У соленоїд, площа кругового перерізу якого S, довжина l, що має n витків на одиницю довжини, всунутий магнетик з магнітною проникністю μ на половину його довжини. Знайти силу, що діє на магнетик. По соленоїду йде струм I.

Приклади

Обчислити підйомну силу електромагніту з осердям з м'якого заліза.