

# Явище електромагнітної індукції

Лекції з електрики та магнетизму

Пономаренко С. М.

# Зміст

## 1. Явище електромагнітної індукції

Вихрове електричне поле

## 2. Явище самоіндукції

Перехідні процеси в колі з індуктивністю

## 3. Взаємна індукція

Принцип роботи трансформаторів

## 4. Енергія магнітного поля

## 5. Пондеромоторні сили в магнітному полі

# Явище електромагнітної індукції

## Явище електромагнітної індукції (Фарадей)

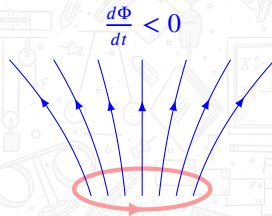
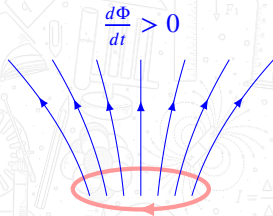
У 1831 р. Фарадеєм було зроблено одне з найбільш фундаментальних відкриттів в електродинаміці — **явище електромагнітної індукції**. Воно полягає в тому, що в замкнутому провідному контурі при зміні магнітного потоку, охопленого цим контуром, виникає електричний струм — його назвали індукційним.

Досліди Фарадея

# Закон електромагнітної індукції

Електрорішійна сила (ЕРС), що виникає в контурі пропорційна швидкості зміни магнітного потоку, що пронизує площу, охоплену даним контуром:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{S}.$$

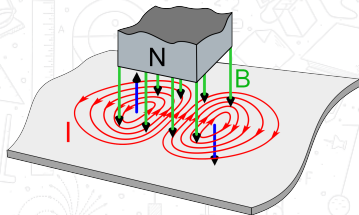


## Правило Ленца

Індукований струм має такий напрямок, щоб за допомогою створюваного ним магнітного поля перешкоджати зміні магнітного потоку, тобто щоб послабити дію причини, яка збуджує цей струм.

# Струми Фуко

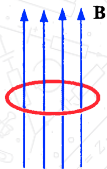
Струми Фуко — вихрові індукційні струми, які виникають у провіднику під час зміни магнітного потоку через поверхню провідника.



Струми Фуко, як і індукційні струми в лінійних провідниках, підпорядковані правилу Ленца: їх магнітне поле направлене так, щоб протидіяти змінам магнітного потоку, що індукували ці струми.

# Закон збереження магнітного потоку

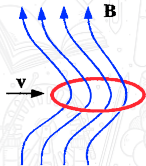
Нехай замкнутий виток з опором  $R$  перебуває в зовнішньому магнітному полі.



За будь-якої зміни магнітного поля у витку збуджується ЕРС індукції. Струм, що виникає у витку:

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{cR} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Якщо опір контуру  $R = 0$  (для надпровідника), то:



$$\frac{d\Phi}{dt} = 0, \Rightarrow \Phi = \text{const}$$

інакше навіть малі зміни  $\Phi$  викликали б нескінченні струми. Тобто, **магнітний потік через контур з малим опором зберігається.**

Це означає, що **число силових ліній, що пронизують виток незмінне.**

Силкові лінії ніби «вморожені» в провідний контур, при зміщенні контура він захоплює силкові лінії магнітного поля.

# Вихрове електричне поле

Оскільки магнітний потік дорівнює  $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ , а ЕРС індукції  $\mathcal{E} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ , то із закону індукції випливає:

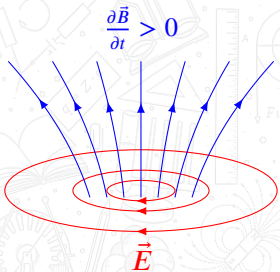
$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

Скориставшись теоремою Стокса, останнє інтегральне рівняння можна переписати у диференціальній формі:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

# Вихрове електричне поле

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$



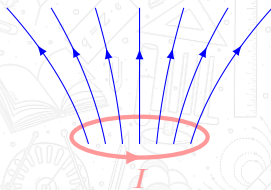
Згідно Максвеллу **явище електромагнітної індукції** полягає в тому, що будь-яке змінне магнітне поле збуджує в просторі електричне поле; провідники для цього не потрібні. Індукційні ж струми збуджуються в провідниках індукованим електричним полем.

На відміну від електростатики, де  $\text{rot } \vec{E} = 0$ , у випадку змінного в часі магнітного поля  $\text{rot } \vec{E} \neq 0$ . Це означає, що індуковане електричне поле, індується (виникає) за рахунок зміни магнітного поля і не є потенційним, а вихровим.



## Явище самоіндукції

Зміна струму в контурі викликає зміну магнітного поля, що створює змінний магнітний потік через цей же контур і, як наслідок, ЕРС індукції. Це явище називають **самоіндукцією**.



Якщо в просторі, де розташований контур зі струмом  $I$ , немає феромагнетиків, поле  $\vec{B}$ , а отже, і повний магнітний потік  $\Phi$  через контур будуть пропорційні силі струму  $I$ :

$$\Phi = \frac{1}{c} L I$$

Коефіцієнт  $L$  називається **індуктивністю контуру**.

## Явище самоіндукції

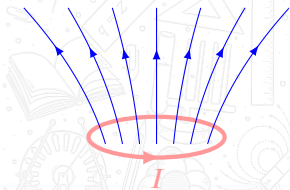
Зміна струму в контурі викликає зміну магнітного поля, що створює змінний магнітний потік через цей же контур і, як наслідок, ЕРС індукції. Це явище називають **самоіндукцією**.

При зміні сили струму в контурі згідно закону Фарадея виникає ЕРС самоіндукції:

$$\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt}$$

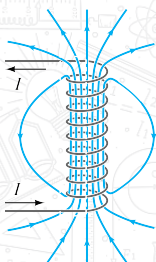
Тут знак мінус показує, що  $\mathcal{E}$  завжди спрямована так, щоб перешкоджати зміні сили струму відповідно до правила Ленца. Ця ЕРС прагне зберегти струм незмінним: вона протидіє струму, коли він збільшується, і підтримує струм, коли він зменшується.

Коефіцієнт  $L$  називається **індуктивністю контуру**.



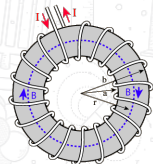
# Приклади розрахунку індуктивності

Соленоїд



Магнітне поле в середині соленоїда  $B = \frac{4\pi\mu NI}{cl}$ . Магнітний потік через всі витки  $\Phi = NBS = N\frac{4\pi\mu}{c}\frac{N}{l}IS$ . Порівнюючи з формулою  $\Phi = \frac{1}{c}LI$ , індуктивність соленоїда дорівнює:  $L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}$

Тороїд



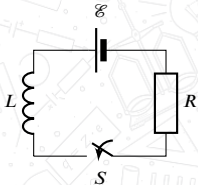
Нехай тороїд має прямокутний переріз шириною  $b - a$  і висоту  $d$ .

$$L = 2N^2 d \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Одиницею індуктивності в системі СГС є сантиметр:  $[L] = \text{см}$ . Це означає, що індуктивність є **геометричною** характеристикою.

# Перехідні процеси в колі з індуктивністю

## Встановлення струму в $LR$ -контурі



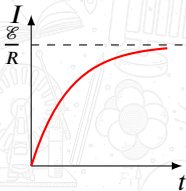
Закон Ома для кола  $\mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{si}} = IR$ . Враховуючи що  $\mathcal{E}_{\text{si}} = -L dI/dt$ , закон набуде вигляду

$$L \frac{dI}{dt} + IR = \mathcal{E}.$$

Після інтегрування ми отримаємо:

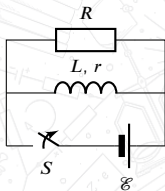
$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right),$$

де  $\tau = \frac{L}{R}$  — називають **часом релаксації**.



# Перехідні процеси в колі з індуктивністю

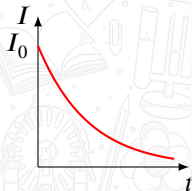
## Екстраструми при розмиканні



Спочатку ключ  $S$  замкнутий. Тоді через опір  $R$  і через котушку індуктивності  $L$  тече струм:

$$I_0 = \mathcal{E}/r.$$

Після розмикання ключа (відключення ЕРС) магнітне поле почне убувати. Це збудить електрорушійну  $\mathcal{E}_{si}$  силу та індукційний струм  $I$  у контурі. Такий струм називається **екстраструмом розмикання**. По закону Ома:

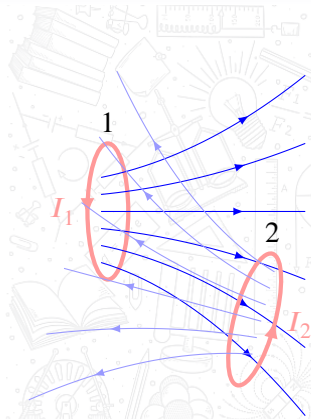


$$I(R + r) = -L \frac{dI}{dt}.$$

Після інтегрування ми отримаємо:  $I(t) = I_0 e^{-\frac{R+r}{L}t}$ .

Якщо  $R \gg r$ , то  $\mathcal{E}_{si} = \frac{R}{r} \mathcal{E} e^{-\frac{R}{L}t}$ . При розмиканні ця величина може значно перевершити ЕРС батареї, тобто може статись пробій, що спостерігається під час вимкнення струму в колах з великими індуктивностями.

## Взаємна індукція



Нехай два нерухомих контури 1 і 2 розташовані близько один до одного. Якщо в контурі 1 тече струм  $I_1$ , він створює через контур 2 магнітний потік  $\Phi_2$ , пропорційний струму  $I_1$ :

$$\Phi_{21} = \frac{1}{c} L_{21} I_1$$

Аналогічно, якщо в контурі 2 тече струм  $I_2$ , то він створює через контур 1 магнітний потік:

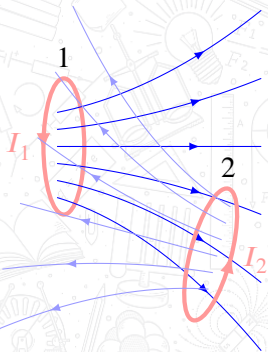
$$\Phi_{12} = \frac{1}{c} L_{12} I_2.$$

Коефіцієнти пропорційності  $L_{12}$  і  $L_{21}$  називають **коефіцієнтами взаємної індуктивності** контурів.

# Взаємна індукція

Закони Ома для контурів:

$$\begin{cases} I_1 R_1 = \mathcal{E}_1 - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (L_{11} I_1) - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (L_{12} I_2), \\ I_2 R_2 = \mathcal{E}_2 - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (L_{21} I_1) - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (L_{22} I_2). \end{cases}$$



Наявність магнітного зв'язку між контурами проявляється в тому, що за будь-якої зміни струму в одному з контурів в іншому контурі виникає ЕРС індукції. е явище називають **взаємною індукцією**.

$L_{12}$  — алгебраїчна величина, яка може мати різний знак, а також дорівнювати нулю.

# Розрахунок коефіцієнтів взаємної індуктивності

## Приклад

Довгий парамагнітний циліндр об'ємом  $V$  має дві обмотки (одна на іншій). Одна обмотка містить  $n_1$  витків на одиницю довжини, інша —  $n_2$ . Знайдемо їхню взаємну індуктивність, нехтуючи крайовими ефектами.

## Розв'язок

Оскільки  $L_{21} = \Phi_2/I_1$ . Це означає, що ми повинні створити струм  $I_1$  в обмотці 1 і обчислити повний магнітний потік через всі витки обмотки 2. Якщо в обмотці 2 міститься  $N_2$  витків, то

$$\Phi_2 = N_2 B_1 S,$$

де  $S$  — площа поперечного перерізу циліндра. Оскільки  $N_2 = n_2 l$ ,  $l$  — довжина циліндра,  $B_1 = \frac{4\pi}{c} \mu n_1 I_1$ , то

$$\Phi_2 = \frac{4\pi}{c} \mu N_2 n_1 I_1 S.$$

Отже

$$L_{21} = \frac{4\pi}{c} \mu \frac{N_2 N_1}{l} S.$$

Аналогічно знаходимо і  $L_{12}$ :

$$L_{12} = \frac{4\pi}{c} \mu \frac{N_1 N_2}{l} S.$$



# Розрахунок коефіцієнтів взаємної індуктивності

## Приклад

Довгий парамагнітний циліндр об'ємом  $V$  має дві обмотки (одна на іншій). Одна обмотка містить  $n_1$  витків на одиницю довжини, інша —  $n_2$ . Знайдемо їхню взаємну індуктивність, нехтуючи крайовими ефектами.

## Зауваження

В розглянутому прикладі коефіцієнти індуктивності задовольняють співвідношенням:

$$L_{21} = L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$$

Їх справедливість пов'язана, по-перше, з тим, що ми знехтували розсіюванням магнітного потоку, а по-друге, з тим, що магнітна проникність осердя не залежить від величини магнітного поля. Співвідношення  $L_{21} = L_{12}$  не буде виконуватись для феромагнетика, для якого  $\mu = \mu(H)$  і за умови що  $N_1 \neq N_2$ . Тоді обмотки при однакових струмах створюють в осерді різні магнітні поля, так що вирази для  $L_{21}$  і  $L_{12}$  міститимуть різні коефіцієнти  $\mu$ , що й призводить до нерівності.

# Теорема взаємності

Теоремою взаємності стверджує, що коефіцієнтами взаємної індуктивності контурів однаков:

$$L_{12} = L_{21}.$$

Завдяки цій теоремі можна не робити різниці між  $L_{12}$  і  $L_{21}$  і просто говорити про взаємну індуктивність двох контурів.

## Практичне застосування

Практичне застосування теореми взаємності полягає у тому, що якщо по контурам течуть однакові струми  $I$ , то

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

Ця обставина нерідко дає змогу сильно спростувати вирішення питання про знаходження, наприклад, магнітних потоків.

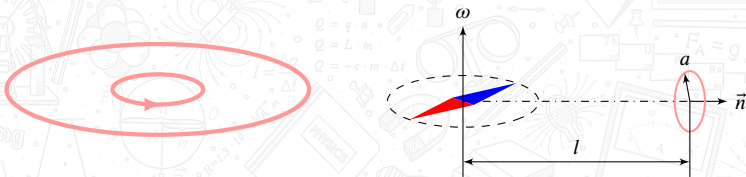
# Задачі на застосування теореми взаємності

## Задача 1

Два тонкі колові провідники, осі яких співпадають, лежать в одній площині. Радіус зовнішнього провідника  $R_1$  внутрішнього  $R_2$  ( $R_2 \ll R_1$ ). Знайдіть магнітний потік, що пронизує площу зовнішнього провідника, якщо по внутрішньому провіднику тече струм  $I$ .

## Задача 2

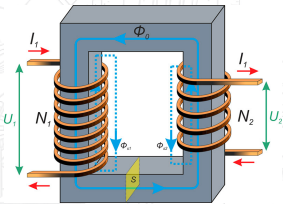
Магнітний диполь з моментом  $p_m$  обертається з частотою  $\omega$  навколо осі, яка проходить через його центр і перпендикулярна магнітному моменту (див. рис.). Знайти струм в плоскому нерухомому кільці радіусом  $a$  з опором  $R$ , яке знаходиться на відстані  $l \gg a$  від диполя. Нормаль  $\vec{n}$  до площини кільця перпендикулярна осі обертання диполя. Самоіндукцією рамки знехтувати.



# Трансформатор

## Принцип роботи

Принцип дії трансформаторів — пристроїв, що застосовуються для підвищення або зниження напруги змінного струму, заснований на явищі взаємної індукції.



Первинна і вторинна обмотки з  $N_1$  і  $N_2$  витками укріплені на замкнутому залізному осердді. Змінна напруга  $\mathcal{E}_1$  у первинній обмотці створює струм  $I_1$  і змінний магнітний потік  $\Phi$ , локалізований в осердді. Потік пронизує витки вторинної обмотки, викликаючи ЕРС взаємної індукції, а в первинній — ЕРС самоіндукції.

# Трансформатор

## Теорія

Струм  $I_1$  у первинній обмотці визначається за законом Ома:

$$\mathcal{E}_1 - \frac{d}{dt}(N_1\Phi) = I_1 R_1.$$

При швидкозмінних полях  $I_1 R_1 \ll \mathcal{E}_1, \frac{d}{dt}(N_1\Phi)$ :

$$\mathcal{E}_1 \approx N_1 \frac{d\Phi}{dt}.$$

ЕРС у вторинній обмотці:

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}_1, \quad \text{знак «-» вказує на протилежність фаз.}$$

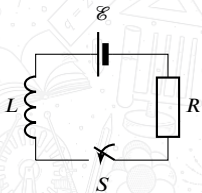
Відношення  $\eta = \frac{N_2}{N_1}$  називається **коефіцієнтом трансформації**.

Якщо  $\eta > 1$ , то це підвищувальний трансформатор, що збільшує ЕРС і зменшує струм.

Якщо  $\eta < 1$ , то це знижувальний трансформатор, що зменшує ЕРС і збільшує струм.

# Енергія магнітного поля

Провідник зі струмом створює магнітне поле, яке з'являється та зникає разом зі струмом. **Магнітне поле є носієм енергії**, що дорівнює роботі струму на його створення. Розглянемо роботу, яку виконує джерело при замиканні ключа в колі по переміщенню заряду  $dq = Idt$ :



$$\begin{aligned} \delta A &= \mathcal{E} dq = I^2 R dt - \mathcal{E}_{si} I dt = \\ &= \underbrace{I^2 R dt}_{\text{Теплота}} + \underbrace{\frac{1}{c^2} L I dI}_{\substack{\text{Енергія} \\ \text{магнітного} \\ \text{поля}}} . \end{aligned}$$

Енергія магнітного поля: 
$$W = \frac{1}{c^2} \int_0^I L I dI = \frac{1}{c^2} \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{c} I \Phi = \frac{\Phi^2}{2L} .$$

# Енергія магнітного поля

Енергію магнітного поля визначається через характеристики поля.

Розглянемо однорідне магнітне поле всередині довгого соленоїда.

Індуктивність соленоїда:

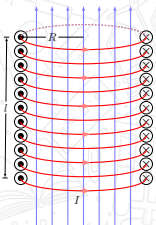
$$L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}.$$

Магнітне поле в середині соленоїда:

$$B = \frac{4\pi\mu NI}{cl}$$

Енергія магнітного поля:

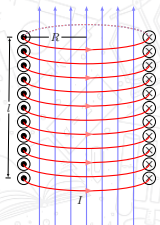
$$W = \frac{1}{c^2} \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{c^2} \frac{(4\pi\mu NI)^2 Sl}{8\pi\mu l^2} = \frac{B^2}{8\pi\mu} V = \frac{BH}{8\pi} V.$$



# Енергія магнітного поля

Енергію магнітного поля визначається через характеристики поля.

Розглянемо однорідне магнітне поле всередині довгого соленоїда.



Індуктивність соленоїда:

$$L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}.$$

Магнітне поле в середині соленоїда:

$$B = \frac{4\pi\mu NI}{cl}$$

Густина енергії магнітного поля:

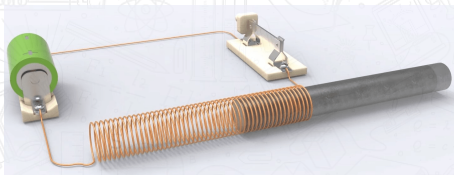
$$w = \frac{BH}{8\pi}.$$

Магнітна енергія зосереджена в об'ємі соленоїда — в тій області простору, де присутнє магнітне поле.



# Пондеромоторні сили в магнітному полі

## Закон збереження енергії



По **закону збереження енергії** робота, яку виконують джерела струму, йде на теплоту, на збільшення магнітної енергії і на механічну роботу:

$$\delta A_{\text{дж}} = \delta Q + dW + \delta A_{\text{мех.}}$$

З іншого боку, та ж робота визначається як:

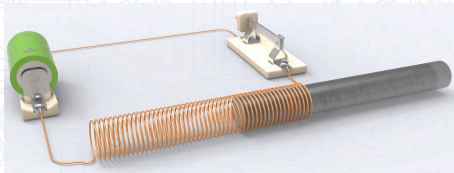
$$\delta A_{\text{дж}} = \delta Q - \mathcal{E}_{\text{in}} I dt,$$

Звідки

$$-\mathcal{E}_{\text{in}} I dt = dW + \delta A_{\text{мех.}}$$

# Пондеромоторні сили в магнітному полі

Випадок  $I = \text{const}$



$$-\mathcal{E}_{\text{in}} I dt = dW + \delta A_{\text{мех}}$$

Розглянемо умову, коли в колі підтримується постійним струм.

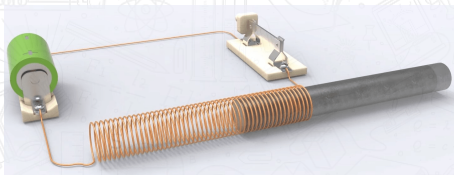
$$-\mathcal{E}_{\text{in}} I dt = + \frac{I^2}{c^2} dL.$$

При цьому, зміна магнітної енергії  $dW = \frac{I^2}{2c^2} dL$ . Отже,  $\delta A_{\text{мех}} = +dW$ , а сила втягування:

$$F_x = + \left( \frac{dW}{dx} \right)_I$$

# Пондеромоторні сили в магнітному полі

Випадок  $\Phi = \text{const}$



$$-\mathcal{E}_{\text{in}} I dt = dW + \delta A_{\text{mex}}$$

Розглянемо умову, коли в колі підтримується потік, що пронизує котушку (наприклад якщо котушка із надпровідника).

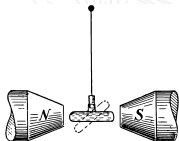
$$-\mathcal{E}_{\text{in}} I dt = 0.$$

Отже,  $\delta A_{\text{mex}} = -dW$ , а сила втягування:

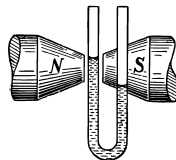
$$F_x = - \left( \frac{dW}{dx} \right)_{\Phi}$$

# Приклади

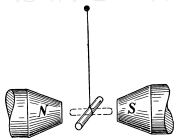
## Поведінка різних тіл в магнітному полі



Ампула з парамагнітним розчином хлористого заліза в магнітному полі



Втягування розчину хлористого заліза в магнітне поле

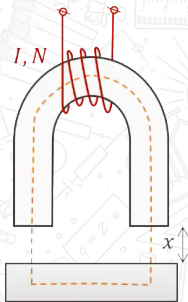


Діамагнітна паличка вісмута в магнітному полі



Діамагнетизм полум'я

# Підйомна сила електромагніта



За теоремою про циркуляцію для  $\vec{H}$ :

$$\frac{B}{\mu}l + B 2x = \frac{4\pi}{c}IN, \Rightarrow B = \frac{4\pi\mu}{c} \frac{NI}{l + 2\mu x},$$

де  $l$  — довжина контура в середині магніту. Потік магнітного поля через площу перерізу  $S$  магніту:

$$\Phi = NBS = \frac{4\pi\mu}{c} \frac{N^2 I}{l + 2\mu x} S.$$

За умови, що струм постійний, зміна енергії магнітного поля при віртуальній зміні  $x$  дорівнює  $dW = \frac{I d\Phi}{2c}$ , і силу можна знайти як:

$$F_x = \left( \frac{dW}{dx} \right)_I = \frac{I}{2c} \left( \frac{d\Phi}{dx} \right)_I = -\frac{4\pi\mu^2}{c^2} \frac{N^2 I^2}{(l + 2\mu x)^2} S = \frac{B^2}{8\pi} 2S.$$

Сила  $F_x < 0$  означає, що це сила притягання.