

# Енергія електричного поля

Лекції з електрики та магнетизму

Пономаренко С. М.

## Зміст

1. Електрична ємність
2. Енергія електричного поля
3. Пондеромоторні сили

## Ємність провідника

Якщо провідник має заряд  $q$ , то його потенціал дорівнює  $\varphi$ .

Якщо заряд збільшити в  $n$  разів, то через принцип суперпозиції в  $n$  разів збільшиться і робота по переміщенню пробного заряду в полі провідника від його поверхні на нескінченність. Це означає, що в  $n$  разів зросте і потенціал. Отже, відношення  $q/\varphi$  не повинно залежати від заряду провідника і характеризує сам провідник.

Відповідно можна ввести **ємність провідника** як:

$$C = \frac{q}{\varphi}.$$

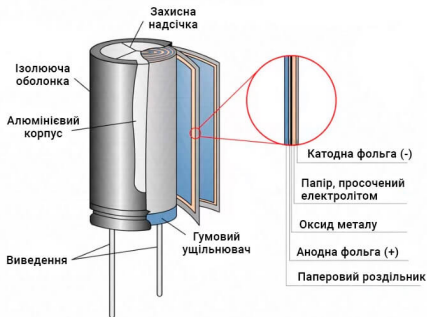
Якщо маємо систему двох провідників. Нанесемо на один провідник заряд  $(-q)$ , а на інший — заряд  $(+q)$ . Різниця потенціалів провідників  $\varphi_+ - \varphi_-$  пропорційна заряду  $q$ .

Ємність (**взаємна ємність**) пари провідників визначається співвідношенням:

$$C = \frac{q}{\varphi_+ - \varphi_-}.$$

# Конденсатори

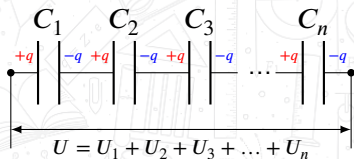
Конденсатор складається з двох металевих пластин — електродів, які називаються також **обкладками**, між якими знаходиться тонкий шар діелектрика.



Відео: Заряд та розряд конденсатора

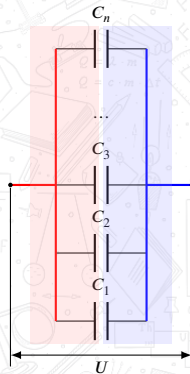
# З'єднання конденсаторів

Послідовне з'єднання



$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Паралельне з'єднання



$$C = \sum_{i=1}^n C_i$$

# Задачі

## Задача 1

Знайдіть ємність сферичного провідника радіусом  $R$ .

## Задача 2

Знайдіть ємність плоского конденсатора, відстань між обкладками якого дорівнює  $d$ , площа пластин  $S$ , простір заповнено діелектриком з проникністю  $\epsilon$ .

Відповідь:  $C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$ .

## Задача 3

Знайдіть ємність сферичного конденсатора, радіуси обкладок  $R_1$  та  $R_2$ , простір заповнено діелектриком з проникністю  $\epsilon$ .

Відповідь:  $C = \frac{\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ .

## Задача 4

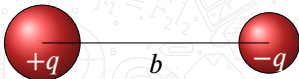
Знайдіть ємність циліндричного конденсатора висотою  $\ell$ , радіуси обкладок  $R_1$  та  $R_2$ , простір заповнено діелектриком з проникністю  $\epsilon$ .

Відповідь:  $C = \frac{\epsilon \ell}{2 \ln \frac{R_1}{R_2} d}$ .

# Взаємна ємність двох куль

## Задача 5

Знайдемо (взаємну) ємність системи з двох металевих тіл (куль), що мають власні ємності  $C_1$  і  $C_2$  і перебувають на відстані  $b$  одна від одної, вважаючи  $b \gg C_1, C_2$ . Останнє означає, що одна відносно одної кулі можна вважати точковими.



## Розв'язок

Нанесемо заряд  $+q$  на кулю ємністю  $C_1$  і заряд  $-q$  на кулю ємністю  $C_2$ . Запишемо потенціали кульок з урахуванням їхнього взаємного впливу:

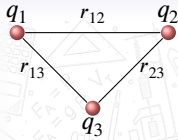
$$\begin{cases} \varphi_+ = \frac{q}{C_1} - \frac{q}{b}, \\ \varphi_- = -\frac{q}{C_2} + \frac{q}{b}. \end{cases}$$

Різниця потенціалів  $\varphi_+ - \varphi_- = q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{2}{b} \right)$ , а ємність системи:

$$C = \frac{q}{\varphi_+ - \varphi_-} \approx \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \left( 1 + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \frac{2}{b} \right).$$

## Взаємна енергія системи зарядів

Щоб зблизити два заряди  $q_1$  і  $q_2$  до відстані  $r_{12}$ , потрібно здійснити роботу проти сил поля  $A = \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ , тобто, пара зарядів, яку ми розглядаємо, має енергію  $U = \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ .



Для системи зарядів взаємна енергія дорівнює:  $U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$ .

Потенціал поля в точці знаходження  $i$ -го заряду, створюваний усіма зарядами (крім  $i$ -го):

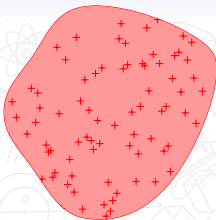
$$\varphi_i = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{q_j}{r_{ij}}.$$

Потенціальна енергія всієї системи зарядів:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$$



# Електростатична енергія тіл



Якщо заряди розподілені в просторі з об'ємною густиною  $\rho(\vec{r})$ , а також на поверхнях — з поверхневою густиною  $\sigma(\vec{r})$ , формула

$$W = \sum_i q_i \varphi_i$$

узагальнюється як:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV + \frac{1}{2} \iint_S \sigma(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dS.$$

# Задачі

## Задача 1

Нехай куля радіуса  $R$  несе повний заряд  $Q$ , що рівномірно розподілений по поверхні. Знайти електростатичну енергію кулі.

### Розв'язок

Енергію знайдемо як:

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \sigma(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dS = \frac{1}{2} \sigma \frac{Q}{R} 4\pi R^2 = \frac{Q^2}{2R}$$

## Задача 2

Нехай куля радіуса  $R$  несе повний заряд  $Q$ , що рівномірно розподілений по об'єму. Знайти електростатичну енергію кулі.

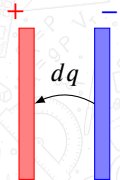
Відповідь:  $W = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{R}$

Де локалізована енергія поля?

# Енергія електричного поля в конденсаторі

Зарядимо конденсатора за допомогою перенесення заряду з правої пластини на ліву. Робота з перенесення заряду  $dq$  дорівнює  $dW = \Delta\varphi dq$ , де  $\Delta\varphi$  — різниця потенціалів пластин. Оскільки  $\varphi = \frac{q}{C}$ , то енергія буде дорівнювати:

$$dW = \Delta\varphi dq = \frac{q dq}{C} \Rightarrow W = \frac{q^2}{2C} = \frac{C \Delta\varphi^2}{2}.$$



В плоскому конденсаторі поле однорідне  $\Delta\varphi = Ed$ , ємність плоского конденсатора  $C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$ , то для енергії конденсатора отримуємо:

$$W = \frac{1}{2} C \Delta\varphi^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S}{4\pi d} (Ed)^2 = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} V.$$

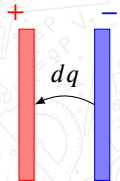
де  $V = Sd$  — об'єм конденсатора. Густина енергії дорівнює

$$w = \frac{\epsilon E^2}{8\pi}, \quad \text{якщо } D = \epsilon E \Rightarrow w = \frac{ED}{8\pi}.$$

# Енергія електричного поля в конденсаторі

Зарядимо конденсатора за допомогою перенесення заряду з правої пластини на ліву. Робота з перенесення заряду  $dq$  дорівнює  $dW = \Delta\varphi dq$ , де  $\Delta\varphi$  — різниця потенціалів пластин. Оскільки  $\varphi = \frac{q}{C}$ , то енергія буде дорівнювати:

$$dW = \Delta\varphi dq = \frac{q dq}{C} \Rightarrow W = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\Delta\varphi^2}{2}.$$



Енергія конденсатора виражена через характеристики поля (а не заряди):

$$w = \frac{ED}{8\pi}$$

що дозволяє дати нову інтерпретацію результату. Переносником взаємодії зарядів є **електричне поле**, так що воно і є **носієм енергії**, передає енергію від одного заряду до іншого. Електричне поле присутнє тільки в об'ємі конденсатора, тож і його **енергія локалізована в тих областях простору, де присутнє поле**.

# Енергія електричного поля (загальне виведення)

Отримана формула для енергії електричного поля для окремого випадку, коли поле однорідне і локалізоване в конденсаторі. Наведемо тепер більш загальний висновок.

При зміні заряду системи на  $\delta\rho$ , енергія змінюється на величину

$$\delta W = \frac{1}{2} \iiint_V \delta\rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})dV.$$

З теореми Гаусса  $\delta\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \delta\vec{D}$ :

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \iiint_V \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \delta\vec{D} \varphi dV = \frac{1}{8\pi} \iiint_V \left( \operatorname{div}(\delta\vec{D} \varphi) - \delta\vec{D} \cdot \vec{\nabla} \varphi \right).$$

Інтегрування поширене на весь нескінченний простір. Але на великій відстані від системи зарядів поле обертається в нуль. Тому, перший доданок у правій частині  $\iiint_V \left( \operatorname{div}(\delta\vec{D} \varphi) \right) dV = \oint_{S \rightarrow \infty} (\varphi \delta\vec{D}) \cdot d\vec{S} = 0$

У другому доданку врахуємо зв'язок потенціалу та напруженості поля:  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$ :

$$\delta W = \iiint_V \frac{\vec{E} \cdot \delta\vec{D}}{8\pi} dV, \Rightarrow w = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{8\pi}.$$

# Власна та взаємна енергія зарядів

Взаємна енергія зарядів:

$$W = \frac{1}{2} \sum \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

Енергія поля:

$$W = \int_V \frac{E^2}{8\pi} dV.$$

Формула ліворуч може бути як додатною так і від'ємною. Формула праворуч дає значення енергії завжди позитивне, оскільки містить інтеграл від невід'ємної величини.

Поле системи двох зарядів  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  має енергію:

$$W = \int_V \frac{E^2}{8\pi} dV = \int_V \frac{(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2}{8\pi} dV = \int_V \frac{E_1^2}{8\pi} dV + \int_V \frac{E_2^2}{8\pi} dV + \int_V \frac{\vec{E}_1 \vec{E}_2}{8\pi} dV$$

Власна енергія зарядів:

$$\int_V \frac{E_1^2}{8\pi} dV > 0, \int_V \frac{E_2^2}{8\pi} dV > 0.$$

Взаємна енергія:

$$W_{вз} = \int_V \frac{\vec{E}_1 \vec{E}_2}{8\pi} dV \leq 0.$$

# Енергетичний метод обчислення сил

## Теорія

Одним з ефективних прийомів розрахунку сил є **метод віртуальних переміщень**, у якому обчислюють роботу сил поля  $\delta A = F dx$  у разі нескінченно малого зсуву  $dx$ , після чого сила знаходиться з рівності  $F = \delta A/dx$ .

Метод є універсальним, без вияснення причин виникнення сил і автоматично враховувати всі силові взаємодії (електричні та механічні).

# Енергетичний метод обчислення сил

## Теорія

Нехай на провідниках підтримуються постійними заряди,  $q = \text{const}$ , тобто немає зовнішніх джерел енергії.

За таких умов робота  $\delta A$  всіх внутрішніх сил системи під час віртуальних переміщень провідників і діелектриків відбувається за рахунок зменшення електричної енергії  $dW$  системи:  $\delta A = -(dW)_{q=\text{const}}$ .

Нехай нас цікавить сила, що діє на дане тіло (провідник або діелектрик). Зробимо нескінченно мале поступальне переміщення  $dx$  цього тіла в цікавому для нас напрямку  $x$ . Тоді робота шуканої сили  $F_x$  визначиться як  $\delta A = F_x dx$ , звідки:

$$F_x = - \left. \frac{dW}{dx} \right|_{q=\text{const}}.$$

Для обчислення сили за цією формулою не треба підбирати такий режим, за якого обов'язково всі заряди провідників залишалися б постійними. Треба просто знайти приріст  $dW$  за умови, що  $q = \text{const}$  — це суто математична операція.



# Енергетичний метод обчислення сил

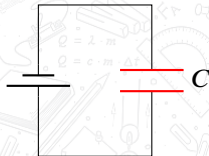
## Теорія

Нехай тепер на провідниках підтримуються постійними потенціали  $\varphi = \text{const}$ . Для цього всистемі є **джерело, що подає заряди і витрачають енергію на здійснення роботи**. Із закону збереження енергії, робота джерела йде на виконання механічної роботи  $F_x dx$  та на зміну енергії поля  $dW$ :

$$\delta A_{\text{дж}} = F_x dx + dW$$

З іншого боку робота джерела по переміщенню заряду дорівнює  $\delta A_{\text{дж}} = \delta q \Delta \varphi = \Delta \varphi^2 \delta C$ , а  $dW = \frac{1}{2} \Delta \varphi^2 \delta C$ , звідки  $F_x dx = \frac{1}{2} \Delta \varphi^2 \delta C = dW$ , тобто:

$$F_x = + \left. \frac{dW}{dx} \right|_{\Delta \varphi = \text{const}}.$$



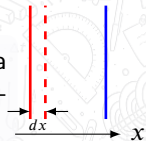
# Енергетичний метод обчислення сил

## Приклади

### Приклад 1

Знайдемо силу тяжіння пластин зарядженого конденсатора.

За умов, коли пластини конденсатора нерухомі, сила їхнього притягання не залежить від способу обчислення.



Обчислимо силу у випадку  $q = \text{const}$ . Зміна енергії поля при зміні відстані між пластинами:

$$dW = d \left( \frac{q^2}{2C} \right) = -\frac{q^2}{2C^2} dC, \quad C = \frac{\epsilon S}{4\pi x}, \quad dC = -\frac{C}{x} dx \Rightarrow dW = \frac{q^2}{2Cx} dx.$$

$$dW = \frac{\Delta\phi^2 C}{2d} dx = \frac{E^2 \epsilon S}{2 \cdot 4\pi} dx, \quad F_x = -\frac{dW}{dx} = -\frac{\epsilon E^2}{8\pi} S$$

Знак «мінус» свідчить про те, що пластини притягуються одна до одної.

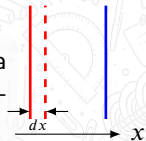
# Енергетичний метод обчислення сил

## Приклади

### Приклад 1

Знайдемо силу тяжіння пластин зарядженого конденсатора.

За умов, коли пластини конденсатора нерухомі, сила їхнього притягання не залежить від способу обчислення.



Обчислимо силу у випадку  $\Delta\varphi = \text{const}$ . Зміна енергії поля при зміні відстані між пластинами:

$$dW = d\left(\frac{C\Delta\varphi^2}{2}\right) = \frac{\Delta\varphi^2}{2}dC, \quad C = \frac{\epsilon S}{4\pi x}, \quad dC = -\frac{C}{x}dx \Rightarrow dW = -\frac{\Delta\varphi^2 C}{2x}dx.$$

$$dW = -\frac{\Delta\varphi^2 C}{2d}dx = -\frac{E^2 d^2 \epsilon S}{2d 4\pi d}dx, \quad F_x = \frac{dW}{dx} = -\frac{\epsilon E^2}{8\pi}S$$

Знак «мінус» свідчить про те, що пластини притягуються одна до одної.

# Енергетичний метод обчислення сил

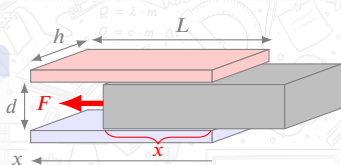
## Приклади

### Приклад 2

Знайдемо силу, з якою пластина з діелектрика з діелектричною проникністю  $\epsilon$  втягується в конденсатор.

#### Модель

Замінімо конденсатор із частково всунутою в нього пластиною діелектрика двома паралельно з'єднаними конденсаторами, з яких один — вакуумний, а інший заповнений діелектриком.



Ємність системи з двох паралельно з'єднаних конденсаторів дорівнює:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{S_1}{4\pi d} + \frac{\epsilon S_2}{4\pi d}.$$

Сумарна площа пластин конденсаторів незмінна, і можна записати

$$S = S_1 + S_2, S_1 = \left(1 - \frac{x}{L}\right) S, S_2 = \frac{x}{L} S, S = Lh$$

# Енергетичний метод обчислення сил

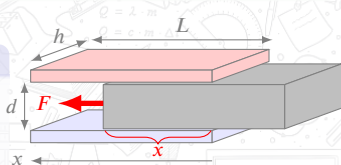
## Приклади

### Приклад 2

Знайдемо силу, з якою пластина з діелектрика з діелектричною проникністю  $\epsilon$  втягується в конденсатор.

#### Модель

Замінімо конденсатор із частково всунутою в нього пластиною діелектрика двома паралельно з'єднаними конденсаторами, з яких один — вакуумний, а інший заповнений діелектриком.



$$C = \frac{S}{4\pi d} \left( 1 + (\epsilon - 1) \frac{x}{L} \right)$$

$$F_x = -\frac{dW}{dx} = -\frac{dW}{dC} \frac{dC}{dx}, \quad \frac{dW}{dC} = -\frac{q^2}{2C^2}, \quad \frac{dC}{dx} = \frac{S}{4\pi d} \frac{\epsilon - 1}{L}.$$

$$F_x = \frac{q^2}{2C^2} \frac{S}{4\pi d} \frac{\epsilon - 1}{L} \stackrel{q=CEd}{=} \frac{(\epsilon - 1)E^2}{8\pi} hd.$$

# Підсумки

## 1. Електрична ємність

- Ємність провідника:  $C = \frac{q}{\varphi}$ .
- Ємність пари провідників:  $C = \frac{q}{\Delta\varphi}$ .
- Послідовне з'єднання конденсаторів:  $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$ .
- Паралельне з'єднання конденсаторів:  $C = \sum_{i=1}^n C_i$ .
- Ємність плоского конденсатора:  $C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$ .
- Ємність сферичного конденсатора:  $C = \frac{\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ .
- Ємність циліндричного конденсатора:  $C = \frac{\epsilon \ell}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}}$ .

# Підсумки

## 2. Енергія електричного поля

- Енергія системи зарядів:  $U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$
- Енергія системи зарядів через потенціал:  $W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i.$
- Енергія тіла  $W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV + \frac{1}{2} \iint_S \sigma(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dS.$
- Енергія електричного поля в конденсаторі:  $W = \frac{q^2}{2C} = \frac{C \Delta \varphi^2}{2}$
- Енергія через напруженість поля:  $W = \iiint_V \frac{\epsilon E^2}{8\pi} dV$

# Підсумки

## 3. Пондеромоторні сили

- Сила при  $q = \text{const}$ :  $F_x = - \left( \frac{dW}{dx} \right)_{q=\text{const}} = + \left( \frac{dW}{dx} \right)_{\Delta\varphi=\text{const}}$ .
- Сила втягування діелектрика в конденсатор:  $F_x = \frac{(\epsilon-1)E^2}{8\pi} S_{\text{торця}}$ .