Постійний електричний струм

Лекції з електрики та магнетизму

Пономаренко С. М.

Зміст

Означення

Сила та густина струму

Електричний струм — це впорядкований рух зарядів.

Силою струму називається заряд, що переноситься через переріз провідника за одиницю часу:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Електричний струм може бути нерівномірно розподілений по поверхні, через яку він протікає. Для характеристики розподілу по поверхні вводять вектор густини струму $\vec{j}$. Модуль вектора чисельно дорівнює відношенню сили струму через елементарну площадку, розташовану в даній точці перпендикулярно напряму руху носіїв, до її площі:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}.$$

Означення

Сила та густина струму

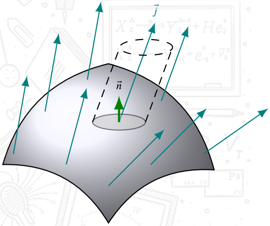
Електричний струм — це впорядкований рух зарядів.

Силою струму називається заряд, що переноситься через переріз провідника за одиницю часу:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Знаючи вектор густини струму в кожній точці поверхні S, можна знайти силу струму через цю поверхню як потік вектора $\vec{j}$:

$$dI = j\,dS_{\perp} \;\Rightarrow\; \boxed{I = \iint\limits_S \vec{j}\cdot d\vec{S}.}$$

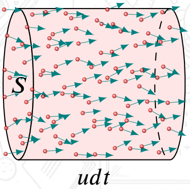


Означення

Густина струму та густина заряду

Середню швидкість впорядкованого руху носіїв заряду під дією електричного поля в провіднику називають дрейфовою швидкістю.

Візьмемо площадку dS на шляху носіїв, перпендикулярний дрейфовій швидкості. За час dt цю площадку перетнуть носії, що перебувають у циліндрі об'ємом $dV = udt\ S$. Їхнє число дорівнює $dN = ndV$, а перенесуть вони сумарний заряд $dq = edN = enudt\ S$. За одиницю часу через одиничну площадку пройде заряд:



$$j = \frac{dq}{dt}\frac{1}{S} = enu = \rho u$$

У векторному вигляді

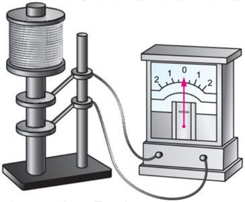
$$\vec{j} = \rho\vec{u}.$$

Природа носіїв струму в металах

Досліди Толмена та Стюарта

У 1916 р. американський фізик Р. Толмен (1881-1948) і шотландський фізик Т. Стюарт виконали кількісні виміри, які неспростовно довели, що струм у металевих провідниках зумовлений рухом вільних електронів.

У цих дослідах котушку з великим числом витків тонкого дроту підключали до гальванометра і приводили в швидке обертання навколо своєї осі. Під час різкого гальмування котушки в колі виникав короткочасний струм, зумовлений інерцією носіїв заряду. За напрямком відхилення стрілки гальванометра було встановлено, що електричний струм створюють негативно заряджені частинки. При цьому експериментально був отриманий питомий заряд носіїв q/m близький до питомого заряду електрона, отриманого з інших дослідів. Так було експериментально доведено, що носіями вільних зарядів у металах є електрони.



Установка Толмена і Стюарта

Відеодемотнстрація дослідів

Швидкість носіїв струму

Срібним дротом з перерізом 1 мм^2 проходить струм сили 1 А. Обчисліть середню швидкість упорядкованого руху електронів у цьому дроті, вважаючи, що кожен атом срібла дає один вільний електрон. Густина срібла дорівнює $10.5 \cdot 10^3$кг/м^3, його відносна атомна маса дорівнює 108. Постійна Авогадро $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. Обчисліть теплову швидкість електронів при $T = 300$ К.

Струм

$$I = jS = enuS$$

Концентрація електронів — це число електронів в одиниці об'єму, а число електронів дорівнює числу атомів срібла, бо один атом віддає один електрон:

$$\rho = \frac{m_{\mathrm{Ag}} N}{V} = m_{\mathrm{Ag}} n, \Rightarrow \ n = \frac{\rho}{m_{\mathrm{Ag}}} = \rho \frac{\mu}{N_A}.$$

Середня швидкість:

$$u = \frac{I}{enS} = \frac{I\mu}{e\rho N_A S} = 0.17 \text{ мм/с}.$$

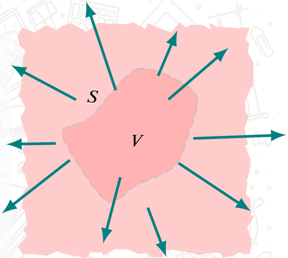
Теплова швидкість — це середні квадратична швидкість:

$$v_T = \sqrt{3kT/m_e} = 1.17 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

Закон збереження заряду

Нехай в деякому провідному середовищі, струм, який витікає через поверхню S дорівнює $I = \oint_S \vec{j}d\vec{S}$. Оскільки струм — це рух зарядів, то заряд в об'ємі V має заряд зменшується з часом:

$$\oint_S \vec{j}d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV$$



Це співвідношення називають рівнянням неперервності. Воно є вираженням закону збереження електричного заряду.

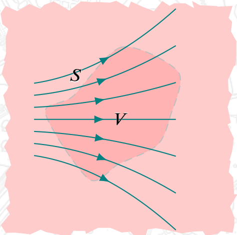
В диференціальній формі (використовуючи теорему Остроградського-Гаусса):

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}.}$$

Закон збереження заряду

Нехай в деякому провідному середовищі, струм, який витікає через поверхню S дорівнює $I = \oint_S \vec{j}d\vec{S}$. Оскільки струм – це рух зарядів, то заряд в об'ємі V має заряд зменшується з часом:

$$\oiint_S \vec{j}d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV$$



У стаціонарному випадку, коли $\partial\rho/\partial t = 0$, рівняння набуває вигляду:

$$\oiint_S \vec{j}d\vec{S} = 0, \text{ або } \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0.$$

Дана рівність означає, що з об'єму V, обмеженого замкненою поверхнею S, витікає така ж сама кількість заряду, що і втікає в цей об'єм.

Закон Ома

Георг Ом 1827 року експериментально встановив, що сила струму I, який протікає однорідним металевим провідником, у якому не діють сторонні сили, пропорційна напрузі U на кінцях провідника:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Опір R залежить від форми і розмірів провідника, від його матеріалу і температури, а також від розподілу струму по провіднику. У найпростішому випадку однорідного циліндричного провідника опір:

$$R = \rho \frac{l}{S}.$$

Про одиниці вимірювання

Одиниця вимірювання опору в гауссовій системі:

$$[I] = \frac{\text{Фр}}{\text{с}}, [U] = \frac{\text{Фр}}{\text{см}}, \Rightarrow \ [R] = \frac{\text{с}}{\text{см}}$$

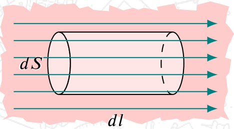
Опір в системі СГС має розмірність оберненої швидкості. Питомий опір відповідно:

$$[\rho] = [R]\frac{[S]}{[l]} = \frac{\text{с}}{\text{см}}\frac{\text{см}^2}{\text{см}} = \text{с}$$

У гаусовій системі одиниць питомий опір ρ вимірюється в секундах (с). Електрична провідність λ має розмірність, обернену часу с$^{-1}$.

Закон Ома

Диференціальна форма



Виділимо в околиці деякої точки провідного середовища елементарний циліндричний об'єм з твірними, паралельними вектору $\vec{j}$.

Якщо поперечний переріз циліндра dS, а його довжина dl, то можна записати для такого елементарного циліндра:

$$jdS = \frac{Edl}{\rho\frac{dl}{dS}} = \frac{1}{\rho}EdS.$$

і після відповідних скорочень отримаємо, вже у векторному вигляді:

$$\boxed{\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E}} = \lambda\vec{E}$$

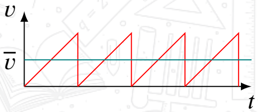
де $\lambda = 1/\rho$ — питома електропровідність середовища.

Теорія провідності металів Друде

У 1900 році Пауль Друде запропонував просту теорію, що пояснює провідність металів. Ця теорія доволі проста і якісно застосовується для оцінки провідності.

Розглянемо рух електрона в постійному однорідному полі $\vec{E}$. Рівняння руху має вигляд:

$$\vec{a} = \vec{F}/m_e = e\vec{E}/m_e.$$



Якщо початкова швидкість електрона була нульовою, то до зіткнення з розсіювальним центром вона змінюється за законом $v = at$. Після зіткнення швидкість обертається в середньому в нуль, і починається новий цикл прискорення.

Якщо час вільного пробігу дорівнює τ, то середня швидкість упорядкованого руху електрона від зіткнення до зіткнення становитиме

$$\vec{u} = \vec{\bar{v}} = \frac{1}{2}\frac{e\vec{E}\tau}{m_e}. \Rightarrow \vec{j} = en\vec{u} = \frac{ne^2\tau}{2m_e}\vec{E}, \Rightarrow \lambda = \frac{ne^2\tau}{2m_e}.$$

Температурна залежність опору

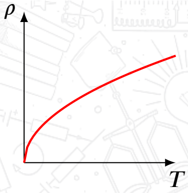


Рис.: Теорія Друде

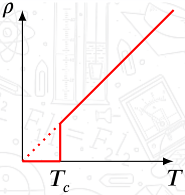


Рис.: Експеримент

$$\rho = \rho_0\,[1 + \alpha T]\,.$$

$$\rho = \rho_{20}\,[1 + \alpha(t - 20)]\,.$$

Таблиця: Питомий опір металів при 20°C

Метал	ρ, $(10^{-8}$ Ом · м)	α, 10^{-3} 1/°C
Мідь (Cu)	1.68	4.3
Алюміній (Al)	2.82	4.2
Залізо (Fe)	9.71	6.0
Нікель (Ni)	6.84	6.5
Вольфрам (W)	5.65	5.0

Розподіл зарядів в провіднику

Об'ємні заряди

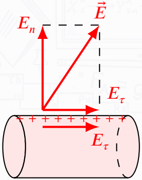
Якщо по однорідному ($\lambda = \mathrm{const}$) провіднику тече постійно струм $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \lambda 4\pi\rho = 0 \;\Rightarrow\; \rho = 0.$$

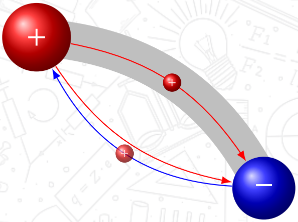
Це означає, що при протіканні струму по однорідному провіднику в його об'ємі нема заряду $\rho = 0$.

Поверхневі заряди

На поверхні провідника, по якому тече постійний електричний струм, є електричні заряди. Вони і є джерелами електричного поля, яке існує в провіднику і забезпечує наявність постійного струму.



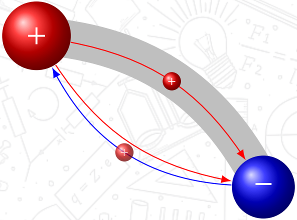
Сторонні сили



Щоб існував струм, в колі разом з ділянками, де позитивні носії струму рухаються в бік зменшення потенціалу, мають бути ділянки, на яких перенесення позитивних носіїв відбувається в бік зростання потенціалу, тобто проти сил електричного поля. Перенесення носіїв на цих ділянках можливе лише за допомогою сил не електростатичного походження, які називаються сторонніми силами.

Фізична природа сторонніх сил може бути дуже різною. Вони можуть бути зумовлені, хімічною і фізичною неоднорідністю провідника — такими є сили, що виникають під час зіткнення різнорідних провідників (гальванічні елементи, акумулятори) або провідників різної температури (термоелементи) тощо.

Сторонні сили

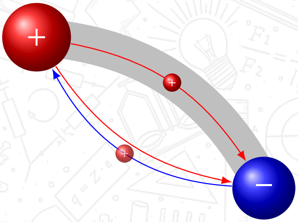


Щоб існував струм, в колі разом з ділянками, де позитивні носії струму рухаються в бік зменшення потенціалу, мають бути ділянки, на яких перенесення позитивних носіїв відбувається в бік зростання потенціалу, тобто проти сил електричного поля. Перенесення носіїв на цих ділянках можливе лише за допомогою сил не електростатичного походження, які називаються сторонніми силами.

Для кількісної характеристики сторонніх сил вводять поняття поля сторонніх сил і його напруженості $\vec{E}^*$. Цей вектор чисельно дорівнює сторонній силі, що діє на одиничний позитивний заряд:

$$\vec{E}^* = \frac{\vec{F}^*}{q}.$$

Сторонні сили



Щоб існував струм, в колі разом з ділянками, де позитивні носії струму рухаються в бік зменшення потенціалу, мають бути ділянки, на яких перенесення позитивних носіїв відбувається в бік зростання потенціалу, тобто проти сил електричного поля. Перенесення носіїв на цих ділянках можливе лише за допомогою сил не електростатичного походження, які називаються сторонніми силами.

Робота сторонніх сил по переміщенню одиничного заряду з точки 1 в точку 2 називається (в області де діють сторонні сили) електрорушійною силою (ЕРС):

$$\mathcal{E} = \frac{A^*}{q} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}^* \cdot d\vec{r}.$$

Узагальнений закон Ома

В диференціальній формі

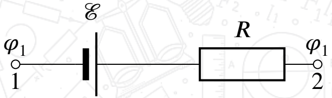
Якщо під дією електричного поля $\vec{E}$ у провіднику виникає струм густини $\vec{j} = \lambda \vec{E}$, то очевидно, що під спільною дією поля $\vec{E}$ і поля сторонніх сил $\vec{E}^*$ густина струму:

$$\boxed{\vec{j} = \lambda \left(\vec{E} + \vec{E}^* \right).}$$

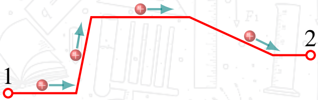
Закон Ома в інтегральній формі

Для неоднорідної ділянки та замкненого кола

Неоднорідною називають ділянку кола, на якій діють сторонні сили.



$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{\vec{j}\cdot d\vec{r}}{\lambda} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}\cdot d\vec{r} + \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}^{*}\cdot d\vec{r}.$$



$$I\int_{(1)}^{(2)} \rho\frac{dl}{S} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}.$$

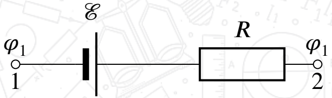
$$\boxed{IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}.}$$

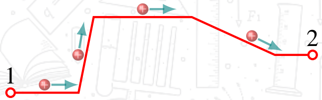
Якщо ЕРС сприяє руху позитивних носіїв струму в обраному напрямку, то $\mathscr{E} > 0$, якщо ж перешкоджає, то $\mathscr{E} < 0$.

Закон Ома в інтегральній формі

Для неоднорідної ділянки та замкненого кола

Неоднорідною називають ділянку кола, на якій діють сторонні сили.





$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{\vec{j}\cdot d\vec{r}}{\lambda} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}\cdot d\vec{r} + \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}^{*}\cdot d\vec{r}.$$

$$I\int_{(1)}^{(2)} \rho\frac{dl}{S} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}.$$

Для замкненого кола точки 1 і 2 збігаються, $\varphi_1 = \varphi_2$, і закон набуває вигляду:

$$\boxed{IR = \mathscr{E},}$$

де R — повний опір замкненого кола, а $\mathscr{E}$ — алгебраїчна сума окремих ЕРС у цьому колі.

Розгалужені кола

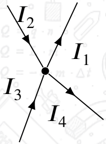
Правила Кірхгофа

Перше правило Кірхгофа

Правило стосується вузлів кола, тобто точок його розгалуження: алгебраїчна сума струмів, що сходяться у вузлі, дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^{K} I_k = 0.$$

Струми, що йдуть до вузла, і струми, що виходять з вузла, слід вважати величинами різних знаків.



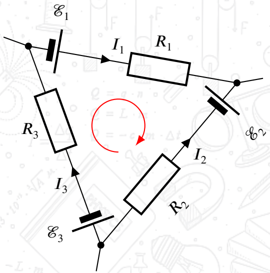
Розгалужені кола

Правила Кірхгофа

Друге правило Кірхгофа

Правило стосується будь-якого виділеного в розгалуженому колі **контуру (замкненої частини кола)**: алгебраїчна сума добутків сил струмів в окремих ділянках довільного замкненого контуру на їхні опори (падіння напруги) дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС, що діють у цьому контурі:

$$\sum_{m=1}^{M} I_m R_m = \sum_{n=1}^{N} \mathscr{E}.$$



Закон Джоуля-Ленца

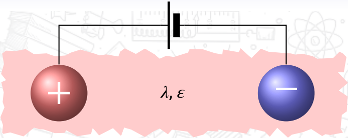
При зіткненні електрона з іоном енергія, отримана електроном $\frac{m_e v_{\max}}{2}$ в електричному полі, повністю передається іону. Число зіткнень одного електрона за одиницю часу дорівнює $\frac{1}{\tau}$, де τ — час вільного пробігу електрона. Загальне число зіткнень за одиницю часу в одиниці об'єму дорівнює $N = \frac{n}{\tau}$, n — концентрація електронів. Тоді кількість теплоти, що виділяється в одиниці об'єму провідника за одиницю часу буде:

$$w = \frac{dW}{dt dV} = N\frac{m_e v_{\max}}{2} = \frac{n}{\tau}\frac{m_e v_{\max}^2}{2} = \frac{n}{\tau}\frac{m_e}{2}\left(\frac{eE\tau}{m_e}\right)^2 = \frac{ne^2\tau}{2m_e}E^2 = \lambda E^2$$

Потужність енерговиділення, тобто енергія, що виділяється за одиницю часу, дорівнює:

$$W = \int_V w dV = \int_V \rho j^2 dV = I^2 \int_V \rho \frac{dl}{S} = I^2 R$$

Струми в необмежених середовищах



Нехай у провідне середовище з провідністю λ і діелектричною проникністю ε поміщено два електроди. Знайдемо повний опір середовища.

З теореми Гауса для провідника із зарядом $+q$ маємо $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{4\pi}{\varepsilon}C(\varphi_+ - \varphi_-)$, де інтегрування проводиться по зовнішній поверхні провідника, і враховано $q = C(\varphi_+ - \varphi_-)$.

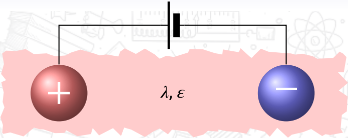
Густина струму, що стікає з + електрода: $\vec{j} = \lambda\vec{E}$, де $\vec{E}$ — поле поблизу його поверхні. Повний струм, що стікає з електрода:

$$I = \oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = \lambda \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \lambda\frac{4\pi}{\varepsilon}C(\varphi_+ - \varphi_-)$$

Опір між електродами визначається формулою:

$$R = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{I} = \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda C}.$$

Струми в необмежених середовищах



Нехай у провідне середовище з провідністю λ і діелектричною проникністю ε поміщено два електроди. Знайдемо повний опір середовища.

Опір між електродами визначається формулою:

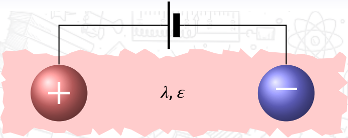
$$R = \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda C}.$$

Якщо електроди являють собою провідники з власними ємностями $C_1 = \varepsilon r_1$ а і $C_2 = \varepsilon r_2$, віддалені один від одного на велику відстань, то їхня взаємна ємність дорівнює: $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$, а опір

$$R = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Тобто опір практично не залежить від відстані між кулями.

Струми в необмежених середовищах



Нехай у провідне середовище з провідністю λ і діелектричною проникністю ε поміщено два електроди. Знайдемо повний опір середовища.

Опір між електродами визначається формулою:

$$R = \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda C}.$$

Якщо електроди являють собою обкладки плоского конденсатора (з площею пластин S і відстанню між ними d), то $C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$. Формула для опору набуває вигляду

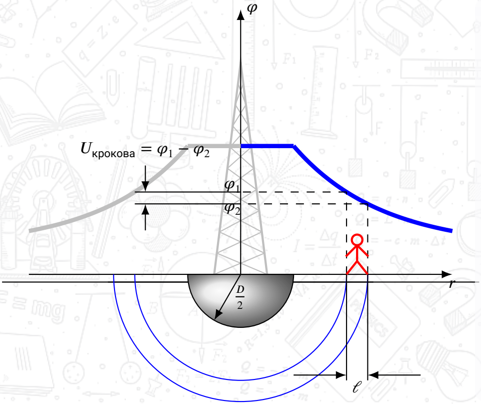
$$R = \frac{d}{\lambda S},$$

що збігається з відомим виразом для опору провідника довжиною d, поперечним перерізом S і питомим опором $1/\lambda$.

Задача

Задача

Фундамент металевої опори виконано із матеріалу, який добре проводить струм і має вигляд півсфери діаметром $D = 2$ м. Ґрунт навколо фундаменту має провідність $\lambda = 2 \cdot 10^{-4}$ См/см і є заземленням. Знайти опір заземлення і крокову напругу на відстані $r = 5$ м від центру опори при замиканні на опору дроту напругою $\varphi_0 = 10$ кВ. Довжина кроку людини $\ell = 0.7$ м.



Опір заземлення:

$$R = \frac{1}{\pi \lambda D} \approx 8 \text{ Ом}.$$

Потенціал заземленої кулі спадає обернено пропорційно відстані:

$$\varphi = \frac{\varphi_0 D}{2} \frac{1}{r},$$

а крокова напруга визначається за формулою (див. рис.) $U_{\text{крокова}} = \varphi_1 - \varphi_2$, тобто

$$U_{\text{крокова}} = \frac{\varphi_0 D}{2} \frac{\ell}{r^2} \approx 246 \text{ В}.$$

Перехідні процеси в колі з конденсатором

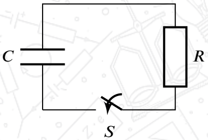
Перехідні процеси — це процеси, щл відбуваються під час переходу від одного стаціонарного режиму до іншого. Прикладом таких процесів є заряджання та розряджання конденсатора.

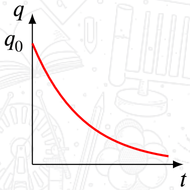
Закон Ома можна застосовувати і до струмів, що змінюються. Це стосується випадків, коли зміна струму відбувається не надто швидко. У цих випадках миттєве значення струму буде одне й те саме у всіх поперечних перерізах кола. Такі струми називають квазістаціонарними.

Квазістаціонарні струми можна описувати законами постійного струму, якщо тільки їх застосовувати до миттєвих значень величин.

Перехідні процеси в колі з конденсатором

Розрядка конденсатора





Закон Ома для кола $RI = U$. Оскільки $I = -dq/dt$ і $U = q/C$, закон набуде вигляду

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0.$$

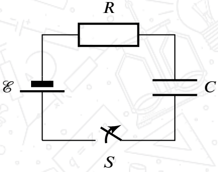
Після інтегрування ми отримаємо:

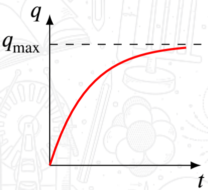
$$q = q_0 e^{-t/RC} = q_0 e^{-t/\tau},$$

де q_0 — початковий заряд конденсатора, а $\tau = RC$ — називають часом релаксації.

Перехідні процеси в колі з конденсатором

Зарядка конденсатора





Закон Ома для кола $RI + U = \mathscr{E}$. Оскільки $I = dq/dt$ і $U = q/C$, закон набуде вигляду

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\mathscr{E}}{R}.$$

Після інтегрування ми отримаємо:

$$q = q_{\max}(1 - e^{-t/\tau}),$$

де $q_{\max} = \mathscr{E}C$ — граничне значення заряду на конденсаторі ($t \to \infty$).

Підсумки

Сила струму $$I = \frac{dq}{dt}$$

Вектор густини струму $$j = \frac{dI}{dS_\perp}$$

Струм, як потік вектора $\vec{j}$ $$I = \iint\limits_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Зв’язок густини струму і густини заряду $$\vec{j} = \rho\vec{u}$$

Закон збереження заряду (рівняння неперервності) $$\operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Закон Ома в інтегральній формі $$I = \frac{U}{R}$$

Закон Ома в диференціальній формі $$\vec{j} = \lambda\vec{E}$$

Провідність металів за теорією Друде $$\lambda = \frac{ne^2\tau}{2m_e}$$

Електрорушійна сила (означення) $$\mathscr{E} = \frac{A^*}{q} = \int\limits_{(1)}^{(2)} \vec{E}^* \cdot d\vec{r}$$

Підсумки

Електрорушійна сила (означення) $\mathscr{E} = \frac{A^*}{q} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}^* \cdot d\vec{r}$

Закон Ома для неоднорідної ділянки кола $IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}$

Перше правило Кірхгофа (для вузла) $\sum_{k=1}^{K} I_k = 0$

Друге правило Кірхгофа (для контурів) $\sum_{m=1}^{M} I_m R_m = \sum_{n=1}^{N} \mathscr{E}$

Закон Джоуля-Ленца (в диференціальній формі) $w = \lambda E^2$

Закон Джоуля-Ленца (в Інтегральній формі) $W = IR^2$