Постійне електричне поле

Лекції з електрики та магнетизму

Пономаренко С. М.

Зміст лекції

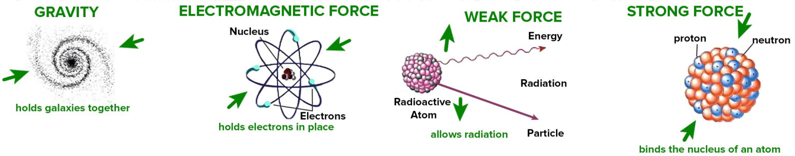
1. Сили (взаємодії) в природі

2. Основні поняття

3. Теорема Гаусса для електричного поля у вакуумі

4. Потенціал

Сили (взаємодії) в природі



Взаємодія	Джерело	Ефект	Радіус дії	Інтенсивність
Гравітація	Маса	Всі тіла притягуються	∞	10^{-38}
Електромагнітна	Електричний заряд	Заряджені тіла притягуються і відштовхуються	∞	10^{-2}
Слабка ядерна	Слабкий заряд	Розпад більш масивних частинок до менш масивних	10^{-16} см	10^{-10}
Сильна ядерна	Кольоровий заряд	Притягування кварків	10^{-13} см	1

Електромагнітна взаємодія

Електромагнітна взаємодія є одним із фундаментальних типів взаємодій. Вона здійснюється на відстані, без прямого контакту взаємодіючих тіл, і передається за допомогою особливого носія — електромагнітного поля.

Електромагнітним полем називається область простору, де діють електричні та магнітні сили.

Поле створюється електричними *зарядами* і діє на *заряди*.

Електричний заряд — це міра взаємодії зарядженого тіла з полем. Фактично, заряд визначає інтенсивність взаємодії заряджених тіл. Заряд – фундаментальна сутність.

Фізика має на меті встановлення об'єктивних закономірностей, що описують взаємодію фундаментальних сутностей природи.

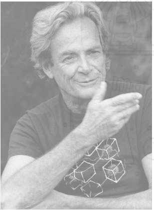
Електромагнітна взаємодія

Якби у вашому тілі або в тілі вашого сусіда (який стоїть від вас на відстані витягнутої руки) електронів виявилося б всього на 1% більше, ніж протонів, то сила вашого відштовхування була б неймовірно великою.

Наскільки великою? Достатньою, щоб підняти хмарочос? Більше! Достатньою, щоб підняти гору Еверест? Більше!

Сили відштовхування вистачило б, щоб підняти «вагу», що дорівнює вазі нашої Землі!

Р. Фейнман в книзі «Фейнманівські лекції з фізики».



Системи одиниць

За основну в курсі прийнято гауссову систему одиниць.

Характеристика	Система СІ	Гауссова система
Основні одиниці	метр, кілограм, секунда (МКС), ампер	сантиметр, грам, секунда (СГС)
Сила струму	Ампер	Відсутня окрема одиниця
Застосування	Широке використання в техніці та науці	Теорія поля, теоретична фізика

Гауссова система СГС до теперішнього часу залишається найкращою у фізиці. Для фізика значно легше виконати всі обчислення в гаусовій системі і лише наприкінці, якщо це потрібно, зробити перерахунок до практичних одиниць.

Деякі фізичні константи в гауссовій системі

Константа	Символ	Значення
Швидкість світла у вакуумі	c	$2.99792458 \cdot 10^{10}$ см/с
Гравітаційна стала	G	$6.67428 \cdot 10^{-8}$ см^3/(г·с^2)
Стала Планка	$\hbar$	$1.0545716 \cdot 10^{-27}$ ерг·с
Елементарний заряд	e	$4.80320427 \cdot 10^{-10}$ Фр
Маса електрона	m_e	$9.10938215 \cdot 10^{-28}$ г
Маса протона	m_p	$1.6726219 \cdot 10^{-24}$ г
Борівський радіус	a_0	$5.2917720859 \cdot 10^{-9}$ см
Магнетон Бора	μ_B	$9.27400915 \cdot 10^{-21}$ ерг/Гс
Електрон-Вольт	еВ	$1.602 \cdot 10^{-12}$ ерг

Електричний заряд

Досліди Міллікена

Заряд — фундаментальна властивість деяких видів елементарних частинок.

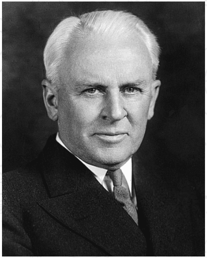


Рис.: Роберт Міллікен

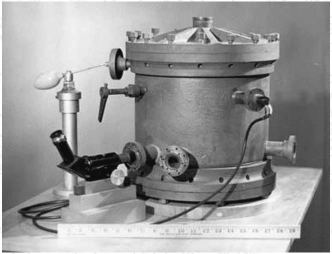


Рис.: Установка Міллікена

Експеримент із вимірювання елементарного електричного заряду, здійснений 1909 року Робертом Ендрюсом Міллікеном та Гарві Флетчером. В результаті було встановлено дискретність електричного заряду та визначив величину заряду електрона з точністю до 1%. Відео: Досліди Міллікена та Йоффе

Електричний заряд

Властивості

Заряд — фундаментальна властивість деяких видів елементарних частинок.

1. Дискретність заряду.

   Дослідним шляхом було встановлено, що в природі існують заряди двох типів, які умовно ділять на позитивні та негативні. Позитивний заряд несуть, наприклад, протони, а негативний — електрони. У природі заряд змінюється (переноситься) дискретно, причому будь-який ненульовий заряд кратний деякому елементарному заряду, що чисельно дорівнює заряду електрона:

$$e = 4.803 \cdot 10^{-10}\ \text{Фр} = 1.602 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}.$$

2. Збереження заряду.

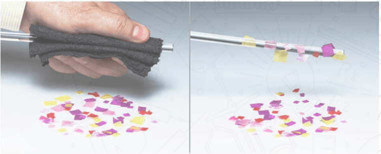
   Заряд — це величина, що зберігається. Позитивні й негативні заряди можуть народжуватися в рівних кількостях або взаємно знищувати один одного. При цьому сумарний електричний заряд речовини не змінюється.

3. Релятивістська інваріантність заряду.

   Величина електричного заряду однакова відносно різних систем відліку. Іншими словами, величина заряду не залежить від швидкості.

Як заряджають тіла?

Трибоелектричний ефект



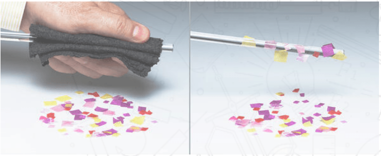
Трибоелектричний ефект — поява електричних зарядів у матеріалі через тертя.

Деякі матеріали стають електрично зарядженими після того, як вони входять у фрикційний контакт з іншим матеріалом.

Слово «електрика» походить від грецького «ηλεκτρον» (електрон), що означає «бурштин». Люди помітили, що бурштин, натертий об хутро, притягує дрібні предмети, і це явище згодом стало основою для дослідження електричних явищ.

Як заряджають тіла?

Трибоелектричний ефект

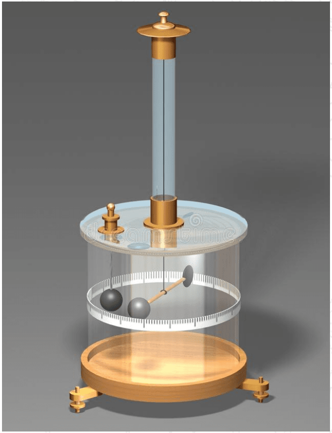


Матеріали, що виявляють трибоелектричний ефект, прийнято розташовувати в трибоелектричний ряд, один кінець якого є позитивним, а інший — негативним. Під час тертя пари матеріалів з ряду, матеріал, розташований ближче до позитивного кінця ряду, зарядиться позитивно, а інший — негативно.

–										+
Ебоніт	Бурштин	Папір	Поліестер	Алюміній	Шовк	Флінтглас	Пір'я	Слонова кістка	Фланель	Хутро

Крутильні терези

Досліди Кавендіша та Кулона



Крутильні (торсіонні) терези — це прилад для вимірювання дуже слабких сил, винайдений Шарлем Кулоном в 1777 році.

Найвідоміші випадки використання:

1. вимірювання Кулоном електростатичної сили між зарядами для встановлення закону Кулона;
2. в експерименті Генрі Кавендішем у 1798 році для вимірювання сили тяжіння між двома масами для обчислення маси Землі, що згодом дозволило отримати значення гравітаційної сталої.

Відео: Досліди Кавендіша з крутильними терезами

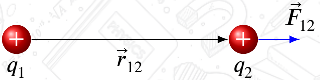
Закон Кулона

Експериментально встановлено, що заряди одного знака (однойменні заряди) відштовхуються, а заряди різного знака (різнойменні заряди) — притягуються.

Точковим називається такий заряд, розмірами та формою якого в умовах, що розглядаються, можна знехтувати.

Закон, установлений Ш. Кулоном у 1785 р., стверджує, що сила, що діє на точковий заряд q_1 з боку точкового заряду q_2:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r}.}$$

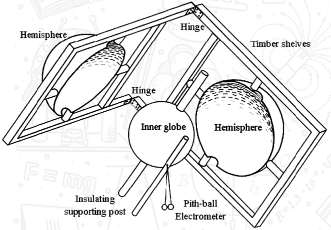


Експериментальні перевірки закону Кулона

Якщо припустити, що закон взаємодії точкових зарядів відрізняється від закону оберненого квадрату, наприклад:

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^{2+\varepsilon}},$$

де $|\varepsilon| \ll 1$, то при збереженні принципу суперпозиції це призводить до якісних змін у поведінці зарядів у провідниках. У випадку кулонівської взаємодії у стаціонарних умовах заряди зосереджуються на поверхні провідника, а всередині зарядів немає. Однак, якщо виконується формула з ε, то можна показати, що у провіднику виникає ненульова густина заряду у стаціонарних умовах.



Цю обставину було використано для отримання обмеження на ε. На попередньо заряджену провідну кулю накладали дві провідні напівсфери, які щільно прилягали одна до одної, утворюючи майже суцільну поверхню. У цій системі, у разі кулонівської взаємодії ($\varepsilon = 0$), весь заряд переходить на зовнішні напівсфери. Якщо ж $\varepsilon \neq 0$, всередині кулі залишається заряд (тим менший, чим менше ε), який можна виміряти за допомогою чутливого електрометра після зняття напівсфер. Цей експеримент неодноразово повторювався із поступовим підвищенням точності. У 1983 році було отримано обмеження:

$$|\varepsilon| < 10^{-16}\text{–}10^{-17}.$$

Напруженість електричного поля

Для дослідження поля, створюваного будь-якими зарядами (зарядженими тілами), можна використовувати пробні заряди.

Пробним називається такий невеликий за величиною точковий заряд, який не виробляє помітного перерозподілу зарядів, що створюють досліджуване поле.

Дослідним шляхом установлено, що якщо помістити в електричне поле пробний заряд q то відношення сили F, що діє на цей заряд, до величини заряду не залежить від величини заряду. Отже, відношення F/q характеризує поле, але не заряд.

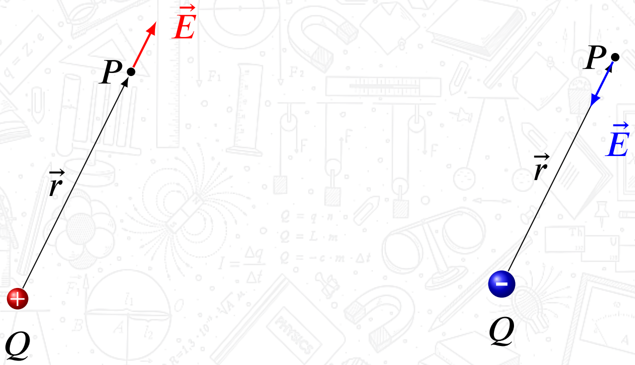
Напруженістю електричного поля в *деякій точці* називається сила, що діє на одиничний точковий заряд:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \quad \vec{F} = q\vec{E}.$$

Напруженість поля точкового заряду

Відповідно до закону Кулона напруженість поля точкового заряду Q дорівнює:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.}$$



Принцип суперпозиції

Сила, що діє на заряд q з боку системи інших зарядів, дорівнює векторній сумі сил, що незалежно діють на розглянутий заряд з боку кожного із зарядів системи:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

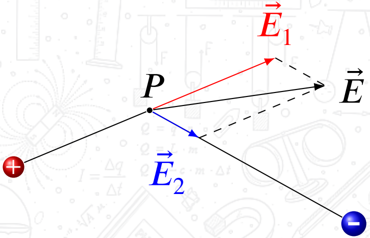
Оскільки $\vec{F}_i = q\vec{E}_i$, то напруженість поля в цій точці також дорівнює векторній сумі напруженостей полів, незалежно створюваних у цій точці кожним із зарядів системи:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

Принцип суперпозиції

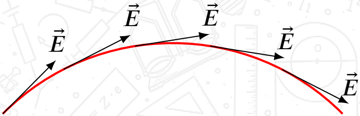
Оскільки $\vec{F}_i = q\vec{E}_i$, то напруженість поля в цій точці також дорівнює векторній сумі напруженостей полів, незалежно створюваних у цій точці кожним із зарядів системи:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

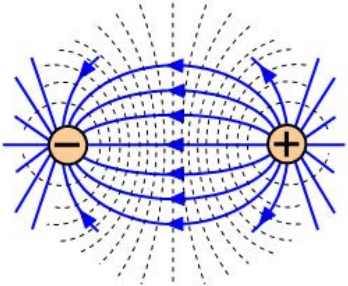


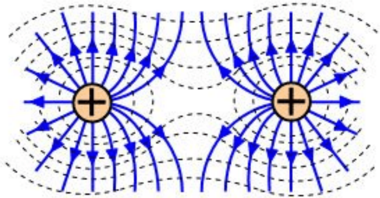
Силові лінії

Силовою лінією називається така лінія, у кожній точці якої напрямок дотичної до неї збігається з напрямком напруженості поля в тій самій точці.



Стрілки вказують напрямок електричного поля в різних точках цієї лінії.



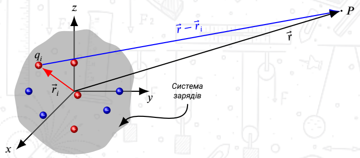


Дипольний момент системи зарядів

Для довільної системи зарядів дипольний момент визначається формулою:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} q_i \vec{r}_i,$$

де $\vec{r}_i$ — радіус-вектор i-го заряду.



У загальному випадку ця величина залежить від вибору початку відліку. Однак якщо система загалом електронейтральна $\sum_{i=1}^{n} q_i = 0$, то дипольний момент $\vec{p}$ визначений однозначно.

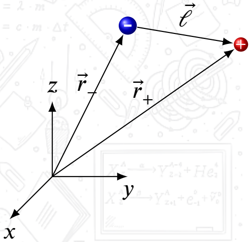
Електричний диполь

Елементарний диполь — система, що складається з двох точкових зарядів q, однакових за величиною і протилежних за знаком.

Плече диполя — вектор ($\vec{\ell}$), що йде від «–» заряду до «+», довжина якого дорівнює відстані між зарядами.

Дипольним моментом диполя називається вектор

$$\vec{p} = q\vec{\ell}.$$



Диполь — модель реальних об'єктів!

Жорсткий диполь — диполь із фіксованою відстанню між зарядами, що не змінюється під зовнішніми впливами.

Пружний диполь — диполь, де відстань між зарядами змінюється під зовнішніми впливами, і дипольний момент може змінюватися.

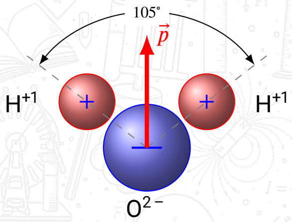
Дипольні моменти деяких полярних молекул

Дипольний момент виникає внаслідок різної електронегативності атомів, що складають молекулу, та розташуванню їх в просторі.

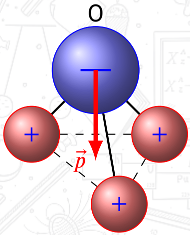
Дебай (позначається як *Д* або *D*) — позасистемна одиниця вимірювання електричного дипольного моменту молекул. Одиниця виміру названа на честь фізика П. Дебая.

$$1 \text{ Дебай} = 10^{-18} \text{ Фр} \cdot \text{см}.$$

Більшість полярних молекул має дипольний момент порядку 1 Д. Одиниця застосовується у фізичній хімії, атомній і молекулярній фізиці.



Дипольний момент молекули H_2O $p = 1.84$ D



Дипольний момент молекули NH_3 $p = 1.46$ D

Дипольні моменти деяких полярних молекул

Дипольний момент виникає внаслідок різної електронегативності атомів, що складають молекулу, та розташуванню їх в просторі.

Дебай (позначається як *Д* або *D*) — позасистемна одиниця вимірювання електричного дипольного моменту молекул. Одиниця виміру названа на честь фізика П. Дебая.

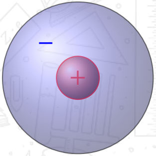
$$1 \text{ Дебай} = 10^{-18} \text{ Фр} \cdot \text{см}.$$

Більшість полярних молекул має дипольний момент порядку 1 Д. Одиниця застосовується у фізичній хімії, атомній і молекулярній фізиці.

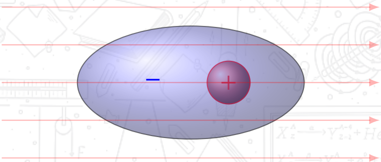
Молекула	Дипольний момент (Дебай)
Вода (H_2O)	1.84
Аміак (NH_3)	1.46
Вуглекислий газ (CO_2)	0.00
Хлороводень (HCl)	1.08
Метанол (CH_3OH)	1.70

Виникнення дипольного моменту неполярних молекул

Неполярні молекули — це молекули, в яких електричні заряди розподілені рівномірно, і відсутній постійний дипольний момент. У таких молекулах атоми зазвичай мають однакову або близьку електронегативність, тому електрони діляться рівномірно між атомами.



Дипольний момент без зовнішнього поля $p = 0$.



Дипольний момент виник під дією зовнішнього поля $p \neq 0$.

Прикладом неполярних молекул є кисень (O_2), азот (N_2), метан (CH_4) атоми інертних газів.

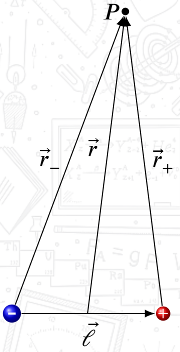
Поле точкового диполя

Диполь називається точковим, якщо відстань між його зарядами (плече диполя) ℓ мала порівняно з відстанню r від диполя до точки спостереження: $\ell \ll r$.

Поле точкового диполя можна знайти за допомогою принципу суперпозиції та з урахуванням нерівності $\ell \ll r$:

$$\vec{E} = \frac{(-q)\vec{r}_-}{r_-^3} + \frac{(+q)\vec{r}_+}{r_+^3}, \quad \begin{cases} \vec{r}_- = \vec{r} + \vec{\ell}/2 \\ \vec{r}_+ = \vec{r} - \vec{\ell}/2 \end{cases}.$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}.}$$



Таким чином, напруженість поля точкового диполя зменшується з відстанню за законом

$$E \sim 1/r^3.$$

Поле точкового диполя

Виведення

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{q\vec{r}_-}{r_-^3}$$

$$\boxed{\ell \ll r}$$

$$\boxed{(1+x)^n \approx 1+nx}$$

$$\boxed{\vec{p} = q\vec{\ell}}$$

$$\vec{r}_- = \vec{r} + \frac{\vec{\ell}}{2} \Rightarrow r_-^2 = r^2 + \vec{r}\vec{\ell} + \cancel{\frac{\ell^2}{2}} \Rightarrow r_-^{2\cdot 3/2} = r^{2\cdot 3/2}\left(1+\frac{\vec{r}\vec{\ell}}{r^2}\right)^{3/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_-^3 = r^3\left(1+\frac{\vec{r}\vec{\ell}}{r^2}\right)^{3/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{r_-^3} = \frac{1}{r^3}\left(1-\frac{3}{2}\frac{\vec{r}\vec{\ell}}{r^2}\right)}$$

$$\vec{r}_+ = \vec{r} - \frac{\vec{\ell}}{2} \Rightarrow$$

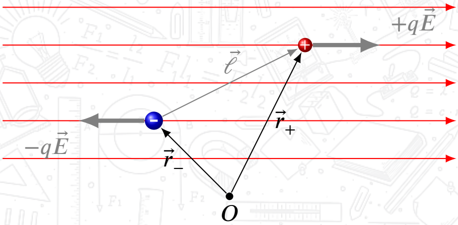
$$\boxed{\frac{1}{r_+^3} = \frac{1}{r^3}\left(1+\frac{3}{2}\frac{\vec{r}\vec{\ell}}{r^2}\right)}$$

$$\vec{E} = \frac{q\left(\vec{r}-\frac{\vec{\ell}}{2}\right)}{r^3}\left(1+\frac{3}{2}\frac{\vec{r}\vec{\ell}}{r^2}\right) - \frac{q\left(\vec{r}+\frac{\vec{\ell}}{2}\right)}{r^3}\left(1-\frac{3}{2}\frac{\vec{r}\vec{\ell}}{r^2}\right) =$$

$$= \frac{q(\vec{r}-\vec{\ell}/2)}{r^3} + \frac{3}{2}\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^5}(\vec{r}-\vec{\ell}/2) - \frac{q(\vec{r}+\vec{\ell}/2)}{r^3} + \frac{3}{2}\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^5}(\vec{r}+\vec{\ell}/2)$$

$$= \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}$$

Момент сил, що діє на диполь в однорідному полі



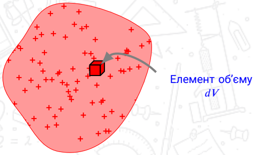
$$\vec{M} = \left[\vec{p} \times \vec{E}\right].$$

Диполь в електричному полі орієнтується за напрямком поля.

Густини електричного заряду

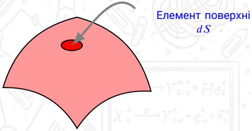
Виділимо елементарний об’єм dV. Якщо в цьому об’ємі міститься заряд dq, то об’ємною густиною заряду називається величина:

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$



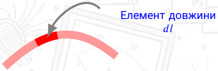
Якщо заряд розподілений у тонкому шарі. Виділимо елемент шару площею dS, що несе заряд dq. Поверхневою густиною заряду називається величина:

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$



Лінійна густина — заряд, що припадає на одиницю довжини нитки (зразка, поперечні розміри якого малі порівняно з поздовжніми розмірами):

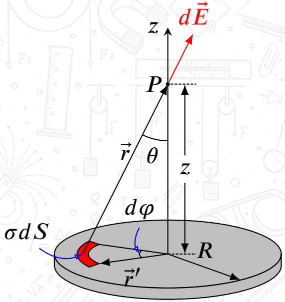
$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$



Задача

Поле рівномірно зарядженого диска на осі

Нехай є тонкий диск радіуса R, поверхнею якого рівномірно розподілено заряд Q. Знайти електричне поле на осі диска на відстані z від його площини.



Чи достатньо цього?

Чи достатньо закону Кулона і принципу суперпозиції для визначення напруженості електричного поля довільної системи зарядів?

Для простих випадків закон Кулона і принцип суперпозиції є ефективними інструментами для обчислення електричного поля. Проте, у випадках із складною геометрією розподілу зарядів, ці методи можуть бути недостатньо зручними для аналітичних розрахунків. Тому в теорії електричних полів були введені допоміжні концепції та методи, які спрощують обчислення і аналіз полів у складних системах, дозволяючи ефективніше вирішувати задачі, включаючи аналітичні розв'язки.

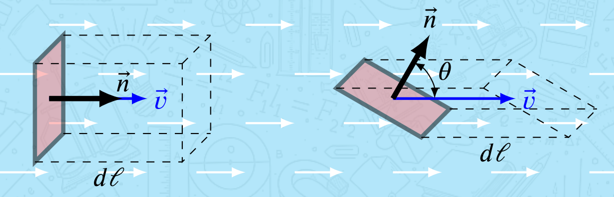
Наприклад, спробуйте обчислити за допомогою закону Кулона і принципу суперпозиції напруженість поля всередині рівномірно зарядженої кулі. Вийде так, що інтеграли буде практично неможливо вирішити аналітичним методом. Чисельно (на комп'ютері), це зробити можна, але чисельні результати не можна якісно проаналізувати. Далі вводяться концепції та методи, які дадуть змогу зробити це аналітично.

Концепції — абетка теорії поля

Потік вектора, потенціал, циркуляція вектора, теореми Гаусса та теорема про циркуляцію

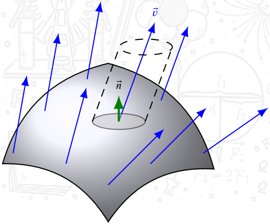
Потік вектора

Порахуємо об’єм рідини dV, що протікає за час dt через поверхню S



$$\frac{dV}{dt} = v_n S = \vec{v}\cdot\vec{n}\,S = \vec{v}\cdot\vec{S}, \qquad \vec{S} = \vec{n}S$$

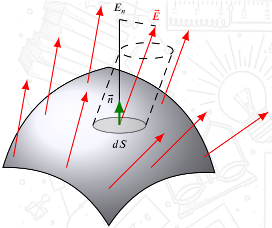
Об’єм рідини, що протікає за одиницю часу $dV/dt = \Phi$ через поверхню S — потік вектора швидкості!

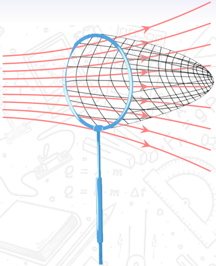


Для довільної (не обов’язково плоскої) поверхні потік через елементарну площадку $d\Phi = v_n dS = \vec{v}\cdot d\vec{S}$. А через всю поверхню S:

$$\Phi = \iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S}$$

Потік вектора $\vec{E}$





Потік вектора $\vec{E}$ через елементарну площадку dS:

$$d\Phi = E_n dS = \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Інтеграл

$$\Phi = \iint\limits_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_S E_n \, dS$$

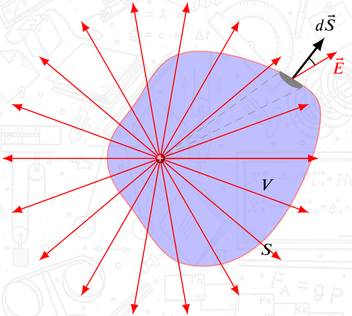
називають потоком вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$ через поверхню S, хоча з цим поняттям і не пов'язана жодна реальна течія.

Теорема Гаусса

Теорема Гаусса

Потік вектора напруженості електричного поля через довільно обрану замкнуту поверхню пропорційний електричному заряду, що знаходиться всередині цієї поверхні:

$$\oiint\limits_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi \iiint\limits_V \rho dV\,.$$

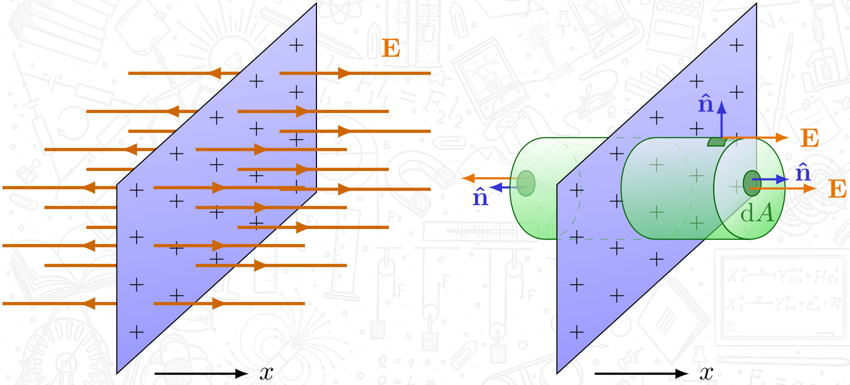


Для розрахунку електричних полів системи зарядів теореми Гаусса недостатньо, бо вона є скалярним співвідношенням, чого замало для визначення трьох невідомих — складових E_x, E_y, E_z вектора $\vec{E}$. Необхідна відома симетрія задачі, щоб остання звелася до розв'язання одного скалярного рівняння.

Приклади застосування теореми Гаусса

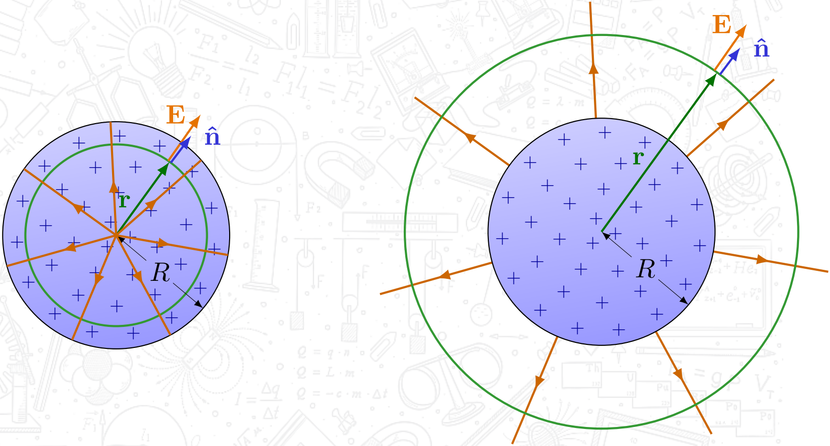
1. Поле рівномірно зарядженої площини.
2. Поле рівномірно різнойменно заряджених площини.
3. Поле рівномірно зарядженої нитки.
4. Поле рівномірно зарядженої сфери.
5. Поле рівномірно зарядженої кулі.
6. Поле в порожнині рівномірно зарядженої кулі.

Поле рівномірно зарядженої площини



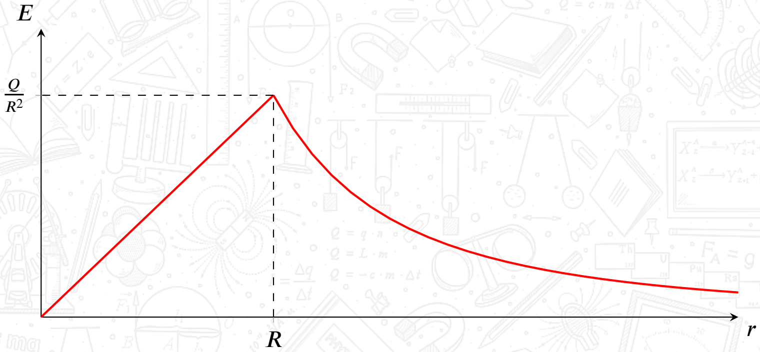
$$\boxed{E = 2\pi\sigma.}$$

Поле рівномірно зарядженої кулі



Поле рівномірно зарядженої кулі

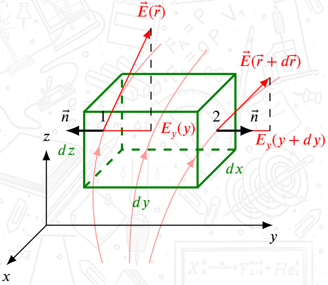
$$E = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3}\rho r = \dfrac{Q}{R^3}r, & r < R, \\ \dfrac{Q}{r^2}, & r > R. \end{cases}$$



Теорема Гаусса в диференціальній формі

Виведення

Виділимо в просторі нескінченно малий прямокутний паралелепіпед зі сторонами dx, dy, dz, що паралельні до координатних осей. На грані 1 зовнішня нормаль спрямована у від'ємний бік осі y. Тому потік вектора $\vec{E}$ через цю грань буде $-E_y(y)dxdz$. На протилежній грані 2, навпаки, напрямок зовнішньої нормалі збігається з позитивним напрямком осі y, і для потоку через цю грань слід писати $E_y(y+dy)dxdz$. Сума обох потоків буде:



$$\left[E_y(y+dy)-E_y(y)\right]dxdz=\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}dy\right)dxdz=\frac{\partial E_y}{\partial y}dV.$$

Аналогічно знайдуться потоки через дві пари інших граней. Повний потік через усю поверхню паралелепіпеда:

$$d\Phi=\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dV=\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dV.$$

Теорема Гаусса в диференціальній формі

Виведення

Аналогічно знайдуться потоки через дві пари інших граней. Повний потік через усю поверхню паралелепіпеда:

$$d\Phi = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dV = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, dV.$$

За теоремою Гаусса той самий потік дорівнює $4\pi\rho dV$. Прирівнюючи обидва вирази, отримаємо

$$\operatorname{div} \vec{E} = \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho.}$$

Величина $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ (або ще позначається як $\operatorname{div} \vec{E}$) називається дивергенцією вектора $\vec{E}$.

$$(\operatorname{div} \vec{E} =)\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Дивергенція вектора

Дивергенція вектора — скалярна величина!

Означення дивергенції

$$\operatorname{div}\vec{E} = \lim_{V\to 0}\left(\frac{1}{V}\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}\right)$$

Векторний оператор «набла»

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z},$$ декартова система.

Дивергенція вектора в різних системах

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial},$$ декартова система координат

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_\rho\right)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$ циліндрична система координат

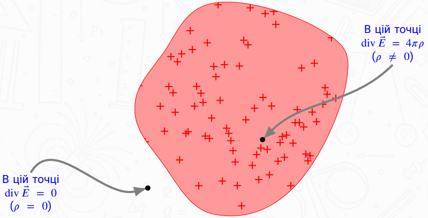
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 A_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta\sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi},$$ сферична система координат

Теорема Гаусса в диференціальній формі

Приклади

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho.}$$

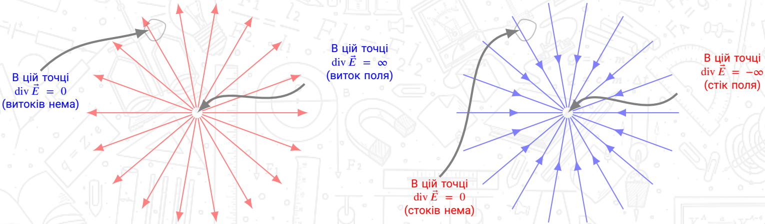
У диференціальній формі теорема Гаусса є локальною теоремою: дивергенція поля $\vec{E}$ у даній точці залежить тільки від густини електричного заряду ρ у тій самій точці і більше ні від чого.



Теорема Гаусса в диференціальній формі

Приклади

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho.$$



У тих точках поля, де дивергенція поля $\vec{E}$ більша нуля, ми маємо джерела поля (позитивні заряди), а в тих точках, де вона менше нуля, — стоки (негативні заряди). Лінії вектора $\vec{E}$ виходять із витоків поля, а в місцях стоків вони закінчуються.

Задачі

Задача 1

Знайти дивергенцію вектора напруженості поля точкового заряду

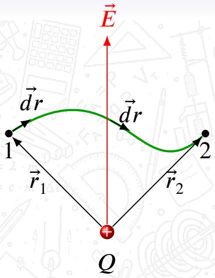
$$\vec{E} = \frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

в області $r > 0$ шляхом взяття часткових похідних. Спробуйте взяти дивергенцію в декартових та сферичних координатах.

Потенціал електричного поля

Робота сил поля під час переміщення заряду q з точки 1 у точку 2 дорівнює:

$$A = \int_{(1)}^{(2)} q\vec{E}(r)d\vec{r} = qQ\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$



Ця робота не залежить від траєкторії, що з'єднує початкову і кінцеву точки. Отже, поле точкового заряду — консервативне і можна ввести потенціальну U енергію заряду q у цьому полі: робота сил поля на шляху $1 \to 2$ дорівнює зменшенню потенціальної енергії заряду q:

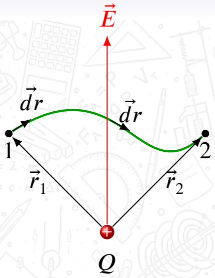
$$A = U_1 - U_2 = -\Delta U,$$

де $U = \frac{qQ}{r} = q\left(\frac{Q}{r}\right) = q\varphi$, а φ — називається потенціалом електричного поля.

Потенціал електричного поля

Робота сил поля під час переміщення заряду q з точки 1 у точку 2 дорівнює:

$$A = \int_{(1)}^{(2)} q\vec{E}(r)d\vec{r} = qQ\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

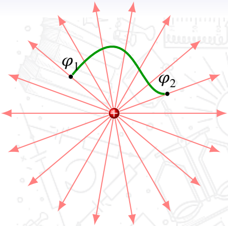


Робота сил електростатичного поля під час переміщення заряду q довільним шляхом із початкової точки 1 у кінцеву точку 2 визначається через різницю потенціалів $\Delta\varphi$:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = -q\Delta\varphi,$$

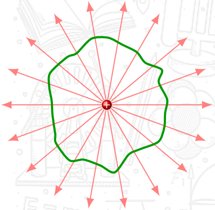
Зазвичай сама величина потенціалу визначається з точністю до деякої адитивної константи, як і сама потенціальна енергія. Можна вибрати якусь реперну точку $\vec{r}_0$, в якій покласти потенціал $\varphi(\vec{r}_0) = 0$. Зазвичай, таку точку вибирають на нескінченності.

Циркуляція вектора $\vec{E}$



Різницю потенціалів поля між точками 1 і 2 можна виразити через напруженість:

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \varphi_1 - \varphi_2 = -\Delta\varphi.$$



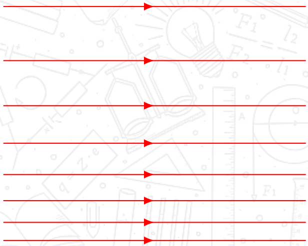
Оскільки робота поля над зарядом не залежить від форми траєкторії — то для довільної замкненої траєкторії L маємо

$$\boxed{\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0}$$

Цей інтеграл називається циркуляцією вектора $\vec{E}$ по контуру L, а рівність називається теоремою про циркуляцію в інтегральній формі.

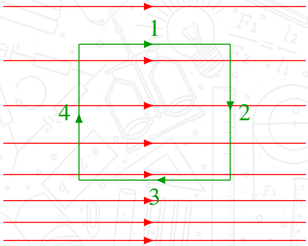
Приклади

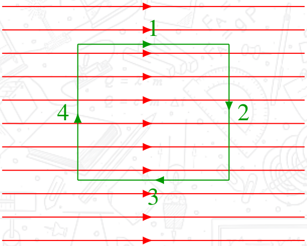
Які конфігурації електростатичного поля можливі?



Приклади

Які конфігурації електростатичного поля можливі?





$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{r} =$$

$$E_1\ell + \cancelto{0}{\int_2 \vec{E}\cdot d\vec{r}} - E_3\ell + \cancelto{0}{\int_4 \vec{E}\cdot \vec{r}} = (E_1 - E_3)\ell \neq 0,$$

$$E_1 < E_3$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{r} =$$

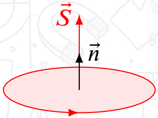
$$E_1\ell + \cancelto{0}{\int_2 \vec{E}\cdot d\vec{r}} - E_3\ell + \cancelto{0}{\int_4 \vec{E}\cdot \vec{r}} = (E_1 - E_3) = 0,$$

$$E_1 = E_3$$

Теорема про циркуляцію в диференціальній формі

Орієнтована площадка

Нехай замкнутий контур $L(S)$ охоплює малу поверхню площею S. Вектор S спрямований за нормаллю до розглянутої площадки і за величиною дорівнює площі цієї площадки: $\vec{S} = \vec{n}S$, $|\vec{n}| = 1$. Напрямок вектора $\vec{S}$ задається позитивним напрямком обходу контуру L і визначається правилом гвинта



Коли контур стягується в точку: $\lim\limits_{S\to 0}\left(\frac{1}{S}\oint\limits_S \vec{E}\cdot d\vec{r}\right) = (\mathrm{rot}\,\vec{E})_n$ — ця межа являє собою проекцію вектора $\mathrm{rot}\,\vec{E}$ на напрямок нормалі $\vec{n}$. З огляду на довільність вибору контуру робимо висновок, що:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0.}$$

Ротор вектора

Ротор вектора — векторна величина!

Означення ротора

$$\lim_{S\to 0}\left(\frac{1}{S}\oint\limits_S \vec{E}\cdot d\vec{r}\right) = (\operatorname{rot}\vec{E})_n$$

Ротор вектора в різних системах

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

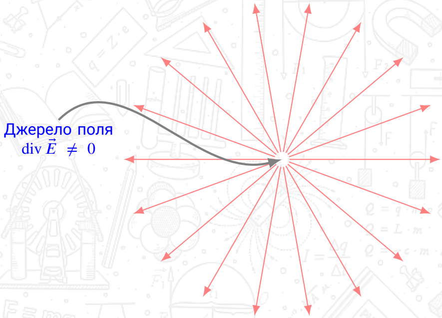
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\vec{k}$$

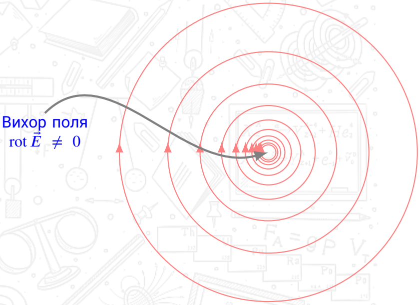
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\varphi\sin\theta\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right)\right)\vec{e}_\theta +$$
$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi$$

Потенціальні та вихрові поля

Якщо лінії поля або десь починаються і десь закінчуються — тобто мають витоки та стоки — такі поля називаються потенціальними

Якщо лінії поля є замкненими — тобто НЕ мають витоків та стоків — такі поля називаються вихровими





Зв’язок напруженості та потенціалу

Силова характеристика електростатичного поля — напруженість

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Енергетична характеристика електростатичного поля — потенціал

$$\varphi = \frac{U}{q}$$

Використовуючи формулу

$$-d\varphi = \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

можна встановити зв’язок між векторною та скалярною характеристиками поля у вигляді:

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z\right).$$

Зв’язок напруженості та потенціалу

Приклади

Використовуючи формулу

$$-d\varphi = \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

можна встановити зв’язок між векторною та скалярною характеристиками поля у вигляді:

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z\right).$$

Потенціал поля точкового заряду $\varphi = \frac{Q}{r}$. Використовуючи формулу зв’язку напруженості та потенціалу, знайдіть напруженість поля точкового заряду.

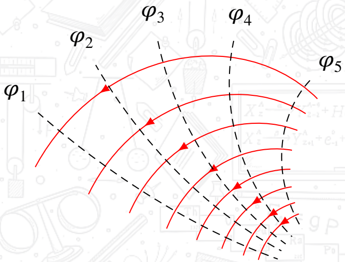
Еквіпотенціальні поверхні

Еквіпотенціальної поверхні — поверхні, у всіх точках якої потенціал φ має одне й те саме значення.

$$\vec{E} \perp d\vec{r} \Rightarrow -d\varphi = \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \varphi = \text{const}.$$

Вектор $\vec{E}$ спрямований у кожній точці по нормалі до еквіпотенціальної поверхні в бік зменшення потенціалу φ.

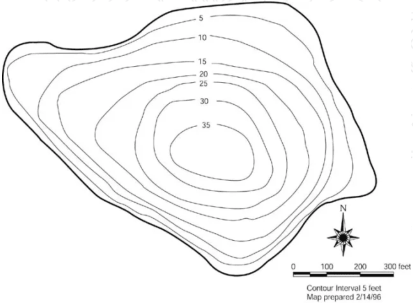
$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_4 < \varphi_5$$



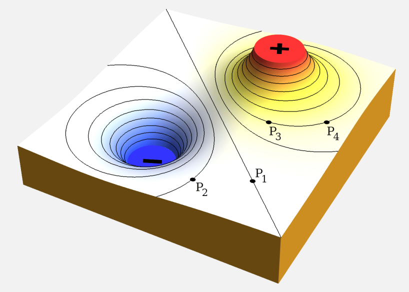
Еквіпотенціальні поверхні

Катра електричного ландшафту

Карта висот на ландшафті.

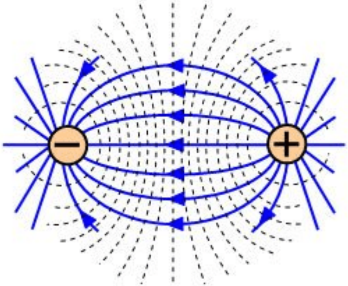


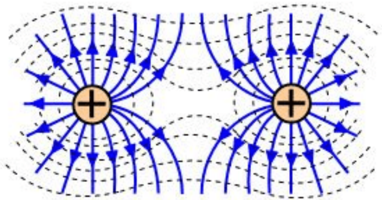
Еквіпотенціальні поверхні — карта висот в електростатичному полі!



Еквіпотенціальні поверхні

Катра електричного ландшафту





Побудова еквіпотенціальних поверхонь в Python

Властивості потенціалу

1. Потенціал електричного поля є скалярною величиною, тобто він визначається одним числом в кожній точці простору.
2. Потенціал φ як і потенційна енергія U, визначається з точністю до довільної константи.

Значення цієї константи не відіграє ролі, оскільки фізичні явища залежать тільки від напруженостей електричних полів. За нульовий потенціал зручно приймати потенціал нескінченно віддаленої точки простору. На практиці за нульовий потенціал зазвичай приймають потенціал Землі.

3. Потенціал підпорядковується принципу суперпозиції. Тобто, якщо електричне поле створюється системою зарядів, то загальний потенціал у точці P є сумою потенціалів, створених кожним із цих зарядів.

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i.$$

4. Потенціал електричного поля є неперервною функцією простору.

Це означає, що в будь-якій точці простору (за винятком місць розташування точкових зарядів) потенціал змінюється плавно і не має розривів. фізичне доведення випливає із зв'язку потенціалу та напруженості.

Потенціал поля точкового диполя

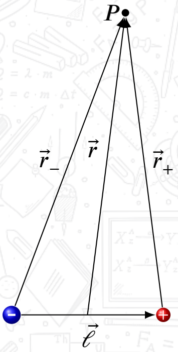
Потенціал поля точкового диполя можна знайти за допомогою принципу суперпозиції та з урахуванням нерівності $\ell \ll r$:

$$\varphi = \frac{(-q)}{r_-} + \frac{(+q)}{r_+}, \quad \begin{cases} \vec{r}_- = \vec{r} + \vec{\ell}/2 \\ \vec{r}_+ = \vec{r} - \vec{\ell}/2 \end{cases}.$$

$$\boxed{\varphi = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}.}$$

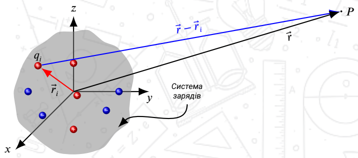
Таким чином, потенціал поля точкового диполя зменшується з відстанню за законом

$$\varphi \sim 1/r^2.$$



Потенціал системи зарядів на далеких відстанях

Розглянемо систему зарядів $\{q_i\}$, що займає певну скінченну область у просторі.



Потенціал поля в точці спостереження P дорівнює сумі потенціалів, створюваних усіма зарядами:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|},$$

В першому наближенні:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \approx \frac{1}{r}\left(1+\frac{\vec{r}\,\vec{r}_i}{r^2}\right).$$

$$\varphi(\vec{r}) \approx \sum_i \frac{q_i}{r}\left(1+\frac{\vec{r}\,\vec{r}_i}{r^2}\right) = \frac{q}{r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^2}.$$

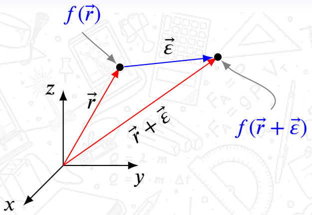
Потенціал системи зарядів у першому наближенні:

- Складається з внеску монополя та диполя.
- Якщо $q \neq 0$, домінує монополь.
- Якщо $q = 0$, суттєвим стає диполь, особливо при несиметричному розподілі зарядів.

Математичні відомості

Для скалярної функції однієї змінної справедливий наближений вираз:

$$f(x+\varepsilon) = f(x) + \frac{df}{dx}\varepsilon, \quad \varepsilon \to 0.$$



Це співвідношення легко узагальнюється для випадку скалярної функції кількох просторових змінних:

$$f(x+\varepsilon_x, y+\varepsilon_y, z+\varepsilon_z) =$$
$$f(x,y,z) + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\varepsilon_x + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\varepsilon_y + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\varepsilon_z, \quad \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_x \to 0.$$

Для скалярної функції $f(\vec{r})$:

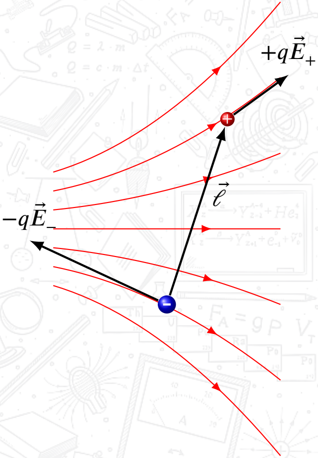
$$\boxed{f(\vec{r}+\vec{\varepsilon}) = f(\vec{r}) + \vec{\varepsilon}\cdot\vec{\nabla} f(\vec{r}).}$$

Для векторної функції $\vec{f}(\vec{r})$:

$$\boxed{\vec{f}(\vec{r}+\vec{\varepsilon}) = \vec{f}(\vec{r}) + (\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\nabla})\vec{f}(\vec{r}).}$$

Сила, що діє на диполь в неоднорідному полі

Якщо диполь перебуває в неоднорідному полі — виникає результуюча сила, що діє на диполь як ціле, що втягуватиме диполь в область сильного поля.



$$\vec{F} = (+q)\vec{E}_+ + (-q)\vec{E}_- = q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = q\Delta\vec{E}.$$

Для точкового диполя різницю $\Delta\vec{E}$ можна наближено замінити диференціалом

$$\Delta\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}+\vec{\ell}) - \vec{E}(\vec{r}) = \ell_x\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} + \ell_y\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} + \ell_z\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}.$$

$$\boxed{\vec{F} = p_x\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} + p_y\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} + p_z\frac{\partial\vec{E}}{\partial z} = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}.}$$

Енергія жорсткого диполя в електричному полі

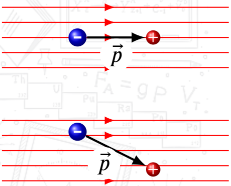
Енергія точкового заряду q у зовнішньому полі дорівнює $U = q\varphi$, де φ — потенціал поля в точці знаходження заряду q. Диполь — це система з двох зарядів, тому його енергія в зовнішньому полі

$$U = q\varphi_+ + (-q)\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-) = q\vec{\ell} \cdot \vec{\nabla}\varphi.$$

Оскільки $-\vec{\nabla}\varphi = \vec{E}$, а $\vec{p} = q\vec{\ell}$:

$$\boxed{U = -\vec{p} \cdot \vec{E}.}$$

Мінімальну енергію диполь має в положенні $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{E}$ (положення стійкої рівноваги). У разі відхилення з цього положення виникає момент зовнішніх сил, що повертає диполь до положення рівноваги.



Енергія пружного диполя в електричному полі

Під дією електричного поля плече диполя збільшується на таку величину ℓ, що сила з боку поля врівноважується силою пружності $k\ell = qE$. Звідси знаходимо, що дипольний момент $p = q\ell$ залежить від прикладеного поля за законом:

$$p = \frac{q^2 E}{k} = \alpha E$$

Коефіцієнт α називається поляризованістю молекули.

Потенціальна енергія деформації дорівнює $U = \frac{k\ell^2}{2}$. Оскільки $k = \frac{qE}{\ell}$, одержимо $U = \frac{k\ell^2}{2} = \frac{q\ell E}{2} = \frac{pE}{2}$. Тут вектор дипольного моменту, індукований зовнішнім полем, паралельний електричному полю $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{E}$. Тому останню формулу можна переписати у векторній формі:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\,\vec{p}\cdot\vec{E}.}$$

Рівняння Пуассона та Лапласа

Оскільки $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$, то звідси випливає рівняння Пуассона для потенціалу поля:

$$\boxed{\nabla^2\varphi = -4\pi\rho.}$$

Тут введено оператор Лапласа (лапласіан) $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

У області простору, вільній від зарядів ($\rho = 0$), рівняння Пуассона зводиться до рівняння Лапласа

$$\boxed{\nabla^2\varphi = 0.}$$

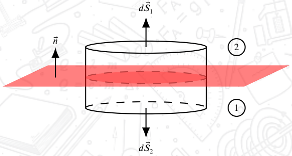
Загальна електростатична задача зводиться до знаходження розв'язку рівняння Пуассона (або Лапласа).

Ця задача має єдиний розв'язок. Якщо розв'язок не один, то буде не один електричний «ландшафт», отже, у кожній точці поле $\vec{E}$, узагалі кажучи, неоднозначне — що є фізичного абсурдним. Це твердження називають теоремою єдиності.

Граничні умови

На границі розділу двох середовищ електричне поле може змінюватися стрибком, але цей стрибок залишається скінченним. Знайдемо величину цього стрибка для нормальної та тангенціальної компонент.

Застосуємо теорему Гаусса до нескінченно малого циліндра, що охоплює частину межі розділу двох середовищ. Вважаючи $d\vec{S}_1 = -d\vec{S}_2$, $q = \sigma dS$, $d\vec{S}_1 = \vec{n}\, dS$, маємо



$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi\sigma \;\Rightarrow\; \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = 4\pi\sigma dS$$

Звідси випливає перша гранична умова:

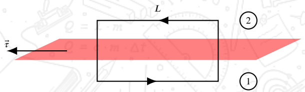
$$\boxed{E_{1n} - E_{2n} = 4\pi\sigma.}$$

Нормальна складова вектора $\vec{E}$ зазнає стрибка при переході через заряджену границю розділу. Однак якщо заряди на межі розділу відсутні ($\sigma = 0$), то $E_{1n} = E_{2n}$ і стрибка не буде.

Граничні умови

На границі розділу двох середовищ електричне поле може змінюватися стрибком, але цей стрибок залишається скінченним. Знайдемо величину цього стрибка для нормальної та тангенціальної компонент.

Застосуємо теорему про циркуляцію до нескінченно малого прямокутного контуру L, що проходить на нескінченно малій відстані над і під поверхнею розділу середовищ. Вважаючи, що $d\vec{r}_1 = -d\vec{r}_2$, маємо



$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{E}_1 d\vec{r}_1 + \vec{E}_2 d\vec{r}_2 = 0$$

Звідси випливає друга гранична умова:

$$\boxed{E_{1\tau} = E_{2\tau}.}$$

Тангенціальна складова $\vec{E}$ виявляється однаковою по обидва боки границі розділу (не зазнає стрибка).

Задачі

Задача

Використовуючи теорему Гаусса в диференціальній формі знайдіть напруженість електричного поля всередині та зовні однорідно зарядженої кулі. Заряд кулі дорівнює Q, радіус кулі R.

Підсумки

Означення

Напруженість поля	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$
Потенціал поля	$\varphi = \frac{U}{q}$
Потік поля	$\iint\limits_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$
Циркуляція поля	$\oint\limits_L \vec{E} \cdot d\vec{r}$

Підсумки

Основні рівняння та теореми

Теорема Гаусса в інтегральній формі	$\oiint\limits_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \iiint\limits_V \rho dV$
Теорема про циркуляцію вектора $\vec{E}$	$\oint\limits_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$
Теорема Гаусса в диференціальній формі	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho.$
Вихор електростатичного поля	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$
Зв'язок напруженості та потенціалу	$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$
Рівняння Пуассона	$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$
Рівняння Лапласа	$\nabla^2\varphi = 0$
Граничні умови	$E_{1n} - E_{2n} = 4\pi\sigma$ $E_{1\tau} = E_{2\tau}$

Підсумки

Поля та сили

Поле точкового заряду	$\vec{E} = \frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$
Потенціал поля точкового заряду	$\varphi = \frac{q}{r}$
Сила, що діє на точковий заряд	$\vec{F} = q\vec{E}$
Енергія точкового заряду	$U = q\varphi$
Поле, що створюється диполем	$\vec{E} = \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}$
Потенціал поля диполя	$\varphi = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$
Момент, що діє на диполь	$\vec{M} = \left[\vec{p}\times\vec{E}\right]$
Сила, що діє на диполь	$\vec{F} = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}.$
Енергія жорсткого диполя в електричному полі	$U = -\vec{p}\cdot\vec{E}$
Енергія пружного диполя в електричному полі	$U = \frac{1}{2}\,\vec{p}\cdot\vec{E}$