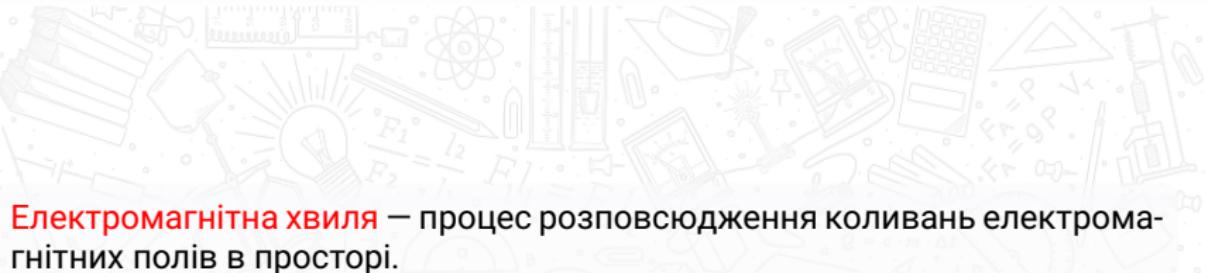


Електромагнітні хвилі

Лекції з електрики та магнетизму

Пономаренко С. М.

Електромагнітна хвиля

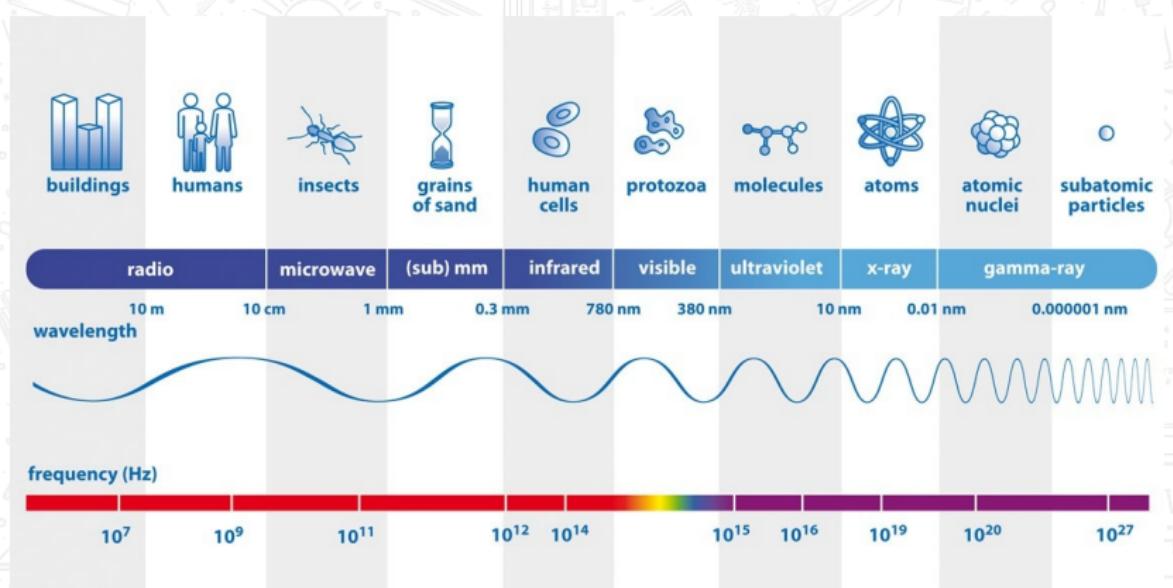


Електромагнітна хвиля – процес розповсюдження коливань електромагнітних полів в просторі.

Прикладами електромагнітних хвиль є світло, радіохвилі, рентгенівські промені, гамма-промені. Загальні властивості електромагнітних хвиль вивчаються в розділі фізики, що називається класичною електродинамікою, специфічні – в інших розділах фізики, таких як радіофізика, оптика, спектроскопія, атомна фізика, ядерна фізика тощо.

Спектр електромагнітних хвиль

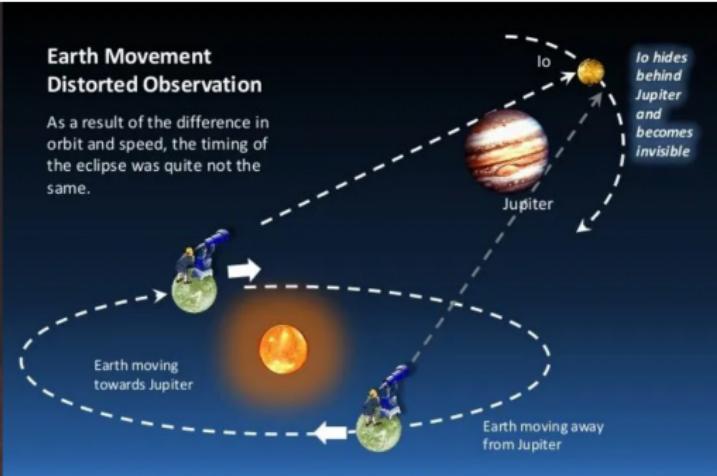
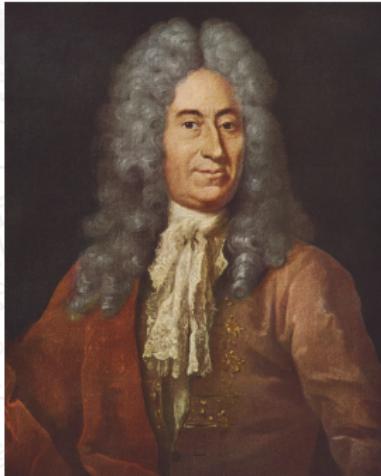
Електромагнітні хвилі класифікуються за довжиною хвилі λ або пов'язаною з нею частотою хвилі. **Спектром електромагнітних хвиль називається смуга частот електромагнітних хвиль, що існують у природі.**



Світло (у вузькому сенсі) – електромагнітні хвилі, що сприймаються людським оком. До таких хвиль належать електромагнітні хвилі в інтервалі частот $7.5 \cdot 10^{14} - 4 \cdot 10^{14}$ Гц, тобто із довжиною хвилі від 390 до 750 нм.

Визначення швидкості світла

Спостереження Ремера



Оле Крістенсен Ремер (дан. Ole Christensen Rømer 1644 – 1710, Копенгаген) – датський астроном, який першим вимірював швидкість світла (1676).

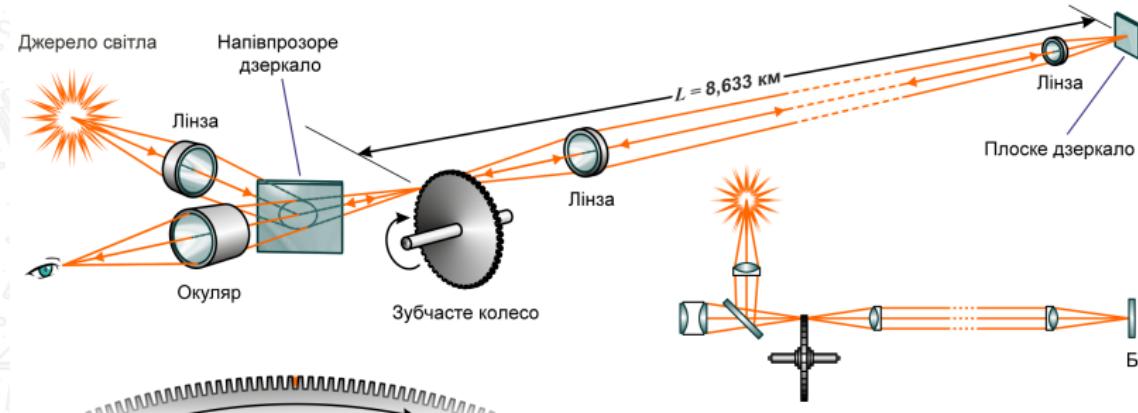
Вивчаючи затемнення Іо, одного з супутників Юпітера, Ремер виявив, що час між затемненнями змінюється залежно від відстані Землі від Юпітера. Він зробив висновок, що ці зміни часу пов'язані з часом, який потрібен світлу для долання додаткової відстані, коли Земля віддаляється від Юпітера. Ремер оцінив швидкість світла приблизно в 227 000 км/с, що було першим кількісним вимірюванням цієї величини.

Визначення швидкості світла

Дослід Фізо



У 1849 році французький фізик Арман Фізо розробив метод, який використовував зубчасте колесо в якості затвора. Світло від джерела проходило через зубчасте колесо, що оберталось і, відбившись від дзеркала, поверталося знову до зубчастого колеса. Знаючи частоту обертання дзеркала і відстань, що проходить світло, Фізо отримав значення близько 313 000 км/с.



$$c = \frac{2L}{t} \quad t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{2\pi}{n\omega} \quad c = \frac{Ln\omega}{\pi}$$

n — число зубців колеса, $n = 720$
 ω — кутова швидкість колеса, $\nu = 25,2 \text{ c}^{-1}$

Електродинамічна стала в рівняннях Максвелла

Ще до початку роботи Максвелла над проблемами електромагнетизму, фізикам був відомий експериментальний факт, що якщо виразити величину одного і того ж заряду за допомогою двох різних систем одиниць, а потім знайти відношення отриманих значень, то це відношення – **електродинамічна стала** c – матиме розмірність швидкості. Однак більшість учених вважали цей факт незрозумілим фізичним курйозом.

Вебером і Кольраушем було виміряно значення цієї константи, яке виявилося рівним 310 740 км/с.

Максвелл також провів експерименти з визначення величини цієї константи. Ідея досліду полягала в порівнянні сили електростатичного притягування, що виникає між двома зарядженими дисками із силою відштовхування, що виникає між котушками зі струмом, розміщеними поблизу дисків. Тобто, ніяких вимірювань швидкості світла не проводилось. Максвелл отримав значення значення $c = 2.88 \cdot 10^{10}$ см/с.

Про історію вимірювання швидкості світла, яку можна назвати «малою історією фізики», і розповідається в книзі Філонович С. Р. Самая большая скорость. Т. 27 / за ред. В. А. Фабрикант. Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. (Библиотечка «вант»).

Хвильові рівняння

Виведення

Розглянемо електромагнітне поле в однорідній ділянці простору, де немає вільних зарядів і струмів провідності.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{D} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \end{cases}$$

Врахуємо також матеріальні рівняння $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

До другого рівняння застосуємо операцію rot :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B}.$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}.$$

$$-\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Приходимо до рівняння для електричного поля:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \text{де } v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}.$$

Хвильові рівняння

Виведення

Розглянемо електромагнітне поле в однорідній ділянці простору, де немає вільних зарядів і струмів провідності.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{D} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \end{cases}$$

Врахуємо також матеріальні рівняння $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

До четвертого рівняння застосуємо операцію rot :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = +\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{D}.$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H}.$$

$$\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{D} = -\frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Рівняння для магнітного поля:

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad \text{де } v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}.$$

Хвильові рівняння

Рівняння вигляду:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \end{cases}$$

називаються хвильовими рівняннями. Вони описують процес поширення величин \vec{E} та \vec{H} у просторі та часі зі швидкістю:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}.$$

Такий процес називається **електромагнітною хвилею**. У вакуумі $\epsilon = \mu = 1$, а тому швидкість поширення хвилі буде $v = c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с. В середовищі для якого $\epsilon, \mu > 1$, а тому швидкість поширення буде меншою ніж у вакуумі $v < c$ на величину:

$$n = \sqrt{\epsilon \mu},$$

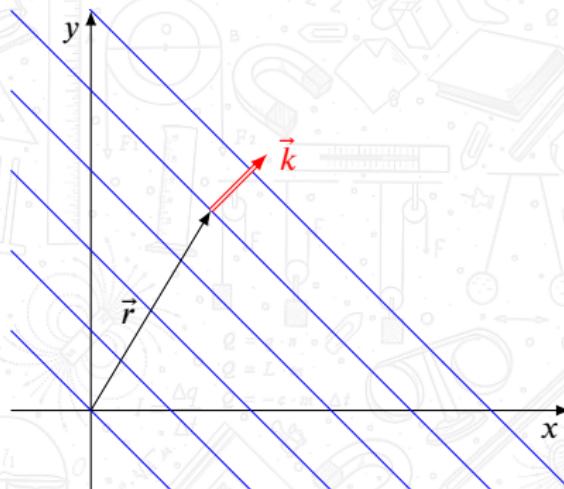
яка називається **абсолютним показником заломлення середовища**.

Плоскі електромагнітні хвилі

Розв'язком хвильових рівнянь, що описують плоскі хвилі є функції вигляду:

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad (1)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad (2)$$

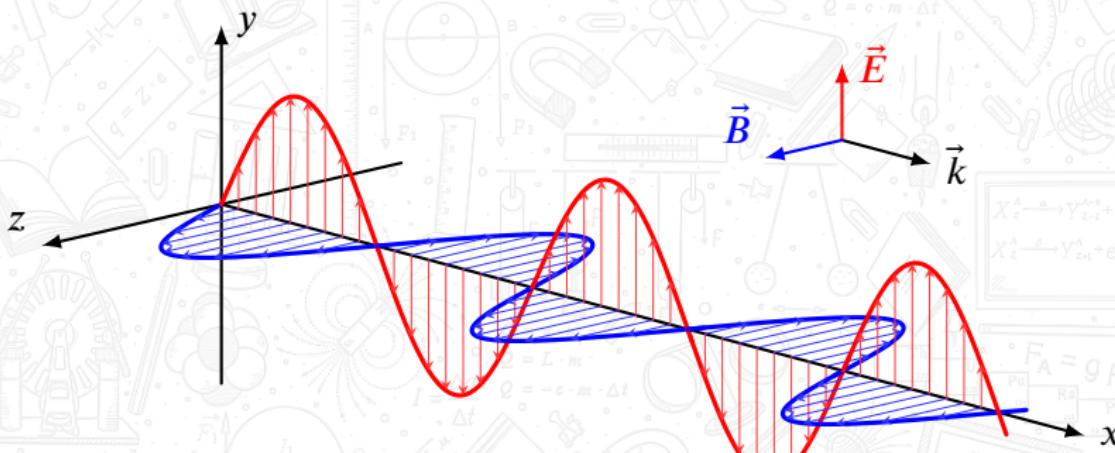


Плоскі електромагнітні хвилі

Розв'язком хвильових рівнянь, що описують плоскі хвилі є функції вигляду:

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad (1)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad (2)$$



Плоскі електромагнітні хвилі

Розв'язком хвильових рівнянь, що описують плоскі хвилі є функції вигляду:

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad (1)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad (2)$$

Підставимо (1) та (2) в рівняння Максвелла. Диференціальні операції замінюються на:

$$\vec{\nabla} \rightarrow -i\vec{k}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c} \vec{B}, \quad -\vec{k} \times \vec{H} = \frac{\omega}{c} \epsilon \vec{E}$$

$$k = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c}\omega = \frac{n}{c}\omega = \frac{\omega}{v}, \quad nE_m = B_m, \quad \sqrt{\epsilon}E_m = \sqrt{\mu}H_m$$

Плоскі електромагнітні хвилі

Енергія хвилі та вектор Пойнтінга

Розв'язком хвильових рівнянь, що описують плоскі хвилі є функції вигляду:

$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c} \vec{B}, \quad -\vec{k} \times \vec{H} = \frac{\omega}{c} \epsilon \vec{E}$$

$$k = \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{c} \omega = \frac{n}{c} \omega = \frac{\omega}{v}, \quad nE_m = B_m, \quad \sqrt{\epsilon} E_m = \sqrt{\mu} H_m$$

Густина енергії (амплітуда)

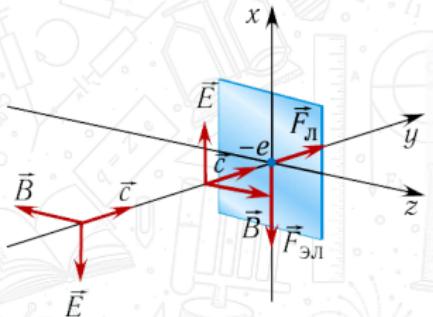
$$w_m = \frac{\epsilon E_m^2}{8\pi} + \frac{\mu H_m^2}{8\pi}, \quad \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_m = H_m, \quad w_m = \frac{\epsilon E_m^2}{4\pi} = \frac{\mu H_m^2}{4\pi}.$$

Вектор вектор Пойнтінга $\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]$:

$$\vec{\Pi} = \frac{c^2}{4\pi\epsilon\omega} \vec{H} \times \vec{k} \times \vec{H} = \frac{c^2}{4\pi\epsilon\omega} H^2 \vec{k} = \frac{c}{\omega} \frac{1}{\epsilon\mu} \left(\frac{\mu H^2}{4\pi} \right) c \vec{k} = w \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\vec{k}}{k} = w \vec{v}.$$

Тиск світла

Максвел теоретично показав, що електромагнітні хвилі, відбиваючись чи поглинаючись тілами, на які вонипадають, чинять на них тиск. Цей тиск виникає внаслідок впливу магнітного поля хвилі на електричні струми, що збуджуються електричним полем тієї самої хвилі.



Електричне поле хвилі збуджує електричний струм густинною $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ($\vec{F} = e \vec{E}$). Внаслідок цього на об'єму середовища діє сила Ампера $d\vec{F} = \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{B}] dV$, спрямована убік поширення хвилі. Ця сила та викликає тиск електромагнітної хвилі.

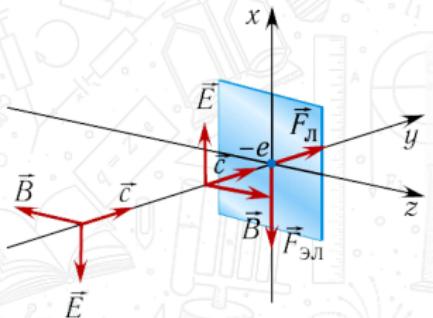
У випадку поглинання вся енергія, яка падає за секунду на поверхню $wvdS$ тіла, перетворюється на теплову $jEdV$:

$$dF = \frac{1}{c} j \frac{c}{v} E = \frac{1}{v} j E = \frac{1}{v} wvdS = wdS,$$

звідки тиск $p = \frac{dF}{dS} = w$

Тиск світла

Максвел теоретично показав, що електромагнітні хвилі, відбиваючись чи поглинаючись тілами, на які вони падають, чинять на них тиск. Цей тиск виникає внаслідок впливу магнітного поля хвилі на електричні струми, що збуджуються електричним полем тієї самої хвилі.



Електричне поле хвилі збуджує електричний струм густинною $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ($\vec{F} = e \vec{E}$). Внаслідок цього на об'єму середовища діє сила Ампера $d\vec{F} = \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{B}] dV$, спрямована убік поширення хвилі. Ця сила та викликає тиск електромагнітної хвилі.

У випадку часткового відбивання, тиск дорівнює

$$p = w(1 + \rho),$$

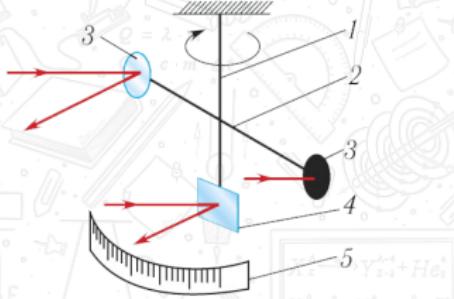
де $\rho = 0 \dots 1$ – коефіцієнт відбивання.

Тиск світла

Дослід Лебедєва

Петро Миколайович Лебедєв в 1899 р. вперше вимірював світловий тиск.

Він підвісив на тонкій нитці коромисло з парою крилець на кінцях: поверхня в одного з них була зачорненою, забезпечуючи майже повне поглинання, а в іншого – дзеркальною, забезпечуючи повне відбивання. Підвіс з крильцями утворив чутливі крутильні терези, що поміщаються в посудину, повітря в якому було відкачано.



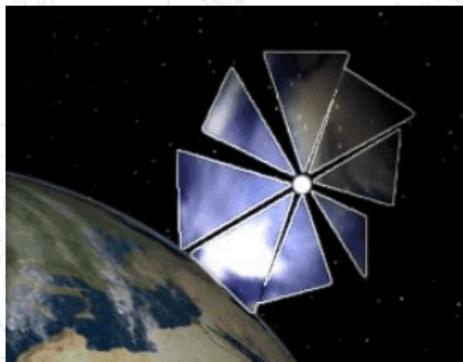
Світло практично повністю відбивалося від дзеркальної поверхні та його тиск на дзеркальне крильце було вдвічі більше, ніж на зачорнене. Внаслідок цього створювався момент сил, що повертає коромисло. Вимірюючи кут повороту коромисла, можна було виміряти силу, що діяла на крильця, а отже, визначити світловий тиск.

Тиск світла

Сонячні вітрила

Сонячне вітрило – пристрій, що використовує тиск сонячного світла чи лазера на дзеркальну поверхню для приведення в рух космічного апарату.

Тиск сонячного світла надзвичайно малий (на Земній орбіті – близько $5 \cdot 10^{-6}$ Па) і зменшується пропорційно квадрату відстані від Сонця. В ролі вітрила використовувались сонячні батареї або радіатори системи терморегуляції.

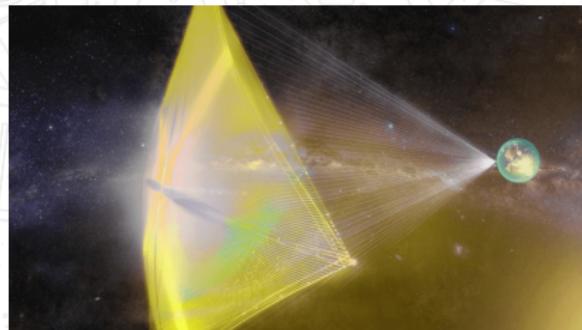


https://youtu.be/U0_wjnmlmRg

Тиск світла

Сонячні вітрила

Вчені з Австралійського національного університету запропонували спосіб запуску для космічного вітрильника до найближчої зірки Альфи Центавра в рамках проекту Breakthrough Starshot. За їх задумом, надати необхідну швидкість апарату допоможе фотонний двигун – система, що сумарно включає до 100 мільйонів лазерів.

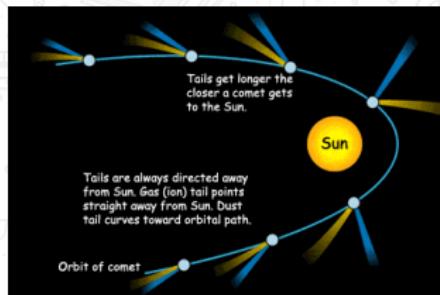
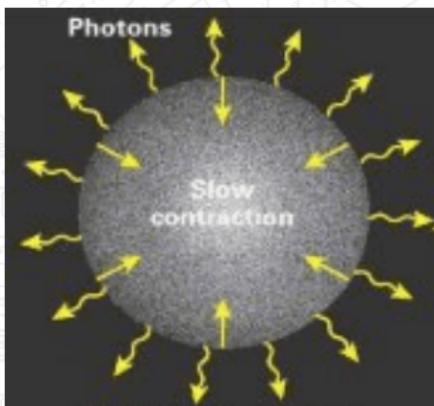


Подорож до Альфи Центавра за допомогою звичайних способів переміщення триватиме близько 100 років. Дістатись до Альфи Центавра за допомогою космічного вітрильника на фотонному двигуні передбачається за 20 років зі швидкістю $0.2c$.

Тиск світла

Сонячні вітрила

Тиск світла відіграє велику роль в астрономічних та атомних явищах. В астрофізиці тиск світла поряд із тиском газу забезпечує стабільність зірок, протидіючи силам гравітації. Дія тиску світла пояснюються деякі форми кометних хвостів. До атомних ефектів відноситься так звана світлова віддача, яку відчуває збуджений атом під час випромінювання фотона.



Товстий білий хвіст комети Гейла-Боппа складається з частинок пилу, і утворюється завдяки тиску світла. Другий, тонкий і блакитний складається з іонів і створюється сонячним вітром.

Імпульс електромагнітного поля

Поле має енергію; так само в одиниці об'єму воно має якийсь імпульс. Оскільки електромагнітна хвиля чинить тиск на речовину, остання набуває певного імпульсу. Але в замкнuttій системі, що складається з речовини та електромагнітної хвилі, виникло б порушення закону збереження імпульсу, якби імпульс мала лише речовина.

Для електромагнітної хвилі у вакуумі вектор Пойнтінга.

$$\Pi = w c \Rightarrow \frac{\Pi}{c^2} = \frac{w}{c}.$$

З релятивістської механіки $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$. Для частинки з нульовою масою (наприклад, фотона) $m = 0$, зв'язок енергії та імпульсу:

$$E = pc \Rightarrow p = \frac{E}{c}.$$

Порівнюючи дві останні формули, отримаємо вираз для густини імпульсу:

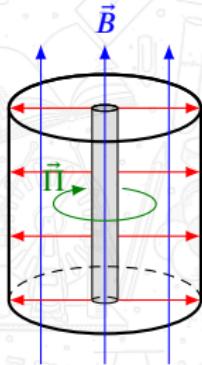
$$\vec{g} = \frac{\vec{\Pi}}{c^2}, \quad [g] = \frac{\text{дин} \cdot \text{с}}{\text{см}^3} \text{ (СГС)}$$

Момент імпульсу поля

Задача

Заряджений циліндричний конденсатор вміщений в зовнішнє однорідне магнітне поле з індукцією \vec{B} , що напрямлене вздовж його осі. Конденсатор має змогу вільно обертатись навколо своєї осі. Заряд конденсатора q , радіус зовнішньої обкладки R , радіусом внутрішньої можна знехтувати. Маса конденсатора m . Знайдіть вектор моменту імпульсу електромагнітного поля конденсатора. Знайдіть кутову швидкість, з якою буде обертатись конденсатор, при вимикання магнітного поля.

Густина моменту імпульсу поля:



$$\mathcal{L} = \vec{r} \times \frac{\vec{P}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c} \vec{r} \times \vec{E} \times \vec{B} = -\frac{1}{4\pi c} \vec{B} (\vec{r} \cdot \vec{E})$$

$$\text{Електричне поле : } E = \frac{2\lambda}{r} = \frac{2q}{rh}, \quad h - \text{висота циліндра}$$

Модуль вектора імпульсу \vec{L} :

$$L = \iiint_V \mathcal{L} dV = \frac{1}{4\pi c} B \frac{2q}{h} \pi R^2 h = \frac{qBR^2}{2c}, \quad \vec{L} = -\frac{qR^2}{2c} \vec{B}$$

При вимиканні магнітного поля момент імпульсу поля перейде в обертання самого циліндра $\vec{L} = mR^2\vec{\omega}$, а тому кутова швидкість: $\vec{\omega} = -\frac{q}{2mc} \vec{B}$.

Поляризація хвиль

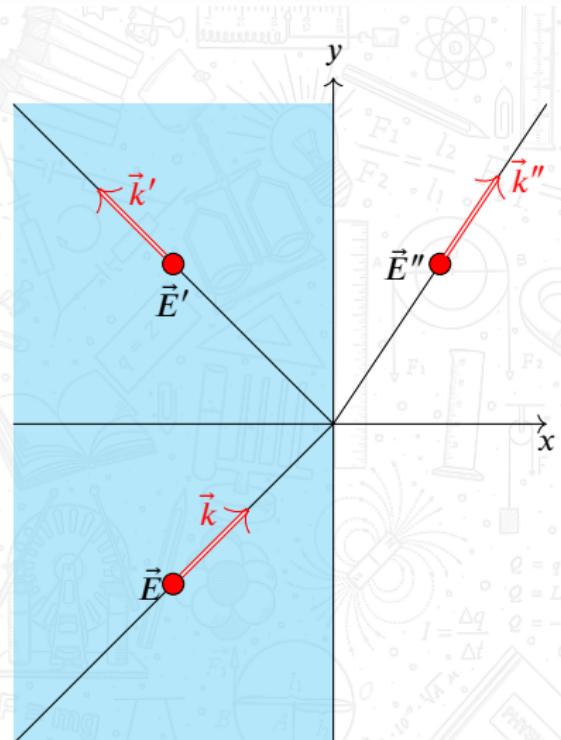
Поляризація хвиль – характеристика поперечних хвиль, що описує поведінку вектора величини, яка коливається, у площині, перпендикулярній напрямку поширення хвилі.

Для *s*-поляризації напруженість електричного поля електромагнітної хвилі перпендикулярна до площини падіння та паралельна до площини межі розділу середовищ.

p-поляризація характеризується тим, що вектор напруженості електричного поля лежить у площині падіння.

Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



Падаюча плоска хвиля:

$$E = E_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}$$

Відбита плоска хвиля:

$$E' = E'_0 e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y)}$$

Заломлена плоска хвиля:

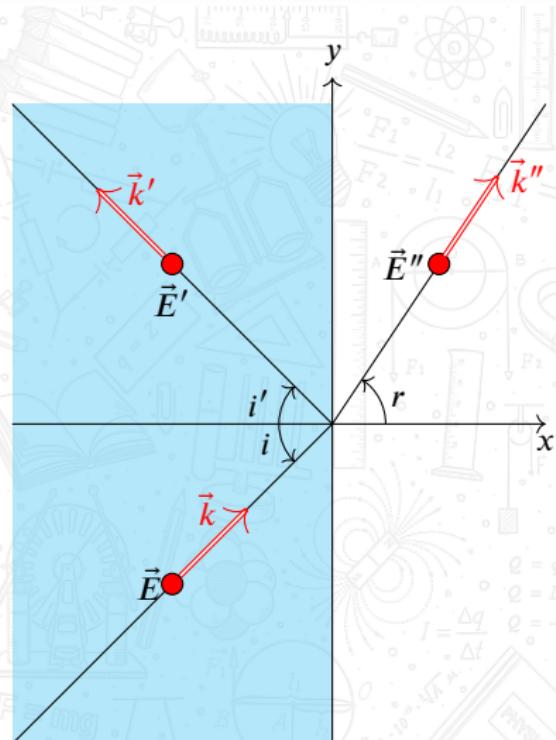
$$E'' = E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y)}$$

Гранична умова ($E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$):

$$E_0 e^{i(\omega t - k_y y)} + E'_0 e^{i(\omega' t - k'_y y)} = E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_y y)}.$$

Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



Падаюча плоска хвиля:

$$E = E_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}$$

Відбита плоска хвиля:

$$E' = E'_0 e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y)}$$

Заломлена плоска хвиля:

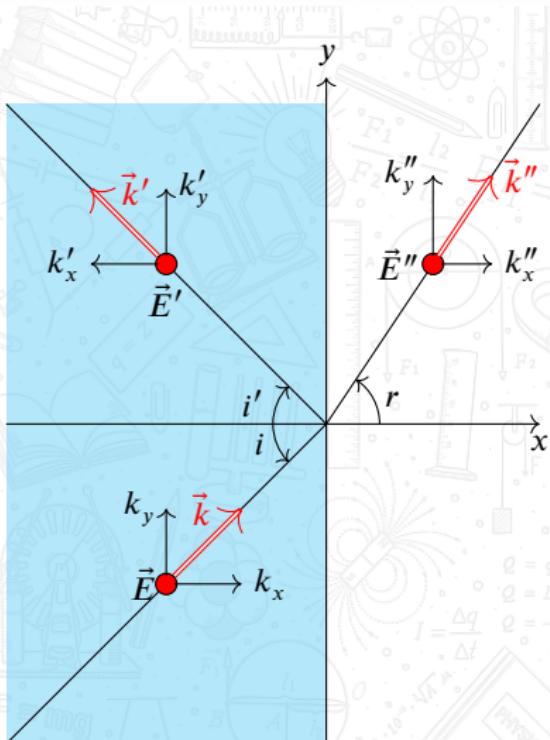
$$E'' = E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y)}$$

Гранична умова ($E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$):

$$E_0 e^{i(\omega t - k_y y)} + E'_0 e^{i(\omega' t - k'_y y)} = E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_y y)}.$$

Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



Падаюча плоска хвиля:

$$E = E_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}$$

Відбита плоска хвиля:

$$E' = E'_0 e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y)}$$

Заломлена плоска хвиля:

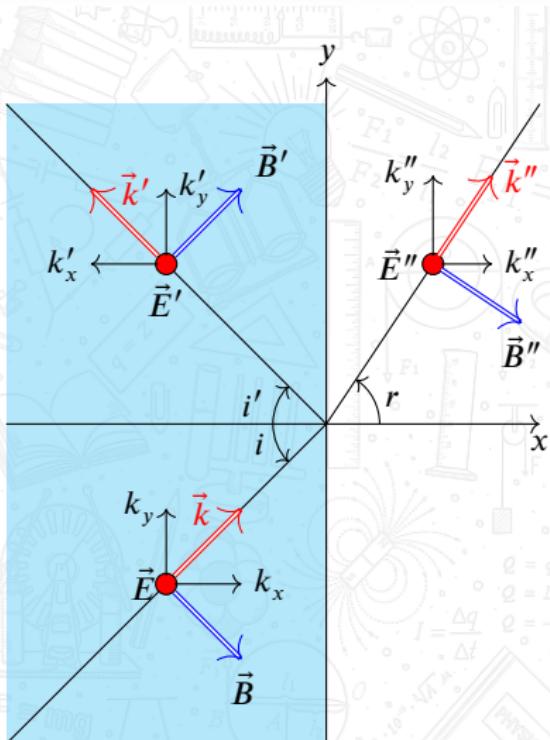
$$E'' = E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y)}$$

Гранична умова ($E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$):

$$E_0 e^{i(\omega t - k_y y)} + E'_0 e^{i(\omega' t - k'_y y)} = E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_y y)}.$$

Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



Падаюча плоска хвиля:

$$E = E_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}$$

Відбита плоска хвиля:

$$E' = E'_0 e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y)}$$

Заломлена плоска хвиля:

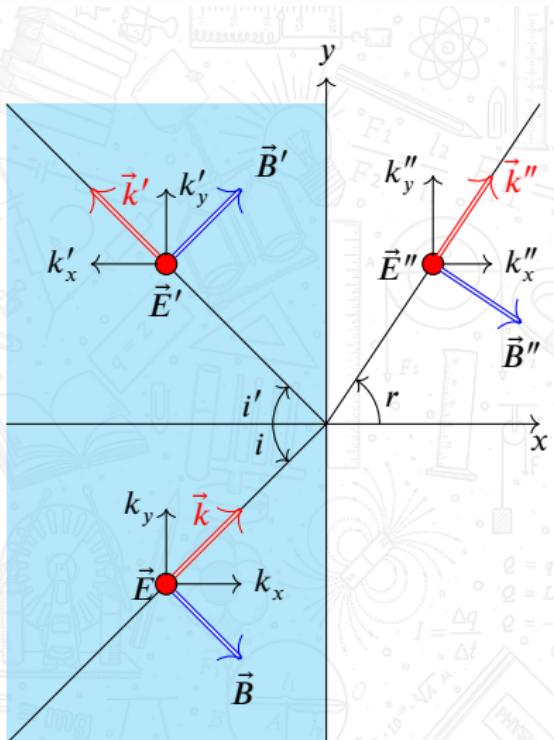
$$E'' = E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y)}$$

Гранична умова ($E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$):

$$E_0 e^{i(\omega t - k_y y)} + E'_0 e^{i(\omega' t - k'_y y)} = E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_y y)}.$$

Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



Продиференціюємо граничні умови

- за часом t , отримаємо

$$\omega = \omega' = \omega''$$

- за координатою y , отримаємо

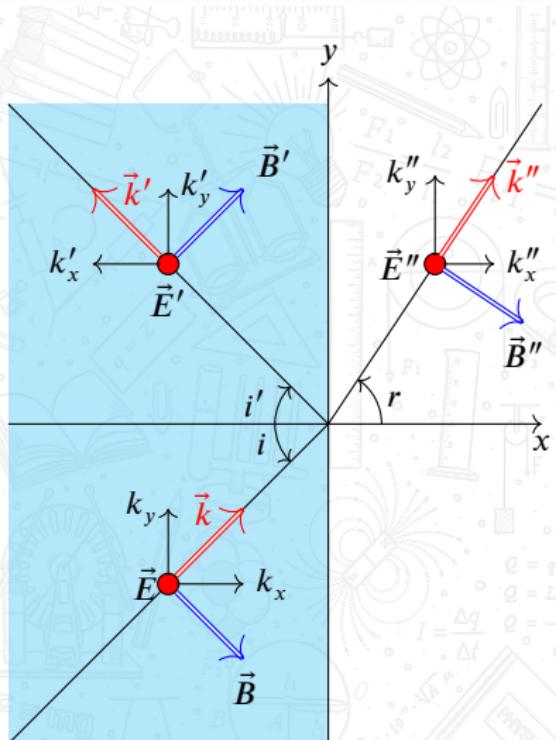
$$k_y = k'_y = k''_y$$

З виразу $k = \frac{\omega n}{c}$ і $\omega = \omega' = \omega''$ отримуємо:

$$\frac{k}{n_1} = \frac{k'}{n_1} = \frac{k''}{n_2}.$$

Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



З рівняння:

$$\frac{k}{n_1} = \frac{k'}{n_1}$$

$$k^2 = k'^2 \Rightarrow k_x^2 + k_y^2 = k'_x^2 + k'_y^2$$

$$\Rightarrow k_x^2 = k'_x^2$$

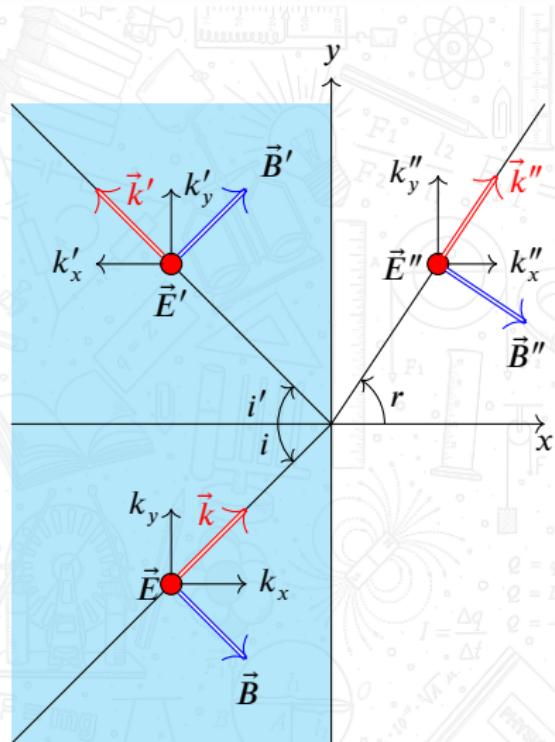
$$k_x = -k'_x, \quad k_y = k'_y.$$

Звідки випливає закон відбивання, відомий з геометричної оптики:

$$i = i'.$$

Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



З рівняння:

$$\frac{k}{n_1} = \frac{k''}{n_2}$$

$$\frac{k_y}{n_1 \sin i} = \frac{k''_y}{n_2 \sin r}$$

Випливає закон заломлення, відомий з геометричної оптики:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

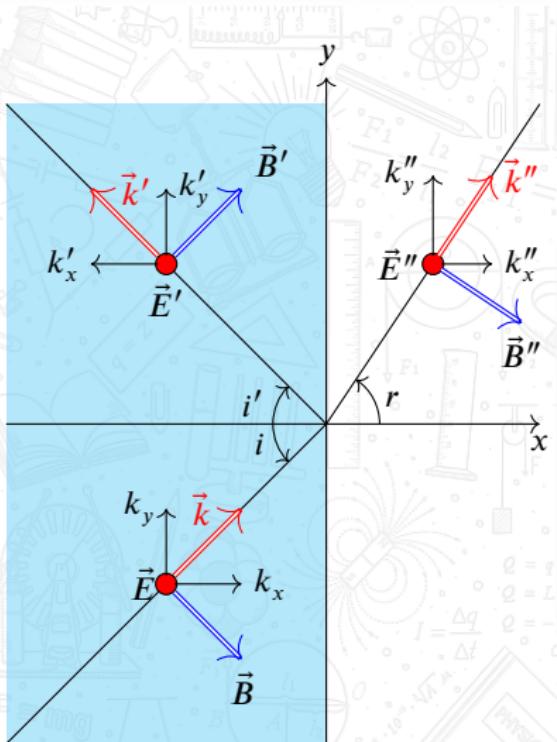
або

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21},$$

$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$ – відносний показник заломлення двох середовищ.

Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



Більшість діелектриків не проявляють магнітних властивостей:

$$\mu_1 = \mu_2 \approx 1.$$

Тому, відносний поразник заломлення

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Формули Френеля для s -поляризації

Границі умови для вектора \vec{E} дають:

$$E_0 + E'_0 = E''_0$$

а для вектора \vec{H} ($H_{\tau_1} = H_{\tau_2}$):

$$H_{0y} + H'_{0y} = H''_{0y} \quad \frac{B_{0y}}{\mu_1} + \frac{B'_{0y}}{\mu_1} = \frac{B''_{0y}}{\mu_2}$$

Більшість діелектриків не проявляють магнітних властивостей

$$\mu_1 = \mu_2 \approx 1.$$

$$B_{0y} + B'_{0y} = B''_{0y}$$

$$\vec{B} = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} \Rightarrow B_x = \frac{c}{\omega} k_y E, \quad B_y = -\frac{c}{\omega} k_x E, \quad B_z = 0.$$

$$k_x E_0 + k'_x E'_0 = k''_x E''_0$$

Формули Френеля для *s*-поляризації

$$E_0 + E'_0 = E''_0$$

$$k_x E_0 + k'_x E'_0 = k''_x E''_0$$

$$k_x = -k'_x = k \cos i, \quad k'' = n_{21} k, \quad k''_x = k'' \cos r = n_{21} k \cos r$$

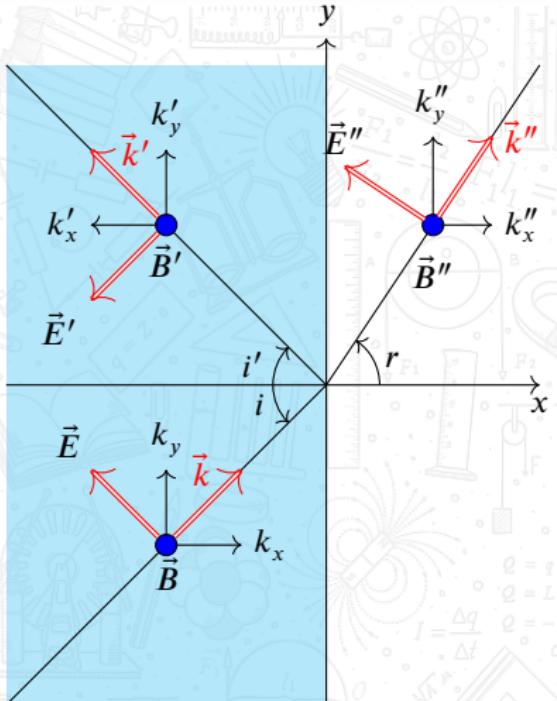
$$E_0 \cos i - E'_0 \cos i = n_{21} E''_0 \cos r$$

$$E_0 \cos i - E'_0 \cos i = n_{21} (E_0 + E'_0) \cos r$$

$$E'_\perp = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} E_\perp$$

$$E''_\perp = \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r)} E_\perp$$

Формули Френеля для p -поляризації



Граничні умови дають:

$$B_0 + B'_0 = B''_0$$

$$E_y + E'_{y_0} = E''_{y_0}$$

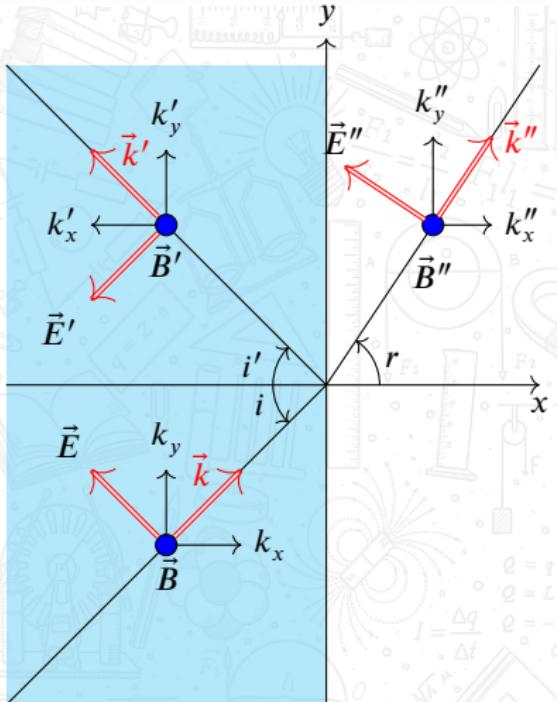
З рівності $E_{y_0} = \frac{c k_x}{\epsilon \omega} B$ друга умова приймає вигляд:

$$\frac{k_x}{\epsilon_1} (B_0 - B'_0) = \frac{k''_x}{\epsilon_2} B''_0$$

або

$$n_{21} \cos i (B_0 - B'_0) = \cos r B''_0$$

Формули Френеля для p -поляризації



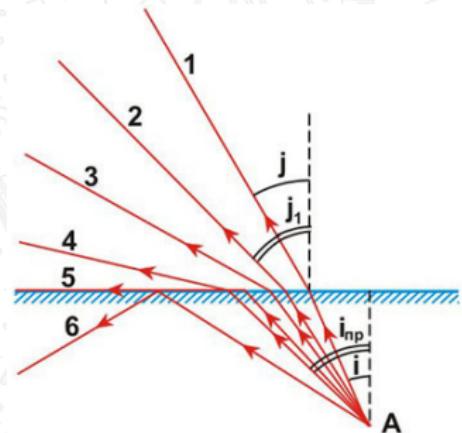
$$E'_\parallel = \frac{\operatorname{tg}(i - r)}{\operatorname{tg}(i + r)} E_\parallel$$

$$E''_\parallel = \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i + r) \cos(i - r)} E_\parallel$$

Повне внутрішнє відбивання

Якщо світло йде з матеріалу з показником заломлення з оптично більш густого в оптично менш густе $n_2 < n_1$, то згідно закону відбивання

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} < 1 \Rightarrow i < r.$$



Коли кут заломлення $r = 90^\circ$ при куті падіння $i = i_b$, який називається граничним і визначається рівністю:

$$\sin i_b = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \text{ або } n \sin i_b = 1,$$

$$\text{де } n = \frac{n_1}{n_2} > 1$$

виникає повне внутрішнє відбивання.

Що відбувається із заломленим променем при $i > i_b$, тобто при кутах падіння, що більші ніж граничний кут?

Повне внутрішнє відбивання

$$\vec{E}'' = \vec{E}_0'' e^{i(\omega t - k_x'' - k_y'')}$$

$$\frac{k^2}{n^2} = k_x''^2 + k_y''^2$$

$$\sin i = \frac{k_y}{k}, \quad k_y = k_y''$$

$$k_x''^2 = \frac{k^2}{n^2} (1 - n^2 \sin^2 i) = \frac{\omega^2}{c^2} (1 - n^2 \sin^2 i)$$

Оскільки при $i > i_b$, $1 - n^2 \sin^2 i < 0$,

то $k_x''^2 < 0 \Rightarrow k_x'' = iK$, $K = \frac{\omega^2}{c^2} (1 - n^2 \sin^2 i) > 0$.

Тоді розв'язок рівнянь Максвелла буде мати вигляд:

$$\vec{E}'' = \vec{E}_0'' e^{-Kx} e^{i(\omega t - k_y'')}$$

В 2-му середовищі буде поле при $i > i_b$, однак його амплітуда буде експоненційно спадати вздовж x .