Електромагнітні хвилі

Лекції з електрики та магнетизму

Пономаренко С. М.

Зміст

Хвильовий процес

Незважаючи на велику різноманітність фізичних процесів, що спричиняють хвилі, їхнє утворення відбувається за загальним принципом. Збурення в деякий момент часу, поширюється з певною швидкістю в просторі. Хвиля — процес поширення збурень в просторі.

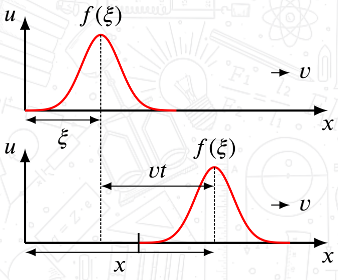
Хвиля характеризується деякою величиною

$$u = f(x, y, z, t),$$

яка є функцією як просторових змінних x, y, z та часу t.

Наприклад, у випадку хвилі, що поширюється по поверхні води, u – це висота хвилі над положенням «спокійної» поверхні. У випадку електромагнітної хвилі u — це змінна складова електричного та магнітного поля, яка накладається на їхні статичні значення.

Хвильове рівняння



З аналізу рисунка можна зробити висновок, що функція, що описує поширення хвилі в додатному напрямку осі OX має вигляд:

$$u = f(x - vt).$$

Якщо хвиля поширюється у від'ємному напрямі осі OX, то $g(x + vt)$. В загальному випадку для обох хвиль можна написати суперпозицію:

$$u = f(x - vt) + g(x + vt).$$

Вигляд функцій f і g визначається початковими умовами, тобто завданням початкової форми шнура і початкового розподілу швидкостей, а тому може бути досить різноманітним.

Диференціальне рівняння (яке називається хвильовим рівнянням), що описує процес поширення хвилі вздовж осі x має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Тривимірний випадок

В тривимірному випадку хвильове рівняння має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

або використовуючи лапласіан: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$:

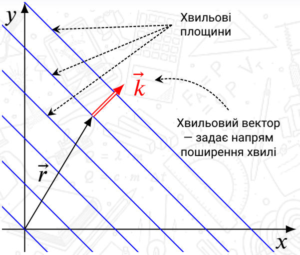
$$\boxed{\nabla^2 u = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.}$$

Якщо закони фізики приводять до такого типу рівняння — то ці закони описують процес поширення хвиль.

Плоска хвиля

Плоскою хвилею називається хвиля, яка має однакове значення u в усіх точках площин, перпендикулярних до напрямку її поширення. Хвиля називається монохроматичною, якщо u змінюється з часом за гармонічним законом із певною частотою. Для плоскої монохроматичної хвилі маємо:

$$u = u_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}).$$



Для зручності плоску монохроматичну хвилю зручно представити у комплексному вигляді:

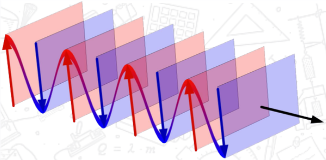
$$u = u_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}.$$

Комплексна експоненціальна форма використовується для представлення синусоїдальних хвиль, тому що вона компактно поєднує синус і косинус через формулу Ейлера

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

спрощує диференціювання та інтегрування (замінюючи операції на множення), дає змогу зручно працювати з фазою і розв'язувати диференціальні рівняння, при цьому фізична хвиля залишається дійсною як її реальна частина.

Плоска хвиля



Плоскою хвилею називається хвиля, яка має однакове значення u в усіх точках площин, перпендикулярних до напрямку її поширення. Хвиля називається монохроматичною, якщо u змінюється з часом за гармонічним законом із певною частотою. Для плоскої монохроматичної хвилі маємо:

$$u = u_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}).$$

Для зручності плоску монохроматичну хвилю зручно представити у комплексному вигляді:

$$u = u_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}.$$

Комплексна експоненціальна форма використовується для представлення синусоїдальних хвиль, тому що вона компактно поєднує синус і косинус через формулу Ейлера

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

спрощує диференціювання та інтегрування (замінюючи операції на множення), дає змогу зручно працювати з фазою і розв'язувати диференціальні рівняння, при цьому фізична хвиля залишається дійсною як її реальна частина.

Характеристики монохроматичної хвилі

Довжина хвилі

Будь-які дві точки, віддалені одна від одної на відстань λ коливаються однаково, синхронно: $u(\vec{k}\vec{r}, \omega t) = u(\vec{k}\vec{r} + k\lambda, \omega t)$. Величина

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

називається довжиною хвилі, $\vec{k}$ — називається хвильовим вектором, який напрямлений у напрямку поширення хвилі і перпендикулярний хвильовій поверхні, $k = |\vec{k}|$ — називається хвильовим числом.

Частота хвилі

Така як $u(\vec{k}\vec{r}, \omega t) = u(\vec{k}\vec{r}, \omega t + \omega T)$, величина ω називається коловою частотою хвилі, а T — періодом хвилі.

Фазова швидкість хвилі

Фазовою швидкістю хвилі називається швидкість, з якою поширюється точки з фіксованою фазою:

$$v = \frac{\omega}{k}, \qquad \vec{v} = \frac{\omega}{k}\frac{\vec{k}}{k}.$$

Хвильові рівняння для електромагнітного поля

Виведення

Розглянемо електромагнітне поле в однорідній ділянці простору, де немає вільних зарядів і струмів провідності.

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\vec{D} = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}. \end{cases}$$

Врахуємо також матеріальні рівняння $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$.

До другого рівняння застосуємо операцію rot:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{B}.$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} - \nabla^2\vec{E}.$$

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{H} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

Приходимо до рівняння для електричного поля:

$$\nabla^2\vec{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \quad \text{де } v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Хвильові рівняння для електромагнітного поля

Виведення

Розглянемо електромагнітне поле в однорідній ділянці простору, де немає вільних зарядів і струмів провідності.

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\vec{D} = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}. \end{cases}$$

Врахуємо також матеріальні рівняння $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$.

До четвертого рівняння застосуємо операцію rot:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = +\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{D}.$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{H} - \nabla^2\vec{H}.$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{D} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}.$$

Рівняння для магнітного поля:

$$\nabla^2\vec{H} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}, \quad \text{де } v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Хвильові рівняння для електромагнітного поля

Рівняння вигляду:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \end{cases}$$

називаються хвильовими рівняннями. Вони описують процес поширення величин $\vec{E}$ та $\vec{H}$ у просторі та часі зі швидкістю:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Такий процес називається електромагнітною хвилею. У вакуумі $\varepsilon = \mu = 1$, а тому швидкість поширення хвилі буде $v = c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с. В середовищі для якого $\varepsilon, \mu > 1$, а тому швидкість поширення буде меншою ніж у вакуумі $v < c$ на величну:

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu},$$

яка називається абсолютним показником заломлення середовища.

Плоскі електромагнітні хвилі

Розглянемо гармонійні електромагнітні хвилі, які ми представимо в комплексній формі:

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$
$$\vec{H} = \vec{H}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

Підставимо ці закони в рівняння Максвелла. Диференціальні операції заміняються на:

$$\vec{\nabla} \to -i\vec{k}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \to i\omega$$

Тоді рівняння Максвелла приймуть вигляд:

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0,$$
$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c}\vec{B}, \quad -\vec{k} \times \vec{H} = \frac{\omega}{c}\varepsilon \vec{E}$$

Перші два рівняння показують, що $\vec{E} \perp \vec{k}$ та $\vec{H} \perp \vec{k}$ перпендикулярні напряму поширення, що задається хвильовим векто- $\vec{k}$. Ця властивість називається поперечністю електромагнітних хвиль.

Плоскі електромагнітні хвилі

Розглянемо гармонійні електромагнітні хвилі, які ми представимо в комплексній формі:

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

Підставимо ці закони в рівняння Максвелла. Диференціальні операції заміняються на:

$$\vec{\nabla} \to -i\vec{k}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \to i\omega$$

Тоді рівняння Максвелла приймуть вигляд:

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c}\vec{B}, \quad -\vec{k} \times \vec{H} = \frac{\omega}{c}\varepsilon \vec{E}$$

Два інші рівняння дають співвідношення для амплітуд:

$$nE_m = B_m, \quad \sqrt{\varepsilon}E_m = \sqrt{\mu}H_m$$

Енергія та вектор Пойнтінга для хвилі

Густина енергії (амплітуда)

$$w_m = \frac{\varepsilon E_m^2}{8\pi} + \frac{\mu H_m^2}{8\pi}, \quad \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_m = H_m, \quad w_m = \frac{\varepsilon E_m^2}{4\pi} = \frac{\mu H_m^2}{4\pi}.$$

Вектор Пойнтінга показує напрямок поширення енергії хвилі:

$$\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E} \times \vec{H}]$$

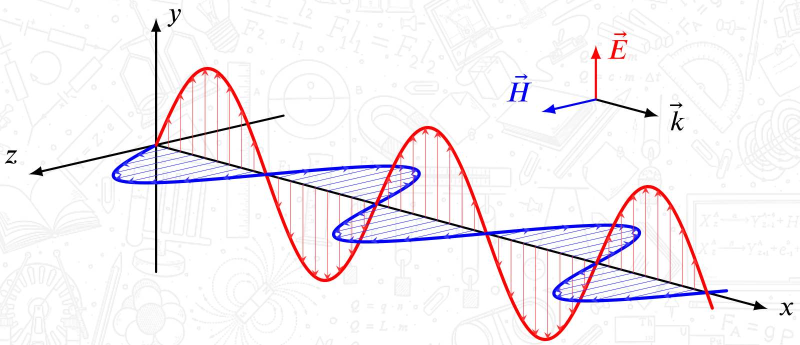
Для хвилі маємо:

$$\vec{\Pi} = \frac{c^2}{4\pi\varepsilon\omega} \vec{H} \times \vec{k} \times \vec{H} = \frac{c^2}{4\pi\varepsilon\omega} H^2 \vec{k} = \frac{c}{\omega} \frac{1}{\varepsilon\mu} \left(\frac{\mu H^2}{4\pi} \right) c\vec{k} = w \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{\vec{k}}{k} = w\vec{v}.$$

Електромагнітна хвиля — це електромагнітне поле, що періодично змінюються. У разі високочастотних полів зручно розглядати не миттєві значення таких величин, як густина енергії, а значення, усереднені за період коливань. Усереднене в такий спосіб значення вектора Пойнтинга називається інтенсивністю випромінювання:

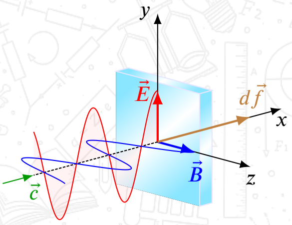
$$\left\langle |\vec{\Pi}| \right\rangle = I \propto E^2$$

Плоска монохроматична електромагнітна хвиля



Тиск електромагнітної хвилі

Електромагнітні хвилі, відбиваючись чи поглинаючись тілами, на які вони падають, чинять на них тиск. Цей тиск виникає внаслідок впливу магнітного поля хвилі на електричні струми, що збуджуються електричним полем хвилі.



Електричне поле хвилі збуджує електричний струм густиною $\vec{j} = \lambda\vec{E}$. Внаслідок цього на об'єму середовища діє сила Ампера:

$$d\vec{F} = \frac{1}{c}[\vec{j} \times \vec{B}]dV,$$

спрямована убік поширення хвилі. Ця сила викликає тиск електромагнітної хвилі.

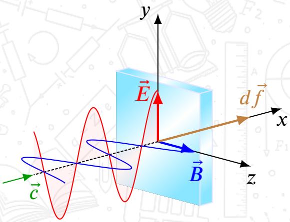
У хвилі магнітне поле $B = nE = \frac{c}{v}E$. Якщо енергія, що падає на поверхню тіла $\Pi dS = wvdS$ перетворюється на теплову $jEdV$, то $wvdS = jEdV$. Отже, сила. що діє на поверхню тіла:

$$dF = \frac{1}{c}jBdV = \frac{1}{c}j\frac{c}{v}EdV = \frac{1}{v}jEdV = \frac{1}{v}wvdS = wdS,$$

звідки тиск $p = \frac{dF}{dS} = w$

Тиск електромагнітної хвилі

Електромагнітні хвилі, відбиваючись чи поглинаючись тілами, на які вони падають, чинять на них тиск. Цей тиск виникає внаслідок впливу магнітного поля хвилі на електричні струми, що збуджуються електричним полем хвилі.



Електричне поле хвилі збуджує електричний струм густиною $\vec{j} = \lambda\vec{E}$. Внаслідок цього на об’єму середовища діє сила Ампера:

$$d\vec{F} = \frac{1}{c}[\vec{j}\times\vec{B}]dV,$$

спрямована убік поширення хвилі. Ця сила викликає тиск електромагнітної хвилі.

У випадку часткового відбивання, тиск дорівнює

$$p = w(1+\rho),$$

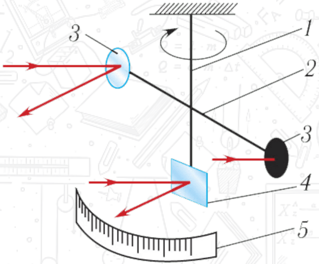
де $\rho = 0\ldots 1$ — коефіцієнт відбивання.

Тиск світла

Дослід Лебедєва

Петро Миколайович Лебедєв в 1899 р. вперше виміряв світловий тиск.

Він підвісив на тонкій нитці коромисло з парою крилець на кінцях: поверхня в одного з них була зачорненою, забезпечуючи майже повне поглинання, а в іншого — дзеркальною, забезпечуючи повне відбивання. Підвіс з крильцями утворив чутливі крутильні терези, що поміщаються в посудину, повітря в якому було відкачано.



Світло практично повністю відбивалося від дзеркальної поверхні та його тиск на дзеркальне крильце було вдвічі більше, ніж на зачорнене. Внаслідок цього створювався момент сил, що повертає коромисло. Вимірюючи кут повороту коромисла, можна було виміряти силу, що діяла на крильця, а отже, визначити світловий тиск.

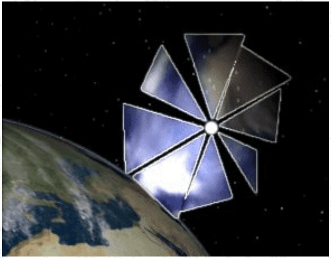
https://youtu.be/Dr07pTIoue8

Тиск світла

Сонячні вітрила

Сонячне вітрило — пристрій, що використовує тиск сонячного світла чи лазера на дзеркальну поверхню для приведення в рух космічного апарату.

Тиск сонячного світла надзвичайно малий (на Земній орбіті — близько $5 \cdot 10^{-6}$ Па) і зменшується пропорційно квадрату відстані від Сонця. В ролі вітрила використовувались сонячні батареї або радіатори системи терморегуляції.

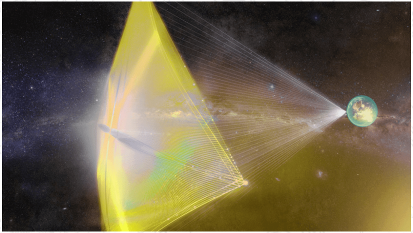


https://youtu.be/U0_wjnmlmRg

Тиск світла

Сонячні вітрила

Вчені з Австралійського національного університету запропонували спосіб запуску для космічного вітрильника до найближчої зірки Альфи Центавра в рамках проекту Breakthrough Starshot. За їх задумом, надати необхідну швидкість апарату допоможе фотонний двигун — система, що сумарно включає до 100 мільйонів лазерів.



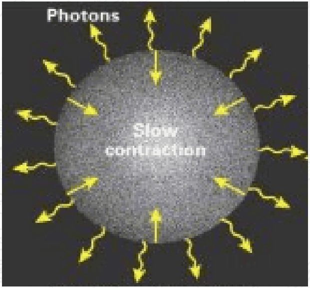
Подорож до Альфи Центавра за допомогою звичайних способів переміщення триватиме близько 100 років. Дістатись до Альфи Центавра за допомогою космічного вітрильника на фотонному двигуні передбачається за 20 років зі швидкістю в $0.2c$.

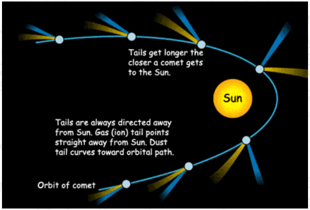
Journal of the Optical Society of America B.

Тиск світла

Сонячні вітрила

Тиск світла відіграє велику роль в астрономічних та атомних явищах. В астрофізиці тиск світла поряд із тиском газу забезпечує стабільність зірок, протидіючи силам гравітації. Дія тиску світла пояснюються деякі форми кометних хвостів.





Товстий білий хвіст комети Гейла-Боппа складається з частинок пилу, і утворюється завдяки тиску світла. Другий, тонкий і блакитний складається з іонів і створюється сонячним вітром.

Імпульс електромагнітного поля

Поле має енергію; так само в одиниці об'єму воно має імпульс. Оскільки електромагнітна хвиля чинить тиск на речовину, остання набуває певного імпульсу.

Для електромагнітної хвилі у вакуумі вектор Пойнтінга.

$$\Pi = wc \Rightarrow \frac{\Pi}{c^2} = \frac{w}{c}.$$

З релятивістської механіки $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$. Для частинки з нульовою масою (наприклад, фотона) $m = 0$, зв'язок енергії та імпульсу:

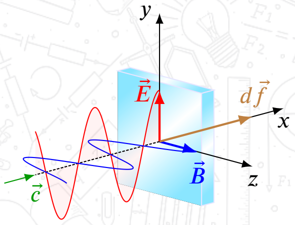
$$E = pc \Rightarrow p = \frac{E}{c}.$$

Порівнюючи дві останні формули, отримаємо вираз для густини імпульсу:

$$\vec{g} = \frac{\vec{\Pi}}{c^2}, \quad [g] = \frac{\text{дин} \cdot \text{с}}{\text{см}^3} \text{ (СГС)}$$

Імпульс електромагнітної поля

Розглянемо такий процес: електромагнітна хвиля поглинається тілом і передає йому свій імпульс.



Електричне поле хвилі збуджує електричний струм густиною $\vec{j} = \lambda\vec{E}$ ($\vec{F} = e\vec{E}$). Внаслідок цього на об'єму середовища діє сила Ампера

$$d\vec{f} = \frac{1}{c}[\vec{j} \times \vec{B}],$$

яка спрямована убік поширення хвилі. Ця сила за час dt змінює імпульс одиниці об'єму тіла на величину:

$$d\vec{g} = \vec{f}dt = \frac{1}{c}[\vec{j} \times \vec{B}]dt = \frac{\lambda}{c}[\vec{E} \times \vec{B}]dt = \frac{4\pi\lambda}{c^2}\vec{\Pi}dt = \frac{4\pi\lambda}{c}w\vec{n}dt.$$

За той самий час в одиниці об'єму середовища поглинається (передається від поля речовині) енергія:

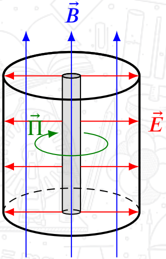
$$dw = \vec{j} \cdot \vec{E}dt = \lambda E^2 dt = 4\pi\lambda\frac{E^2}{4\pi}dt = 4\pi\lambda w dt$$

Звідки $d\vec{g} = \frac{dw}{c}\vec{n}$, або за весь час дії $\vec{g} = \frac{w}{c}\vec{n} = \frac{\vec{\Pi}}{c^2}$.

Момент імпульсу поля

Задача

Заряджений циліндричний конденсатор вміщений в зовнішнє однорідне магнітне поле з індукцією $\vec{B}$, що напрямлене вздовж його осі. Конденсатор має змогу вільно обертатись навколо своєї осі. Заряд конденсатора q, радіус зовнішньої обкладки R, радіусом внутрішньої можна знехтувати. Маса конденсатора m. Знайдіть вектор моменту імпульсу електромагнітного поля конденсатора. Знайдіть кутову швидкість, з якою буде обертатись конденсатор, при вимикання магнітного поля.



Густина моменту імпульсу поля:

$$\vec{\mathscr{L}} = \vec{r} \times \frac{\vec{\Pi}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c}\vec{r} \times \vec{E} \times \vec{B} = -\frac{1}{4\pi c}\vec{B}(\vec{r} \cdot \vec{E})$$

Електричне поле : $E = \dfrac{2\lambda}{r} = \dfrac{2q}{rh}$, $\quad h$ – висота циліндра

Модуль вектора імпульсу $\vec{L}$:

$$L = \iiint\limits_V \mathscr{L}\, dV = \frac{1}{4\pi c} B \frac{2q}{h} \pi R^2 h = \frac{qBR^2}{2c}, \qquad \vec{L} = -\frac{qR^2}{2c}\vec{B}$$

При вимиканні магнітного поля момент імпульсу поля перейде в обертання самого циліндра $\vec{L} = mR^2\vec{\omega}$, а тому кутова швидкість: $\vec{\omega} = -\dfrac{q}{2mc}\vec{B}$.

Поляризація хвиль

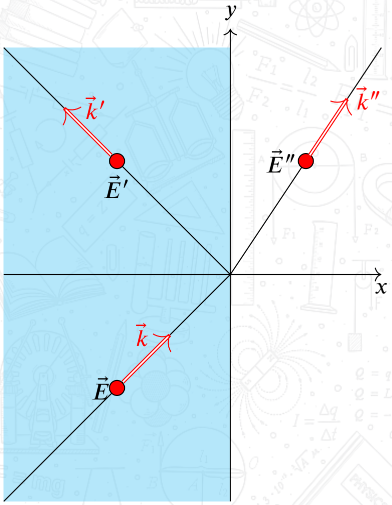
Поляризація хвиль — характеристика поперечних хвиль, що описує поведінку вектора величини, яка коливається, у площині, перпендикулярній напрямку поширення хвилі.

Для s-поляризації напруженість електричного поля електромагнітної хвилі перпендикулярна до площини падіння та паралельна до площини межі розділу середовищ.

p-поляризація характеризується тим, що вектор напруженості електричного поля лежить у площині падіння.

Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



Падаюча плоска хвиля:

$$E = E_m e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}$$

Відбита плоска хвиля:

$$E' = E'_m e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y)}$$

Заломлена плоска хвиля:

$$E'' = E''_m e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y)}$$

Гранична умова ($E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$), тобто при $x = 0$:

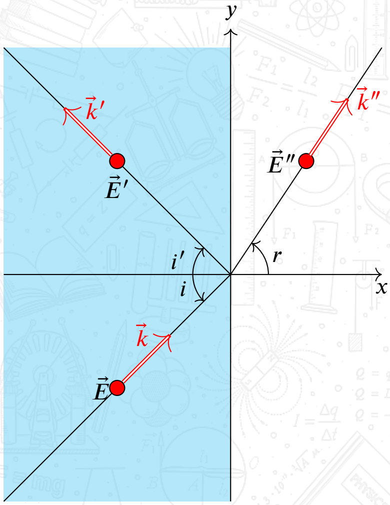
$$E(x=0) + E'(x=0) = E''(x=0),$$

або

$$E_m e^{i(\omega t - k_y y)} + E'_m e^{i(\omega' t - k'_y y)} = E''_m e^{i(\omega'' t - k''_y y)}.$$

Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



Падаюча плоска хвиля:

$$E = E_m e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}$$

Відбита плоска хвиля:

$$E' = E'_m e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y)}$$

Заломлена плоска хвиля:

$$E'' = E''_m e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y)}$$

Гранична умова ($E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$), тобто при $x = 0$:

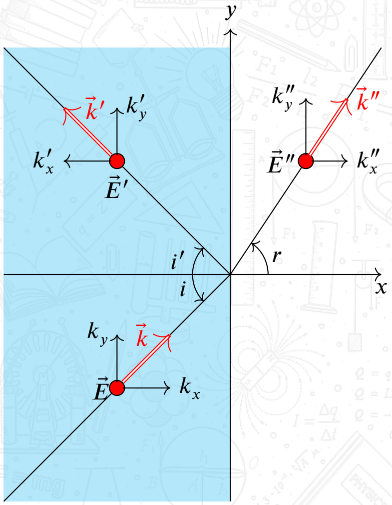
$$E(x=0) + E'(x=0) = E''(x=0),$$

або

$$E_m e^{i(\omega t - k_y y)} + E'_m e^{i(\omega' t - k'_y y)} = E''_m e^{i(\omega'' t - k''_y y)}.$$

Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



Падаюча плоска хвиля:

$$E = E_m e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}$$

Відбита плоска хвиля:

$$E' = E'_m e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y)}$$

Заломлена плоска хвиля:

$$E'' = E''_m e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y)}$$

Гранична умова ($E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$), тобто при $x = 0$:

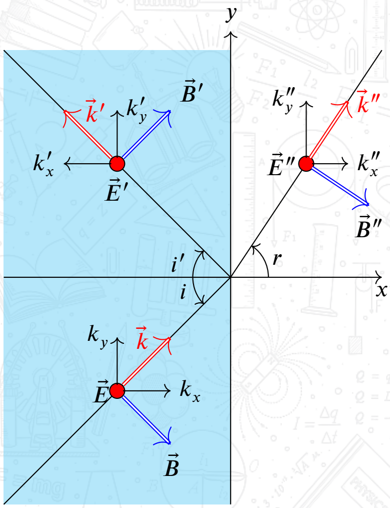
$$E(x=0) + E'(x=0) = E''(x=0),$$

або

$$E_m e^{i(\omega t - k_y y)} + E'_m e^{i(\omega' t - k'_y y)} = E''_m e^{i(\omega'' t - k''_y y)}.$$

Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



Падаюча плоска хвиля:

$$E = E_m e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}$$

Відбита плоска хвиля:

$$E' = E_m' e^{i(\omega' t - k_x' x - k_y' y)}$$

Заломлена плоска хвиля:

$$E'' = E_m'' e^{i(\omega'' t - k_x'' x - k_y'' y)}$$

Гранична умова ($E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$), тобто при $x = 0$:

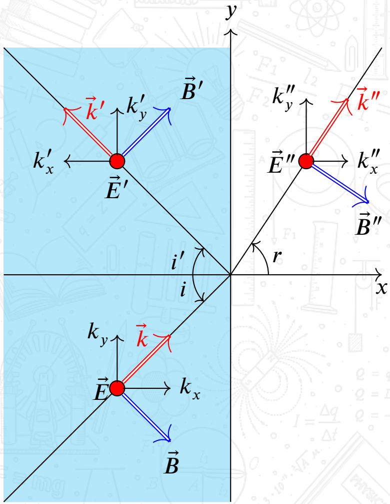
$$E(x=0) + E'(x=0) = E''(x=0),$$

або

$$E_m e^{i(\omega t - k_y y)} + E_m' e^{i(\omega' t - k_y' y)} = E_m'' e^{i(\omega'' t - k_y'' y)}.$$

Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



Продиференціюємо граничні умови

1. за часом t, отримаємо

$$\omega = \omega' = \omega''$$

2. за координатою y, отримаємо

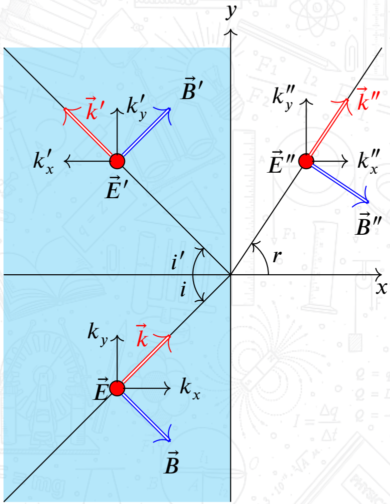
$$k_y = k'_y = k''_y$$

Тому, гранична умова прийме вигляд:

$$E_m + E'_m = E''_m.$$

Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



З рівняння:

$$k_y = k'_y$$

$$k \sin i = k' \sin i'$$

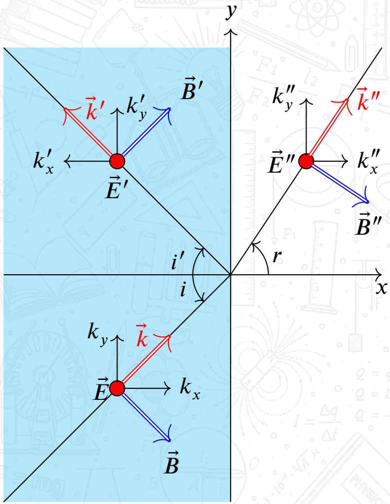
$$\Rightarrow \frac{\omega n_1}{c} \sin i = \frac{\omega n_1}{c} \sin i'$$

Звідки випливає закон відбивання, відомий з геометричної оптики:

$$\boxed{i = i'.}$$

Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



З рівняння:

$$k'_y = k''_y$$

$$\frac{\omega n_1}{c} \sin i = \frac{\omega n_2}{c} \sin r$$

Випливає закон заломлення, відомий з геометричної оптики:

$$\boxed{n_1 \sin i = n_2 \sin r}$$

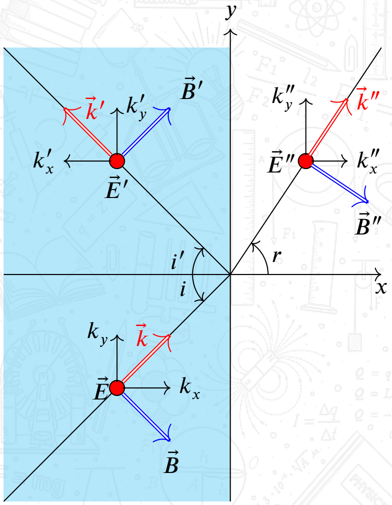
або

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21},$$

$n_{21} = \dfrac{n_2}{n_1}$ — відносний показник заломлення двох середовищ.

Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



Більшість діелектриків не проявляють магнітних властивостей:

$$\mu_1 = \mu_2 \approx 1.$$

Тому, відносний поразник заломлення

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Формули Френеля для s-поляризації

Граничні умови для вектора $\vec{E}$ дають:

$$\boxed{E_m + E'_m = E''_m}$$

а для вектора $\vec{H}$ ($H_{\tau_1} = H_{\tau_2}$):

$$H_{0_y} + H'_{0_y} = H''_{0_y} \quad \frac{B_{0_y}}{\mu_1} + \frac{B'_{0_y}}{\mu_1} = \frac{B''_{0_y}}{\mu_2}$$

Більшість діелектриків не проявляють магнітних властивостей $\mu_1 = \mu_2 \approx 1$.

$$B_{0_y} + B'_{0_y} = B''_{0_y}$$

$$\vec{B} = \frac{c}{\omega}\vec{k} \times \vec{E} \Rightarrow B_x = \frac{c}{\omega}k_y E, \quad B_y = -\frac{c}{\omega}k_x E, \quad B_z = 0.$$

$$k_x E_m + k'_x E'_m = k''_x E''_m.$$

Формули Френеля для s-поляризації

$$E_m + E'_m = E''_m$$

$$k_x E_m + k'_x E'_m = k''_x E''_m$$

$$k_x = -k'_x = \frac{\omega n_1}{c}\cos i, \quad k''_x = +\frac{\omega n_2}{c}\cos r$$

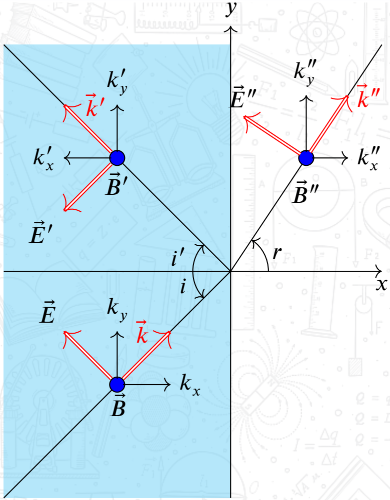
$$n_1 E_m \cos i - n_1 E'_m \cos i = n_2 E''_m \cos r$$

$$E_m \cos i - E'_m \cos i = n_{21}(E_m + E'_m)\cos r$$

$$\boxed{E'_\perp = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}E_\perp}$$

$$\boxed{E''_\perp = \frac{2\sin r\cos i}{\sin(i+r)}E_\perp}$$

Формули Френеля для *p*-поляризації



Граничні умови дають:

$$B_m + B'_m = B''_m$$

$$E_y + E'_{y_m} = E''_{y_m}$$

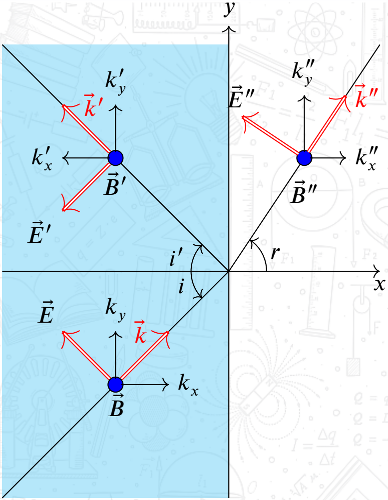
З рівності $E_{y_m} = \frac{ck_x}{\varepsilon\omega} B$ друга умова приймає вигляд:

$$\frac{k_x}{\varepsilon_1}\left(B_m - B'_m\right) = \frac{k''_x}{\varepsilon_2} B''_m$$

або

$$n_{21} \cos i \left(B_m - B'_m\right) = \cos r B''_m$$

Формули Френеля для *p*-поляризації



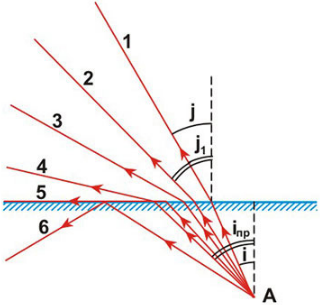
$$E'_\parallel = \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)} E_\parallel$$

$$E''_\parallel = \frac{2\sin r\cos i}{\sin(i+r)\cos(i-r)} E_\parallel$$

Повне внутрішнє відбивання

Якщо світло йде з матеріалу з показником заломлення з оптично більш густого в оптично менш густе $n_2 < n_1$, то згідно закону відбивання

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} < 1 \Rightarrow i < r.$$



Коли кут заломлення $r = 90^\circ$ при при куті падіння $i = i_b$, який називається граничним і визначається рівністю:

$$\sin i_b = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \text{ або } n \sin i_b = 1,$$

$$\text{де } n = \frac{n_1}{n_2} > 1$$

виникає повне внутрішнє відбивання.

Що відбувається із заломленим променем при $i > i_b$, тобто при кутах падіння. що більші ніж граничний кут?

Повне внутрішнє відбивання

$$\vec{E}'' = \vec{E}''_m e^{i(\omega t - k''_x - k''_y)}$$

$$\frac{k^2}{n^2} = k''^2_x + k''^2_y$$

$$\sin i = \frac{k_y}{k}, \quad k_y = k''_y$$

$$k''^2_x = \frac{k^2}{n^2}(1 - n^2 \sin^2 i) = \frac{\omega^2}{c^2}(1 - n^2 \sin^2 i)$$

Оскільки при $i > i_b$, $1 - n^2 \sin^2 i < 0$,
то $k''^2_x < 0 \Rightarrow k''_x = iK, \quad K = \frac{\omega^2}{c^2}(1 - n^2 \sin^2 i) > 0.$
Тоді розв'язок рівнянь Максвелла буде мати вигляд:

$$\vec{E}'' = \vec{E}''_m e^{-Kx} e^{i(\omega t - k''_y)}$$

В 2-му середовищі буде поле при $i > i_b$, однак його амплітуда буде експоненційно спадати вздовж x.