Випромінювання електромагнітних хвиль

Лекції з електрики та магнетизму

Пономаренко С. М.

16 грудня 2022 р.

Потенціали електромагнітного поля

Калібрувальні перетворення

Задачу про випромінювання електромагнітних хвиль зручно розглядати за допомогою електромагнітних потенціалів φ та $\mathbf{A}$.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Потенціали визначаються не точно. Якщо змінити потенціали наступним чином:

$$\vec{B} = \underbrace{\vec\nabla \times \vec{A}'}_{} = \underbrace{\vec\nabla \times \vec{A}}_{} + \underbrace{\vec\nabla \times (\vec\nabla f)}_{}$$

$$\vec{E}' = -\vec\nabla\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} =$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boxed{\nabla f},$$

$$= -\vec\nabla\left(\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(A + \vec\nabla f)$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t},$$

$$= -\vec\nabla\varphi + \cancel{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec\nabla f} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cancel{- \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec\nabla f}$$

$$= -\vec\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}'$$

де $f(x, y, z, t)$ — довільна функція координат та часу, то спостережувані величини — поля $\mathbf{E}$ та $\mathbf{B}$ при таких перетвореннях не зміняться. Такі перетворення називаються *калібрувальними перетвореннями*.

Потенціали електромагнітного поля

Калібрування Лоренца

$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu}$

Запишемо рівняння Максвелла

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

через потенціали:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\boldsymbol{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)$$

Використовуючи $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j} + \boldsymbol{\nabla}\left(\underbrace{\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}}_{0}\right)$$

Користуючись неоднозначністю потенціалів, визначених з точністю до калібрувального перетворення, можна на них накласти умову:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

яка спростить останнє рівняння. Ця умова називається *калібруванням Лоренца*.

Запишемо рівняння Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Box^2$

через потенціали:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)$$

Використовуючи $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j} + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

Калібрування Лоренца аналогічне до вибору функції f, такою, що задовольняє рівнянню

$\underbrace{\nabla^2\varphi = 0}$ $\quad \underline{\nabla^2\varphi = -4\pi\rho}$

$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f = 0$

$$\nabla^2 f - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$\Box^2 f = 0$

$f = f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + g_1\left(t + \frac{r}{v}\right)$

Рівняння є хвильовим рівнянням або однорідним рівнянням Даламбера.

Потенціали електромагнітного поля

Калібрування Лоренца

Запишемо рівняння Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

через потенціали:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)$$

Використовуючи $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j} + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

З урахуванням калібрування Лоренца отримуємо

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j} \Rightarrow \Box^2\vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}$$

$$\nabla^2\vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}$$

Рівняння є неоднорідним рівнянням Даламбера.

Рівняння для скалярного потенціалу

Використаємо рівняння Максвелла

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(-\boldsymbol{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho,$$

Використовуючи калібрування Лоренца

$$-\nabla^2\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\vec{A} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$$

$$\nabla^2\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

$$-\nabla^2\varphi + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c}\frac{\mu\varepsilon\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

Рівняння Даламбера для потенціалів

Отримали рівняння Даламбера для потенціалів:

$\vec{r}$

$$t - \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{v} \qquad \begin{cases} \nabla^2 \mathbf{A} - \dfrac{\varepsilon\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\dfrac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j}, \\ \nabla^2 \varphi - \dfrac{\varepsilon\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\dfrac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \end{cases}$$

$+ + +$

ρ

$$\nabla^2\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

$$\varphi = \iiint_V \frac{\rho\, dV}{}$$

Розв'язками *запізнюючі* потенціали:

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\mu}{c}\iiint\limits_{V'} \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\right) dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\varepsilon}\iiint\limits_{V'} \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\right) dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$\vec{A} = f\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{v}\right) + g\left(t + \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{v}\right)$$

В даний момент часу t в даній точці $\mathbf{r}$ потенціал обумовлений не розподілом і величиною зарядів і струмів у даний момент часу, а їх положеннями та величинами у попередні моменти часу, що визначаються з урахуванням швидкості поширення електромагнітного поля.

Рівняння Даламбера для потенціалів

Отримали рівняння Даламбера для потенціалів:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j},$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.$$

Розв'язками *запізнюючі* потенціали:

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\mu}{c}\iiint\limits_{V'} \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\right) dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\varepsilon}\iiint\limits_{V'} \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\right) dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

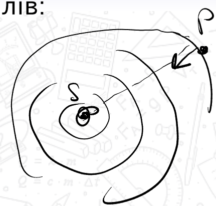
Потенціали називаються *запізнюючими*, тому що вони описують потенціали в пізніший момент часу t в порівнянні з моментом часу $t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}$ для зарядів та струмів, які цей потенціал створили.

Рівняння Даламбера для потенціалів

Отримали рівняння Даламбера для потенціалів:

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j},$$

$$\nabla^2\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.$$



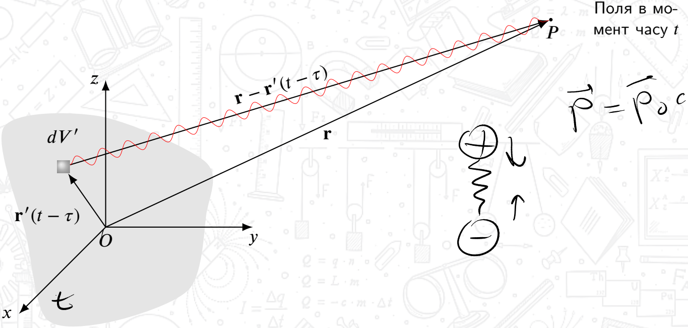
Розв'язками *запізнюючі* потенціали:

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\mu}{c}\iiint\limits_{V'} \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\right) dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\varepsilon}\iiint\limits_{V'} \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\right) dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

Формально розв'язками рівнянь є також вирази в яких замінено знак «−» на «+» в аргументі. Розв'язки зі знаком «+» в аргументі не мають ясного фізичного сенсу, оскільки вони формально відповідають ситуації, у якій спочатку створюється потенціал, а потім з'являються відповідні йому заряди та струми, тобто потенціал випереджає заряди та струми. Тому він називається *випереджаючим*.

Запізнюючі потенціали

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\mu}{c} \iiint\limits_{V'} \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\right) dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\varepsilon} \iiint\limits_{V'} \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\right) dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$



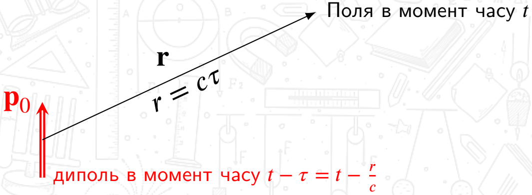
$\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t$

Поля у точці спостереження P в момент t залежать від того положення, яке заряди dV' займали у раніший момент часу $t' = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}$. Де $\tau = \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}$ — час, необхідний. щоб збурення поля дійшло до точки P.

Елементарний дипольний випромінювач

Монопольного випромінювання не існує!

Розглянемо електронейтральну систему — електричний диполь, який є елементарним вимпромінювачем електромагнітних хвиль.



Дипольний момент $\mathbf{p}$ змінюється за гармонічним законом:

$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cos \omega t$, $\quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 e^{i\omega t}$ (в комплексній формі)

Крім елементарного дипольного випромінювача ще існують елементарний магніто-дипольний випромінювач, квадрупольний ...

Запізнюючі потенціали для диполя

Для $\varepsilon = \mu = 1$.

$\vec{E} = \vec\nabla\times\vec\nabla\times\vec{P} + \underbrace{\nabla^2\vec{P} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}}_{0} = \vec\nabla\times\vec\nabla\times\vec{P}$

$\vec{E} = -\vec\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

$$\mathbf{A}(t) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{P}(t)}{\partial t},$$

$\vec{E} = -\vec\nabla(-\vec\nabla\vec{P}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}$

$\vec{E} = \vec\nabla\times\vec\nabla\times\vec{P} + \nabla^2\vec{P} - \frac{1}{c^2}\partial^2 P$

$$\varphi(t) = -\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathbf{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}\right) = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P}(t),$$

$\nabla^2\vec{R} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{R}}{\partial t^2} = 0$

де $\mathbf{P}(t)$ — вектор Герца:

$\vec{P}_0\cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$

$$\mathbf{P}(t) = \frac{\mathbf{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}, \quad \nabla^2\mathbf{P} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{P}}{\partial t^2} = 0$$

$\mathbf{p}$ — дипольний момент.

Як випливає з цього рівняння, значення вектора Герца в момент t у точці, що знаходиться на відстані r від осцилятора, визначається значенням дипольного моменту осцилятора момент $t - r/c$.

Поля диполя

$$\frac{\vec{P_0} e^{i(\omega t - kr)}}{r}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{P}.$$

$$\frac{\omega}{c} = k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Таким чином, задача визначення $\mathbf{B}$ і $\mathbf{E}$ зведено до обчислення ротора вектора $\mathbf{P}$ та його похідних.

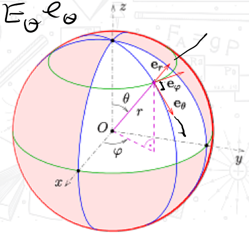
Якщо момент диполя змінюється за гармонічним законом $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 e^{\omega t}$, то вектор герца змінюватиметься за законом $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}_0 e^{i\omega(t-r/c)}}{r}$, а поля змінюватимуться за законами (в сферичних координатах):

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta$$

$$\begin{cases} B_\varphi = \dfrac{i\omega}{c}\sin\theta\left(\dfrac{1}{r} + \cancel{\dfrac{i\omega}{c}}\right)P, \\ E_r = 2\cos\theta\left(\dfrac{1}{r^2} + \cancel{\dfrac{i\omega}{cr}}\right)P, \\ E_\theta = \sin\theta\left(\dfrac{1}{r^2} + \cancel{\dfrac{i\omega}{cr}} - \cancel{\dfrac{\omega^2}{c^2}}\right)P. \end{cases}$$

$$\frac{1}{r} << \frac{\omega}{c}$$

$$\frac{1}{r} >> \frac{\omega}{c}$$



Поля диполя

Ближня зона — відстань від осцилятора до точки спостереження мала в порівнянні з довжиною його хвилі:

$$\frac{1}{r} \gg \frac{\omega}{c}, \quad r \ll \frac{\lambda}{2\pi}$$

$\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

$r \ll \frac{\lambda}{2\pi} \approx \lambda$

В кожен момент часу t електричне поле поблизу зі осцилятора збігається з полем статичного диполя, дипольний момент якого дорівнює миттєвого значення моменту осцилятора $p(t)$:

$$E_r = \frac{2\cos\theta\, p(t)}{r^3},$$

$$E_\theta = \frac{\sin\theta\, p(t)}{r^3}.$$

Поля диполя

Ближня зона

Ближня зона — відстань від осцилятора до точки спостереження мала в порівнянні з довжиною його хвилі:

$$\frac{1}{r} \gg \frac{\omega}{c}, \quad r \ll \frac{\lambda}{2\pi}$$

Оскільки

$$\frac{\partial p(t)}{\partial t} = \frac{\partial q(t) l}{\partial t} = \frac{\partial q(t)}{\partial t} l = I l,$$

магнітне поле збігається з полем еквівалентного елемента струму довжини l, що визначається формулою Біо і Савара:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{cr^3}\left[\frac{\partial \mathbf{p}(t)}{\partial t} \times \mathbf{r}\right] = \frac{I}{c}\frac{[\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{r^3},$$

Поля диполя

Ближня зона

Ближня зона — відстань від осцилятора до точки спостереження мала в порівнянні з довжиною його хвилі:

$$\frac{1}{r} \gg \frac{\omega}{c}, \quad r \ll \frac{\lambda}{2\pi}$$

В ближній зоні поля не запізнюються і співпадають з полями статичного диполя та струму.

Поля диполя

Хвильова зона

$p = p_0 \cos \omega t$

$\dot{p} = -\omega p_0 \sin \omega t \qquad \ddot{p} = -\omega^2 p_0 \cos \omega t$

Відстань, яка набагато більша за довжину хвилі:

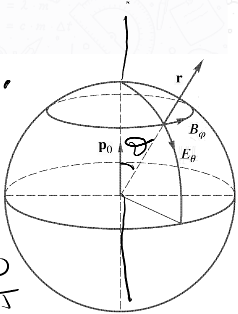
$$\frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{c}, \quad r \gg \frac{\lambda}{2\pi}$$

називається *хвильовою зоною.*

$$E_\theta = B_\varphi = -\frac{\omega^2 \sin\theta}{c^2 r} p_0 \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) =$$

$$= \frac{\sin\theta}{rc^2}\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

$$E_r = E_\varphi = B_r = B_\theta = 0.$$



$\theta = 0$

$\theta = \pi$

У хвильовій зоні осцилятора електричне та магнітне поля чисельно дорівнюють один одному і спадають обернено пропорційно першій степені відстані від осцилятора.

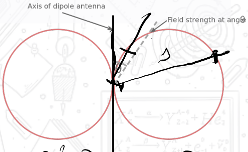
Поля диполя

Хвильова зона

Відстань, яка набагато більша за довжину хвилі:

$$\frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{c}, \quad r \gg \frac{\lambda}{2\pi}$$

називається *хвильовою зоною*.



$$E_\theta = B_\varphi = -\frac{\omega^2 \sin\theta}{c^2 r} p_0 \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) =$$

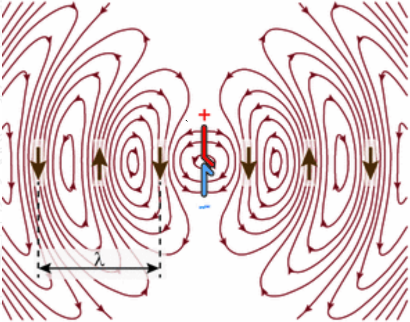
$$= \frac{\sin\theta}{rc^2}\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

$$E_r = E_\varphi = B_r = B_\theta = 0.$$

$$S = \frac{c}{4\pi} E B = \frac{c}{4\pi} \frac{\sin^2\theta}{r^2 c^3} \ddot{p}^2\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

Напруженість поля також залежить від полярного кута θ точки спостереження: на продовженні осі осцилятора ($\theta = 0$ і $\theta = \pi$) поле дорівнює нулю, максимального ж значення воно досягає в екваторіальній площині осцилятора ($\theta = \pi/2$). У кожній точці хвильової зони вектори $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ та $\mathbf{r}$ взаємно перпендикулярні та утворюють правогвинтову систему.

Ближня та хвильова зони



В ближній зоні поле ніби «причеплене» до диполя, а у хвильовій зоні поле «відривається» від нього — випромінюється.

https://youtu.be/NPJinVFqC1s

Потужність, що випромінюється осцилятором

Густина потоку електромагнітної енергії характеризується вектором Пойнтінга. Тому потік електромагнітної, енергії крізь поверхню σ сфери радіусом r (потужність випромінювання), що оточує осцилятор, дорівнює:

$$\frac{dW}{dt} = \oiint_S \vec{S}\cdot d\vec{S} \qquad d\sigma = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$\frac{dW}{dt} = -\oiint_\sigma \mathbf{S} d\boldsymbol{\sigma} = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]\, r^2 \sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$S = \frac{c}{4\pi} EB \qquad p_0^2 \cos^2(\omega t - kr)$$

$$= \frac{\ddot{p}^2\left(t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi c^3}\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\ddot{p}^2\left(t-\frac{r}{c}\right)}{3c^3}$$

$$\ddot{p} = \omega^2 p_0 \cos$$

Середнє значення потужності випромінювання за період:

$$\overline{\cos^2(\omega t - kr)} = \frac{1}{2}$$

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dW}{dt} dt = \frac{\omega^4 p_0^2}{3c^3} \qquad \frac{2\omega^4 p_0^2}{\cancel{2}\, 3c^3}$$

Випромінювання рухомого заряду

Припустимо, що диполь складається з двох точкових зарядів: $+q$ і $-q$, з яких додатній нескінченно важкий, а тому його можна вважати нерухомим.

Дипольний момент цієї системи і його друга похідна по часу

$$\mathbf{p} = -q\mathbf{r}', \quad \ddot{\mathbf{p}} = -q\dot{\mathbf{v}},$$

де $v = \dot{\mathbf{r}}'$ — швидкість заряду, а $\dot{\mathbf{v}}$ — його прискорення. Потужність, що випромінюється:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3}\dot{\mathbf{v}}^2$$

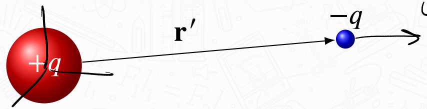
Таким чином, електричний заряд випромінює електромагнітну енергію, якщо він рухається прискорено.

Випромінювання рухомого заряду

$\vec{p} = +q\vec{r} + (-q)\vec{r}\,' = -q\vec{r}\,'$

0

$\vec{v} = \dot{\vec{r}}\,'$



Дипольний момент цієї системи і його друга похідна по часу

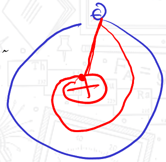
$$\mathbf{p} = -q\mathbf{r}', \quad \ddot{\mathbf{p}} = -q\dot{\mathbf{v}},$$

$\dot{\vec{p}} = -q\vec{v}$

$\ddot{\vec{p}} = -q\dot{\vec{v}}$

де $v = \dot{\mathbf{r}}'$ — швидкість заряду, а $\dot{\mathbf{v}}$ — його прискорення.
Потужність, що випромінюється:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3}\dot{\mathbf{v}}^2$$

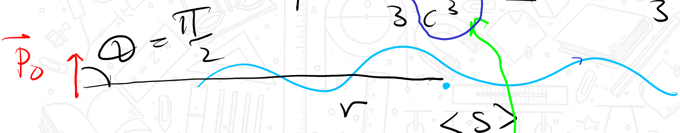


Таким чином, електричний заряд випромінює електромагнітну енергію, якщо він рухається прискорено.

Приклади

Електромагнітна хвиля, що випромінюється диполем, поширюється у вакуумі так, що у хвильовій зоні на промені, перпендикулярному до осі диполя, на відстані r від нього середнє значення густини потоку енергії дорівнює $\langle S\rangle$. Знайти середню потужність випромінювання диполя.

$$\bar{P} = \frac{\omega^4 p_0^2}{3c^3} = \frac{\langle S\rangle 8\pi r^2}{3}$$



$$\bar{P} = \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle$$

$$p = p_0 \cos\omega(t-\tau)$$

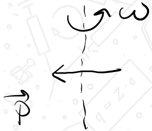
$$\ddot{p} = -\omega^2 p$$

$$S = \frac{c}{4\pi}E^2 = \frac{1}{4\pi}\frac{\ddot{p}^2(t-\tau)}{r^2c^3} = \frac{1}{4\pi}\frac{\omega^4 p_0^2\cos^2\omega(t-\tau)}{r^2c^3}$$

$$\langle S\rangle = \frac{1}{8\pi}\frac{\omega^4 p_0^2}{r^2c^3}$$

Приклади

Постійний за модулем електричний диполь моментом $\mathbf{p}$ обертають з кутовою швидкістю ω навколо осі, що перпендикулярна до осі диполя та проходить через його середину. Знайти потужність випромінювання диполя.



$$\frac{dW}{dt} = \frac{2\ddot{p}^2}{3c^3}$$

$$\ddot{\vec{p}} = -\omega^2 \vec{p}$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2\omega^4 p^2}{3c^3}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\vec{a}_\tau}_{=0} \vec{\tau} + \vec{a}_n \vec{n}$$

$$a_n = \omega^2 r$$

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

Приклади

Знайти потужність випромінювання нерелятивістської частинки з зарядом e і масою m, що рухається круговою орбітою радіуса R у полі нерухомого точкового заряду q.