Випромінювання електромагнітних хвиль

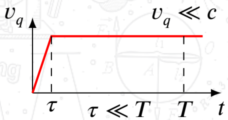
Лекції з електрики та магнетизму

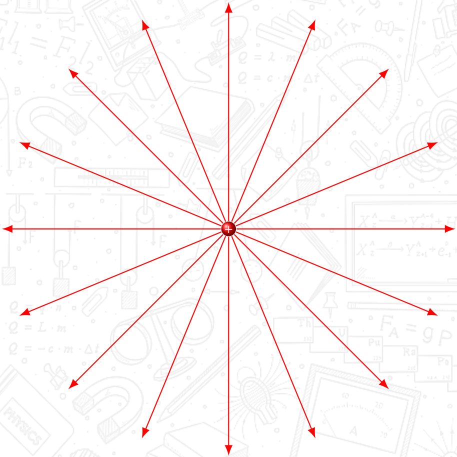
Пономаренко С. М.

Випромінювання заряду

Розглянемо електричне поле, точкового заряду q. Якщо заряд перебуває в стані спокою, його електростатичне поле описується радіальними силовими лініями, що виходять із заряду.

Нехай у момент часу $t = 0$ заряд під дією зовнішньої сили починає рухатися з прискоренням a, а через деякий час τ дія сили припиняється, після чого заряд рухається рівномірно зі швидкістю $v = a\tau$. Графік швидкості руху заряду наведено на рис.

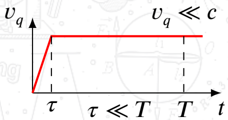




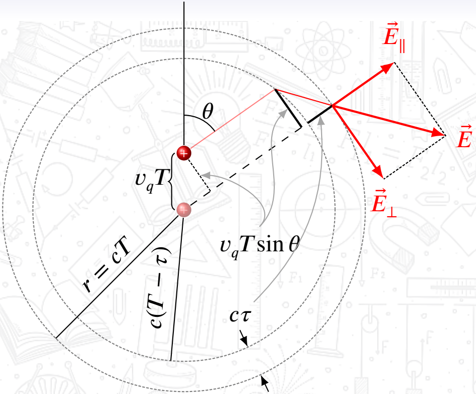
Випромінювання заряду

Розглянемо електричне поле, точкового заряду q. Якщо заряд перебуває в стані спокою, його електростатичне поле описується радіальними силовими лініями, що виходять із заряду.

Нехай у момент часу $t = 0$ заряд під дією зовнішньої сили починає рухатися з прискоренням a, а через деякий час τ дія сили припиняється, після чого заряд рухається рівномірно зі швидкістю $v = a\tau$. Графік швидкості руху заряду наведено на рис.



Математичні викладки



$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{v_qT\sin\theta}{c\tau}$$

$$E_{\parallel} = \frac{q}{(cT)^2} \overset{r=cT}{=} \frac{q}{(cT)r}$$

$$a = \frac{v_q}{\tau}$$

$$E_{\perp}(t) = \frac{q}{(cT)r}\frac{v_qT\sin\theta}{c\tau}$$

$$E_{\perp}(t) = \frac{1}{c^2}\frac{q}{r}a\left(t - \frac{r}{c}\right)\sin\theta$$

Напруженість електричного поля хвилі $E_{\perp}$ спадає як $1/r$, на відміну від електростатичного поля $E_{\parallel}$, яке спадає як $1/r^2$. Це пояснюється законом збереження енергії: енергія хвилі розподіляється по поверхні сфери ($\propto r^2$), а густина енергії $\propto E^2$. Крім того, $E_{\perp}$ у момент часу t залежить від прискорення заряду a в момент $t - r/c$, оскільки хвиля досягає точки через час r/c.

Потенціали електромагнітного поля

Калібрувальні перетворення

Задачу про випромінювання електромагнітних хвиль зручно розглядати за допомогою електромагнітних потенціалів φ та $\vec{A}$.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Потенціали визначаються не точно. Якщо змінити потенціали наступним чином:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f,$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t},$$

де $f(x, y, z, t)$ – довільна функція координат та часу, то спостережувані величини – поля $\vec{E}$ та $\vec{B}$ при таких перетвореннях не зміняться. Такі перетворення називаються калібрувальними перетвореннями.

Потенціали електромагнітного поля

Калібрування Лоренца

Запишемо рівняння Максвелла

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

через потенціали:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

Використовуючи $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} + \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$$

Користуючись неоднозначністю потенціалів, визначених з точністю до калібрувального перетворення, можна на них накласти умову:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Ця умова називається *калібруванням Лоренца*.

Потенціали електромагнітного поля

Калібрування Лоренца

Запишемо рівняння Максвелла

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

через потенціали:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

Використовуючи $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} + \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$$

Калібрування Лоренца аналогічне до вибору функції f, такою, що задовольняє рівнянню

$$\nabla^2 f - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Рівняння є хвильовим рівнянням або однорідним рівнянням Даламбера.

Потенціали електромагнітного поля

Калібрування Лоренца

Запишемо рівняння Максвелла

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

через потенціали:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

Використовуючи $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} + \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$$

З урахуванням калібрування Лоренца отримуємо

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}$$

Рівняння є неоднорідним рівнянням Даламбера.

Рівняння для скалярного потенціалу

Використаємо рівняння Максвелла

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho,$$

Використовуючи калібрування Лоренца

$$\nabla^2 \varphi - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi \rho}{\varepsilon}$$

Рівняння Даламбера для потенціалів

Отримали рівняння Даламбера для потенціалів:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j},$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.$$

Розв'язками *запізнюючі* потенціали:

$$\vec{A}(t) = \frac{\mu}{c}\iiint\limits_{V'} \frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v}\right) dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\varepsilon}\iiint\limits_{V'} \frac{\rho\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v}\right) dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

В даний момент часу t в даній точці $\vec{r}$ потенціал обумовлений не розподілом і величиною зарядів і струмів у даний момент часу, а їх положеннями та величинами у попередні моменти часу, що визначаються з урахуванням швидкості поширення електромагнітного поля.

Рівняння Даламбера для потенціалів

Отримали рівняння Даламбера для потенціалів:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j},$$
$$\nabla^2 \varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.$$

Розв'язками *запізнюючі* потенціали:

$$\vec{A}(t) = \frac{\mu}{c}\iiint\limits_{V'} \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right) dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\varepsilon}\iiint\limits_{V'} \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right) dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Потенціали називаються *запізнюючими*, тому що вони описують потенціали в пізніший момент часу t в порівнянні з моментом часу $t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}$ для зарядів та струмів, які цей потенціал створили.

Рівняння Даламбера для потенціалів

Отримали рівняння Даламбера для потенціалів:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j},$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.$$

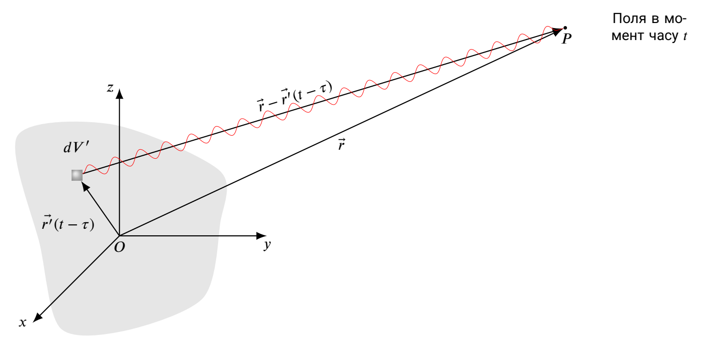
Розв'язками *запізнюючі* потенціали:

$$\vec{A}(t) = \frac{\mu}{c}\iiint\limits_{V'} \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right) dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\varepsilon}\iiint\limits_{V'} \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right) dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Формально розв'язками рівнянь є також вирази в яких замінено знак «–» на «+» в аргументі. Розв'язки зі знаком «+» в аргументі не мають ясного фізичного сенсу, оскільки вони формально відповідають ситуації, у якій спочатку створюється потенціал, а потім з'являються відповідні йому заряди та струми, тобто потенціал випереджає заряди та струми. Тому він називається *випереджаючим*.

Запізнюючі потенціали

$$\vec{A}(t) = \frac{\mu}{c} \iiint\limits_{V'} \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right) dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\varepsilon} \iiint\limits_{V'} \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right) dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$



Поля у точці спостереження P в момент t залежать від того положення, яке заряди dV' займали у раніший момент часу $t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}$. Де $\tau = \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}$ — час, необхідний. щоб збурення поля дійшло до точки P.

Математична довідка

Для випадку $r \gg r'$, використовуючи формулу еквівалентності $(1+x)^n = 1 + nx$:

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = \sqrt{r^2 - 2\,\vec{r}\cdot\vec{r}\,' + r'^2} \approx r - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r}.$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^3}.$$

$$t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c} \approx t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{cr} = \tau + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{cr}.$$

Скалярний потенціал

Далі покладемо $\varepsilon = \mu = 1$.
Розкладемо в ряд Тейлора підінтегральну функцію по степеням малої величини $\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{cr}$

$$\varphi(t) = \iiint\limits_{V'} \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right) dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx$$

$$\approx \iiint\limits_{V'} \left(\rho(\tau) + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr}\dot{\rho}(\tau)\right)\left[\frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^3}\right] dV' \approx$$

$$\approx \frac{1}{r}\iiint\limits_{V'} \rho(\tau) dV' + \frac{\vec{r}}{r^3}\iiint\limits_{V'} \rho(\tau)\vec{r}' dV' + \frac{\vec{r}}{cr^2}\iiint\limits_{V'} \dot{\rho}(\tau)\vec{r}' dV' =$$

$$= \frac{q}{r} + \frac{\vec{r}\vec{p}}{r^3} + \frac{\vec{r}\dot{\vec{p}}}{cr^2}.$$

Скалярний потенціал

Для електронейтральних тіл $q=0$, тому

$$\varphi(t)=\frac{\vec{r}\vec{p}}{r^3}+\frac{\vec{r}\dot{\vec{p}}}{cr^2}.$$

Спростимо останній вираз, помітивши, що

$$-\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{p}}{r}=-\vec{p}\cdot\overbrace{\vec{\nabla}\frac{1}{r}}^{-\frac{\vec{r}}{r^3}}-\frac{1}{r}\overbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{p}}^{-\frac{\dot{\vec{p}}\vec{r}}{cr}}.$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{p}=\frac{\partial p_x}{\partial x}+\frac{\partial p_y}{\partial y}+\frac{\partial p_z}{\partial z}=\frac{\partial p_x}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial x}+\frac{\partial p_y}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial y}+\frac{\partial p_z}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial z}=-\frac{\dot{\vec{p}}\vec{r}}{cr}.$$

Отже,

$$\varphi(t)=-\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right).$$

Векторний потенціал

$$\vec{A}(t) = \frac{1}{c}\iiint\limits_{V'} \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right) dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx$$

$$\approx \frac{1}{c}\iiint\limits_{V'} \left(\vec{j}(\tau) + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr}\dot{\vec{j}}(\tau)\right)\left[\frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^3}\right] dV' \approx$$

$$\approx \frac{1}{cr}\iiint\limits_{V'} \vec{j}(\tau) dV'$$

Ми можемо обмежилися лише першим членом цього розкладання. Як показують розрахунки, наступні доданки пов’язані з магніто-дипольною складовою випромінювання.

Векторний потенціал

$$\vec{A}(t) \approx \frac{1}{cr} \iiint\limits_{V'} \vec{j}(\tau) dV'$$

Закон збереження заряду

$$\frac{\partial \rho(x', y', z', t)}{\partial t} = -\vec{\nabla}' \vec{j}(x', y', z', t),$$

де $\vec{\nabla}'$ означає диференціювання по координатам x', y', z'.

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{p}(\tau) = -\iiint\limits_{V'} \vec{r}' \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(x', y', z', t) dV',$$

Використаємо співвідношення:

$$(\vec{a}\vec{r}')\vec{\nabla}' \cdot \vec{j} = \vec{\nabla}' \cdot (j(\vec{a}\vec{r}')) - \vec{j}\vec{\nabla}'(\vec{a}\vec{r}') = \vec{\nabla}' \cdot (j(\vec{a}\vec{r}')) - \vec{a}\vec{j}.$$

де $\vec{a}$ $(a = 1)$ довільний постійний вектор.

Векторний потенціал

$$\vec{a}\frac{\partial}{\partial t}\vec{p}(\tau) = -\iiint\limits_{V'} \vec{\nabla}' \cdot (j(\vec{a}\vec{r}'))dV' + \vec{a}\iiint\limits_{V'} \vec{j}(\tau)dV',$$

Перший інтеграл може бути за допомогою теореми Гауса перетворений в інтеграл поверхні S', що охоплює об'єм V'. Оскільки всі електричні заряди, за умовою, перебувають усередині обсягу об'ємі V', через граничну поверхню S' струмів не протікає, тобто на ній $\vec{j} = 0$ і, отже, дорівнює нулю.

Отримали

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{p}(\tau) = \iiint\limits_{V'} \vec{j}(\tau)dV',$$

Отже

$$\vec{A}(t) \approx \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}\right)$$

Зауваження після виведення

В формулі

$$t' = t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{cr}$$

час $\frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr}$ — є часом власним часом запізнення елемента dV' (запізнення по відношенню до вибраного «центру» системи) і при виведенні всіх формул є його вважали малим в порівняння часом загального запізнення $\frac{r}{c}$.

Крім цього, необхідно, щоб за час власного запізнення не надто сильно змінювалися густини зарядів ρ і струмів $\vec{j}$, інакше не можна буде користуватися розкладами через великі значення похідних за часом $\dot{\rho}$ і струмів $\dot{\vec{j}}$. Заряди в системі за час власного запізнення проходять відстань порядку $\frac{vr'}{c}$. Якщо ця відстань мала порівняно з розмірами системи r', то за час власного запізнення розташування зарядів суттєво не змінюється і прийняте наближення допустиме.

Умовою його застосування служить сильна нерівність $v\frac{r'}{c} \ll r'$ з якої випливає

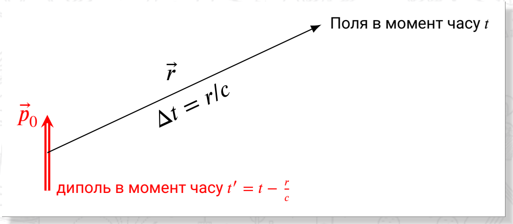
$$v \ll c,$$

тобто, швидкості руху зарядів у системі повинні бути нерелятивістськими.

Елементарний дипольний випромінювач

Монопольного випромінювання не існує!

Розглянемо електронейтральну систему — електричний диполь, який є елементарним вимпромінювачем електромагнітних хвиль.



Дипольний момент $\vec{p}$ змінюється за гармонічним законом:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t, \quad \vec{p} = \vec{p}_0 e^{i\omega t} \text{ (в комплексній формі)}$$

Крім елементарного дипольного випромінювача ще існують елементарний магніто-дипольний випромінювач, квадрупольний …

Запізнюючі потенціали для диполя

$$\vec{A}(t) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{P}(t)}{\partial t},$$

$$\varphi(t) = -\frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}\right) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}(t),$$

де $\vec{P}(t)$ – вектор Герца:

$$\vec{P}(t) = \frac{\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}, \quad \nabla^2\vec{P} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2} = 0$$

$\vec{p}$ – дипольний момент.

Як випливає з цього рівняння, значення вектора Герца в момент t у точці, що знаходиться на відстані r від осцилятора, визначається значенням дипольного моменту осцилятора момент $t - r/c$.

Поля диполя

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{P}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{P}.$$

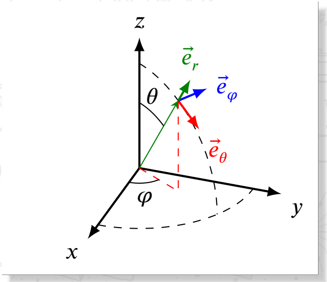
Таким чином, задача визначення $\vec{B}$ і $\vec{E}$ зведено до обчислення ротора вектора $\vec{P}$ та його похідних.

Якщо момент диполя змінюється за гармонічним законом $\vec{p} = \vec{p}_0 e^{\omega t}$, то вектор герца змінюватиметься за законом $\vec{P} = \frac{\vec{p}_0 e^{i\omega(t - r/c)}}{r}$, а поля змінюватимуться за законами (в сферичних координатах):

$$B_\varphi = \frac{i\omega}{c}\sin\theta\left(\frac{1}{r} + \frac{i\omega}{c}\right)P,$$

$$E_r = 2\cos\theta\left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr}\right)P,$$

$$E_\theta = \sin\theta\left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr} - \frac{\omega^2}{c^2}\right)P.$$



Поля диполя

Ближня зона

Ближня зона — відстань від осцилятора до точки спостереження мала в порівнянні з довжиною його хвилі:

$$\frac{1}{r} \gg \frac{\omega}{c}, \quad r \ll \frac{\lambda}{2\pi}$$

В кожен момент часу t електричне поле поблизу зі осцилятора збігається з полем статичного диполя, дипольний момент якого дорівнює миттєвого значення моменту осцилятора $p(t)$:

$$E_r = \frac{2\cos\theta\, p(t)}{r^3},$$

$$E_\theta = \frac{\sin\theta\, p(t)}{r^3}.$$

Поля диполя

Ближня зона

Ближня зона — відстань від осцилятора до точки спостереження мала в порівнянні з довжиною його хвилі:

$$\frac{1}{r} \gg \frac{\omega}{c}, \quad r \ll \frac{\lambda}{2\pi}$$

Оскільки

$$\frac{\partial p(t)}{\partial t} = \frac{\partial q(t) l}{\partial t} = \frac{\partial q(t)}{\partial t} l = I l,$$

магнітне поле збігається з полем еквівалентного елемента струму довжини l, що визначається формулою Біо-Савара-Лаплпса:

$$\vec{B} = \frac{1}{cr^3}\left[\frac{\partial \vec{p}(t)}{\partial t} \times \vec{r}\right] = \frac{I}{c}\frac{\left[\vec{l} \times \vec{r}\right]}{r^3},$$

Поля диполя

Ближня зона

Ближня зона — відстань від осцилятора до точки спостереження мала в порівнянні з довжиною його хвилі:

$$\frac{1}{r} \gg \frac{\omega}{c}, \quad r \ll \frac{\lambda}{2\pi}$$

В ближній зоні поля не запізнюються і співпадають з полями статичного диполя та струму.

Поля диполя

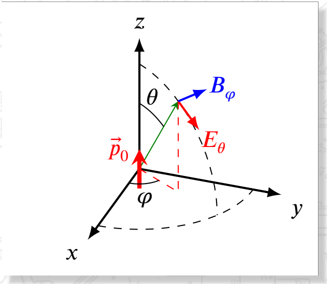
Хвильова зона

Відстань, яка набагато більша за довжину хвилі:

$$\frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{c}, \quad r \gg \frac{\lambda}{2\pi}$$

називається хвильовою зоною.

$$E_\theta = B_\varphi = -\frac{\omega^2 \sin\theta}{c^2 r} p_0 \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) = \\ = \frac{\sin\theta}{rc^2}\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right), \\ E_r = E_\varphi = B_r = B_\theta = 0.$$



У хвильовій зоні осцилятора електричне та магнітне полія чисельно дорівнюють один одному і спадають обернено пропорційно першій степені відстані від осцилятора.

Поля диполя

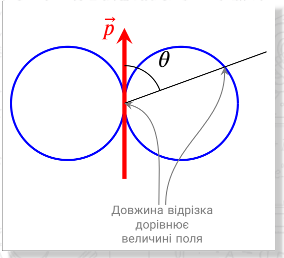
Хвильова зона

Відстань, яка набагато більша за довжину хвилі:

$$\frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{c}, \quad r \gg \frac{\lambda}{2\pi}$$

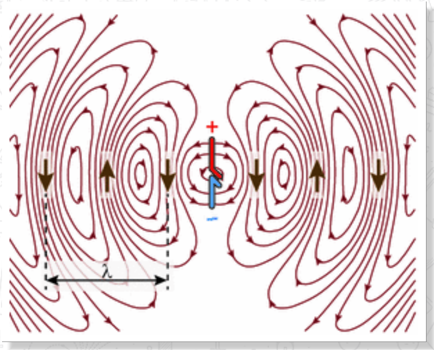
називається хвильовою зоною.

$$E_\theta = B_\varphi = -\frac{\omega^2 \sin\theta}{c^2 r} p_0 \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) =$$
$$= \frac{\sin\theta}{rc^2}\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right),$$
$$E_r = E_\varphi = B_r = B_\theta = 0.$$



Напруженість поля також залежить від полярного кута θ точки спостереження: на продовженні осі осцилятора ($\theta = 0$ і $\theta = \pi$) поле дорівнює нулю, максимального ж значення воно досягає в екваторіальній площині осцилятора ($\theta = \pi/2$). У кожній точці хвильової зони вектори $\vec{E}$, $\vec{B}$ та $\vec{r}$ взаємно перпендикулярні та утворюють правогвинтову систему.

Ближня та хвильова зони

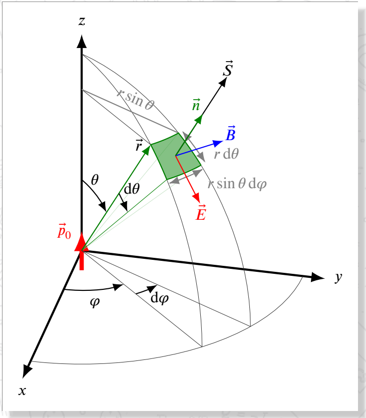


В ближній зоні поле ніби «причеплене» до диполя, а у хвильовій зоні поле «відривається» від нього — випромінюється.

https://youtu.be/NPJinVFqC1s

Потужність, що випромінюється осцилятором

Густина потоку електромагнітної енергії характеризується вектором Пойнтінга $\vec{S}$. Тому потік електромагнітної, енергії крізь поверхню сфери радіусом r, що оточує осцилятор, називається *потужністю випромінювання*.



Елемент площі поверхні в сферичній системі координат

$$d\sigma = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

Вектор орієнтованої площадки

$$d\vec{\sigma} = d\sigma\vec{n}.$$

Як видно з рисунку $\vec{S} \uparrow\uparrow \vec{n}$.

Потужність, що випромінюється осцилятором

Густина потоку електромагнітної енергії характеризується вектором Пойнтінга $\vec{S}$. Тому потік електромагнітної, енергії крізь поверхню сфери радіусом r, що оточує осцилятор, називається *потужністю випромінювання*.

$$\frac{dW}{dt} = -\oiint_{\sigma} \vec{S}d\vec{\sigma} = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{c}{4\pi}|[\vec{E}\times\vec{B}]|\, r^2 \sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= \frac{\ddot{p}^2\left(t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi c^3}\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\ddot{p}^2\left(t-\frac{r}{c}\right)}{3c^3}$$

Середнє значення потужності випромінювання за період:

$$\left\langle\frac{dW}{dt}\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dW}{dt}dt = \frac{\omega^4 p_0^2}{3c^3}$$

Потужність, що випромінюється осцилятором

Густина потоку електромагнітної енергії характеризується вектором Пойнтінга $\vec{S}$. Тому потік електромагнітної, енергії крізь поверхню сфери радіусом r, що оточує осцилятор, називається *потужністю випромінювання*.

Таким чином, осцилятор неперервно випромінює енергію в навколишній простір, причому, середня швидкість випромінювання енергії

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dW}{dt} dt = \frac{\omega^4 p_0^2}{3c^3}$$

пропорційна квадрату амплітуди його електричного моменту p_0 і пропорційна четвертій степені частоти ω.

Цією останньою обставиною пояснюється, наприклад, той факт, що для радіозв'язку необхідно користуватися порівняно короткими електромагнітними хвилями довжиною від десятків метрів до десятків кілометрів; навпаки, випромінювання повільно змінних струмів, що застосовуються в техніці (хвилі довжиною в тисячі та десятки тисяч кілометрів), залишається практично непомітним.

Потужність, що випромінюється осцилятором

Густина потоку електромагнітної енергії характеризується вектором Пойнтінга $\vec{S}$. Тому потік електромагнітної, енергії крізь поверхню сфери радіусом r, що оточує осцилятор, називається *потужністю випромінювання*.

Колір неба

Тим же характером залежності випромінювання осцилятора від частоти пояснюється, наприклад, блакитний колір неба. Сонячне світло, що пронизує атмосферу, розсіюється молекулами повітря, які можна вважати елементарним осциляторами. Розсіювання світла обумовлюється тим, що під впливом світлових хвиль ці осцилятори здійснюють «вимушені» коливання. Так як період власних коливань осциляторів, відповідних молекул повітря, істотно відрізняється від періоду видимого світла (відсутність резонансу), то амплітуда вимушених коливань осциляторів слабо залежить від частоти (або довжини) світлової хвилі. Тому інтенсивність розсіяного світла, тобто інтенсивність вимушеного випромінювання цих осциляторів, обернено пропорційна λ^4. Таким чином, короткохвильове світло (синій колір) розсіюється сильніше, ніж, наприклад, червоний, і створює блакитний колір неба.

Випромінювання рухомого заряду

Припустимо, що диполь складається з двох точкових зарядів: $+q$ і $-q$, з яких додатній нескінченно важкий, а тому його можна вважати нерухомим.

Дипольний момент цієї системи і його друга похідна по часу

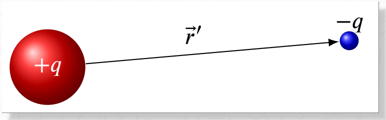
$$\vec{p} = -q\vec{r}', \quad \ddot{\vec{p}} = -q\dot{\vec{v}},$$

де $v = \dot{\vec{r}}'$ — швидкість заряду, а $\dot{\vec{v}}$ — його прискорення.
Потужність, що випромінюється:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3}\dot{\vec{v}}^2$$

Таким чином, електричний заряд випромінює електромагнітну енергію, якщо він рухається прискорено.

Випромінювання рухомого заряду



Дипольний момент цієї системи і його друга похідна по часу

$$\vec{p} = -q\vec{r}', \quad \ddot{\vec{p}} = -q\dot{\vec{v}},$$

де $v = \dot{\vec{r}}'$ — швидкість заряду, а $\dot{\vec{v}}$ — його прискорення.
Потужність, що випромінюється:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3}\dot{\vec{v}}^2$$

Таким чином, електричний заряд випромінює електромагнітну енергію, якщо він рухається прискорено.

Задачі

Задача 1

Електромагнітна хвиля, що випромінюється диполем, поширюється у вакуумі так, що у хвильовій зоні на промені, перпендикулярному до осі диполя, на відстані r від нього середнє значення густини потоку енергії дорівнює $\langle S \rangle$. Знайти середню потужність випромінювання диполя.

Задача 2

Постійний за модулем електричний диполь моментом $\vec{p}$ обертають з кутовою швидкістю ω навколо осі, що перпендикулярна до осі диполя та проходить через його середину. Знайти потужність випромінювання диполя.

Задача 3

Знайти потужність випромінювання нерелятивістської частинки з зарядом e і масою m, що рухається круговою орбітою радіуса R у полі нерухомого точкового заряду q.