Електромагнітні хвилі

Лекції з електрики та магнетизму

Пономаренко С. М.

Хвильові рівняння

Виведення

Розглянемо електромагнітне поле в однорідній ділянці простору, де немає вільних зарядів і струмів провідності.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{D} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \end{cases}$$

Врахуємо також матеріальні рівняння $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

До другого рівняння застосуємо операцію rot:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B}.$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}.$$

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Приходимо до рівняння для електричного поля:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \text{де } \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Хвильові рівняння

Виведення

Розглянемо електромагнітне поле в однорідній ділянці простору, де немає вільних зарядів і струмів провідності.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{D} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \end{cases}$$

Врахуємо також матеріальні рівняння $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

До четвертого рівняння застосуємо операцію rot:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = +\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{D}.$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H}.$$

$$\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{D} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Рівняння для магнітного поля:

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad \text{де } \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Хвильові рівняння

Рівняння вигляду:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \vec{H} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \end{cases}$$

називаються хвильовими рівняннями. Вони описують процес поширення величин $\vec{E}$ та $\vec{H}$ у просторі та часі зі швидкістю:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Такий процес називається електромагнітною хвилею. У вакуумі $\varepsilon = \mu = 1$, а тому швидкість поширення хвилі буде $v = c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с. В середовищі для якого $\varepsilon, \mu > 1$, а тому швидкість поширення буде меншою ніж у вакуумі $v < c$ на величну:

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu},$$

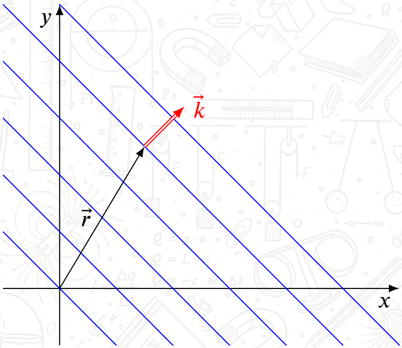
яка називається абсолютним показником заломлення середовища.

Плоскі електромагнітні хвилі

Розв’язком хвильових рівнянь, що описують плоскі хвилі є функції вигляду:

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \tag{1}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \tag{2}$$

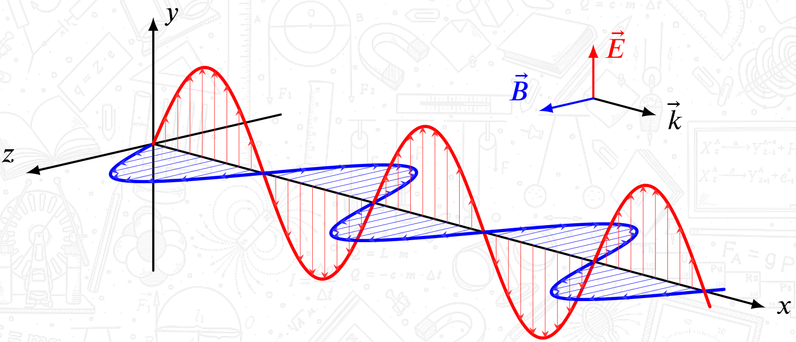


Плоскі електромагнітні хвилі

Розв'язком хвильових рівнянь, що описують плоскі хвилі є функції вигляду:

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad (1)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad (2)$$



Плоскі електромагнітні хвилі

Розв'язком хвильових рівнянь, що описують плоскі хвилі є функції вигляду:

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \qquad (1)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \qquad (2)$$

Підставимо (1) та (2) в рівняння Максвелла. Диференціальні операції заміняються на:

$$\vec{\nabla} \to -i\vec{k}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \to i\omega$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c}\vec{B}, \quad -\vec{k} \times \vec{H} = \frac{\omega}{c}\varepsilon\vec{E}$$

$$k = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\omega = \frac{n}{c}\omega = \frac{\omega}{v}, \quad nE_m = B_m, \quad \sqrt{\varepsilon}E_m = \sqrt{\mu}H_m$$

Плоскі електромагнітні хвилі

Енергія хвилі та вектор Пойнтінга

Розв’язком хвильових рівнянь, що описують плоскі хвилі є функції вигляду:

$$\vec{k}\times\vec{E}=\frac{\omega}{c}\vec{B},\quad -\vec{k}\times\vec{H}=\frac{\omega}{c}\varepsilon\vec{E}$$

$$k=\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\omega=\frac{n}{c}\omega=\frac{\omega}{v},\quad nE_m=B_m,\quad \sqrt{\varepsilon}E_m=\sqrt{\mu}H_m$$

Густина енергії (амплітуда)

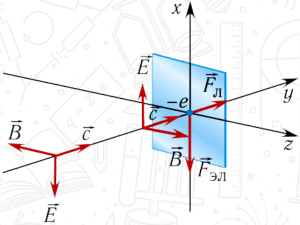
$$w_m=\frac{\varepsilon E_m^2}{8\pi}+\frac{\mu H_m^2}{8\pi},\quad \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_m=H_m,\quad w_m=\frac{\varepsilon E_m^2}{4\pi}=\frac{\mu H_m^2}{4\pi}.$$

Вектор вектор Пойнтінга $\vec{\Pi}=\frac{c}{4\pi}[\vec{E}\times\vec{H}]$:

$$\vec{\Pi}=\frac{c^2}{4\pi\varepsilon\omega}\vec{H}\times\vec{k}\times\vec{H}=\frac{c^2}{4\pi\varepsilon\omega}H^2\vec{k}=\frac{c}{\omega}\frac{1}{\varepsilon\mu}\left(\frac{\mu H^2}{4\pi}\right)c\vec{k}=w\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{\vec{k}}{k}=w\vec{v}.$$

Тиск світла

Максвел теоретично показав, що електромагнітні хвилі, відбиваючись чи поглинаючись тілами, на які вони падають, чинять на них тиск. Цей тиск виникає внаслідок впливу магнітного поля хвилі на електричні струми, що збуджуються електричним полем тієї самої хвилі.



Електричне поле хвилі збуджує електричний струм густиною $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ ($\vec{F} = e\vec{E}$). Внаслідок цього на об'єму середовища діє сила Ампера $d\vec{F} = \frac{1}{c}[\vec{j} \times \vec{B}]dV$, спрямована убік поширення хвилі. Ця сила та викликає тиск електромагнітної хвилі.

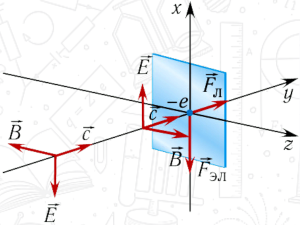
У випадку поглинання вся енергія, яка падає за секунду на поверхню $wvdS$ тіла, перетворюється на теплову $jEdV$:

$$dF = \frac{1}{c}j\frac{c}{v}E = \frac{1}{v}jE = \frac{1}{v}wvdS = wdS,$$

звідки тиск $p = \frac{dF}{dS} = w$

Тиск світла

Максвел теоретично показав, що електромагнітні хвилі, відбиваючись чи поглинаючись тілами, на які вони падають, чинять на них тиск. Цей тиск виникає внаслідок впливу магнітного поля хвилі на електричні струми, що збуджуються електричним полем тієї самої хвилі.



Електричне поле хвилі збуджує електричний струм густиною $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ ($\vec{F} = e\vec{E}$). Внаслідок цього на об'єму середовища діє сила Ампера $d\vec{F} = \frac{1}{c}[\vec{j} \times \vec{B}]dV$, спрямована убік поширення хвилі. Ця сила та викликає тиск електромагнітної хвилі.

У випадку часткового відбивання, тиск дорівнює

$$p = w(1 + \rho),$$

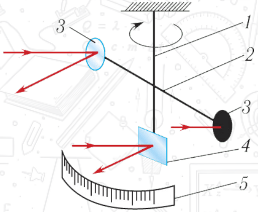
де $\rho = 0 \ldots 1$ — коефіцієнт відбивання.

Тиск світла

Дослід Лебедєва

Петро Миколайович Лебедєв в 1899 р. вперше виміряв світловий тиск.

Він підвісив на тонкій нитці коромисло з парою крилець на кінцях: поверхня в одного з них була зачорненою, забезпечуючи майже повне поглинання, а в іншого — дзеркальною, забезпечуючи повне відбивання. Підвіс з крильцями утворив чутливі крутильні терези, що поміщаються в посудину, повітря в якому було відкачано.



Світло практично повністю відбивалося від дзеркальної поверхні та його тиск на дзеркальне крильце було вдвічі більше, ніж на зачорнене. Внаслідок цього створювався момент сил, що повертає коромисло. Вимірюючи кут повороту коромисла, можна було виміряти силу, що діяла на крильця, а отже, визначити світловий тиск.

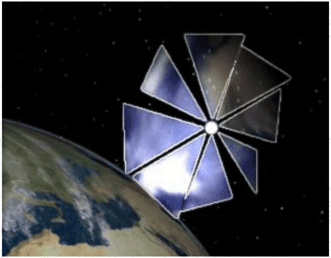
https://youtu.be/Dr07pTIoue8

Тиск світла

Сонячні вітрила

Сонячне вітрило — пристрій, що використовує тиск сонячного світла чи лазера на дзеркальну поверхню для приведення в рух космічного апарату.

Тиск сонячного світла надзвичайно малий (на Земній орбіті — близько $5 \cdot 10^{-6}$ Па) і зменшується пропорційно квадрату відстані від Сонця. В ролі вітрила використовувались сонячні батареї або радіатори системи терморегуляції.

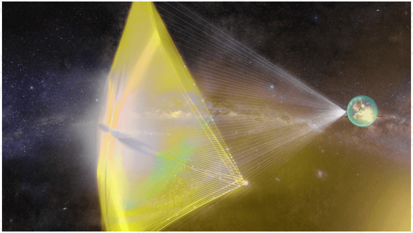


https://youtu.be/U0_wjnmlmRg

Тиск світла

Сонячні вітрила

Вчені з Австралійського національного університету запропонували спосіб запуску для космічного вітрильника до найближчої зірки Альфи Центавра в рамках проекту Breakthrough Starshot. За їх задумом, надати необхідну швидкість апарату допоможе фотонний двигун — система, що сумарно включає до 100 мільйонів лазерів.



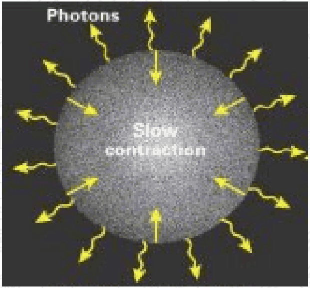
Подорож до Альфи Центавра за допомогою звичайних способів переміщення триватиме близько 100 років. Дістатись до Альфи Центавра за допомогою космічного вітрильника на фотонному двигуні передбачається за 20 років зі швидкістю в $0.2c$.

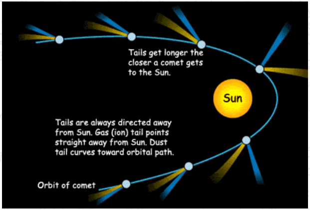
Journal of the Optical Society of America B.

Тиск світла

Сонячні вітрила

Тиск світла відіграє велику роль в астрономічних та атомних явищах. В астрофізиці тиск світла поряд із тиском газу забезпечує стабільність зірок, протидіючи силам гравітації. Дія тиску світла пояснюються деякі форми кометних хвостів. До атомних ефектів відноситься так звана світлова віддача, яку відчуває збуджений атом під час випромінювання фотона.





Товстий білий хвіст комети Гейла-Боппа складається з частинок пилу, і утворюється завдяки тиску світла. Другий, тонкий і блакитний складається з іонів і створюється сонячним вітром.

Імпульс електромагнітного поля

Поле має енергію; так само в одиниці об'єму воно має якийсь імпульс. Оскільки електромагнітна хвиля чинить тиск на речовину, остання набуває певного імпульсу. Але в замкнутій системі, що складається з речовини та електромагнітної хвилі, виникло б порушення закону збереження імпульсу, якби імпульс мала лише речовина.

Для електромагнітної хвилі у вакуумі вектор Пойнтінга.

$$\Pi = wc \Rightarrow \frac{\Pi}{c^2} = \frac{w}{c}.$$

З релятивістської механіки $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$. Для частинки з нульовою масою (наприклад, фотона) $m = 0$, зв'язок енергії та імпульсу:

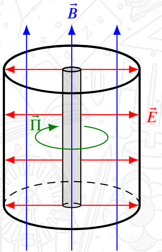
$$E = pc \Rightarrow p = \frac{E}{c}.$$

Порівнюючи дві останні формули, отримаємо вираз для густини імпульсу:

$$\vec{g} = \frac{\vec{\Pi}}{c^2}, \quad [g] = \frac{\text{дин} \cdot \text{с}}{\text{см}^3} \text{ (СГС)}$$

Задача

Заряджений циліндричний конденсатор вміщений в зовнішнє однорідне магнітне поле з індукцією $\vec{B}$, що напрямлене вздовж його осі. Конденсатор має змогу вільно обертатись навколо своєї осі. Заряд конденсатора q, радіус зовнішньої обкладки R, радіусом внутрішньої можна знехтувати. Маса конденсатора m. Знайдіть вектор моменту імпульсу електромагнітного поля конденсатора. Знайдіть кутову швидкість, з якою буде обертатись конденсатор, при вимикання магнітного поля.



Густина моменту імпульсу поля:

$$\vec{\mathscr{L}} = \vec{r} \times \frac{\vec{\Pi}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c}\vec{r} \times \vec{E} \times \vec{B} = -\frac{1}{4\pi c}\vec{B}(\vec{r}\cdot\vec{E})$$

Електричне поле : $E = \dfrac{2\lambda}{r} = \dfrac{2q}{rh}$, $\quad h$ – висота циліндра

Модуль вектора імпульсу $\vec{L}$:

$$L = \iiint\limits_V \mathscr{L}\, dV = \frac{1}{4\pi c} B \frac{2q}{h} \pi R^2 h = \frac{qBR^2}{2c}, \qquad \vec{L} = -\frac{qR^2}{2c}\vec{B}$$

При вимиканні магнітного поля момент імпульсу має зберегтися, тому він перейде в обертання самого циліндра $\vec{L} = mR^2\vec{\omega}$, а тому кутова швидкість: $\vec{\omega} = -\dfrac{q}{2mc}\vec{B}$.