

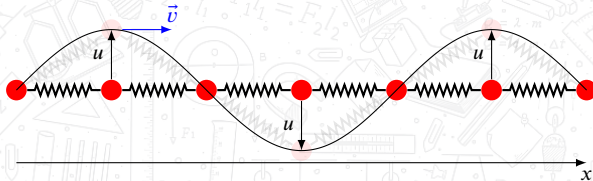
# Електромагнітні хвилі

Лекції з електрики та магнетизму

Пономаренко С. М.

# Хвильове рівняння

Хвиля — це процес поширення коливань в часі та в просторі. Хвиля характеризується деякою величиною  $u$ . Наприклад, у випадку хвилі, що поширюється вздовж ланцюжка осциляторів  $u$  — це відхилення від їхнього положення в стані рівноваги.



Диференціальне рівняння, яке описує процес поширення хвилі:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

і називається **хвильовим рівнянням**.

Якщо закони фізики приводять до такого типу рівняння — то ці закони описують процес поширення хвиль.

# Хвильове рівняння

Хвиля — це процес поширення коливань в часі та в просторі. Хвиля характеризується деякою величиною  $u$ . Наприклад, у випадку хвилі, що поширюється вздовж ланцюжка осциляторів  $u$  — це відхилення від їхнього положення в стані рівноваги.

Диференціальне рівняння, яке описує процес поширення хвилі:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

і називається **хвильовим рівнянням**.

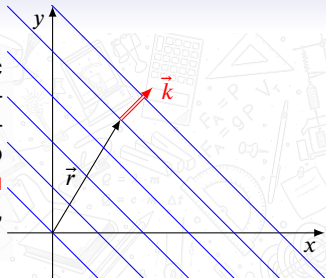
Якщо закони фізики приводять до такого типу рівняння — то ці закони описують процес поширення хвиль.

Загальним розв'язком такого рівняння є функція:

$$u = f(\vec{r} - \vec{v}t) + g(\vec{r} + \vec{v}t).$$

# Плоска хвиля

Хвиля називається **плоскою**, якщо  $u$  має одну й ту саму величину в усіх точках будь-якої площини, що перпендикулярна до напрямку поширення хвилі. Від площини до площини  $u$ , звісно, змінюється. **Поверхнями постійної фази** в плоскій хвилі є площини, перпендикулярні напрямку поширення.



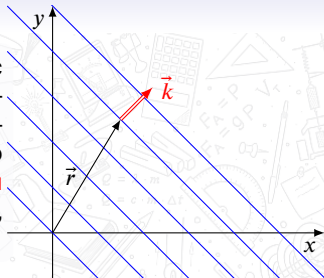
Хвиля називається **монохроматичною**, якщо  $u$  змінюється з часом за **гармонічним законом** із певною частотою. Для плоскої монохроматичної хвилі:

$$u = u_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}).$$

Будь-які дві точки, віддалені одна від одної на відстань  $\lambda$  коливаються однаково, синхронно:  $u(\vec{k}\vec{r}, \omega t) = u(\vec{k}\vec{r} + k\lambda, \omega t)$ . Величина  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  називається **довжиною хвилі**,  $\vec{k}$  — називається **хвильовим вектором**, який напрямлений у напрямку поширення хвилі і перпендикулярний хвильовій поверхні,  $k = |\vec{k}|$  — називається **хвильовим числом**.

# Плоска хвиля

Хвиля називається **плоскою**, якщо  $u$  має одну й ту саму величину в усіх точках будь-якої площини, що перпендикулярна до напрямку поширення хвилі. Від площини до площини  $u$ , звісно, змінюється. **Поверхнями постійної фази** в плоскій хвилі є площини, перпендикулярні напрямку поширення.



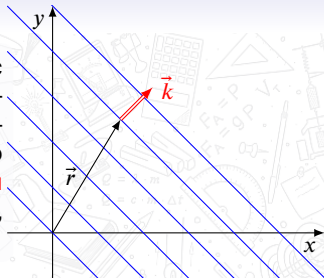
Хвиля називається **монохроматичною**, якщо  $u$  змінюється з часом за **гармонічним законом** із певною частотою. Для плоскої монохроматичної хвилі:

$$u = u_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}).$$

Така як  $u(\vec{k}\vec{r}, \omega t) = u(\vec{k}\vec{r}, \omega t + \omega T)$ , величина  $\omega$  називається коловою **частотою хвилі**, а  $T$  — **періодом хвилі**.

# Плоска хвиля

Хвиля називається **плоскою**, якщо  $u$  має одну й ту саму величину в усіх точках будь-якої площини, що перпендикулярна до напрямку поширення хвилі. Від площини до площини  $u$ , звисно, змінюється. **Поверхнями постійної фази** в плоскій хвилі є площини, перпендикулярні напрямку поширення.



Хвиля називається **монохроматичною**, якщо  $u$  змінюється з часом за **гармонічним законом** із певною частотою. Для плоскої монохроматичної хвилі:

$$u = u_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}).$$

**Фазовою швидкістю хвилі** називається швидкість, з якою поширюється точки з фіксованою фазою:

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

# Хвильові рівняння для електромагнітного поля

## Виведення

Розглянемо електромагнітне поле в однорідній ділянці простору, де немає вільних зарядів і струмів провідності.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{D} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \end{cases}$$

Врахуємо також матеріальні рівняння  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ .

До другого рівняння застосуємо операцію  $\operatorname{rot}$ :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B}.$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}.$$

$$-\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Приходимо до рівняння для електричного поля:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \text{де } v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}.$$

# Хвильові рівняння для електромагнітного поля

## Виведення

Розглянемо електромагнітне поле в однорідній ділянці простору, де немає вільних зарядів і струмів провідності.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{D} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \end{cases}$$

Врахуємо також матеріальні рівняння  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ .

До четвертого рівняння застосуємо операцію  $\operatorname{rot}$ :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = +\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{D}.$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H}.$$

$$\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{D} = -\frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Рівняння для магнітного поля:

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad \text{де } v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}.$$



# Хвильові рівняння для електромагнітного поля

Рівняння вигляду:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \end{cases}$$

називаються хвильовими рівняннями. Вони описують процес поширення величин  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  у просторі та часі зі швидкістю:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

Такий процес називається **електромагнітною хвилею**. У вакуумі  $\epsilon = \mu = 1$ , а тому швидкість поширення хвилі буде  $v = c = 3 \cdot 10^{10}$  см/с. В середовищі для якого  $\epsilon, \mu > 1$ , а тому швидкість поширення буде меншою ніж у вакуумі  $v < c$  на величину:

$$n = \sqrt{\epsilon\mu},$$

яка називається **абсолютним показником заломлення середовища**.

Розглянемо гармонійні електромагнітні хвилі, які ми представимо в комплексній формі:

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

Підставимо ці закони в рівняння Максвелла. Диференціальні операції замінюються на:

$$\vec{\nabla} \rightarrow -i\vec{k}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$$

Тоді рівняння Максвелла приймуть вигляд:

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{E} &= 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0, \\ \vec{k} \times \vec{E} &= \frac{\omega}{c} \vec{B}, \quad -\vec{k} \times \vec{H} = \frac{\omega}{c} \epsilon \vec{E} \end{aligned}$$

Перші два рівняння показують, що  $\vec{E} \perp \vec{k}$  та  $\vec{H} \perp \vec{k}$  перпендикулярні напрямку поширення, що задається хвильовим вектором  $\vec{k}$ . Ця властивість називається **поперечністю електромагнітних хвиль**.

Розглянемо гармонійні електромагнітні хвилі, які ми представимо в комплексній формі:

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

Підставимо ці закони в рівняння Максвелла. Диференціальні операції замінюються на:

$$\vec{\nabla} \rightarrow -i\vec{k}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$$

Тоді рівняння Максвелла приймуть вигляд:

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{E} &= 0, & \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{k} \times \vec{E} &= \frac{\omega}{c} \vec{B}, & -\vec{k} \times \vec{H} &= \frac{\omega}{c} \epsilon \vec{E} \end{aligned}$$

Два інші рівняння дають співвідношення для амплітуд:

$$nE_m = B_m, \quad \sqrt{\epsilon}E_m = \sqrt{\mu}H_m$$

Густина енергії (амплітуда)

$$w_m = \frac{\epsilon E_m^2}{8\pi} + \frac{\mu H_m^2}{8\pi}, \quad \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_m = H_m, \quad w_m = \frac{\epsilon E_m^2}{4\pi} = \frac{\mu H_m^2}{4\pi}.$$

Вектор Пойнтінга показує напрямок поширення енергії хвилі:

$$\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]$$

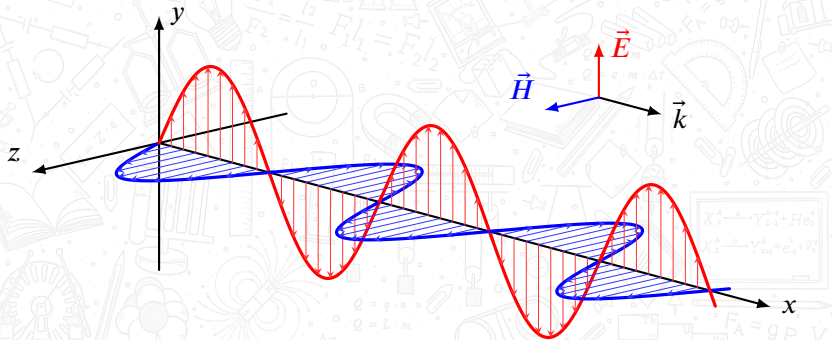
Для хвилі маємо:

$$\vec{\Pi} = \frac{c^2}{4\pi\epsilon\omega} \vec{H} \times \vec{k} \times \vec{H} = \frac{c^2}{4\pi\epsilon\omega} H^2 \vec{k} = \frac{c}{\omega} \frac{1}{\epsilon\mu} \left( \frac{\mu H^2}{4\pi} \right) c \vec{k} = w \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\vec{k}}{k} = w \vec{v}.$$

Електромагнітна хвиля — це електромагнітне поле, що періодично змінюється. У разі високочастотних полів зручно розглядати не миттєві значення таких величин, як густина енергії, а значення, усереднені за період коливань. Усереднене в такий спосіб значення вектора Пойнтінга називається **інтенсивністю випромінювання**:

$$\langle |\vec{\Pi}| \rangle = I$$

# Плоска монохроматична електромагнітна хвиля



Поле має енергію; так само в одиниці об'єму воно має якийсь імпульс. Оскільки електромагнітна хвиля чинить тиск на речовину, остання набуває певного імпульсу. Але в замкнутій системі, що складається з речовини та електромагнітної хвилі, виникло б порушення закону збереження імпульсу, якби імпульс мала лише речовина.

Для електромагнітної хвилі у вакуумі вектор Пойнтінга.

$$\Pi = wc \Rightarrow \frac{\Pi}{c^2} = \frac{w}{c}.$$

З релятивістської механіки  $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ . Для частинки з нульовою масою (наприклад, фотона)  $m = 0$ , зв'язок енергії та імпульсу:

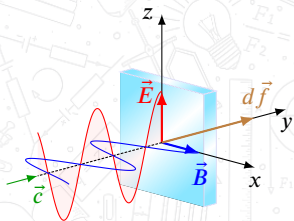
$$E = pc \Rightarrow p = \frac{E}{c}.$$

Порівнюючи дві останні формули, отримаємо вираз для густини імпульсу:

$$\vec{g} = \frac{\vec{\Pi}}{c^2}, \quad [g] = \frac{\text{дин} \cdot \text{с}}{\text{см}^3} \text{ (СГС)}$$

# Імпульс та тиск світла

Розглянемо такий процес: електромагнітна хвиля поглинається тілом і передає йому свій імпульс.



Електричне поле хвилі збуджує електричний струм густиною  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  ( $\vec{F} = e\vec{E}$ ). Внаслідок цього на об'єму середовища діє сила Ампера

$$d\vec{f} = \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{B}],$$

яка спрямована убік поширення хвилі. Ця сила за час  $dt$  змінює імпульс одиниці об'єму тіла на величину:

$$d\vec{g} = \vec{f} dt = \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{B}] dt = \frac{\lambda}{c} [\vec{E} \times \vec{B}] dt = \frac{4\pi\lambda}{c^2} \vec{\Pi} dt = \frac{4\pi\lambda}{c} w \vec{n} dt.$$

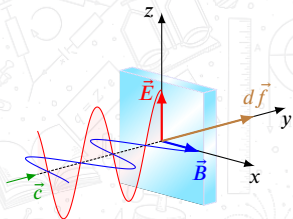
За той самий час в одиниці об'єму середовища поглинається (передається від поля речовині) енергія:

$$dw = \vec{j} \cdot \vec{E} dt = \lambda E^2 dt = 4\pi\lambda \frac{E^2}{4\pi} dt = 4\pi\lambda w dt$$

Звідки  $d\vec{g} = \frac{dw}{c} \vec{n}$ , або за весь час дії  $\vec{g} = \frac{w}{c} \vec{n} = \frac{\vec{\Pi}}{c^2}$ .

# Тиск світла

Максвел теоретично показав, що електромагнітні хвилі, відбиваючись чи поглинаючись тілами, на які вони падають, чинять на них тиск. Цей тиск виникає внаслідок впливу магнітного поля хвилі на електричні струми, що збуджуються електричним полем тієї самої хвилі.



Електричне поле хвилі збуджує електричний струм густиною  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  ( $\vec{F} = e\vec{E}$ ). Внаслідок цього на об'єму середовища діє сила Ампера  $d\vec{F} = \frac{1}{c}[\vec{j} \times \vec{B}]dV$ , спрямована убік поширення хвилі. Ця сила та викликає тиск електромагнітної хвилі.

У випадку поглинання вся енергія, яка падає за секунду на поверхню  $\Pi dS = wvdS$  тіла, перетворюється на теплову  $jEdV$ :

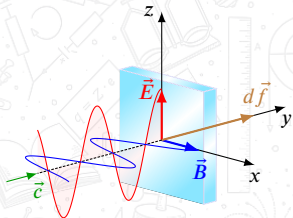
$$dF = \frac{1}{c} j \frac{c}{v} E dV = \frac{1}{v} j E dV = \frac{1}{v} w v dS = w dS,$$

звідки тиск  $p = \frac{dF}{dS} = w$



# Тиск світла

Максвел теоретично показав, що електромагнітні хвилі, відбиваючись чи поглинаючись тілами, на які вони падають, чинять на них тиск. Цей тиск виникає внаслідок впливу магнітного поля хвилі на електричні струми, що збуджуються електричним полем тієї самої хвилі.



Електричне поле хвилі збуджує електричний струм густиною  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  ( $\vec{F} = e\vec{E}$ ). Внаслідок цього на об'єму середовища діє сила Ампера  $d\vec{F} = \frac{1}{c}[\vec{j} \times \vec{B}]dV$ , спрямована у бік поширення хвилі. Ця сила та викликає тиск електромагнітної хвилі.

У випадку часткового відбивання, тиск дорівнює

$$p = w(1 + \rho),$$

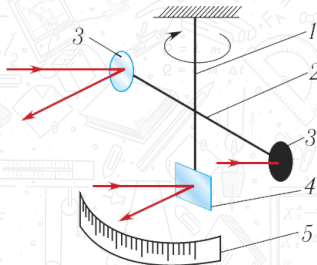
де  $\rho = 0 \dots 1$  — коефіцієнт відбивання.

# Тиск світла

## Дослід Лебедева

Петро Миколайович Лебедєв в 1899 р. вперше виміряв світловий тиск.

Він підвісив на тонкій нитці коромисло з парою крилець на кінцях: поверхня в одного з них була зачорненою, забезпечуючи майже повне поглинання, а в іншого — дзеркальною, забезпечуючи повне відбивання. Підвіс з крильцями утворив чутливі крутильні терези, що поміщаються в посудину, повітря в якій було відкачано.



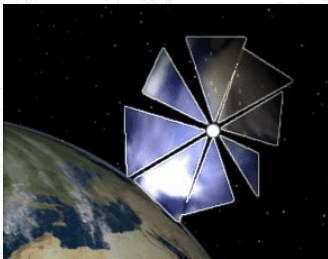
Світло практично повністю відбивалося від дзеркальної поверхні та його тиск на дзеркальне крильце було вдвічі більше, ніж на зачорнене. Внаслідок цього створювався момент сил, що повертає коромисло. Вимірюючи кут повороту коромисла, можна було виміряти силу, що діяла на крильця, а отже, визначити світловий тиск.

# Тиск світла

## Сонячні вітрила

Сонячне вітрило — пристрій, що використовує тиск сонячного світла чи лазера на дзеркальну поверхню для приведення в рух космічного апарату.

Тиск сонячного світла надзвичайно малий (на Земній орбіті — близько  $5 \cdot 10^{-6}$  Па) і зменшується пропорційно квадрату відстані від Сонця. В ролі вітрила використовувались сонячні батареї або радіатори системи терморегуляції.

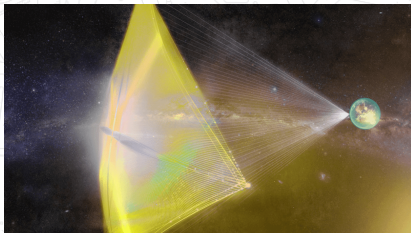


[https://youtu.be/UO\\_wjnm1mRg](https://youtu.be/UO_wjnm1mRg)

# Тиск світла

## Сонячні вітрила

Вчені з Австралійського національного університету запропонували спосіб запуску для космічного вітрильника до найближчої зірки Альфи Центавра в рамках проекту Breakthrough Starshot. За їх задумом, надати необхідну швидкість апарату допоможе фотонний двигун — система, що сумарно включає до 100 мільйонів лазерів.

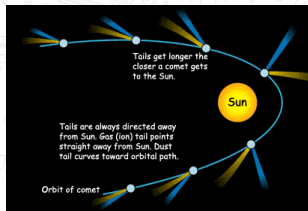
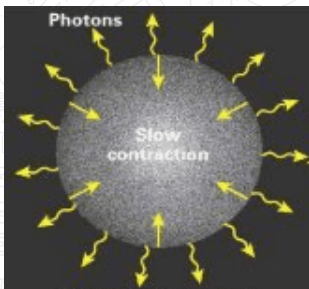


Подорож до Альфи Центавра за допомогою звичайних способів переміщення триватиме близько 100 років. Дістатись до Альфи Центавра за допомогою космічного вітрильника на фотонному двигуні передбачається за 20 років зі швидкістю в  $0.2c$ .

# Тиск світла

## Сонячні вітрила

Тиск світла відіграє велику роль в астрономічних та атомних явищах. В астрофізиці тиск світла поряд із тиском газу забезпечує стабільність зірок, протидіючи силам гравітації. Дія тиску світла пояснюють деякі форми кометних хвостів. До атомних ефектів відноситься так звана світлова віддача, яку відчуває збуджений атом під час випромінювання фотона.

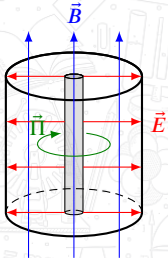


Товстий білий хвіст комети Гейла-Болпа складається з частинок пилу, і утворюється завдяки тиску світла. Другий, тонкий і блакитний складається з іонів і створюється сонячним вітром.

# Момент імпульсу поля

## Задача

Заряджений циліндричний конденсатор вміщений в зовнішнє однорідне магнітне поле з індукцією  $\vec{B}$ , що направлене вздовж його осі. Конденсатор має змогу вільно обертатись навколо своєї осі. Заряд конденсатора  $q$ , радіус зовнішньої обкладки  $R$ , радіусом внутрішньої можна знехтувати. Маса конденсатора  $m$ . Знайдіть вектор моменту імпульсу електромагнітного поля конденсатора. Знайдіть кутову швидкість, з якою буде обертатись конденсатор, при вимиканні магнітного поля.



Густина моменту імпульсу поля:

$$\vec{\mathcal{L}} = \vec{r} \times \frac{\vec{\Pi}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c} \vec{r} \times \vec{E} \times \vec{B} = -\frac{1}{4\pi c} \vec{B}(\vec{r} \cdot \vec{E})$$

Електричне поле :  $E = \frac{2\lambda}{r} = \frac{2q}{rh}$ ,  $h$  – висота циліндра

Модуль вектора імпульсу  $\vec{L}$ :

$$L = \iiint_V \mathcal{L} dV = \frac{1}{4\pi c} B \frac{2q}{h} \pi R^2 h = \frac{qBR^2}{2c}, \quad \vec{L} = -\frac{qR^2}{2c} \vec{B}$$

При вимиканні магнітного поля момент імпульсу поля перейде в обертання самого циліндра  $\vec{L} = mR^2\vec{\omega}$ , а тому кутова швидкість:  $\vec{\omega} = -\frac{q}{2mc} \vec{B}$ .

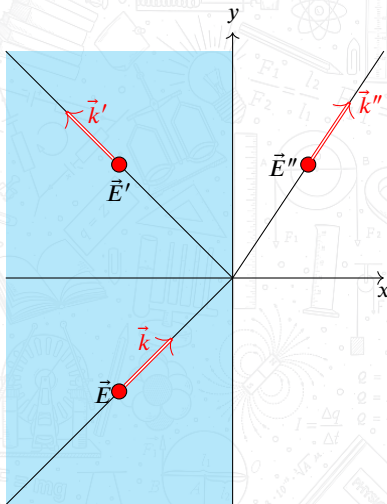
**Поляризація хвиль** — характеристика поперечних хвиль, що описує поведінку вектора величини, яка коливається, у площині, перпендикулярній напрямку поширення хвилі.

Для **s-поляризації** напруженість електричного поля електромагнітної хвилі перпендикулярна до площини падіння та паралельна до площини межі розділу середовищ.

**p-поляризація** характеризується тим, що вектор напруженості електричного поля лежить у площині падіння.

# Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



Падаюча плоска хвиля:

$$E = E_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}$$

Відбита плоска хвиля:

$$E' = E'_0 e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y)}$$

Заломлена плоска хвиля:

$$E'' = E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y)}$$

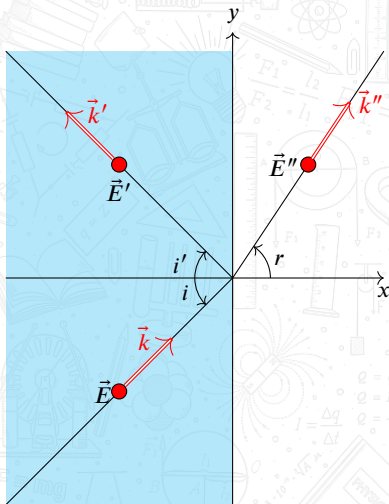
Гранична умова ( $E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$ ):

$$E_0 e^{i(\omega t - k_y y)} + E'_0 e^{i(\omega' t - k'_y y)} = E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_y y)}.$$



# Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



Падаюча плоска хвиля:

$$E = E_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}$$

Відбита плоска хвиля:

$$E' = E'_0 e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y)}$$

Заломлена плоска хвиля:

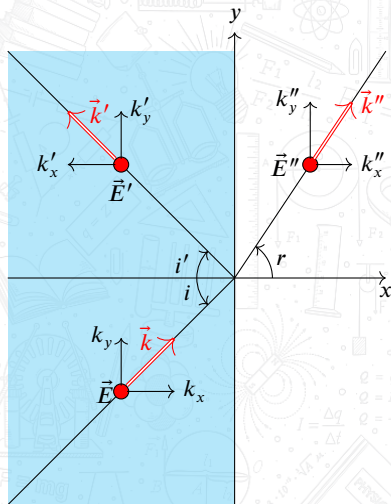
$$E'' = E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y)}$$

Гранична умова ( $E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$ ):

$$E_0 e^{i(\omega t - k_y y)} + E'_0 e^{i(\omega' t - k'_y y)} = E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_y y)}.$$

# Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



Падаюча плоска хвиля:

$$E = E_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}$$

Відбита плоска хвиля:

$$E' = E'_0 e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y)}$$

Заломлена плоска хвиля:

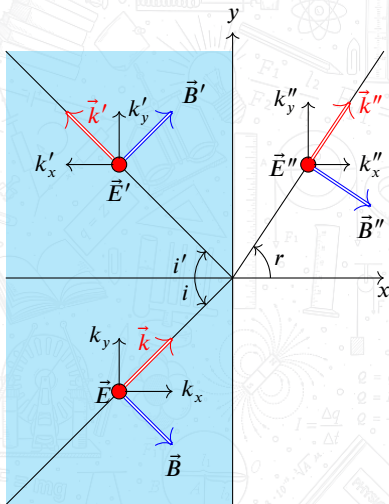
$$E'' = E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y)}$$

Гранична умова ( $E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$ ):

$$E_0 e^{i(\omega t - k_y y)} + E'_0 e^{i(\omega' t - k'_y y)} = E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_y y)}.$$

# Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



Падаюча плоска хвиля:

$$E = E_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}$$

Відбита плоска хвиля:

$$E' = E'_0 e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y)}$$

Заломлена плоска хвиля:

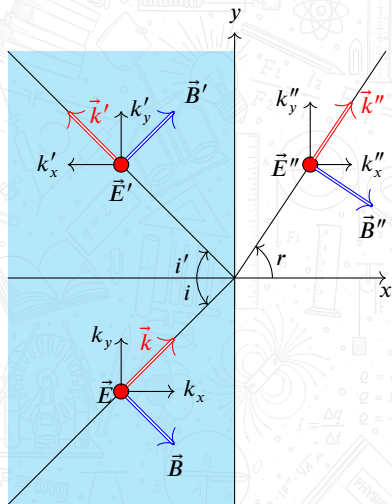
$$E'' = E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y)}$$

Гранична умова ( $E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$ ):

$$E_0 e^{i(\omega t - k_y y)} + E'_0 e^{i(\omega' t - k'_y y)} = E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_y y)}.$$

# Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



Продиференціюємо граничні умови

1. за часом  $t$ , отримаємо

$$\omega = \omega' = \omega''$$

2. за координатою  $y$ , отримаємо

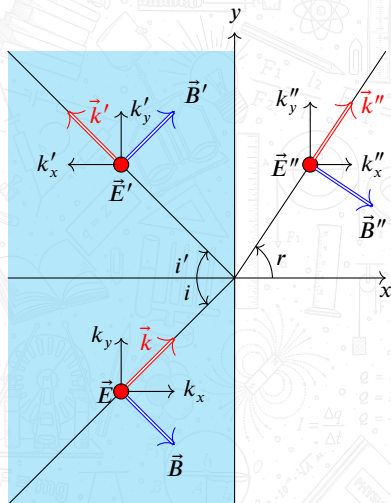
$$k_y = k'_y = k''_y$$

З виразу  $k = \frac{\omega n}{c}$  і  $\omega = \omega' = \omega''$  отримуємо:

$$\frac{k}{n_1} = \frac{k'}{n_1} = \frac{k''}{n_2}.$$

# Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



З рівняння:

$$\frac{k}{n_1} = \frac{k'}{n_1}$$

$$k^2 = k'^2 \Rightarrow k_x^2 + k_y^2 = k_x'^2 + k_y'^2$$

$$\Rightarrow k_x^2 = k_x'^2$$

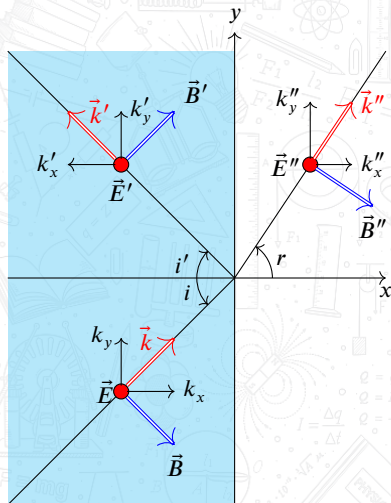
$$k_x = -k_x', \quad k_y = k_y'.$$

Звідки випливає закон відбивання,  
відомий з геометричної оптики:

$$i = i'.$$

# Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



З рівняння:

$$\frac{k}{n_1} = \frac{k''}{n_2}$$

$$\frac{k_y}{n_1 \sin i} = \frac{k_y''}{n_2 \sin r}$$

Впливає закон заломлення, відомий з геометричної оптики:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

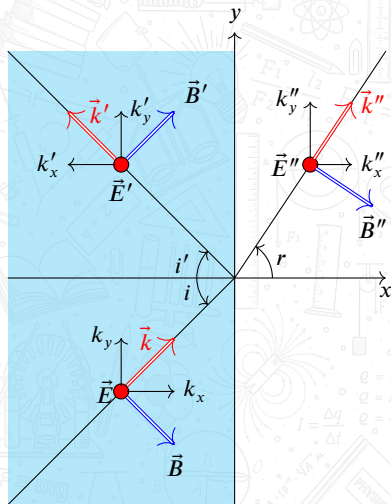
або

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21},$$

$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$  — відносний показник заломлення двох середовищ.

# Відбивання хвиль від поверхні двох діелектриків

s-Поляризована хвиля



Більшість діелектриків не проявляють магнітних властивостей:

$$\mu_1 = \mu_2 \approx 1.$$

Тому, відносний поразник заломлення

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{v_1}{v_2}.$$

# Формули Френеля для s-поляризації

Граничні умови для вектора  $\vec{E}$  дають:

$$E_0 + E'_0 = E''_0$$

а для вектора  $\vec{H}$  ( $H_{\tau_1} = H_{\tau_2}$ ):

$$H_{0y} + H'_{0y} = H''_{0y} \quad \frac{B_{0y}}{\mu_1} + \frac{B'_{0y}}{\mu_1} = \frac{B''_{0y}}{\mu_2}$$

Більшість діелектриків не проявляють магнітних властивостей  
 $\mu_1 = \mu_2 \approx 1$ .

$$B_{0y} + B'_{0y} = B''_{0y}$$

$$\vec{B} = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} \Rightarrow B_x = \frac{c}{\omega} k_y E, \quad B_y = -\frac{c}{\omega} k_x E, \quad B_z = 0.$$

$$k_x E_0 + k'_x E'_0 = k''_x E''_0$$



# Формули Френеля для s-поляризації

$$E_0 + E'_0 = E''_0$$

$$k_x E_0 + k'_x E'_0 = k''_x E''_0$$

$$k_x = -k'_x = k \cos i, \quad k'' = n_{21} k, \quad k''_x = k'' \cos r = n_{21} k \cos r$$

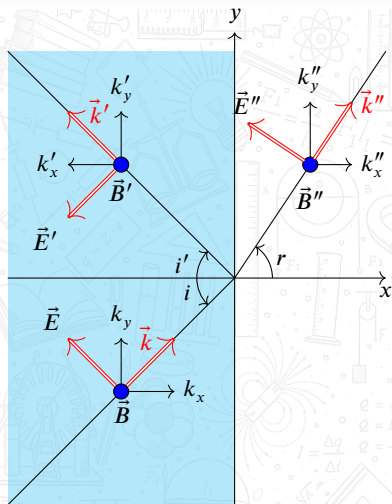
$$E_0 \cos i - E'_0 \cos i = n_{21} E''_0 \cos r$$

$$E_0 \cos i - E'_0 \cos i = n_{21} (E_0 + E'_0) \cos r$$

$$E'_\perp = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} E_\perp$$

$$E''_\perp = \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r)} E_\perp$$

# Формули Френеля для $p$ -поляризації



Граничні умови дають:

$$B_0 + B'_0 = B''_0$$

$$E_y + E'_{y0} = E''_{y0}$$

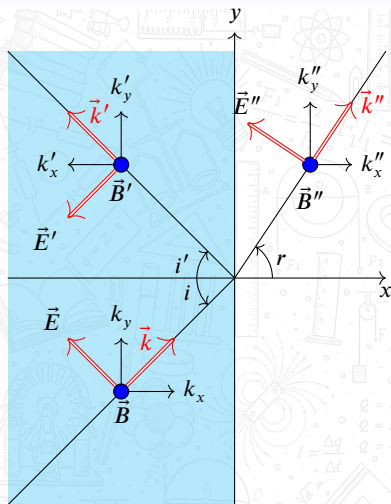
З рівності  $E_{y0} = \frac{ck_x}{\epsilon\omega} B$  друга умова приймає вигляд:

$$\frac{k_x}{\epsilon_1} (B_0 - B'_0) = \frac{k''_x}{\epsilon_2} B''_0$$

або

$$n_{21} \cos i (B_0 - B'_0) = \cos r B''_0$$

# Формули Френеля для $p$ -поляризації



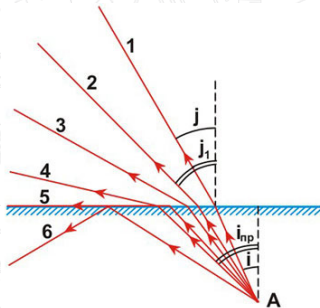
$$E'_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(i - r)}{\operatorname{tg}(i + r)} E_{\parallel}$$

$$E''_{\parallel} = \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i + r) \cos(i - r)} E_{\parallel}$$

# Повне внутрішнє відбивання

Якщо світло йде з матеріалу з показником заломлення з оптично більш густого в оптично менш густе  $n_2 < n_1$ , то згідно закону відбивання

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} < 1 \Rightarrow i < r.$$



Коли кут заломлення  $r = 90^\circ$  при куті падіння  $i = i_b$ , який називається граничним і визначається рівністю:

$$\sin i_b = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \text{ або } n \sin i_b = 1,$$

$$\text{де } n = \frac{n_1}{n_2} > 1$$

виникає повне внутрішнє відбивання.

Що відбувається із заломленим променем при  $i > i_b$ , тобто при кутах падіння, що більші ніж граничний кут?

$$\vec{E}'' = \vec{E}_0'' e^{i(\omega t - k_x'' - k_y'')}$$

$$\frac{k^2}{n^2} = k_x''^2 + k_y''^2$$

$$\sin i = \frac{k_y}{k}, \quad k_y = k_y''$$

$$k_x''^2 = \frac{k^2}{n^2} (1 - n^2 \sin^2 i) = \frac{\omega^2}{c^2} (1 - n^2 \sin^2 i)$$

Оскільки при  $i > i_b$ ,  $1 - n^2 \sin^2 i < 0$ ,

то  $k_x''^2 < 0 \Rightarrow k_x'' = iK$ ,  $K = \frac{\omega^2}{c^2} (1 - n^2 \sin^2 i) > 0$ .

Тоді розв'язок рівнянь Максвелла буде мати вигляд:

$$\vec{E}'' = \vec{E}_0'' e^{-Kx} e^{i(\omega t - k_y'')}$$

В 2-му середовищі буде поле при  $i > i_b$ , однак його амплітуда буде експоненційно спадати вздовж  $x$ .