

Явище електромагнітної індукції

Лекції з електрики та магнетизму

Пономаренко С. М.

Зміст

1. Явище електромагнітної індукції

Вихрове електричне поле

2. Явище самоіндукції

Перехідні процеси в колі з індуктивністю

3. Взаємна індукція

Принцип роботи трансформаторів

4. Енергія магнітного поля

Явище електромагнітної індукції

Явище електромагнітної індукції (Фарадей)

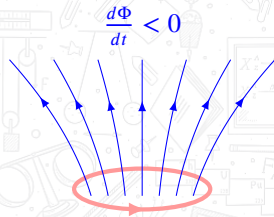
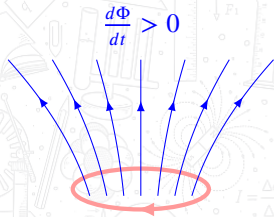
У 1831 р. Фарадеєм було зроблено одне з найбільш фундаментальних відкриттів в електродинаміці — **явище електромагнітної індукції**. Воно полягає в тому, що в замкнутому провідному контурі при зміні магнітного потоку, охопленого цим контуром, виникає електричний струм — його назвали індукційним.

Досліди Фарадея

Закон електромагнітної індукції

Електрорішійна сила (ЕРС), що виникає в контурі пропорційна швидкості зміни магнітного потоку, що пронизує площу, охоплену даним контуром:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_S.$$

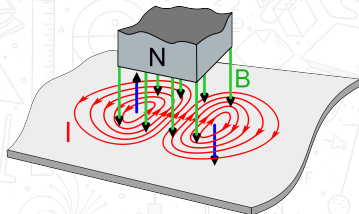


Правило Ленца

Індукований струм має такий напрямок, щоб за допомогою створюваного ним магнітного поля перешкоджати зміні магнітного потоку, тобто щоб послабити дію причини, яка збуджує цей струм.

Струми Фуко

Струми Фуко — вихрові індукційні струми, які виникають у провіднику під час зміни магнітного потоку через поверхню провідника.



Струми Фуко, як і індукційні струми в лінійних провідниках, підпорядковані правилу Ленца: їх магнітне поле направлене так, щоб протидіяти змінам магнітного потоку, що індукували ці струми.

Вихрове електричне поле

Оскільки магнітний потік дорівнює $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$, а ЕРС індукції $\mathcal{E} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$, то із закону індукції випливає:

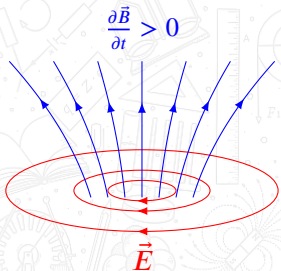
$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Скориставшись теоремою Стокса, останнє інтегральне рівняння можна переписати у диференціальній формі:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Вихрове електричне поле

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$



Згідно Максвеллу **явище електромагнітної індукції** полягає в тому, що будь-яке змінне магнітне поле збуджує в просторі електричне поле; провідники для цього не потрібні. Індукційні ж струми збуджуються в провідниках індукованим електричним полем.

На відміну від електростатики, де $\text{rot } \vec{E} = 0$, у випадку змінного в часі магнітного поля $\text{rot } \vec{E} \neq 0$. Це означає, що індуковане електричне поле, індується (виникає) за рахунок зміни магнітного поля і не є потенційним, а вихровим.

Вираз електричного поля через потенціали

Скористаємося законом електромагнітної індукції. Підставимо сюди вираз для магнітного поля через векторний потенціал $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$:

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

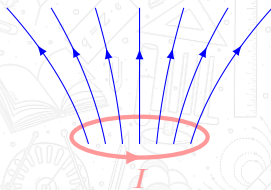
Рівність нулю ротора деякого векторного поля означає, що це поле потенційне і може бути представлене як градієнт скалярної функції. Таким чином, отримуємо

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

У окремому випадку постійних у часі полів приходимо до відомої рівності: $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$, звідки видно, що введена тут функція φ збігається зі скалярним потенціалом.

Явище самоіндукції

Зміна струму в контурі викликає зміну магнітного поля, що створює змінний магнітний потік через цей же контур і, як наслідок, ЕРС індукції. Це явище називають **самоіндукцією**.



Якщо в просторі, де розташований контур зі струмом I , немає феромагнетиків, поле \vec{B} , а отже, і повний магнітний потік Φ через контур будуть пропорційні силі струму I :

$$\Phi = \frac{1}{c} L I$$

Коефіцієнт L називається **індуктивністю контуру**.

Явище самоіндукції

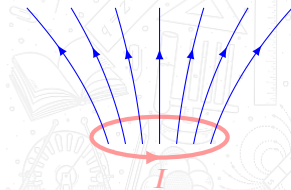
Зміна струму в контурі викликає зміну магнітного поля, що створює змінний магнітний потік через цей же контур і, як наслідок, ЕРС індукції. Це явище називають **самоіндукцією**.

При зміні сили струму в контурі згідно закону Фарадея виникає ЕРС самоіндукції:

$$\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt}$$

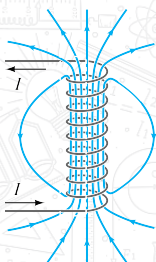
Тут знак мінус показує, що \mathcal{E} завжди спрямована так, щоб перешкоджати зміні сили струму відповідно до правила Ленца. Ця ЕРС прагне зберегти струм незмінним: вона протидіє струму, коли він збільшується, і підтримує струм, коли він зменшується.

Коефіцієнт L називається **індуктивністю контуру**.



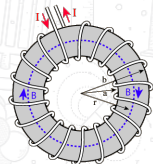
Приклади розрахунку індуктивності

Соленоїд



Магнітне поле в середині соленоїда $B = \frac{4\pi\mu NI}{cl}$. Магнітний потік через всі витки $\Phi = NBS = N\frac{4\pi\mu}{c}\frac{N}{l}IS$. Порівнюючи з формулою $\Phi = \frac{1}{c}LI$, індуктивність соленоїда дорівнює: $L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}$

Тороїд



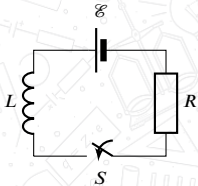
Нехай тороїд має прямокутний переріз шириною $b - a$ і висоту d .

$$L = 2N^2 d \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Одиницею індуктивності в системі СГС є сантиметр: $[L] = \text{см}$. Це означає, що індуктивність є **геометричною** характеристикою.

Перехідні процеси в колі з індуктивністю

Встановлення струму в LR -контурі



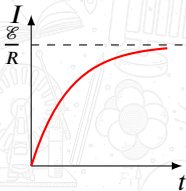
Закон Ома для кола $\mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{si}} = IR$. Враховуючи що $\mathcal{E}_{\text{si}} = -L dI/dt$, закон набуде вигляду

$$L \frac{dI}{dt} + IR = \mathcal{E}.$$

Після інтегрування ми отримаємо:

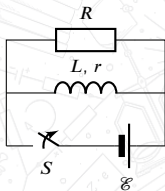
$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right),$$

де $\tau = \frac{L}{R}$ — називають **часом релаксації**.



Перехідні процеси в колі з індуктивністю

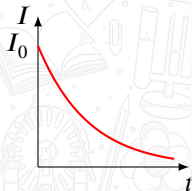
Екстраструми при розмиканні



Спочатку ключ S замкнутий. Тоді через опір R і через котушку індуктивності L тече струм:

$$I_0 = \mathcal{E}/r.$$

Після розмикання ключа (відключення ЕРС) магнітне поле почне убувати. Це збудить електрорушійну \mathcal{E}_{si} силу та індукційний струм I у контурі. Такий струм називається **екстраструмом розмикання**. По закону Ома:

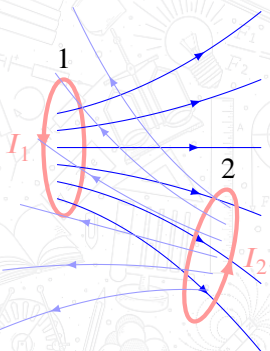


$$I(R + r) = -L \frac{dI}{dt}.$$

Після інтегрування ми отримаємо: $I(t) = I_0 e^{-\frac{R+r}{L}t}$.

Якщо $R \gg r$, то $\mathcal{E}_{si} = \frac{R}{r} \mathcal{E} e^{-\frac{R}{L}t}$. При розмиканні ця величина може значно перевершити ЕРС батареї, тобто може статись пробій, що спостерігається під час вимкнення струму в колах з великими індуктивностями.

Взаємна індукція



Нехай два нерухомих контури 1 і 2 розташовані близько один до одного. Якщо в контурі 1 тече струм I_1 , він створює через контур 2 магнітний потік Φ_2 , пропорційний струму I_1 :

$$\Phi_2 = \frac{1}{c} L_{21} I_1$$

Аналогічно, якщо в контурі 2 тече струм I_2 , то він створює через контур 1 магнітний потік:

$$\Phi_1 = \frac{1}{c} L_{12} I_2.$$

Коефіцієнти пропорційності L_{12} і L_{21} називають **коефіцієнтами взаємної індуктивності** контурів.

Теорема взаємності

Теоремою взаємності стверджує, що коефіцієнтами взаємної індуктивності контурів однаков:

$$L_{12} = L_{21}.$$

Завдяки цій теоремі можна не робити різниці між L_{12} і L_{21} і просто говорити про взаємну індуктивність двох контурів.

Практичне застосування

Практичне застосування теореми взаємності полягає у тому, що якщо по контурам течуть однакові струми I , то

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

Ця обставина нерідко дає змогу сильно спростувати вирішення питання про знаходження, наприклад, магнітних потоків.

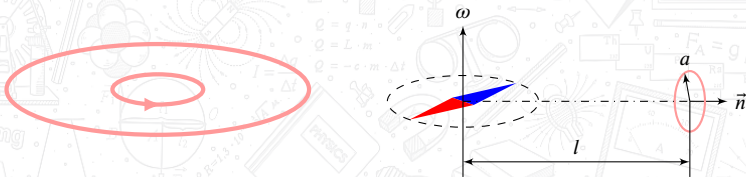
Задачі на застосування теореми взаємності

Задача 1

Два тонкі колові провідники, осі яких співпадають, лежать в одній площині. Радіус зовнішнього провідника R_1 внутрішнього R_2 ($R_2 \ll R_1$). Знайдіть магнітний потік, що пронизує площу зовнішнього провідника, якщо по внутрішньому провіднику тече струм I .

Задача 2

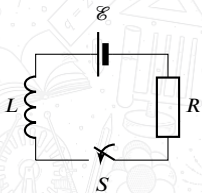
Магнітний диполь з моментом p_m обертається з частотою ω навколо осі, яка проходить через його центр і перпендикулярна магнітному моменту (див. рис.). Знайти струм в плоскому нерухомому кільці радіусом a з опором R , яке знаходиться на відстані $l \gg a$ від диполя. Нормаль \vec{n} до площини кільця перпендикулярна осі обертання диполя. Самоіндукцією рамки знехтувати.



Трансформатор

Енергія магнітного поля

Провідник зі струмом створює магнітне поле, яке з'являється та зникає разом зі струмом. **Магнітне поле є носієм енергії**, що дорівнює роботі струму на його створення. Розглянемо роботу, яку виконує джерело при замиканні ключа в колі по переміщенню заряду $dq = Idt$:



$$\begin{aligned} \delta A &= \mathcal{E} dq = I^2 R dt - \mathcal{E}_{si} I dt = \\ &= \underbrace{I^2 R dt}_{\text{Теплота}} + \underbrace{\frac{1}{c^2} L I dI}_{\substack{\text{Енергія} \\ \text{магнітного} \\ \text{поля}}} . \end{aligned}$$

Енергія магнітного поля:
$$W = \frac{1}{c^2} \int_0^I L I dI = \frac{1}{c^2} \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{c} I \Phi = \frac{\Phi^2}{2L} .$$

Енергія магнітного поля

Енергію магнітного поля визначається через характеристики поля.

Розглянемо однорідне магнітне поле всередині довгого соленоїда.

Індуктивність соленоїда:

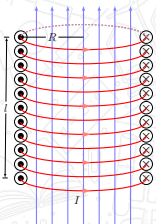
$$L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}.$$

Магнітне поле в середині соленоїда:

$$B = \frac{4\pi\mu NI}{cl}$$

Енергія магнітного поля:

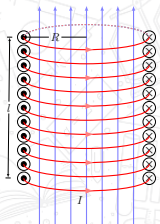
$$W = \frac{1}{c^2} \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{c^2} \frac{(4\pi\mu NI)^2 Sl}{8\pi\mu l^2} = \frac{B^2}{8\pi\mu} V = \frac{BH}{8\pi} V.$$



Енергія магнітного поля

Енергію магнітного поля визначається через характеристики поля.

Розглянемо однорідне магнітне поле всередині довгого соленоїда.



Індуктивність соленоїда:

$$L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}.$$

Магнітне поле в середині соленоїда:

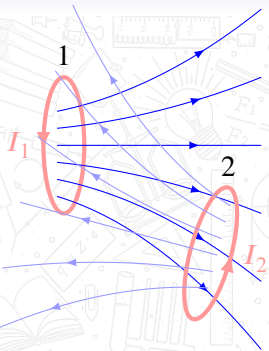
$$B = \frac{4\pi\mu NI}{cl}$$

Густина енергії магнітного поля:

$$w = \frac{BH}{8\pi}.$$

Магнітна енергія зосереджена в об'ємі соленоїда — в тій області простору, де присутнє магнітне поле.

Пондеромоторні сили в магнітному полі



Обмежимося випадком, коли система складається з двох контурів зі струмами I_1 і I_2 . Магнітна енергія такої системи:

$$W = \frac{1}{2c}(I_1\Phi_1 + I_2\Phi_2)$$

Відповідно до закону збереження енергії робота, яку виконують джерела струму, включені в контури 1 і 2, йде на теплоту, на збільшення магнітної енергії системи і на механічну роботу внаслідок переміщення або деформації контурів):

$$\delta A_{\text{дж}} = \delta Q + dW + \delta A_{\text{мех}}$$