

Випромінювання електромагнітних хвиль

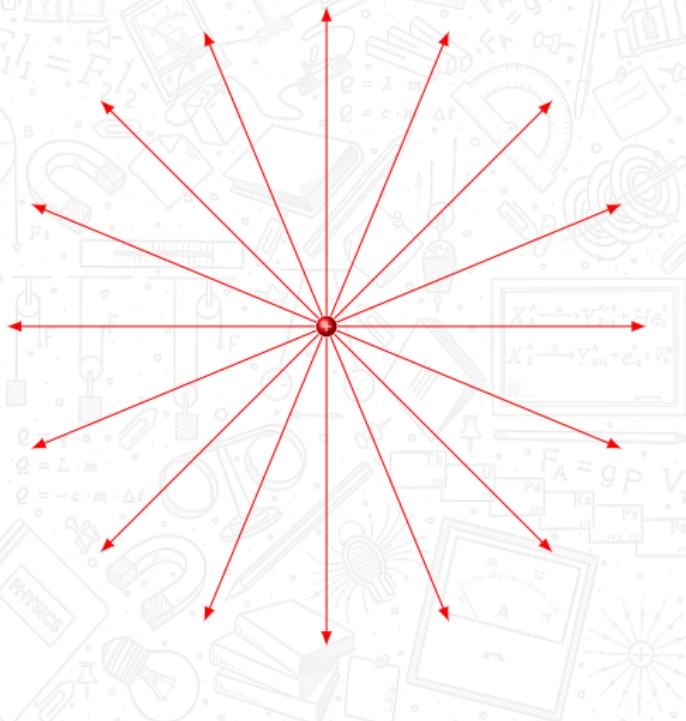
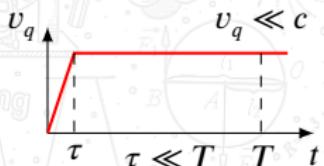
Лекції з електрики та магнетизму

Пономаренко С. М.

Випромінювання заряду

Розглянемо електричне поле, точкового заряду q . Якщо заряд перебуває в стані спокою, його електростатичне поле описується радіальними силовими лініями, що виходять із заряду.

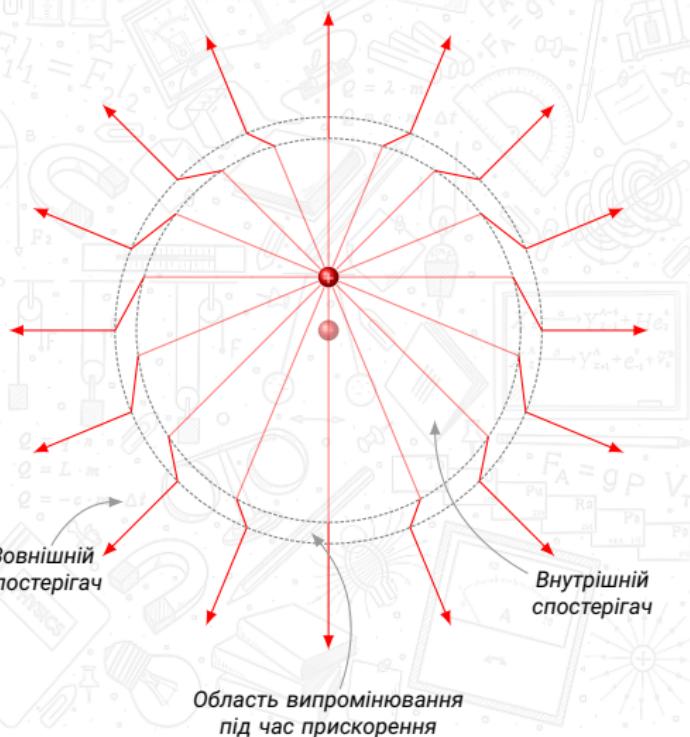
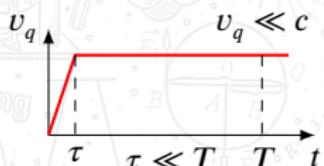
Нехай у момент часу $t = 0$ заряд під дією зовнішньої сили починає рухатися з прискоренням a , а через деякий час τ дія сили припиняється, після чого заряд рухається рівномірно зі швидкістю $v = at$. Графік швидкості руху заряду наведено на рис.



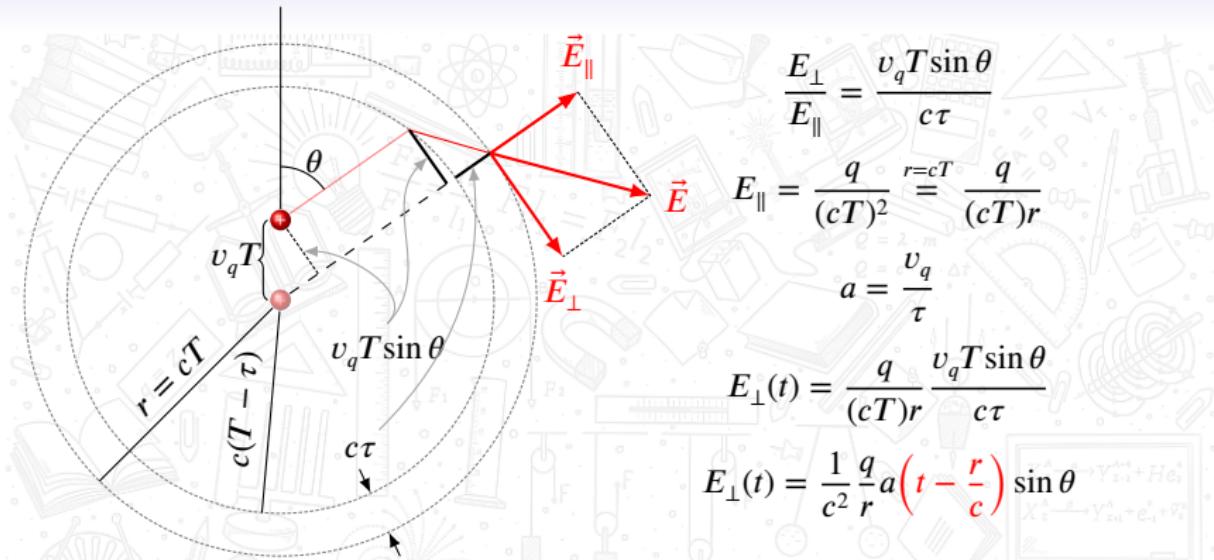
Випромінювання заряду

Розглянемо електричне поле, точкового заряду q . Якщо заряд перебуває в стані спокою, його електростатичне поле описується радіальними силовими лініями, що виходять із заряду.

Нехай у момент часу $t = 0$ заряд під дією зовнішньої сили починає рухатися з прискоренням a , а через деякий час τ дія сили припиняється, після чого заряд рухається рівномірно зі швидкістю $v = at$. Графік швидкості руху заряду наведено на рис.



Математичні викладки

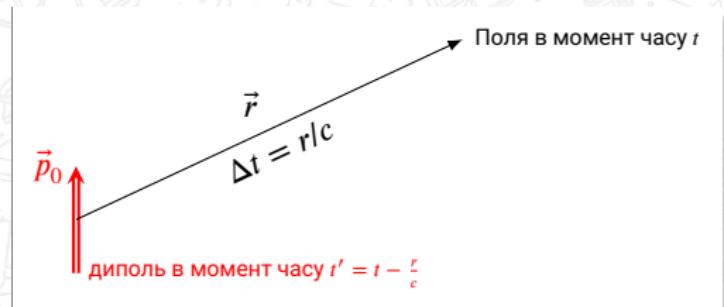


Напруженість електричного поля хвилі E_{\perp} спадає як $1/r$, на відміну від електростатичного поля E_{\parallel} , яке спадає як $1/r^2$. Це пояснюється законом збереження енергії: енергія хвилі розподіляється по поверхні сфери ($\propto r^2$), а густина енергії $\propto E^2$. Крім того, E_{\perp} у момент часу t залежить від прискорення заряду a в момент $t - r/c$, оскільки хвиля досягає точки через час r/c .

Елементарний дипольний випромінювач

Монопольного випромінювання не існує!

Розглянемо електронейтральну систему – електричний диполь, який є елементарним вимпромінювачем електромагнітних хвиль.



Дипольний момент \vec{p} змінюється за гармонічним законом:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t, \quad \vec{p} = \vec{p}_0 e^{i\omega t} \text{ (в комплексній формі)}$$

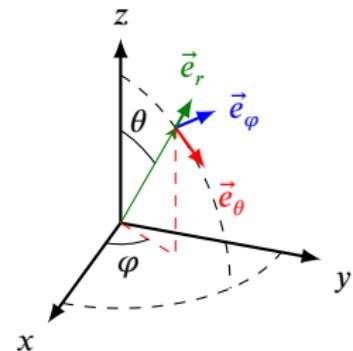
Крім елементарного дипольного випромінювача ще існують елементарний магніто-дипольний випромінювач, квадрупольний ...

Поля диполя

$$B_\varphi = \frac{i\omega}{c} \sin \theta \left(\frac{1}{r} + \frac{i\omega}{c} \right) \cdot \frac{\vec{p}_0 e^{i\omega(t-r/c)}}{r},$$

$$E_r = 2 \cos \theta \left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr} \right) \cdot \frac{\vec{p}_0 e^{i\omega(t-r/c)}}{r},$$

$$E_\theta = \sin \theta \left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \cdot \frac{\vec{p}_0 e^{i\omega(t-r/c)}}{r}.$$



Поля диполя

Близня зона

Близня зона – відстань від осцилятора до точки спостереження мала в порівнянні з довжиною його хвилі:

$$\frac{1}{r} \gg \frac{\omega}{c}, \quad r \ll \frac{\lambda}{2\pi}$$

В кожен момент часу t електричне поле поблизу зі осцилятора збігається з полем статичного диполя, дипольний момент якого дорівнює миттєвого значення моменту осцилятора $p(t)$:

$$E_r = \frac{2 \cos \theta p(t)}{r^3},$$

$$E_\theta = \frac{\sin \theta p(t)}{r^3}.$$

Поля диполя

Близня зона

Близня зона – відстань від осцилятора до точки спостереження мала в порівнянні з довжиною його хвилі:

$$\frac{1}{r} \gg \frac{\omega}{c}, \quad r \ll \frac{\lambda}{2\pi}$$

Оскільки

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{dq(t)l}{dt} = \frac{dq(t)}{dt}l = Il,$$

магнітне поле збігається з полем еквівалентного елемента струму довжини l , що визначається формулою Біо-Савара-Лапллса:

$$\vec{B} = \frac{1}{cr^3} \left[\frac{d\vec{p}(t)}{dt} \times \vec{r} \right] = \frac{I}{c} \frac{[\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3},$$

Поля диполя

Близня зона

Близня зона – відстань від осцилятора до точки спостереження мала в порівнянні з довжиною його хвилі:

$$\frac{1}{r} \gg \frac{\omega}{c}, \quad r \ll \frac{\lambda}{2\pi}$$

В близній зоні поля не запізнюються і співпадають з полями статичного диполя та струму.

Поля диполя

Хвильова зона

Відстань, яка набагато більша за довжину хвилі:

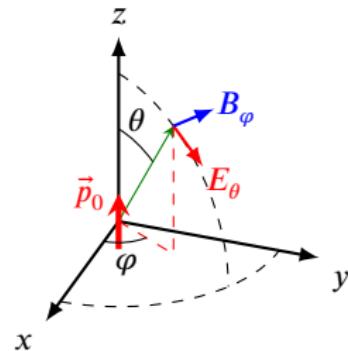
$$\frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{c}, \quad r \gg \frac{\lambda}{2\pi}$$

називається **хвильовою зоною**.

$$E_\theta = B_\varphi = -\frac{\omega^2 \sin \theta}{c^2 r} p_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) =$$

$$= \frac{\sin \theta}{rc^2} \ddot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right),$$

$$E_r = E_\varphi = B_r = B_\theta = 0.$$



У хвильовій зоні осцилятора електричне та магнітне поля чисельно дорівнюють один одному і спадають обернено пропорційно першій степені відстані від осцилятора.

Поля диполя

Хвильова зона

Відстань, яка набагато більша за довжину хвилі:

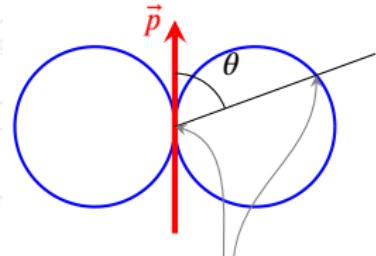
$$\frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{c}, \quad r \gg \frac{\lambda}{2\pi}$$

називається **хвильовою зоною**.

$$E_\theta = B_\varphi = -\frac{\omega^2 \sin \theta}{c^2 r} p_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) =$$

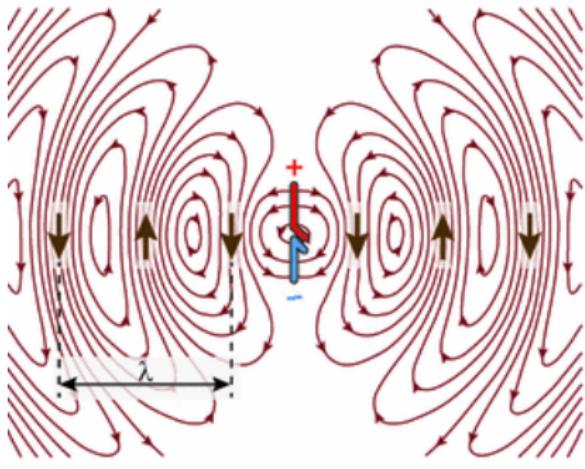
$$= \frac{\sin \theta}{rc^2} \ddot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right),$$

$$E_r = E_\varphi = B_r = B_\theta = 0.$$



Напруженість поля також залежить від полярного кута θ точки спостереження: на продовженні осі осцилятора ($\theta = 0$ і $\theta = \pi$) поле дорівнює нулю, максимального ж значення воно досягає в екваторіальній площині осцилятора ($\theta = \pi/2$). У кожній точці хвильової зони вектори \vec{E} , \vec{B} та \vec{r} взаємно перпендикулярні та утворюють правогвинтову систему.

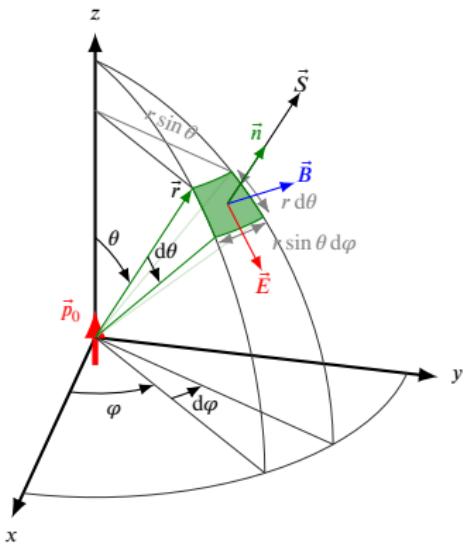
Близня та хвильова зони



В близній зоні поле ніби «причеплене» до диполя, а у хвильовій зоні поле «відригається» від нього – випромінюється.

Потужність, що випромінюється осцилятором

Густина потоку електромагнітної енергії характеризується вектором Пойнтінга \vec{P} . Тому потік електромагнітної енергії крізь поверхню сфери радіусом r , що оточує осцилятор, називається **потужністю випромінювання**.



Елемент площини поверхні в сферичній системі координат

$$d\sigma = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Вектор орієнтованої площинки

$$d\vec{\sigma} = d\sigma \vec{n}.$$

Як видно з рисунку $\vec{S} \uparrow \vec{n}$.

Потужність, що випромінюється осцилятором

Густина потоку електромагнітної енергії характеризується вектором Пойнтінга \vec{P} . Тому потік електромагнітної енергії крізь поверхню сфери радіусом r , що оточує осцилятор, називається **потужністю випромінювання**.

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= - \iint_{\sigma} \vec{P} d\vec{\sigma} = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{c}{4\pi} |[\vec{E} \times \vec{B}]| r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \frac{\ddot{p}^2 \left(t - \frac{r}{c} \right)}{4\pi c^3} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\ddot{p}^2 \left(t - \frac{r}{c} \right)}{3c^3} \end{aligned}$$

Середнє значення потужності випромінювання за період:

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dW}{dt} dt = \frac{\omega^4 p_0^2}{3c^3}$$

Потужність, що випромінюється осцилятором

Густина потоку електромагнітної енергії характеризується вектором Пойнтінга \vec{P} . Тому потік електромагнітної енергії крізь поверхню сфери радіусом r , що оточує осцилятор, називається **потужністю випромінювання**.

Осцилятор неперервно випромінює енергію в навколошній простір, причому, середня швидкість випромінювання енергії

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dW}{dt} dt = \frac{\omega^4 p_0^2}{3c^3}$$

пропорційна квадрату амплітуди його електричного моменту p_0 і пропорційна четвертій степені частоти ω .

Для радіозв'язку використовують відносно короткі хвилі (десятки метрів – кілометри), оскільки довгі хвилі від повільно змінних струмів практично не випромінюються.

Потужність, що випромінюється осцилятором

Густина потоку електромагнітної енергії характеризується вектором Пойнтінга \vec{P} . Тому потік електромагнітної енергії крізь поверхню сфери радіусом r , що оточує осцилятор, називається **потужністю випромінювання**.

Колір неба

Тим же характером залежності випромінювання осцилятора від частоти пояснюється, наприклад, блакитний колір неба. Сонячне світло, що пронизує атмосферу, розсіюється молекулами повітря, які можна вважати елементарним осциляторами. Розсіювання світла обумовлюється тим, що під впливом світлових хвиль ці осцилятори здійснюють «вимушені» коливання. Так як період власних коливань осциляторів, відповідних молекул повітря, істотно відрізняється від періоду видимого світла (відсутність резонансу), то амплітуда вимушених коливань осциляторів слабо залежить від частоти (або довжини) світлової хвилі. Тому інтенсивність розсіяного світла, тобто інтенсивність вимушеної випромінювання цих осциляторів, обернено пропорційна λ^4 . Таким чином, короткохвильове світло (синій колір) розсіюється сильніше, ніж, наприклад, червоний, і створює блакитний колір неба.

Випромінювання рухомого заряду

Припустимо, що диполь складається з двох точкових зарядів: $+q$ і $-q$, з яких додатній нескінченно важкий, а тому його можна вважати нерухомим.

Дипольний момент цієї системи і його друга похідна по часу

$$\vec{p} = -q\vec{r}', \quad \ddot{\vec{p}} = -q\dot{\vec{v}},$$

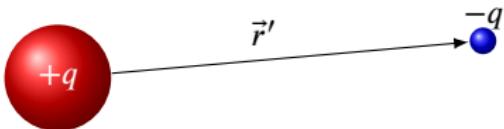
де $v = \dot{\vec{r}}$ – швидкість заряду, а $\dot{\vec{v}}$ – його прискорення.

Потужність, що випромінюється:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3} \dot{v}^2$$

Таким чином, електричний заряд випромінює електромагнітну енергію, якщо він рухається прискорено.

Випромінювання рухомого заряду



Дипольний момент цієї системи і його друга похідна по часу

$$\vec{p} = -q\vec{r}', \quad \ddot{\vec{p}} = -q\dot{\vec{v}},$$

де $v = \dot{r}'$ – швидкість заряду, а \dot{v} – його прискорення.

Потужність, що випромінюється:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3} \dot{v}^2$$

Таким чином, електричний заряд випромінює електромагнітну енергію, якщо він рухається прискорено.

Задачі

Задача 1

Електромагнітна хвиля, що випромінюється диполем, поширюється у вакуумі так, що у хвильовій зоні на промені, перпендикулярному до осі диполя, на відстані r від нього середнє значення густини потоку енергії дорівнює $\langle \Pi \rangle$. Знайти середню потужність випромінювання диполя.

Задача 2

Постійний за модулем електричний диполь моментом \vec{p} обертають з кутовою швидкістю ω навколо осі, що перпендикулярна до осі диполя та проходить через його середину. Знайти потужність випромінювання диполя.

Задача 3

Знайти потужність випромінювання нерелятивістської частинки з зарядом e і масою m , що рухається круговою орбітою радіуса R у полі нерухомого точкового заряду q .