

Система рівнянь Максвелла

Лекції з електрики та магнетизму

Пономаренко С. М.

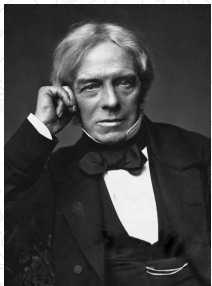
1 грудня 2024 р.

1. Струм зміщення

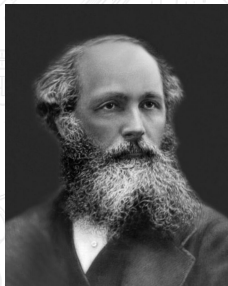
Приклади розрахунку струмів зміщення

Основоположники теорії електромагнітного поля

Теорія електромагнітного поля, початки якої заклав **Фарадей**, математично була завершена **Максвеллом**. При цьому однією з найважливіших нових ідей, висунутих Максвеллом, була думка про симетрію в взаємозалежності електричного і магнітного полів.



Майкл Фарадей (1791 – 1867) —
англійський фізик і хімік.



Джеймс Клерк Максвелл (1831 – 1879)
— шотландський вчений.

Цитати із книги «Еволюція фізики»

А. Ейнштейн, Л. Інфельд

Кількісне, математичне формулювання законів поля дано в так званих рівняннях Максвелла. [Експериментальні] факти призвели до формулювання цих рівнянь, але зміст їх значно багатший [...]. Їхня проста форма приховує глибину, що виявляється тільки при ретельному вивченні.

Формулювання цих рівнянь є найважливішою подією з часу Ньютона не тільки важливою подією з часу Ньютона не тільки внаслідок цінності їхнього змісту, а й тому, що вони дають зразок нового типу законів. Характерну особливість рівнянь Максвелла, яка проявляється і в усіх інших рівняннях сучасної фізики, можна виразити в одному реченні: **рівняння Максвелла суть закони, що виражають структуру поля.**

Струм зміщення і закон збереження заряду

Протиріччя в законах магнетизму

Теорема про циркуляцію для постійного магнітного поля:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

виявляється невірною у випадку змінного електричного поля.

Застосовуючи операцію div до цього рівняння і враховуючи тожність $\text{div rot } \vec{H} = 0$, отримуємо $\text{div } \vec{j} = 0$. З іншого боку, якщо густина заряду змінюється з часом, $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ то в силу закону збереження заряду

$$\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

тобто $\text{div } \vec{j} \neq 0$. Це протиріччя показує, що необхідно видозмінити теорему про циркуляцію.

Струм зміщення і закон збереження заряду

Гіпотеза Максвелла

Для вирішення цього протиріччя Дж. Максвелл увів поняття **струму зміщення** $\vec{j}_{\text{зм}}$ співвідношенням

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + \vec{j}_{\text{зм}}),$$

щоб закон збереження заряду виконувалося. Застосовуючи операцію div до записаного рівняння, отримуємо:

$$\text{div}(\vec{j} + \vec{j}_{\text{зм}}) = 0, \Rightarrow \text{div } \vec{j}_{\text{зм}} = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

За теоремою Гаусса для електричного поля $\rho = \frac{1}{4\pi} \text{div } \vec{D}$. Отже:

$$\text{div } \vec{j}_{\text{зм}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi} \text{div } \vec{D} \right), \Rightarrow \boxed{\vec{j}_{\text{зм}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}.$$

Струм зміщення і закон збереження заряду

Теорема про циркуляцію магнітного поля

Таким чином, теорема про циркуляцію для магнітного поля, що узгоджується із законом збереження заряду, має записуватися у вигляді

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

В інтегральній формі теорема про циркуляцію має вигляд

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S},$$

де $I_{\text{зм}} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ — струм зміщення, що пронизує площу S , натягнуту на контур L . Отже, згідно гіпотези Максвелла **змінне електричне поле поряд зі звичайними струмами, також створює магнітне поле.**

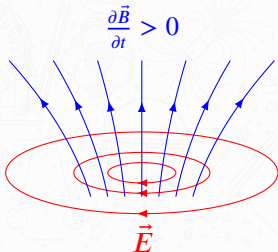
Струм зміщення і закон збереження заряду

Порівняння закону Фарадея та гіпотези Максвелла

Порівняємо закон електромагнітної індукції Фарадея, та «оновлену» теорему про циркуляцію за відсутності струмів провідності ($\vec{j} = 0$) у вакуумі ($\epsilon = \mu = 1 \Rightarrow \vec{E} = \vec{D}$, $\vec{H} = \vec{B}$).

Закон електромагнітної
індукції

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



Закон магнітоелектричної
індукції

$$\text{rot } \vec{B} = +\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

