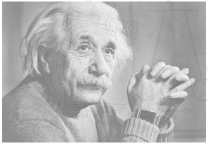
Відносність
електричних та магнітних полів.
Інваріанти електромагнітного поля

Лекції з електрики та магнетизму

Пономаренко С. М.

30 грудня 2022 р.



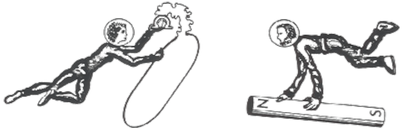
Джерела теорії відносності

Стаття Ейнштейна «*До електродинаміки рухомих тіл*» (Einstein A. Zur Electrodynamik bewegter Körper Annalen der Physik, 322, 891-921, 1905.) окреслила засади спеціальної теорії відносності, основні постулати якої:

1. В усіх інерціальних системах відліку фізичні процеси відбуваються однаково.

   Закони, що їх описують мають однаковий вигляд в усіх інерціальних системах відліку.

2. Швидкість світла у вакуумі не залежить від руху джерела або приймача і однакова в усіх напрямах.



3. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper;*
von A. Einstein.

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten Fällen vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.

Відомо, що електродинаміка Максвелла — в сучасному її вигляді — у застосуванні до рухомих тіл приводить до асиметрії, яка невластива самим явищам. Пригадаємо, наприклад, електродинамічну взаємодію між магнітом та провідником зі струмом. Спостережуване явище залежить лише від відносного руху провідника і магніту, тоді як, згідно з звичайним уявленням, два випадки, у яких рухається або одне, або інше з цих тіл, повинні бути строго розмежовані. Справді, якщо рухається магніт, а провідник знаходиться в спокої, то навколо магніту виникає електричне поле, що має деяку кількість енергії, яке в тих місцях, де знаходяться частини провідника, породжує струм. Якщо ж магніт перебуває у спокої, а рухається провідник, навколо магніту немає ніякого електричного поля; натомість у провіднику виникає електрорушійна сила, якій самій по собі не відповідає жодна енергія, але яка — при ймовірній тотожності відносного руху в обох випадках, що цікавлять нас — викликає електричні струми тієї ж величини і того ж напрямку, що і електричне поле в першому випадку.

Згідно постулату спеціальної теорії відносності, всі інерціальні системи відліку рівноправні, тому закони електродинаміки, як і всі взагалі фізичні явища не змінюються під час переходу від однієї інерційної системи від рахунки K до будь-якої іншої системи K', що рухається відносно K прямолінійно і рівномірно з довільною швидкістю $\vec{V}$. Однак конкретні фізичні величини змінюються при переході від однієї системи відліку K до іншої системи K': результати вимірювання одного й того ж явища у двох різних системах K та K', взагалі кажучи, відмінні один від одного.

Теорія електромагнітних явищ повинна, по-перше, дати відповідь на питання про те, як змінюються значення електромагнітних величин (зокрема, векторів поля $\vec{E}$ та $\vec{B}$, густини зарядів і струмів ρ і $\vec{j}$ тощо) при зміні системи відліку, і, по-друге, має показати, що із встановленого способу перерахунку фізичних величин з однієї системи відліку до іншої випливає *коваріантність законів електродинаміки*.

Коваріантність законів — однаковий вигляд у всіх інерціальних системах відліку

Коваріантність законів $\Rightarrow$ Закони перетворення фізичних величин

Перетворення Лоренца

Перетвореннями Лоренца — це перетворення, яким піддаються координати та час при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої:

$$(ct, x, y, z) \to (ct', x', y', z')$$

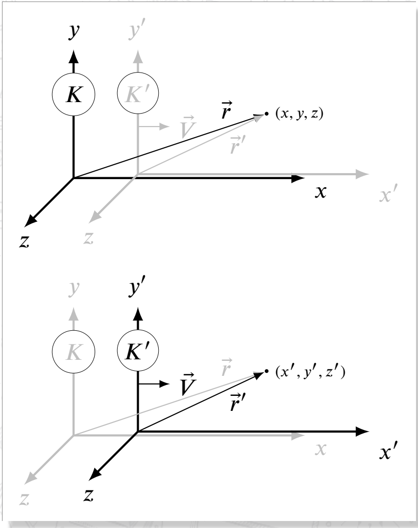
$$ct' = \frac{ct - \frac{V}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \Gamma\left(ct - \frac{V}{c}x\right),$$

$$x' = \frac{x - \frac{V}{c}cdt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \Gamma(x - Vt),$$

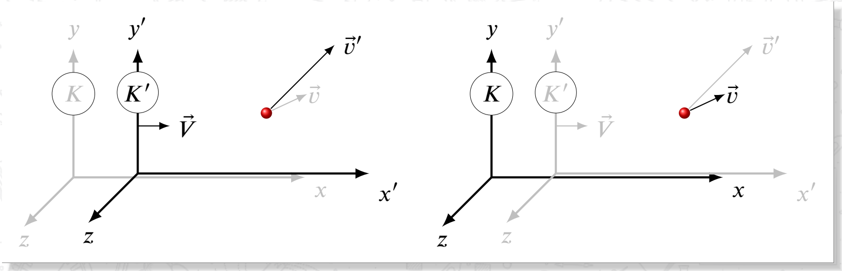
$$y' = y, \quad z' = z,$$

де

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$



Нехай система K' рухається відносно системи K зі швидкістю V вздовж осі x. Нехай $v_x = dx/dt$ є компонентою швидкості в системі K, а $v_x' = dx'/dt'$ — компонента швидкості тієї ж частинки у системі K'.



$$v_{x'} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}, \quad v_{y'} = \frac{v_y}{\Gamma\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)}, \quad v_{z'} = \frac{v_z}{\Gamma\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)}.$$

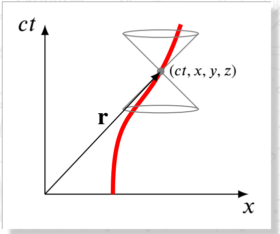
Ці формули визначають *перетворення швидкостей*. Вони являють собою закон складання швидкостей у теорії відносності. У граничному випадку $c \to \infty$ вони переходять у формули класичної механіки $v_{x'} = v_x - V, v_{y'} = v_y, v_{z'} = v_z$.

Подія визначається місцем, де вона відбулась та часом, коли вона відбулась Таким чином, подія, що трапилась з деякою матеріальною частинкою, визначається трьома координатами цієї частинки і моментом часу, коли відбувається подія.

Часто корисно з міркувань наочності користуватись уявним чотиривимірним простором, на осях якого відкладаються три просторові координати і час.

В цьому просторі подія зображується точкою (ct, x, y, z). Ця точка називаються *світовою точкою*.

Частинка, що рухається, описує в чотиривимірному просторі траєкторію, яка називається *світовою лінією*.

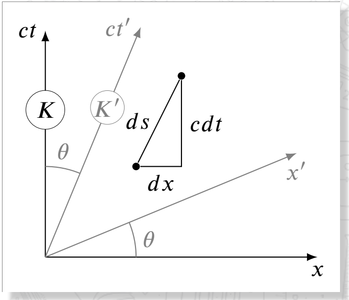


Сукупність координат події (ct, x, y, z) можна розглядати як компоненти чотиривимірного радіус-вектора (або *4-радіус-вектора*).

Перетворення Лоренца — це перетворення координат 4-радіус-вектора.

Траєкторії масивних частинок лежать в середині 4-вимірного *світлового конуса*. Області «абсолютно майбутнього» та «абсолютно минулого» зображуються тоді двома внутрішніми порожнинами цього конуса. За межами конуса лежать причинно не зв'язані області.

Геометрія простору-часу



«*Теорема Піфагора*» в просторі-часі:

$$\boxed{ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

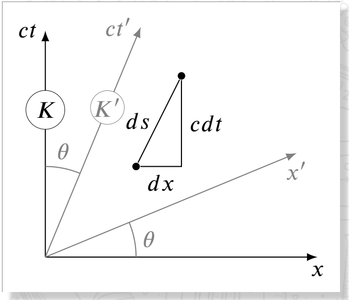
ds називається *інтервалом* між подіями. Інтервал, з формальної математичної точки зору, це відстань між двома точками в просторі-часі.

$ds^2 > 0$ — часоподібний інтервал,

$ds^2 = 0$ — світлоподібний інтервал,

$ds^2 < 0$ — просторовоподібний інтервал.

1. *Часоподібний* інтервал між подіями означає, що існує така система відліку, в якій обидві події відбулися в тому самому місці. Що ще важливіше, часовий інтервал між подіями означає, що вони можуть бути причинно пов'язані.
2. Напрями у просторі-часі, вздовж яких інтервал дорівнює 0, називаються також *ізотропними*. Світло поширюється завжди вздовж ізотропних напрямів.
3. Події, інтервал між якими *просторовоподібний*, як зазначено вище, не можуть бути причинно пов'язаними, оскільки навіть прямий сигнал, що розповсюджується, мав би для цього рухатися швидше швидкості світла.



«*Теорема Піфагора*» в просторі-часі:

$$\boxed{ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

ds називається *інтервалом* між подіями. Інтервал, з формальної математичної точки зору, це відстань між двома точками в просторі-часі.

Перетворення Лоренца в такій геометрії — «*гіперболічний*» поворот осей координат на кут θ. Гіперболічний тангенс цього кута є швидкістю K' системи відліку відносно K:

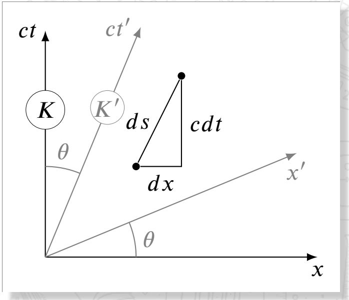
$$x' = x\,\mathrm{ch}\,\theta - ct\,\mathrm{sh}\,\theta, \quad ct' = ct\,\mathrm{ch}\,\theta - x\,\mathrm{sh}\,\theta,$$

де

$$\mathrm{th}\,\theta = \frac{\mathrm{sh}\,\theta}{\mathrm{ch}\,\theta} = \frac{V}{c}, \quad \mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1.$$

перетворення повороту в 3D

Геометрія простору-часу



«*Теорема Піфагора*» в просторі-часі:

$$\boxed{ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

ds називається *інтервалом* між подіями. Інтервал, з формальної математичної точки зору, це відстань між двома точками в просторі-часі.

Як сказав Мінковський: «Простір сам по собі та час сам по собі поринуть у річку забуття, а залишиться жити лише своєрідний їхній союз».

4-вектор елементарного зміщення в просторі-часі

$$\mathbf{ds} = (cdt, dx, dy, dz) = (ds^0, ds^1, ds^2, ds^3)$$

Для зручності запису квадратів 4-векторів вводять два «сорти» компонент 4-векторів, позначаючи їх верхніми A^μ та нижніми A_μ індексами. При цьому

$$A_0 = A^0, \quad A_x = -A^x, \quad A_y = -A^y, A_z = -A^z.$$

Величини A^μ називають контраваріантними, а A_μ — *коваріантними* компонентами 4-вектора.
Квадрат 4-вектора елементарного зміщення є інтервалом

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\mu=0}^{3} ds^\mu ds_\mu = ds^\mu ds_\mu = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Модуль 4-вектора зміщення

$$ds = \sqrt{(cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{cdt}{\gamma}, \quad \text{де} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Вектор *4-швидкості*:

$$\mathbf{u} = c\frac{\mathbf{ds}}{ds}, \quad u^{ct} = c\frac{cdt}{ds} = c\gamma, u^x = c\frac{dx}{ds} = \gamma v_x, \ldots$$

Квадрат 4-швидкості

$$\mathbf{u}^2 = u^\mu u_\mu = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 v_x^2 - \gamma^2 v_y^2 - \gamma^2 v_z^2 = \gamma^2(c^2 - v^2) = c^2\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2$$

Вектор 4-імпульсу:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u}$$

Компоненти 4-імпульсу

$$p^0 = mc\gamma = \frac{E}{c}, \quad p^1 = mv_x\gamma, \quad p^2 = mv_y\gamma, \quad p^3 = mv_z\gamma.$$

Квадрат 4-імпульсу

$$\mathbf{p}^2 = p^\mu p_\mu = m^2c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2$$

Означення 4-вектора

4-вектором називається сукупність чотирьох величин (A^0, A^1, A^2, A^3), які при перетвореннях чотиривимірної системи координат перетворюються як компоненти 4-радіус-вектора:

$$A^{0\prime} = \Gamma\left(A^0 - \frac{V}{c}A^1\right), \quad A^{1\prime} = \Gamma\left(A^1 - \frac{V}{c}A^0\right), \quad A^{2\prime} = A^2, \quad A^{3\prime} = A^3.$$

Вектор 4-імпульсу:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u}$$

Компоненти 4-імпульсу

$$p^0 = mc\gamma = \frac{E}{c}, \quad p^1 = mv_x\gamma, \quad p^2 = mv_y\gamma, \quad p^3 = mv_z\gamma.$$

Квадрат 4-імпульсу

$$\mathbf{p}^2 = p^\mu p_\mu = m^2c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2$$

Для компонент 4-зміщення	Для компонент 4-імпульсу
$cdt' = \dfrac{cdt - \frac{V}{c}dx}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \Gamma\left(cdt - \dfrac{V}{c}dx\right)$	$\dfrac{E'}{c} = \dfrac{\frac{E}{c} - \frac{V}{c}p_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \Gamma\left(\dfrac{E}{c} - \dfrac{V}{c}p_x\right)$
$dx' = \dfrac{dx - \frac{V}{c}cdt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \Gamma(dx - Vdt)$	$p_{x'} = \dfrac{p_x - \frac{V}{c}\frac{E}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \Gamma\left(p_x - V\dfrac{E}{c}\right)$
$dy' = dy, \quad dz' = dz$	$p_{y'} = p_y, \quad p_{z'} = p_z$

Коваріантність законів — однаковий вигляд у всіх інерціальних системах відліку

В системі K $\quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \left(\vec{F}\cdot\frac{\vec{v}}{c}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{E}{c}\right)$

В системі K' $\quad \vec{F}' = \frac{d\vec{p}'}{dt'} \quad \left(\vec{F}'\cdot\frac{\vec{v}'}{c}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{E'}{c}\right)$

$$F_{x'} = F_x - \frac{v_y V}{c^2}\Gamma F_{y'} - \frac{v_z V}{c^2}\Gamma F_{z'},$$

$$F_{y'} = \frac{F_y}{\Gamma\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)},$$

$$F_{z'} = \frac{F_z}{\Gamma\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)}$$

Заряд — релятивістськи інваріантна величина!

Інваріантність заряду

$$\iiint\limits_{V} \rho\, dx dy dz = \iiint\limits_{V'} \rho_0 dx' dy' dz',$$

ρ_0 — власна густина заряду.

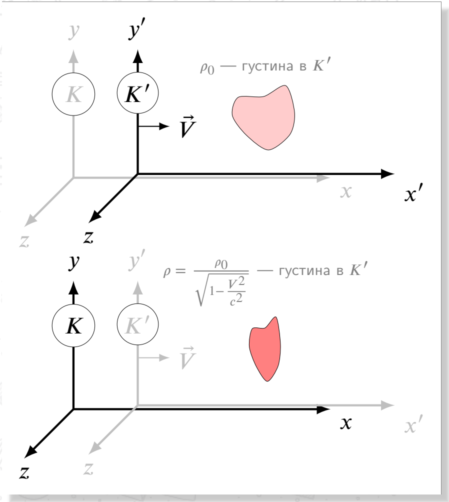
Лоренцівське скорочення $(dt = 0)$

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \Gamma dx,$$

$$dy' = dy, \quad dz' = dz.$$

Перетворення для густини заряду

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \Gamma \rho_0.$$



Перетворення для електричного та магнітного полів

Нехай в системі K існує електричне $\vec{E}$ та магнітне $\vec{B}$ поля. У системі K' напруженість $\vec{E}'$ та індукція $\vec{B}'$.

Скористаємося виразами для сили Лоренца:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right]\right), \quad \vec{F}' = q\left(\vec{E}' + \left[\frac{\vec{v}'}{c} \times \vec{B}'\right]\right)$$

Розглянемо y компоненту

$$F_y = F_{y'}\Gamma\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)$$

$$E_y + \frac{v_z}{c}B_x - \frac{v_x}{c}B_z = \Gamma\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)\left(E_{y'} + \frac{v_{z'}}{c}B_{x'} - \frac{v_{x'}}{c}B_{z'}\right)$$

Виключаючи в цьому рівнянні за допомогою перетворень швидкостей компоненти вектора швидкості, і групуючи доданки біля компонент швидкостей, перепишемо останню рівність у вигляді:

$$\left(E_y - \Gamma E_{y'} - \Gamma\frac{V}{c}B_{z'}\right) + \left(-B_z + \Gamma\frac{V}{c}E_{y'} + \Gamma B_{z'}\right)v_x + \left(B_x - B_{x'}\right)v_z = 0.$$

Оскільки ця рівність повинна виконуватися за будь-якої швидкості $\vec{v}$, вирази в круглих дужках повинні дорівнювати нулю. Отже

$$E_y = \Gamma\left(E_{y'} + \frac{V}{c}B_{z'}\right), \quad B_x = B_{x'}, \quad B_z = \Gamma\left(B_{z'} + \frac{V}{c}E_{y'}\right).$$

Нехай в системі K існує електричне $\vec{E}$ та магнітне $\vec{B}$ поля. У системі K' напруженість $\vec{E}'$ та індукція $\vec{B}'$.

Перетворення для електричного та магнітного полів

$$E_x = E_{x'}, \quad B_x = B_{x'}$$
$$E_y = \Gamma\left(E_{y'} + \frac{V}{c}B_{z'}\right), \quad B_y = \Gamma\left(B_{y'} - \frac{V}{c}E_{z'}\right),$$
$$E_z = \Gamma\left(E_{z'} - \frac{V}{c}B_{y'}\right), \quad B_z = \Gamma\left(B_{z'} + \frac{V}{c}E_{y'}\right)$$

https://youtu.be/h7LaQPvzHZo

Інваріанти електромагнітного поля

Інваріантами перетворень електромагнітного поля називаються такі величини, складені з векторів поля, які змінюють значення при переході від однієї інерційної системи відліку до іншого.

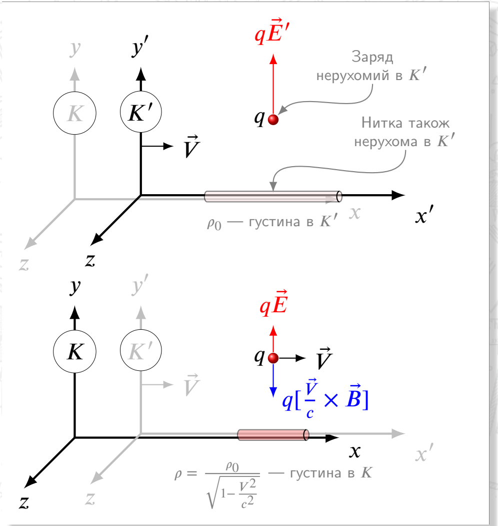
$$E^2 - B^2 = E'^2 - B'^2 = \mathrm{inv},$$
$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \vec{E}' \cdot \vec{B}' = \mathrm{inv}.$$

1. якщо в деякій інерційній системі відліку $B^2 > E^2$ і $\vec{B} \perp \vec{E}$, то можна вибрати таку інерційну систему відліку, де електричне поле відсутнє, а магнітне відмінне від нуля. Якщо $\vec{B}$ не перпендикулярно $\vec{E}$, то такої інерційної системи відліку не існує;
2. якщо в деякій інерційній системі відліку $B^2 < E^2$ і $\vec{B} \perp \vec{E}$, то можна вибрати таку інерційну систему відліку, де магнітне поле відсутнє, а електричне відмінне від нуля. Якщо $\vec{B}$ не перпендикулярно $\vec{E}$, то такої інерційної системи відліку не існує;
3. якщо в будь-якій інерційній системі відліку є тільки електричне поле або тільки магнітне, то при переході до іншої інерційної системи відліку є взагалі кажучи, як електричне, так і магнітне поля, які перпендикулярні один одному $\vec{B} \perp \vec{E}$;
4. плоска хвиля, для якої $E = B$ і $\vec{B} \perp \vec{E}$, у всіх інерційних системах відліку залишається плоскою хвилею.

Якщо в одній системі відліку є лише електричне поле $\vec{E}$, чи можна знайти таку систему відліку в якій існує лише магнітне поле $\vec{B}'$?

Електричне поле в рухомій системі відліку

Відоме електричне поле $\vec{E}$ нитки рухомій системі відліку K'. Знайти його величину в нерухомій K системі відліку.



Вираз для сили Лоренца в 4-вигляді

$$mc\frac{du^\mu}{ds} = \frac{1}{c}F^{\mu\nu}u_\nu$$

$F^{\mu\nu}$ називають тензором електромагнітного поля. Можна зобразити матричну структуру тензора поля в декартових координатах:

$$F^{\mu\nu} = \begin{array}{cc} & \nu\ \text{зростає} \longrightarrow \\ \mu\ \text{зростає} \downarrow & \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix}$$

Тензорне уявлення фізичних величин є корисним тим, що можна легко виявити інваріанти, які аж ніяк не лежать на поверхні. Інваріант для тензора поля записуємо, як і для будь-якого тензора 2-го рангу:

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \mathrm{inv} \quad (E^2 - B^2 = \mathrm{inv})$$

З тензора поля можна утворити ще один інваріант:

$$e^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} = \mathrm{inv} \quad (\vec{E}\cdot\vec{B} = \mathrm{inv})$$

де $e^{\mu\nu\alpha\beta}$ — це абсолютно антисиметричний одиничний тензор четвертого рангу.

Вираз для сили Лоренца в 4-вигляді

$$mc\frac{du^\mu}{ds} = \frac{1}{c}F^{\mu\nu}u_\nu$$

$F^{\mu\nu}$ називають тензором електромагнітного поля. Можна зобразити матричну структуру тензора поля в декартових координатах:

$$F^{\mu\nu} = \begin{array}{cc} & \nu\ \text{зростає} \\ \mu\ \text{зростає} & \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix}$$

Як сказав Мінковський: «Простір сам по собі та час сам по собі поринуть у річку забуття, а залишиться жити лише своєрідний їхній союз».

«Електричне поле саме по собі та магнітне поле саме по собі поринуть у річку забуття, а залишиться жити лише своєрідний їхній союз».

4-вектор густини струму електромагнітного поля:

$$j^\mu = \left(c\rho, j_x, j_y, j_z\right)$$

4-Потенціал електромагнітного поля:

$$A^\mu = \left(\varphi, A_x, A_y, A_z\right), \quad A_\mu = \left(\varphi, -A_x, -A_y, -A_z\right)$$

Вираз тензора поля через 4-потенціал:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}.$$

Рівняння Максвелла:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = 0.$$