Магнітне поле у вакуумі

Лекції з електрики та магнетизму

Пономаренко С. М.

Зміст лекції

Означення

Магнітним полем називається силове поле, що діє на рухомі заряди і як наслідок — на електричні струми і на тіла, які мають магнітний момент.

Магнітне поле створюється рухомими зарядами (електричним струмом). Незмінні в часі струми створюють постійні магнітні поля.

Характеристика магнітного поля

Магнітних зарядів (магнітних монополів) у в природі немає (експериментальний факт). Характеристику магнітного поля, аналогічно до $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ ввести не можна. Однак в природі є магнітні диполі (магнітна стрілка, коловий виток зі струмом тощо), тому використовуючи аналогію з моментом сил, що діє на електричний диполь в електричному полі $\vec{M} = \left[\vec{p}_e \times \vec{E}\right]$, можна ввести характеристику магнітного поля:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m \times \vec{B}\right], \quad M_{\max} = p_m B$$

Характеристику магнітного поля, вектор $\vec{B}$, по історичним причинам називають не напруженістю, а індукцією магнітного поля.

Величина вектора індукції чисельно дорівнює максимальному обертальному моменту, що діє на одиничний магнітний момент вміщений у магнітне поле:

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m}.$$

Характеристика магнітного поля

Магнітних зарядів (магнітних монополів) у в природі немає (експериментальний факт). Характеристику магнітного поля, аналогічно до $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ ввести не можна. Однак в природі є магнітні диполі (магнітна стрілка, коловий виток зі струмом тощо), тому використовуючи аналогію з моментом сил, що діє на електричний диполь в електричному полі $\vec{M} = \left[\vec{p}_e \times \vec{E}\right]$, можна ввести характеристику магнітного поля:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m \times \vec{B}\right], \quad M_{\max} = p_m B$$

Характеристику магнітного поля, вектор $\vec{B}$, по історичним причинам називають не напруженістю, а індукцією магнітного поля.

В гауссовій системі одиниць величину магнітного поля називають Гаусом (Гс). С системі СІ Теслою (Тл):

$$1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс}.$$

Сила Лоренца та сила Ампера

Магнітною складовою сили Лоренца називається сила, що діє на рухомий заряд q з боку магнітного поля:

$$\vec{F} = q\left[\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right].$$

Повна сила (власне і є сила Лоренца), що діє на заряд, включає також силу з боку електричного поля:

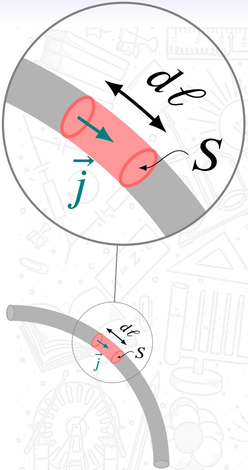
$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right]\right).$$

Силою Ампера називають силу, що діє на струми з боку магнітного поля:

$$d\vec{F} = \frac{1}{c}\left[\vec{j}dV \times \vec{B}\right],$$

де $\vec{j}dV$ — називається об'ємним елементом струму.

Елемент струму



Якщо в задачі не цікавляться внутрішньою будовою провідника, та розподілом струму в його товщі, то можна ввести лінійний елемент струму.

Нехай струм тече провідником із площею поперечного перерізу S. Уведемо вектор ділянки провідника завдовжки $d\vec{\ell}$ за формулою $d\vec{\ell} = \vec{n}\ell$, де $\vec{n}$ — одиничний вектор уздовж осі провідника. Тоді $\vec{j} = j\vec{n}$, а $I = jS$ і вираз для об'ємного елемента струму можна переписати у вигляді:

$$\vec{j}dV = j\vec{n}Sd\ell = Id\vec{\ell}.$$

Для лінійного елемента струму сила Ампера:

$$d\vec{F} = \frac{1}{c}\left[Id\vec{\ell} \times \vec{B}\right].$$

Зв'язок сили Лоренца та сили Ампера

Сила Лоренца, що діє на заряд dq, дорівнює

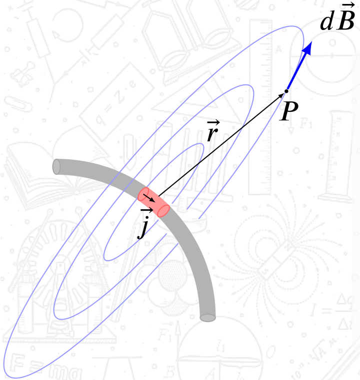
$$\vec{F} = \left[\frac{dq\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right].$$

Оскільки $dq\vec{v} = \rho\vec{v}dV = \vec{j}dV$, то одразу отримуємо силу Ампера, що діє на об'ємний елемент струму:

$$d\vec{F} = \frac{1}{c}\left[\vec{j}dV \times \vec{B}\right].$$

Закон Біо-Савара-Лапласа

Закон Біо-Савара встановлено експериментально (1820 р.) шляхом аналізу експериментальних даних і визначає магнітне поле, що створюється елементом струму.



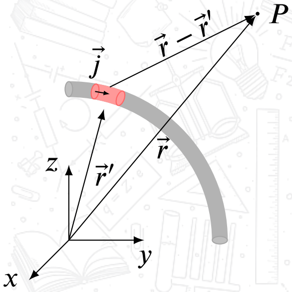
Якщо радіус-вектор точки спостереження відносно розглянутого елемента струму є $\vec{r}$, то поле, створюване елементом струму $\vec{j}dV$, дорівнює

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\left[\vec{j}dV \times \vec{r}\right]}{r^3}.}$$

Магнітне поле підкоряється принципу суперпозиції: $\vec{B} = \int d\vec{B}$.

Приклади застосування закону Біо-Савара-Лапласа

Вектор-потенціал магнітного поля



$$\boxed{d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\frac{\vec{j}(\vec{r}')dV' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}$$

Використаємо тотожність:

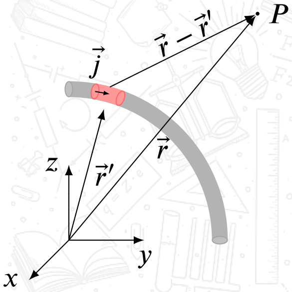
$$\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|},$$

у якому операція $\vec{\nabla}$ діє на координати $\vec{r}$.

Використаємо рівність $\vec{a}\times\nabla\varphi = -\operatorname{rot}(\vec{a}\varphi)$:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\int\limits_{V'}\frac{1}{c}\vec{j}(\vec{r}')dV'\times\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \operatorname{rot}\frac{1}{c}\int\limits_{V'}\frac{\vec{j}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}),$$

Вектор-потенціал магнітного поля



$$\boxed{\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A},}$$

Введений тут вектор $\vec{A}$ називається вектор-потенціалом:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int\limits_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV'$$

Вектор-потенціал вводиться при цьому неоднозначно. Векторні потенціали $\vec{A}$ і $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f(\vec{r})$ призводять до одного й того ж магнітного поля $\vec{B}$. Цією обставиною можна скористатися для того, щоб накласти на $\vec{A}$ яке-небудь обмеження, Зручно накласти на $\vec{A}$ умову

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0, \quad \text{кулонівське калібрування.}$$

Теорема Гаусса для магнітного поля

Маючи на увазі тотожність $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = 0$, з формули $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ отримуємо теорему Гауса в диференціальній формі:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$$

Застосовуючи теорему Остроградського-Гауса отримуємо теорему Гауса в інтегральній формі:

$$\boxed{\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0.}$$

Теорема Гауса стверджує, що немає вільних (незв'язаних) магнітних зарядів, на яких могли б починатися або закінчуватися силові лінії індукції магнітного поля.

Теорема про циркуляцію магнітного поля у вакуумі

Знайдемо ротор вектора $\vec{B}$:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right] = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A} \overset{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0}{=} -\nabla^2\vec{A}.$$

Аналогія з рівнянням Пуассона з електростатики

Рівняння Пуассона та його розв'язок:

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho,\;\; \varphi = \iiint\limits_{V'} \frac{\rho dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \qquad \nabla^2\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j},\;\; \vec{A} = \frac{1}{c}\iiint\limits_{V'} \frac{\vec{j}dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Однакові рівняння мають однакові розв'язки!

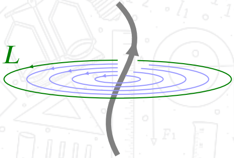
Теорема про циркуляцію для вектора $\vec{B}$:

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}.}$$

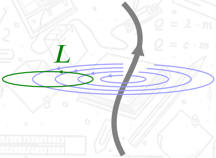
$$\boxed{\oint\limits_L \vec{B}\cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c}\iint\limits_S \vec{j}\cdot d\vec{S}.}$$

Приклади на теорему про циркуляцію №1

$$\oint\limits_L \vec{B}\cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c}\sum_i I_i$$

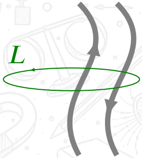


$$\oint\limits_L \vec{B}\cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c}I$$



$$\oint\limits_L \vec{B}\cdot d\vec{r} = 0$$

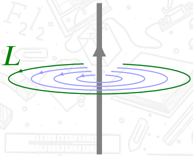
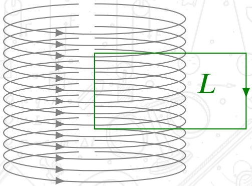
$$\oint\limits_L \vec{B}\cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c}I$$



$$\oint\limits_L \vec{B}\cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c}(I+(-I)) = 0$$

Приклади на теорему про циркуляцію №1

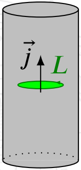
$$\oint\limits_L \vec{B}\cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c}\sum_i I_i$$

Поле нескінченного провідника		$B = \dfrac{2I}{cr}$
Поле нескінченного соленоїда		$B = \dfrac{4\pi}{c}\dfrac{N}{l}I$

Приклади на теорему про циркуляцію №2

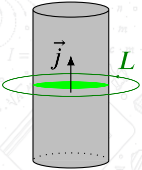
$$\oint\limits_L \vec{B}\cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c}\iint\limits_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

Поле всередині нескінченного циліндричного провідника



$$B = \frac{2\pi}{c} jr$$

Поле зовні нескінченного циліндричного провідника



$$B = \frac{2}{cr} j\pi R^2 = \frac{2I}{cr}$$

Порівняння законів електро- та магнітостатики у вакуумі

Диференціальні теореми

Теорема	Електростатика	Зміст	Магнітостатика	Зміст
Теорема Гаусса	$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$	Джерелами поля є електричні заряди	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	Джерел у магнітного поля немає
Теорема про циркуляцію	$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$	Електростатичне поле є потенціальним	$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$	Магнітне поле є вихровим. Вихором є струм.

Інтегральні теореми

Теорема	Електростатика	Магнітостатика
Теорема Гаусса	$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi \iiint_V \rho dV$	$\oint\!\!\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$
Теорема про циркуляцію	$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$	$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c}\iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$

Магнітний момент

Моменту імпульсу $\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v})$ для руху мас є аналогом магнітного моменту для руху зарядів!

Момент імпульсу

$$\vec{L} = \iiint\limits_V \vec{r} \times \rho\vec{v}\, dV$$

Магнітний момент

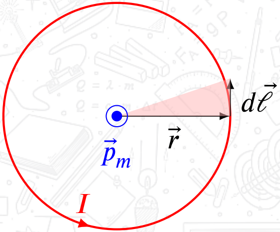
$$\vec{p}_m = \frac{1}{2c} \iiint\limits_V \vec{r} \times \rho\vec{v}\, dV$$

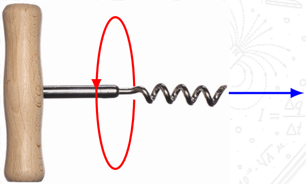
Оскільки густина струму $\vec{j} = \rho\vec{v}$, а $\vec{j}dV$ — є елементом струму, то можна для різних випадків записати різні варіації формули магнітного моменту:

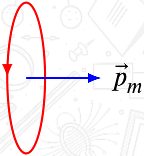
Випадок	Магнітний момент
Об'ємні струми	$\vec{p}_m = \frac{1}{2c} \iiint\limits_V \vec{r} \times \vec{j} dV$
Лінійні замкнені постійні струми	$\vec{p}_m = \frac{I}{2c} \oint\limits_L \vec{r} \times d\vec{\ell}$

Магнітний момент колового витка

$$\vec{p}_m = \frac{I}{2c}\oint\limits_L \vec{r}\times d\vec{\ell} = \frac{1}{c} I\pi R^2 \vec{n} = \frac{1}{c} I S \vec{n}$$



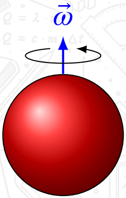




Магнітні та механічні моменти різних тіл

Відношення магнітного моменту зарядженого тіла, до його механічного моменту називається гіромагнітним відношенням:

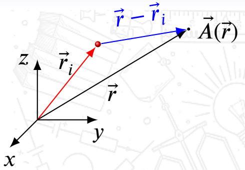
$$\boxed{\vec{p}_m = \gamma \vec{L}.}$$



Для любих класичних тіл $\gamma = \dfrac{Q}{2Mc}$

Тіло	Момент імпульсу	Магнітний момент	Гіромагнітне відношення γ
Куля	$\vec{L} = \frac{2}{5} mR^2 \vec{\omega}$	$\vec{p}_m = \frac{1}{5c} QR^2 \vec{\omega}$	$\frac{Q}{2Mc}$
Електрон	$L = \frac{1}{2}\hbar$	$p_m = \frac{e}{2mc}\hbar$	$-\frac{e}{m_e c}$

Вектор-потенціал на далеких відстанях



Магнітний момент системи тіл:

$$\vec{A} = \frac{1}{c}\sum_i \frac{q_i\vec{v}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

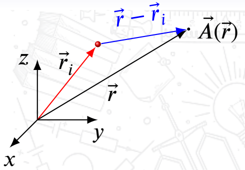
На далеких відстанях $r_i \ll r$ наближено $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \approx \frac{1}{r}\left(1+\frac{\vec{r}\,\vec{r}_i}{r^2}\right)$.

Для стаціонарних рухів, які відбуваються в малих областях, можна зробити усереднення вектор-потенціалу, при цьому $\frac{d}{dt}\ldots = 0$.

$$\overline{\vec{A}} = \frac{1}{cr^3}\sum_i q_i\overline{v_i(\vec{r}\,\vec{r}_i)}$$

$$v_i(\vec{r}\,\vec{r}_i) = \frac{1}{2}\left[v_i(\vec{r}\,\vec{r}_i) - \vec{r}_i(\vec{r}\,\vec{v}_i)\right] + \frac{1}{2}\left[v_i(\vec{r}\,\vec{r}_i) + \vec{r}_i(\vec{r}\,\vec{v}_i)\right] = \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}_i\times\vec{r}_i + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i(\vec{r}\,\vec{r}_i)\right).$$

Вектор-потенціал на далеких відстанях



Магнітний момент системи тіл:

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \sum_i \frac{q_i \vec{v}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$\overline{\vec{A}} = \frac{1}{r^3} \left(\frac{1}{2c} \sum_i \vec{r}_i \times (q_i \vec{v}_i) \right) \times \vec{r} = \frac{\vec{p}_m \times \vec{r}}{r^3}.$$

Магнітне поле знаходиться за формулою $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$:

$$\operatorname{rot} \left[\vec{A} \times \vec{B} \right] = \left(\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{A} - \left(\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B} + \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \left(\vec{p}_m \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -\left(\vec{p}_m \cdot \vec{\nabla} \right) \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{3 \left(\vec{p}_m \cdot \vec{r} \right) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3}.$$

$$\vec{B} = \frac{3 \left(\vec{p}_m \cdot \vec{r} \right) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3}.$$

Детальние виведення

$$\mathrm{rot}\left[\vec{A}\times\vec{B}\right] = \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} - \left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B} + \vec{A}\,\mathrm{div}\,\vec{B} - \vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{A}$$

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\left(\vec{p}_m\times\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -\left(\vec{p}_m\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{3\left(\vec{p}_m\cdot\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3}.$$

$$\vec{A} = \vec{p}_m \qquad \vec{B} = \frac{\vec{r}}{r^3} \qquad \vec{p}_m = \mathrm{const} \qquad \mathrm{div}\,\vec{E} = \mathrm{div}\,\frac{q\vec{r}}{r^3} = 0 \ (\vec{r}\neq 0)$$

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\left(\vec{p}_m\times\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \cancel{\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{p}_m}^{\,0} - \left(\vec{p}_m\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{\vec{r}}{r^3} + \cancel{\vec{p}_m\,\mathrm{div}\,\frac{\vec{r}}{r^3}}^{\,0} - \cancel{\frac{\vec{r}}{r^3}\,\mathrm{div}\,\vec{p}_m}^{\,0}$$

$$\vec{B} = -\left(\vec{p}_m\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{\left(\vec{p}_m\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{r}}{r^3} - \vec{r}\left(\vec{p}_m\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{1}{r^3}$$

$$\left(p_x\frac{\partial}{\partial x} + p_y\frac{\partial}{\partial y} + p_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k} = \vec{p}_m$$

$$\left(p_x\frac{\partial}{\partial x} + p_y\frac{\partial}{\partial y} + p_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{3}{r^5}\left(p_x x + p_y y + p_z z\right) = -\frac{3\left(\vec{p}_m\cdot\vec{r}\right)}{r^5}$$

$$\vec{B} = \frac{3\left(\vec{p}_m\cdot\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3}$$

Магнітний диполь

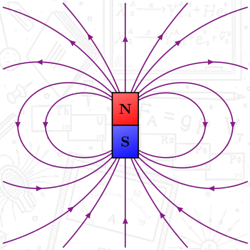
Полюса магніту

Отримана формула збігається за виглядом із формулою для електричного поля точкового електричного диполя.

$$\boxed{\vec{B} = \frac{3\left(\vec{p}_m \cdot \vec{r}\right)\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3}.}$$

Це означає, що точковий магнітний момент можна розглядати формально як точковий диполь, складений з *ефективних магнітних зарядів*:

N (північного) та S (південного).

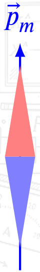


Магнітний диполь

Порівняння електричного та магнітного диполів

	Електричний диполь	Магнітний диполь
Потенціал	$\varphi = \dfrac{\vec{p}_e \cdot \vec{r}}{r^3}$	$\vec{A} = \dfrac{\vec{p}_m \times \vec{r}}{r^3}$
Поле	$\vec{E} = \dfrac{3\left(\vec{p}_e \cdot \vec{r}\right)\vec{r}}{r^5} - \dfrac{\vec{p}_e}{r^3}$	$\vec{B} = \dfrac{3\left(\vec{p}_m \cdot \vec{r}\right)\vec{r}}{r^5} - \dfrac{\vec{p}_m}{r^3}$

Позначаючи величину ефективного магнітного заряду q_m і плече магнітного диполя $\vec{\ell}$, дипольний момент ефективного магнітного диполя можна записати як $\vec{p}_m = q_m\vec{\ell}$. Якщо не розглядати поле усередині такого магнітного диполя, то воно усюди буде таким самим, як і поле системи струмів із магнітним моментом $\vec{p}_m$.



Потенціальна енергія диполя та сила, що діє на диполь