Система рівнянь Максвелла

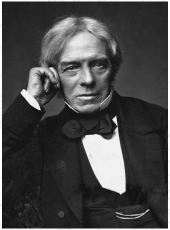
Лекції з електрики та магнетизму

Пономаренко С. М.

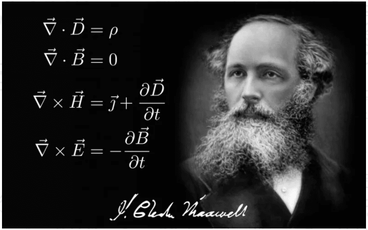
Зміст

Основоположники теорії електромагнітного поля

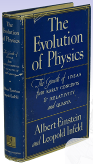
Теорія електромагнітного поля, початки якої заклав Фарадей, математично була завершена Максвеллом. При цьому однією з найважливіших нових ідей, висунутих Максвеллом, була думка про симетрію в взаємозалежності електричного і магнітного полів.



Майкл Фарадей (1791 – 1867) — англійський фізик і хімік.



Джеймс Клерк Максвелл (1831 – 1879) — шотландський вчений.



Цитати із книги «Еволюція фізики»

А. Ейнштейн, Л. Інфельд

Кількісне, математичне формулювання законів поля дано в так званих рівняннях Максвелла. [Експериментальні] факти призвели до формулювання цих рівнянь, але зміст їх значно багатший […]. Їхня проста форма приховує глибину, що виявляється тільки при ретельному вивченні.

Формулювання цих рівнянь є найважливішою подією з часу Ньютона не тільки важливою подією з часу Ньютона не тільки внаслідок цінності їхнього змісту, а й тому, що вони дають зразок нового типу законів. Характерну особливість рівнянь Максвелла, яка проявляється і в усіх інших рівняннях сучасної фізики, можна виразити в одному реченні: рівняння Максвелла суть закони, що виражають структуру поля.

Струм зміщення і закон збереження заряду

Протиріччя в законах магнетизму

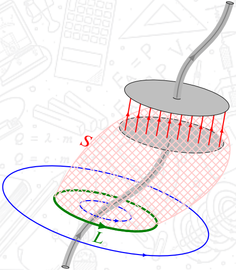
Теорема про циркуляцію для постійного магнітного поля:

$$\oint\limits_L \vec{H}\cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c}\oiint\limits_S \vec{j}\cdot d\vec{S},$$

або в диференціальній формі

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

виявляється неправильною у випадку змінного електричного поля.



Застосовуючи операцію div до цього рівняння і враховуючи тотожність $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H} = 0$, отримуємо $\operatorname{div}\vec{j} = 0$. З іншого боку, якщо густина заряду змінюється з часом, $\frac{\partial\rho}{\partial t} \neq 0$ то в силу закону збереження заряду

$$\operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

тобто $\operatorname{div}\vec{j} \neq 0$. Це протиріччя показує, що необхідно видозмінити теорему про циркуляцію.

Струм зміщення і закон збереження заряду

Гіпотеза Максвелла

Для вирішення цього протиріччя Дж. Максвелл увів поняття струму зміщення $\vec{j}_{\text{зм}}$ співвідношенням

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + \vec{j}_{\text{зм}}),$$

щоб закон збереження заряду виконувалося. Застосовуючи операцію div до записаного рівняння, отримуємо:

$$\operatorname{div}(\vec{j} + \vec{j}_{\text{зм}}) = 0, \Rightarrow \operatorname{div}\vec{j}_{\text{зм}} = \frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

За теоремою Гаусса для електричного поля $\rho = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\vec{D}$. Отже:

$$\operatorname{div}\vec{j}_{\text{зм}} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\vec{D}\right), \Rightarrow \boxed{\vec{j}_{\text{зм}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.}$$

Струм зміщення і закон збереження заряду

Теорема про циркуляцію магнітного поля

Таким чином, теорема про циркуляцію для магнітного поля, що узгоджується із законом збереження заряду, має записуватися у вигляді

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},}$$

В інтегральній формі теорема про циркуляцію має вигляд

$$\oint\limits_L \vec{H}\cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c}\iint\limits_S \vec{j}\cdot d\vec{S} + \frac{1}{c}\iint\limits_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S},$$

де $I_{\text{зм}} = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$ — струм зміщення, що пронизує площу S, натягнуту на контур L. Отже, згідно гіпотези Максвелла змінне електричне поле поряд зі звичайними струмами, також створює магнітне поле.

Струм зміщення і закон збереження заряду

Порівняння закону Фарадея та гіпотези Максвелла

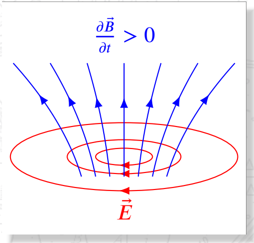
Порівняємо закон електромагнітної індукції Фарадея, та «оновлену» теорему про циркуляцію за відсутності струмів провідності ($\vec{j} = 0$) у вакуумі ($\varepsilon = \mu = 1 \Rightarrow \vec{E} = \vec{D}$, $\vec{H} = \vec{B}$).

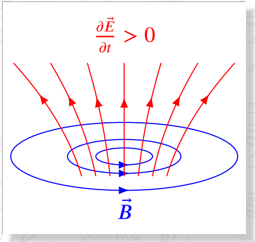
Закон електромагнітної індукції

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Закон магнітоелектричної індукції

$$\operatorname{rot} \vec{B} = +\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

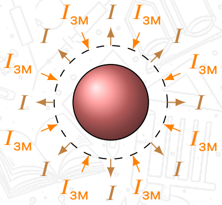




Змінне в часі магнітне поле породжує вихрове електричне поле, а змінне в часі електричне поле породжує магнітне поле.

Радіальне стікання заряду з кулі

Нехай куля несе заряд Q, який стікає в зовнішнє середовище. Унаслідок стікання заряду виникають струми, які можуть індукувати магнітне поле. Знайдемо це магнітне поле.



Стікання заряду з кулі створює струм провідності, який дорівнює:

$$I = -\frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Електричне поле кулі $\vec{E}(r) = \frac{Q(t)}{r^3}\vec{r}$ також зменшується з часом, а тому струм зміщення дорівнює:

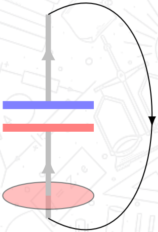
$$I_{зм} = \frac{1}{4\pi}\oiint\limits_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = +\frac{\partial Q}{\partial t} = -I.$$

З теореми про циркуляцію:

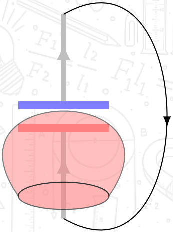
$$\oint\limits_L \vec{H}\cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c}(I + I_{зм}) = 0, \ \Rightarrow \ \vec{H} = \vec{B} = 0.$$

Отже, в цьому випадку, магнітного поля не виникає.

Струм зміщення в конденсаторі



Площа S пронизується лише струмом провідності



Площа S пронизується лише струмом зміщення

Теорема про циркуляцію має вигляд:

- Для лівого рисунка

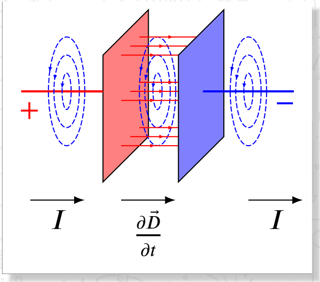
$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} I .$$

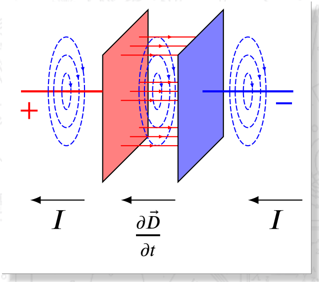
- Для правого рисунка

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} I_{\text{зм}} .$$

Оскільки різні поверхні спираються на один і той же контур L, то циркуляція $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{r}$ не повинна залежати вибору поверхні. А, отже, $I = I_{\text{зм}}$, тобто в середині конденсатора «протікає» струм зміщення, який замикає коло.

Струм зміщення в конденсаторі та магнітне поле





Струми зміщення замикають струми провідності і створюють магнітне поле точно так само, як і струми провідності. Вони, однак, не створюють прямо теплового ефекту, до них незастосовні закон Ома і закон Джоуля-Ленца.

Система рівнянь Максвелла

Доповнивши основні факти зі сфери електромагнетизму, та доповнивши їх гіпотезою струмів зміщення, Максвелл зміг написати систему фундаментальних рівнянь електродинаміки. Таких рівнянь чотири.

Рівняння	Інтегральна форма	Диференціальна форма
Теорема Гаусса для магнітного поля	$\oiint\limits_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$	$\operatorname{div}\vec{B}=0$
Теорема про циркуляцію для електричного поля	$\oint\limits_L \vec{E}\cdot d\vec{r}=-\frac{1}{c}\iint\limits_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$	$\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
Теорема Гаусса для електричного поля	$\oiint\limits_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=4\pi\iiint\limits_V \rho dV$	$\operatorname{div}\vec{D}=4\pi\rho$
Теорема про циркуляцію для магнітного поля	$\oint\limits_L \vec{H}\cdot d\vec{r}=\frac{4\pi}{c}\iint\limits_S\left(\vec{j}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$	$\operatorname{rot}\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

Вираз електричного поля через потенціали

Рівняння Максвелла групуються парами. Перша пара рівнянь — рівняння без зарядів та струмів, друга пара — рівняння із зарядами та струмами.

Теорема Гаусса для магнітного поля дозволяє ввести векторний потенціал:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

Тоді теорема про циркуляцію для електричного поля записується як:

$$\operatorname{rot}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Ця рівність означає, що це поле може бути представлене як градієнт скалярної функції, тоді отримуємо:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

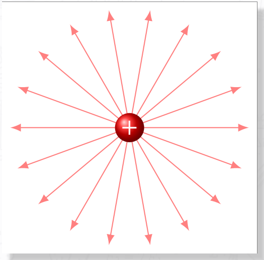
У випадку постійних у часі полів: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, тобто, що введена тут функція φ збігається зі скалярним потенціалом.

Стаціонарні поля

У стаціонарному випадку часткові похідні за часом від полів дорівнюють нулю $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, тому рівняння максвела розпадається на дві окремі системи для електростатики і магнітостатики.

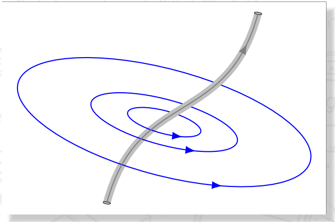
Рівняння електростатики

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \end{cases}$$



Рівняння магнітостатики

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \end{cases}$$



Матеріальні рівняння

Рівняння Максвелла мають бути доповнені співвідношеннями, що зв’язують поля $\vec{D}$ та $\vec{E}$ з одного боку, та $\vec{H}$ та $\vec{B}$ з іншого боку.

	Вираз
Вектор індукції електричного поля	$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$
Вектор поляризації (для лінійних ізотропних речовин)	$\vec{P} = \chi_e\vec{E}$
Діелектрична проникніть (для лінійних ізотропних речовин)	$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e$
Зв’язок $\vec{D}$ та $\vec{E}$ (для лінійних ізотропних речовин)	$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$
Вектор напруженості магнітного поля	$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{J}$
Вектор намагнічування (для лінійних ізотропних речовин)	$\vec{J} = \chi_e\vec{H}$
Магнітна проникніть (для лінійних ізотропних речовин)	$\mu = 1 + 4\pi\chi_m$
Зв’язок $\vec{H}$ та $\vec{B}$ (для лінійних ізотропних речовин)	$\vec{B} = \mu\vec{H}$
У разі струму, спричиненого електричним полем у провідному середовищі, має місце закон Ома	$\vec{j} = \lambda\vec{E}$

Граничні умови

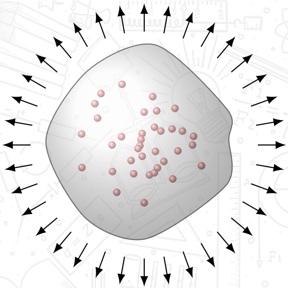
Диференціальні рівняння Максвелла треба доповнити граничними умовами, яким має задовольняти електромагнітне поле на межі розділу двох середовищ. Ці умови неявно містяться в інтегральній формі рівнянь Максвелла і отримуються за їх допомогою. Граничні умови в стаціонарному випадку аналогічні і для випадку змінних полів.

Умови для електричних векторів	Умови для магнітних векторів
$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma$	$B_{1n} = B_{2n}$
$E_{1\tau} = E_{2\tau}$	$\left[\vec{n} \times \vec{H}_2\right] - \left[\vec{n} \times \vec{H}_1\right] = \frac{4\pi}{c}\vec{i}$

Тут σ — поверхнева густина вільних електричних зарядів, а $\vec{i}$ — поверхнева густина струму провідності на розглянутій границі розділу. У випадку, коли поверхневих струмів немає, гранична умова для тангенціальної компоненти вектора напруженості магнітного поля набуває вигляду:

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}$$

Закон збереження енергії електромагнітного поля



Якщо у деякій області простору присутнє електромагнітне поле та заряджені частинки, які взаємодіють з цим полем, то енергія такої системи має зберігатись, якщо система замкнена. Якщо ж система незамкнена, то енергія може як втікати в цю область, так і витікати з неї.

(Зміна енергії в об'ємі) = (Рух частинок) + (Потік енергії на зовні).

(Рух частинок) = (Зміна енергії в об'ємі) − (Потік енергії на зовні).

Рухати частинки може лише електричне поле. Енергія, яка витрачається полем на розгін частинок в одиниці об'єму за одиницю часу — джоулеве тепло $\vec{j} \cdot \vec{E}$.

Отримання закону збереження

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{(рівняння Максвелла для rot } \vec{H}\text{).}$$

$$\vec{j}\vec{E} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{1}{4\pi}\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{H} = -\,\mathrm{div}[\vec{E}\times\vec{H}] + \vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{E}, \quad \text{(формула векторного аналізу).}$$

$$\vec{j}\cdot\vec{E} = -\,\mathrm{div}\left(\frac{c}{4\pi}[\vec{E}\times\vec{H}]\right) + \frac{c}{4\pi}\vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{E} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{8\pi}\varepsilon\vec{E}^2\right)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{(рівняння Максвелла для rot } \vec{E}\text{).}$$

Врахуємо матеріальні рівняння $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ та $\vec{B} = \mu\vec{H}$.

$$\vec{j}\cdot\vec{E} = -\,\mathrm{div}\left(\frac{c}{4\pi}[\vec{E}\times\vec{H}]\right) - \frac{1}{4\pi}\vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{8\pi}\varepsilon\vec{E}^2\right)$$

$$\vec{j}\cdot\vec{E} = -\,\mathrm{div}\left(\frac{c}{4\pi}[\vec{E}\times\vec{H}]\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{8\pi}\varepsilon\vec{E}^2 + \frac{1}{8\pi}\mu\vec{H}^2\right)$$

Теорема Пойнтінга

Проаналізуємо отриманий вираз:

$$\underbrace{\vec{j}\cdot\vec{E}}_{\text{Енергія руху частинок}} = -\,\mathrm{div}\,\underbrace{\left(\frac{c}{4\pi}[\vec{E}\times\vec{H}]\right)}_{\text{Вектор }\vec{\Pi}} - \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{\varepsilon\vec{E}^2}{8\pi}+\frac{\mu\vec{H}^2}{8\pi}\right)}_{\text{Густина енергії електромагнітного поля } w}$$

Закон збереження енергії

$$\boxed{-\frac{\partial w}{\partial t} = \mathrm{div}\,\vec{\Pi} + \vec{j}\cdot\vec{E}}$$

$$\boxed{-\frac{\partial W}{\partial t} = \oint\!\!\oint_S \vec{\Pi}\cdot d\vec{S} + \iiint_V \vec{j}\cdot\vec{E}\,dV}$$

Теорема Пойнтінга

Зменшення енергії за одиницю часу в даному об’ємі дорівнює потоку енергії крізь поверхню, обмежену цим об’ємом, плюс потужність , яку сили поля виконують над зарядами речовини всередині даного об’єму.

Теорема Пойнтінга

Закон збереження енергії

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{\Pi} + \vec{j}\cdot\vec{E}$$

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \oint\!\!\!\!\oint_S \vec{\Pi}\cdot d\vec{S} + \iiint_V \vec{j}\cdot\vec{E}\,dV$$

Теорема Пойнтінга

Зменшення енергії за одиницю часу в даному об’ємі дорівнює потоку енергії крізь поверхню, обмежену цим об’ємом, плюс потужність , яку сили поля виконують над зарядами речовини всередині даного об’єму.

Вектор Пойнтінга

$$\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}\times\vec{H}]$$

Вектор визначає кількість енергії поля, що протікає через одиничну площадку в одиницю часу, і показує напрямок руху енергії електромагнітного поля.

Одиниці вимірювання величин

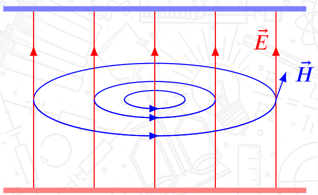
Вектор густини потоку енергії (вектор Пойнтінга)

$$\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E} \times \vec{H}], \quad [\Pi] = \frac{\text{ерг}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}}\ (\text{СГС}),\ [S] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\ (\text{SI})$$

Густина енергії

$$w = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{8\pi} + \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{8\pi}, \quad [w] = \frac{\text{ерг}}{\text{см}^3}\ (\text{СГС}),\ [w] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}\ (\text{SI})$$

Зарядка конденсатора



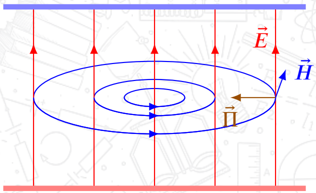
Плоский конденсатор із пластинами радіуса R заряджається струмом I від зовнішнього джерела енергії . Якщо в деякий момент заряд на нижній пластині дорівнює q, то вектор індукції поля всередині конденсатора дорівнює: $D = 4\pi\sigma = \frac{4\pi q}{\pi R^2}$, і напрямлений від нижньої пластини до верхньої. Густина струму зміщення в конденсаторі: $j_{\text{зм}} = \frac{\dot{D}}{4\pi} = \frac{\dot{q}}{\pi R^2}$.

Цей струм породжує в конденсаторі магнітне поле, яке можна знайти за допомогою теореми про циркуляцію:

$$\oint_L \mathbf{H}\,d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} J_{\text{зм}}(r) \Rightarrow 2\pi r H(r) = \frac{4\pi}{c}\pi r^2 j_{\text{зм}}(r) \Rightarrow H(r) = \frac{2r}{cR^2}\dot{q}.$$

Тут за контур L узято коло радіусу r з центром на осі конденсатора. Маючи на увазі, що конденсатор заряджається ($\dot{q} > 0$), робимо висновок, що струм зміщення спрямований від нижньої пластини до верхньої. Це означає, що силові лінії магнітного поля спрямовані, як показано на рис.

Зарядка конденсатора



Вектор Пойнтінга $\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]$ спрямований до осі конденсатора і дорівнює за величиною на межі $(r = R)$:

$$\Pi = \frac{c}{4\pi}EH = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{4\pi q}{\varepsilon\pi R^2}\right)\left(\frac{2\dot{q}}{cR}\right) = \frac{1}{\varepsilon\pi R^2}2q\dot{q}.$$

Якщо відстань між пластинами дорівнює h, то енергія, що втікає в конденсатор за одиницю часу, дорівнює:

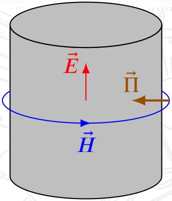
$$\frac{dW}{dt} = S\cdot 2\pi Rh = \frac{1}{\varepsilon\pi R^2}\cdot q\dot{q}\cdot 2\pi Rh = \frac{q\dot{q}}{C},$$

де $C = \varepsilon\pi R^2/4\pi h$ — ємність конденсатора. За кінцевий час, при досягненні заряду q на пластині, енергія складе:

$$W = \frac{q^2}{2C}.$$

Ми прийшли до відомої формули для енергії, що запасається в конденсаторі.

Довгий провідник



Розглянемо довгий прямий дріт радіуса R і довжини ℓ, яким тече струм I. На зовнішній поверхні дроту присутнє магнітне поле $H = \frac{2I}{cR}$. Струм у дроті виникає завдяки напрузі U на його кінцях, що створює поле величиною $E = \frac{U}{\ell}$. Напрямки полів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ показано на рис.

Вектор Пойнтінга виявляється спрямованим до осі дроту і дорівнює за величиною:

$$\Pi = \frac{c}{4\pi} EH = \frac{c}{4\pi}\frac{U}{\ell}\frac{2I}{cR} = \frac{1}{2\pi\ell R} UI$$

Оскільки площа бічної поверхні дроту дорівнює $S = 2\pi\ell R$, то повний потік енергії, що втікає в дріт, становить $\Pi S = UI$. Це в точності та сама енергія, що йде на джоулеві втрати в дроті: $\Pi S = Q = UI$.

Таким чином, електрони отримують свою енергію, ззовні, від потоку енергії зовнішнього поля всередину дроту і витрачають її на створення теплоти. Енергія віддалених зарядів якимось чином розтікається по великій області простору і потім втікає всередину дроту.

Скін-ефект

Означення та наслідки

Скін-ефект (термін походить від англ. слова skin – шкіра.) — це протікання струмів високої частоти в тонкому поверхневому шарі провідника.

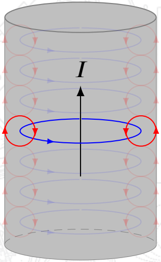
Внаслідок скін-ефекту електричний струм при великих частотах тече переважно крізь поверхневий шар провідника. Це призводить до:

- зменшення *діючого* перерізу провідника і, як наслідок, до збільшення опору провідника.
- зменшення індуктивності провідника.

  Оскільки за наявності сильного скін-ефекту, струму, а отже і магнітного поля всередині провідника немає. Магнітна енергія стає меншою на величину енергії поля всередині провідника, а отже, індуктивність провідника зменшується.
- Електромагнітна хвиля, що потрапляє на поверхню провідника (металу, електроліту або плазми), швидко загасає в глиб провідника, проникаючи лише на невелику глибину. Тому провідники добре відбивають світло.

Скін-ефект

Якісне пояснення



Змінний струм у провіднику породжує змінне вихрове магнітне поле, силові лінії якого перпендикулярні до осі провідника. Змінне магнітне поле породжує вихрове електричне поле, що спричиняє виникнення струмів Фуко, причому на поверхні провідника вихровий струм спрямований у напрямку струму провідника, а всередині провідника — протилежно. Це явище знижує струм у серцевині провідника і збільшує поверхневий струм.

Скін-ефект

Чому у металах нехтують струмами зміщення?

У провіднику густина струму провідності і напруженість електричного поля пов'язані законом Ома: $\vec{j} = \lambda \vec{E}$. Якщо електричне поле в провіднику змінюється з часом, наприклад, за гармонічним законом $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$, то поряд зі струмом провідності виникне ще й струм зміщення:

$$\vec{j}_{\text{зм}} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon\omega}{4\pi} E_0 \cos(\omega t + \pi/2).$$

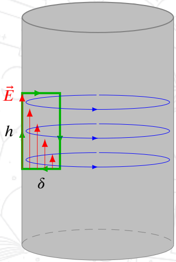
Де величину $\frac{\varepsilon\omega}{4\pi}$ можна формально трактувати як «питому провідність» для струмів зміщення. Для типових металів провідність $\lambda = 10^{15} - 10^{17}$ с$^{-1}$. Це означає, що аж до частот порядку 10^{13} Гц виконується нерівність:

$$\frac{\varepsilon\omega}{4\pi} \ll \lambda.$$

(для металів типові значення діелектричної проникності становлять $10 - 100$). Отже, у широкому діапазоні частот виявляється що струми зміщення не відіграють істотної ролі у металах.

Скін-ефект

Оцінка глибини проникнення поля (струму) в провідник



Знайдемо циркуляцію вектора $\vec{E}$ вздовж контура L. За законом електромагнітної індукції:

$$Eh = -\frac{1}{c}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Магнітний потік через цей контур:

$$\Phi = -BS = \mu H h\delta.$$

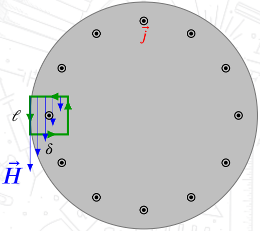
Його зміна за одиницю часу (тобто похідна за часом) буде порядку $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \approx \frac{\Phi}{T} \approx \omega\Phi$, де T — період зміни струму, ω — частота зміни струму, $\omega \sim \frac{1}{T}$.

Тому, циркуляція вектора $\vec{E}$ буде дорівнювати: $Eh = \frac{1}{c}\mu H\omega h\delta$, а величина електричного поля на поверхні провідника:

$$E = \frac{1}{c}\mu H\omega\delta$$

Скін-ефект

Оцінка глибини проникнення поля (струму) в провідник



Тепер знайдемо циркуляцію напруженості магнітного поля $\vec{H}$ по контуру L. За теоремою про циркуляцію:

$$H\ell = \frac{4\pi}{c} j\ell\delta.$$

Так як $j = \lambda E$, і після спрощення знаходимо магнітне поле на поверхні провідника:

$$H = \frac{4\pi}{c}\lambda E\delta.$$

Підставимо величину напруженості магнітного поля у знайдену формулу:

$$E = \frac{4\pi\mu\omega\delta^2}{c^2}\lambda E,$$

Звідки, оцінка глибини проникнення поля дає величину:

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{4\pi\mu\lambda\omega}}.$$

Скін-ефект

Оцінка глибини проникнення поля (струму) в провідник

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{4\pi\mu\lambda\omega}}.$$

Отримана оціночна формула є наближеним виразом, оскільки вона ґрунтується на наближених розрахунках і спрощеннях, які дозволили її отримати.

Числовий коефіцієнт $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ у даному випадку є результатом такої оцінки і, як наслідок, не може вважатися абсолютно достовірним. Його отримання могло залежати від початкових припущень чи умов, які не завжди повністю відповідають реальній фізичній ситуації.

Разом із цим, математично строгий аналіз, що базується на рівняннях Максвелла, дозволяє отримати ту саму величину з високою точністю і для різних фізичних ситуацій. Це показує, що оціночна формула іноді може дати точний результат, навіть якщо вона побудована без повної формальної обґрунтованості. Проте співпадіння результатів слід вважати радше випадковістю, ніж закономірністю, оскільки оціночний метод не гарантує правильності результату в загальному випадку.

Скін-ефект

Рівняння скін-ефекту

Зробимо більш строге виведення глибини проникнення на основі рівнянь Максвелла. Нехай $\varepsilon = \mathrm{const}$, $\mu = \mathrm{const}$. Рівняння Максвелла для електромагнітного поля в металі:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, & \mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \\ \mathrm{div}\,\vec{E} = 0, & \mathrm{div}\,\vec{H} = 0. \end{cases}$$

У середовищі немає некомпенсованих зарядів ($\sum q_i = 0$), унаслідок чого у формулі для теореми Гауса $\mathrm{div}\,\vec{D} = \varepsilon\,\mathrm{div}\,\vec{E} = 4\pi\rho = 0$ у правій частині стоїть нуль.

Використовуючи закон Ома, запишемо два перших рівняння:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi\lambda}{c}\vec{E},$$

Виключимо звідси магнітне поле. Для цього застосуємо операцію rot до обох частин першого рівняння і врахуємо друге рівняння:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\vec{H}, \quad \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{E} - \nabla^2\vec{E} = -\nabla^2\vec{E}.$$

Приходимо наступного рівняння для поля $\vec{E}$:

$$\boxed{\nabla^2\vec{E} = \frac{4\pi\mu\lambda}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.}$$

Скін-ефект

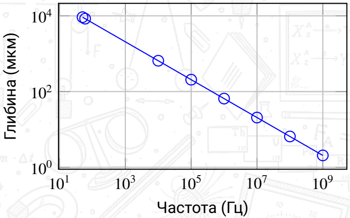
Глибина проникнення поля (струму) в провідник

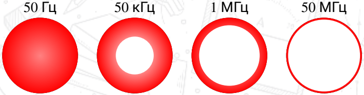
Рівняння для скін-ефекту має математичну форму, подібну до рівняння дифузії: $\nabla^2 F = D\frac{\partial F}{\partial t}$ з коефіцієнтом дифузії $D = \frac{c^2}{4\pi\mu\lambda}$. Якщо на поверхні речовини діє джерело, то за час τ хвиля дифузії проникає в речовину на глибину $\delta = \sqrt{D\tau}$. Якщо джерело діє періодично з періодом T за час τ слід прийняти $\tau \approx T$. Нарешті, маючи на увазі, що $T = 2\pi/\omega$, отримуємо оцінку для глибини проникнення

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{4\pi\lambda\mu\omega}}.$$

Метал	Глибина скін-шару (мкм) для 10 ГГц
Мідь (Cu)	0.652
Срібло (Ag)	0.634
Золото (Au)	0.753
Алюміній (Al)	0.652

Глибина скін-шару міді в залежності від частоти





Для провідника діаметром 0.5 мм

Скін-ефект

В техніці

Існування скін-ефекту завжди враховують у техніці швидкозмінних струмів. Оскільки такі струми практично не йдуть у глибині провідника, то лінії для них збирають із порожнистих труб.

В радіотехніці надвисоких частот багато деталей (хвилеводи, коаксіальні лінії) покривають тонким, добре провідним шаром срібла, оскільки їхній опір практично обумовлений тільки поверхневим шаром.

Скін-ефект у поєднанні з нагріванням вихровими струмами використовують для поверхневого загартування сталі. У цьому методі деталі піддають дії впливу змінних струмів і потім швидко охолоджують. Внаслідок скін-ефекту розігрів і загартування виникають тільки в поверхневому шарі, а вся основна маса залишається незагартованою. Це дає змогу отримати вироби з високою стійкістю до стирання поверхні, але не є крихкі, як за звичайного загартування.

Вершина класичної науки

Теорія Максвелла — це вершина класичної науки про електромагнітне поле. До цієї висоти ми піднімалися, крок за кроком, уточнюючи поняття і розкриваючи глибинні принципи цієї науки. Кожен пройдений етап — електростатика, закони постійного струму, магнітостатика — був немов базовий табір на шляху до вершини.

На вершині перед нами постають рівняння Максвелла — велична симфонія електричного і магнітного полів, ключ до розуміння електромагнітної взаємодії. Але шлях науки триває. З вершини ми спускаємося у простір застосувань: досліджуємо поширення електромагнітних хвиль, принципи випромінювання та закладаємо основи оптики, радіо- й електротехніки.

Ця подорож — не лише тріумф інтелекту, а й людського духу, що прагне підкорювати вершини й відкривати нові горизонти.