

0.1. Обчисліть активний опір на одиницю довжини циліндричного провідника радіуса a провідністю λ . Отримайте значення цієї величини за малих та за великих частот

Густина струму

$$j_z = \frac{k}{2\pi a} \frac{J_0(kr)}{J_1(ka)} I_0 e^{-i\omega t}.$$

Опір будемо шукати як $R = \frac{\langle Q \rangle}{\frac{1}{2} I_0^2}$.

Із закону Джоуля-Ленца розрахуємо теплоту, яка виділяється в провіднику як^a

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \frac{1}{2\lambda} \int_0^a |j_z|^2 2\pi r dr = \frac{2\pi}{2(2\pi a)^2} \frac{I_0^2}{\lambda} \frac{|k|^2}{J_1(ka)J_1(k^*a)} \int_0^a J_0(kr)J_0(k^*r)r dr = \\ &= \frac{2\pi a}{2(2\pi a)^2} \frac{I_0^2}{\lambda} \frac{|k|^2}{J_1(ka)J_1(k^*a)} \frac{kJ_1(ka)J_0(k^*a) - k^*J_1(k^*a)J_0(ka)}{k^2 - k^{*2}} = \\ &= \frac{2\pi a}{2(2\pi a)^2} \frac{I_0^2}{\lambda} \frac{|k|^2}{4i} \left(\frac{kJ_0(k^*a)}{J_1(k^*a)} - \frac{k^*J_0(ka)}{J_1(ka)} \right) = \\ &= \frac{2\pi a}{2(2\pi a)^2} \frac{I_0^2}{\lambda} \frac{1}{2} \left(\frac{k^*J_0(k^*a)}{J_1(k^*a)} + \frac{kJ_0(ka)}{J_1(ka)} \right) = \frac{1}{4\pi a} \frac{I_0^2}{\lambda} \operatorname{Re} \left(\frac{kJ_0(ka)}{J_1(ka)} \right). \end{aligned}$$

Отже

$$R = \frac{1}{2\pi a\lambda} \operatorname{Re} \left[\frac{kJ_0(ka)}{J_1(ka)} \right].$$

Розглянемо випадок малих частот $|ka| \ll 1$:

$$R \approx \frac{1}{2\pi a\lambda} \operatorname{Re} \left[k \left(1 - \frac{k^2 a^2}{4} \right) \frac{2}{ka} \right] = \frac{1}{\pi a^2 \lambda}.$$

Тобто, при малих частотах опір такий же, як і для постійного струму.

Розглянемо випадок великих частот $|ka| \gg 1$:

$$R \approx \frac{1}{2\pi a\lambda} \operatorname{Re} [ke^{k(r-a)}] \approx \frac{1}{2\pi a\lambda} \operatorname{Re} [k(1 - k(r-a))] = \frac{1}{2\pi a\delta\lambda}.$$

З останньої формули випливає, що ефективна площа перерізу провідника в області великих частот дорівнює $2\pi a\delta$, тобто має дуже маленьку величину, зосереджену поблизу поверхні провідника.

^aВикористано співвідношення $\int_0^a J_0(kr)J_0(k^*r)r dr = \frac{kJ_1(ka)J_0(k^*a) - k^*J_1(k^*a)J_0(ka)}{k^2 - k^{*2}}$ (в додатках нема)