0.1. В порожнині незаземленого і незарядженого металевого провідника довільної форми знаходиться електричний диполь. Порожнина також має довільну форму. Знайдіть електричне поле за межами провідника.

0.2. Електричне поле утворене розподілом зарядів $\sigma(\theta, \varphi) = \sigma_0 \cos\theta$ на поверхні сфери радіуса R, всередині і зовні зарядів немає. Знайти потенціал зовні та усередині кулі, в сферичних координатах.
Для обчислення скористаємось інтегралом $\phi = \int \frac{\sigma' dS'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$, для цього скористаємось мультипольним розкладом підінтегрального виразу:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi').$$

Також пам'ятатимемо, що

$$\int Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{l'm'}(\theta', \varphi') d\Omega' = \delta_{ll'} \delta_{mm'},$$

а також $dS' = R^2 \sin\theta' d\theta' d\varphi' = R^2 d\Omega'$.
Отже, записуємо:

$$\begin{aligned}
\phi &= \sigma_0 R^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) \int Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \overbrace{\cos\theta'}^{\sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}} d\Omega' = \\
&= \sigma_0 R^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \underbrace{\int Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{10} d\Omega'}_{\delta_{l1}\delta_{m0}} = \\
&= \sigma_0 R^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \delta_{l1}\delta_{m0} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{3}} = \\
&= \sigma_0 R^2 \frac{r_<}{r_>^2} \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\theta, \varphi) = \sigma_0 R^2 \frac{r_<}{r_>^2} \frac{4\pi}{3} \cos\theta. \quad (1)
\end{aligned}$$

Звідки, для зовнішньої частини сфери $r_< = R, r_> = r$, для внутрішньої $r_< = r, r_> = R$, остаточно:

$$\phi(\theta) = \begin{cases} \frac{4\pi\sigma_0 R^3}{3r^3} \cos\theta, & r \geq R, \\ 4\pi\sigma_0 r \cos\theta, & r < R. \end{cases}$$