



$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

В. І. Жданов, С. М. Пономаренко, В. Б. Долгошей

# Класична електродинаміка

## Збірник задач

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$$
$$\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = 0.$$

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

В. І. Жданов, С. М. Пономаренко, В. Б. Долгошей

# Класична електродинаміка

## Збірник задач

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальностями Еб «Прикладна фізика та наноматеріали», F1 «Прикладна математика»*

Версія від 9 вересня 2025 р., час компіляції 19:39.

КИЇВ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2025

УДК 537  
Ж 42

Рецензенти: **В. О. Кочелап**, д.ф.-м.н., професор, член-кореспондент НАН України, завідувач відділу теоретичної фізики Інституту фізики напівпровідників ім. В. Є. Лашкарьова

Відповідальний редактор: **С. А. Смирнов**, к.ф.-м.н., доцент, голова методичної ради НН ФТІ КПІ ім. Ігоря Сікорського

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 10/2020 від 18.06.2020 р.) за поданням Вченої ради Фізико-технічного інституту (протокол № 5/2020 від 25.05.2020 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

*Жданов Валерій Іванович*, д.ф.-м.н., професор  
*Пономаренко Сергій Миколайович*, к.ф.-м.н., доцент  
*Долгошей Володимир Борисович*, к.ф.-м.н., доцент

## Класична електродинаміка Збірник задач

Класична електродинаміка: Збірник задач [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальностей Е6 «Прикладна фізика та наноматеріали» та F1 «Прикладна математика» / В. І. Жданов, С. М. Пономаренко, В. Б. Долгошей ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл: 570 кБ). — Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. — 98 с.

Наведено 202 задач з курсу класичної електродинаміки. Задачі різноманітні як за змістом, так і за складністю. Поряд із задачами, які ілюструють основні поняття і закони електродинаміки, до збірника включена певна кількість більш складних задач, які допомагають поглибленому вивченню предмета.

Для студентів фізико-технічного інституту КПІ ім. Ігоря Сікорського, які навчаються за спеціальностями 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» та 113 «Прикладна математика».

<b>0. Співвідношення векторного аналізу в декартових координатах</b>	<b>6</b>
--	----------

<b>Частина I Мікроскопічна теорія</b>	<b>9</b>
---------------------------------------	----------

---

<b>1. Система мікроскопічних рівнянь Максвелла</b>	<b>10</b>
1.1. Рівняння Максвелла . . . . .	10
1.2. Закони збереження (диференціальна форма) . . . . .	11
1.3. Граничні умови для границі розділу двох середовищ . . . . .	11
1.4. Потенціали електромагнітного поля . . . . .	11
<b>2. Електро- та магнітостатика у вакуумі</b>	<b>13</b>
2.1. Прості задачі на рівняння Максвелла . . . . .	13
2.2. Рівняння Пуассона та Лапласа. Граничні задачі електростатики	16
2.3. Метод електричних зображень . . . . .	18
2.4. Пошук розв'язків методом розкладання за системою ортогональ- них функцій . . . . .	19
2.5. Розкладання потенціалів за мультиполями . . . . .	22
<b>3. Випромінювання та поширення електромагнітних хвиль</b>	<b>26</b>
3.1. Співвідношення невизначеностей . . . . .	27
3.2. Монохроматичні хвилі. Інтерференція та поляризація хвиль . .	28
3.3. Випромінювання та розсіювання електромагнітних хвиль . . . .	30
<b>4. Спеціальна теорія відносності</b>	<b>33</b>
4.1. Перетворення Лоренца та закони збереження . . . . .	35
4.2. Електродинаміка в релятивістських позначеннях . . . . .	36
4.3. Рух заряджених частинок в електромагнітному полі . . . . .	37
4.4. Випромінювання релятивістських заряджених частинок . . . . .	38

<b>Частина II</b>	<b>Електродинаміка суцільних середовищ</b>	<b>39</b>
<b>5.</b>	<b>Система макроскопічних рівнянь Максвелла</b>	<b>40</b>
5.1.	Макроскопічні рівняння Максвелла . . . . .	40
5.2.	Співвідношення для лінійних ізотропних середовищ . . . . .	41
5.3.	Умови на границі розділу двох середовищ . . . . .	42
<b>6.</b>	<b>Діелектрики та магнетики в статичних полях</b>	<b>43</b>
<b>7.</b>	<b>Квазістаціонарні поля і струми</b>	<b>49</b>
7.1.	Розтікання зарядів в провідниках. Струми Фуко . . . . .	49
7.2.	Магнітні поля в надпровідниках . . . . .	52
<b>8.</b>	<b>Електромагнітні хвилі в середовищі</b>	<b>54</b>
8.1.	Поширення електромагнітних хвиль в середовищі . . . . .	54
8.2.	Відбивання та заломлення електромагнітних хвиль на межі двох середовищ . . . . .	57
8.3.	Електромагнітні хвилі в плазмі . . . . .	58
8.4.	Розсіювання та дифракція . . . . .	58
<b>Відповіді</b>		<b>60</b>
<b>Додатки</b>		<b>89</b>
A.	Основні формули векторного аналізу . . . . .	89
A.1.	Тривимірний символ Леві-Чівіти . . . . .	89
A.2.	Диференціальні операції в різних системах координат . . . . .	89
A.3.	Другі похідні . . . . .	91
A.4.	Похідні від добутків . . . . .	91
A.5.	Інтегральні характеристики та теореми . . . . .	91
B.	Поліноми Лежандра . . . . .	92
B.	Сферичні гармоніки . . . . .	92
Г.	Циліндричні функції . . . . .	93
Д.	Дельта-функція Дірака . . . . .	95
Е.	Фізичні константи . . . . .	96
<b>Література</b>		<b>97</b>

# Передмова

---

Вивчення класичної електродинаміки забезпечується дисциплінами «Теорія поля» та «Електродинаміка суцільних середовищ», які входять до циклу базової та професійної підготовки бакалаврів за спеціальностями 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» і 113 «Прикладна математика» й вивчаються студентами Фізико-технічного інституту КПІ ім. Ігоря Сікорського на третьому курсі. На вивчення дисциплін відведено два семестри, практичні заняття проводяться один раз на тиждень. Велика частина програмного матеріалу пов'язана з умінням розв'язування конкретних задач. Вироблення умінь, навичок і методів розв'язку величезної кількості задач, звичайно, не може бути реалізоване тільки за рахунок годин, відведених на практичні заняття, і передбачає значну самостійну роботу студента.

Назви розділів та підрозділів посібника відповідають робочим програмам дисциплін. До кожного з них подано короткий теоретичний матеріал, який містить основні формули, необхідні для розв'язування задач. В кінці збірника міститься довідковий матеріал та перелік використаної літератури.

Задачі даного збірника щорічно пропонуються студентам при складанні письмового екзамену, який передбачено навчальним планом. Зрозуміло, що багато задач було взято з джерел, які перелічені в списку літератури, оскільки методика викладання дисциплін протягом століть вже є переважно завершеною і багато вже винайдених іншими вченими задач є ключовими для розуміння предмета. Однак в збірнику є й велика частина авторських задач, ідеї яких сформувались на основі власного досвіду викладання предмету.

Як правило, в тексті використовуються такі позначення координат:  $x, y, z$  для декартових координат;  $r, \theta, \varphi$  для сферичних та  $r, \varphi, z$  для циліндричних (в останніх позначеннях використано  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , щоб уникнути плутанини з густиною заряду).

Дана версія посібника є електронним виданням, тому для зручності користування ним передбачена система навігації у вигляді гіперпосилань та бічної панелі змісту.

# 0

## Співвідношення векторного аналізу в декартових координатах

### Теоретичні відомості

В декартових координатах використовуємо позначення:

$$\{x, y, z\} = \{x_1, x_2, x_3\} = \mathbf{r}.$$

Латинські індекси  $i, j, k$  пробігатимуть допустимі значення 1,2,3. Якщо індекси у виразі повторюються, це означає суму по цих індексах (правило Ейнштейна).

Сукупність усіх частинних похідних від скалярного поля  $\psi(\mathbf{r}) = \psi(x_1, x_2, x_3)$  утворює градієнт:

$$\nabla F = \left[ \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3} \right] = \left[ \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right] = \text{grad } F,$$

або покомпонентно:

$$(\nabla F)_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} = \partial_i F.$$

Тут і надалі  $(X)_i = X_i$  означає  $i$ -ту компоненту вектора  $X$ .

Означимо дивергенцію векторного поля  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ :

$$\text{div } \mathbf{A} = \partial_j A_j = \nabla \cdot \mathbf{A};$$

та оператор Лапласа:

$$\Delta F = \partial_j \partial_j F = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2}.$$

Тут  $F = F(\mathbf{r}) = F(x_1, x_2, x_3)$  – скалярна функція; але це може бути і компонента векторного поля в декартових координатах.

Введемо абсолютно антисиметричний символ  $\varepsilon_{ijk}$ :  $\varepsilon_{123} = 1$  (символ Леві-Чівіті):

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj}.$$

Користуючись властивостями визначника, легко перевірити, що:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{vmatrix},$$

де  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

За допомогою цього символу можна записати  $i$ -ту компоненту векторного добутку:

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

( $A_i, B_i$  – компоненти векторів  $\mathbf{A}$  та  $\mathbf{B}$ ), а також **ротатор векторного поля**:

$$(\nabla \times \mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k.$$

Формула Остроградського–Гаусса (див. «Додатки», (A.35)):

$$\iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}; \quad (1)$$

$\Omega$  – об'єм,  $\partial\Omega$  – його межа.

**0.1.** Виходячи з поданих означень, перевірити співвідношення

- а)  $\nabla \cdot (F\mathbf{A}) = \partial(FA_i) = A_i \partial F + F \partial A_i = \mathbf{A} \cdot \nabla F + F \nabla \cdot \mathbf{A}$ ;
- б)  $\nabla \times (F\mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j (FA_k) = \varepsilon_{ijk} (\nabla F)_j A_k + F \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k$ , або  $\nabla \times (F\mathbf{A}) = [\nabla F \times \mathbf{A}] + F \nabla \times \mathbf{A}$ .
- в) Дивергенція векторного добутку  $\nabla \cdot [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$ .

**0.2.** Отримати формулу для **згортки двох символів Леві-Чивіті**

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{irs} = \delta_{jr} \delta_{ks} - \delta_{js} \delta_{kr}. \quad (2)$$

Вказівка: записати

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{irs} = \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{ir} & \delta_{is} \\ \delta_{ji} & \delta_{jr} & \delta_{js} \\ \delta_{ki} & \delta_{kr} & \delta_{ks} \end{vmatrix},$$

розкрити визначник за правилом трикутників та взяти суму по  $k = r$ .

**0.3.** Отримати за допомогою (2) формулу «BAC-CAB»:

$$[\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

**0.4.** За допомогою (2) вивести формулу  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$ , де  $(\Delta \mathbf{A})_i = \partial_j \partial_j A_i$  (для компонент векторного поля в декартових координатах).

**0.5.** Наслідки формули Остроградського–Гаусса (1):

- а)  $\iiint_{\Omega} \nabla F dV = \oint_{\partial\Omega} F d\mathbf{S}$ .
- б)  $\iiint_{\Omega} \nabla \times \mathbf{A} dV = \oint_{\partial\Omega} [d\mathbf{S} \times \mathbf{A}]$ .
- в) Довести формулу Гріна (A.37) з «Додатків».



**0.6.** За допомогою формули Стокса (Додатки, (A.36)) перетворити такі інтеграли по замкнутому контуру  $C$ , що обмежує кусок поверхні  $S$ :

а)  $\oint_{\partial S} u df = \iint_S [\nabla u \times \nabla f] \cdot d\mathbf{S};$

б)  $\oint_{\partial S} u d\mathbf{l} = \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla u.$

$u, f$  – Скалярні функції.

Зауваження: орієнтація поверхні  $S$  має відповідати напрямку обходу по контуру  $\partial S$

# Частина I

## Мікроскопічна теорія

*Неможливо позбутися відчуття, що ці математичні формули існують незалежно від нас і володіють власним розумом, що вони мудріші за нас, мудріше навіть тих, хто їх відкрив, і що ми дістаємо з них більше, ніж спогатку було закладено...*

Heinrich Hertz

# 1

## Система мікроскопічних рівнянь Максвелла

### 1.1. Рівняння Максвелла

Система рівнянь Максвелла сформульована в 60-х роках XIX століття на основі узагальнення емпіричних законів і розвитку ідей про електромагнітні явища. Ці рівняння складають основу теорії електромагнітного поля; вони дозволяють знаходити електричні та магнітні поля, створювані зарядами і струмами, та описувати поширення електромагнітних хвиль.

Інтегральна форма мікроскопічних рівнянь:

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \iiint_{\Omega} \rho dV, \quad (1.1)$$

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (1.2)$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.3)$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.4)$$

де  $\Omega$  — довільний нерухомий об'єм,  $\partial\Omega$  — його межа;  $S$  — довільна нерухома орієнтована поверхня,  $\partial S$  — замкнений контур, що її обмежує.

Диференціальна форма мікроскопічних рівнянь:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.8)$$

$\mathbf{E}$  — вектор напруженості електричного поля,

$\mathbf{B}$  — вектор індукції магнітного поля.

**1.2. Закони збереження (диференціальна форма)**

- Електричного заряду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (1.9)$$

- Збереження енергії (є наслідком рівнянь Максвелла)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \quad (1.10)$$

де  $w$  – густина енергії електромагнітного поля:

$$w = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \quad (1.11)$$

$\mathbf{S}$  – вектор Пойнтінга (вектор густини потоку енергії):

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (1.12)$$

Величина

$$p = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \quad (1.13)$$

є потужністю, що виділяється на одиницю об'єму речовини.

**1.3. Граничні умови для границі розділу двох середовищ**

$$[\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)] = 0, \quad (1.14)$$

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n} = 4\pi\sigma, \quad (1.15)$$

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (1.16)$$

$$[\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}, \quad (1.17)$$

де  $\sigma$  – поверхнева густина вільних зарядів на межі розділу,

$\mathbf{i}$  – поверхневий струм провідності, який протікає по межі розділу,

$\mathbf{n}$  — вектор нормалі з середовища 2 в середовище 1.

**1.4. Потенціали електромагнітного поля**

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad (1.18)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1.19)$$

де  $\varphi$  – скалярний потенціал,  $\mathbf{A}$  – вектор-потенціал.

Потенціали електромагнітного поля не визначені однозначно. Якщо замість потенціалів  $\mathbf{A}$  та  $\varphi$  вибрати інші  $\mathbf{A}'$  та  $\varphi'$ , які пов'язані з вихідними перетвореннями:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f, \quad (1.20)$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (1.21)$$

де  $f(x, y, z, t)$  – довільна функція, то поля  $\mathbf{E}$  та  $\mathbf{B}$  залишаються незмінними.

Умова

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (1.22)$$

називається калібруванням Лоренца і зазвичай використовується для динамічних задач. Використовуючи калібрування Лоренца, рівняння для скалярного і векторного потенціалів можна записати у симетричному вигляді:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad (1.23)$$

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (1.24)$$

У випадку ізольованої системи зарядів та струмів розв'язками цих рівнянь є запізнюючі потенціали:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (1.25)$$

# 2

## Електро- та магнітостатика у вакуумі

### 2.1. Прості задачі на рівняння Максвелла

**2.1.** Заряд  $q$  розташований на верхній основі горщика (там, де мала бути кришка) на деякій відстані від осі (рис. 2.1). Знайти потік вектора напруженості електричного поля, створюваного зарядом, через бічні стінки та дно горщика. Відстань заряду до осі, параметри, що визначають форму та розміри горщика задайте самостійно.

**2.2.** Труба має довжину 10 м та діаметр 5 см. Заряд  $q$  розташований на вході в трубу з лівого кінця (рис. 2.2). Знайти потік вектора напруженості електричного поля, створюваного зарядом, через стінки труби з точністю до другого знаку після коми.

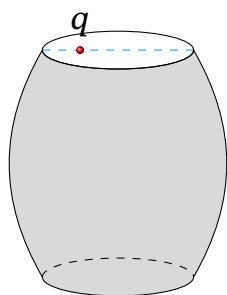


Рис. 2.1. До задачі 2.1



Рис. 2.2. До задачі 2.2

**2.3.** Струм  $I$  тече у додатному напрямку осі  $OZ$  декартових координат (рис. 2.3). Знайти інтеграл  $\int_L \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$  по траєкторії  $L$ , що показано червоним кольором на рисунку;  $\mathbf{B}$  — індукція магнітного поля, створюваного струмом.

**2.4.** Знайти потік індукції однорідного магнітного поля  $\mathbf{B}$  поверхню нахиленої напівкулі радіуса  $R$  (рис. 2.4). Вектор  $\mathbf{B}$  спрямований вертикально;

площина основи нахилена на кут  $\alpha$  до горизонтальної площини.

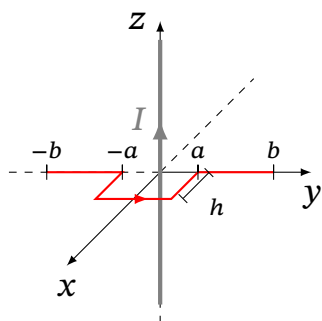


Рис. 2.3. До задачі 2.3

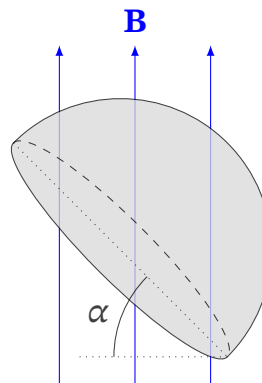


Рис. 2.4. До задачі 2.4

**2.5.** Усередині незарядженої металевої кулі якимось чином зробили сферичну порожнину (рис. 2.5), в центрі якої помістили заряд  $q$ . Знайти напруженість електричного поля в усьому просторі.

**2.6.** Усередині незарядженої металевої кулі якимось чином зробили порожнину у формі еліпсоїда (рис. 2.6), в порожнину помістили заряд  $q$  (не обов'язково в центрі). Знайти напруженість електричного поля зовні кулі.

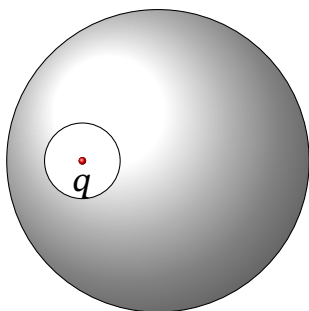


Рис. 2.5. До задачі 2.5

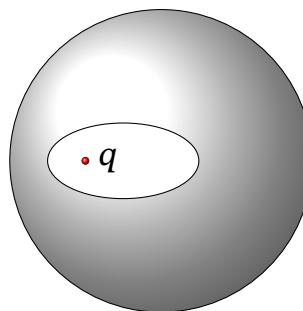


Рис. 2.6. До задачі 2.6

**2.7.** Використовуючи  $\delta$ -функцію, запишіть вираз для об'ємної густини заряду у сферичній системі координат для випадків:

- точкового сферично-симетричного заряду  $q$ , що розташований у початку координат;
- заряду  $q$ , що рівномірно розподілений по кільцю радіусом  $R$ , що лежить в площині  $XOY$ ;
- заряду, що розподілений по кільцю радіусом  $R$  з лінійною густиною  $\lambda(\varphi)$ , що лежить в площині  $XOY$ ;
- заряду  $q$ , що розподілений рівномірно по сферичній поверхні радіусу

$R$ ;

- д) заряду, що розподілений по сферичній поверхні радіуса  $R$  з поверхневою густиною  $\sigma(\theta)$ .

**2.8.** Електричне поле утворене однорідним розподілом зарядів з густиною  $\rho(r, \theta, \varphi) = \rho_0$  усередині кулі радіуса  $R$ , зовні зарядів немає. Знайти модуль напруженості та потенціал електричного поля. Побудуйте графіки їх залежностей від  $r$ .

**2.9.** Електричне поле утворене розподілом зарядів  $\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^n$  всередині кулі радіуса  $R$ , зовні зарядів немає. Знайти напруженість електричного поля та потенціал в усьому просторі.

**2.10.** Виходячи із закону Біо-Савара-Лапласа показати, що для замкнутого контуру зі струмом  $I$  напруженість магнітного поля в деякій точці  $P$  з координатами  $(x, y, z)$  виражається формулою  $\mathbf{B} = \frac{I}{c} \nabla \Omega$ , де  $\Omega$  — тілесний кут, під яким контур видно з цієї точки.

**2.11.** Знайти індукцію магнітного поля, якщо густина струму  $\mathbf{j}_0 = j_0 \mathbf{e}_y$  в області  $0 < z < a$  (декартові координати  $x, y, z$ ). Зовні струмів немає.

**2.12.** Знайти індукцію магнітного поля площини  $z = 0$ , якщо поверхнева густина струму  $\mathbf{i}_0 = i_0 \mathbf{e}_x$ . Результат подати у векторному вигляді через орти декартової системи координат.

**2.13.** Знайти індукцію магнітного поля нескінченного прямого проводу зі струмом  $I_0$ . Напрямок провідника заданий одиничним вектором  $\mathbf{e}_0$ . Результат подати у векторному вигляді через вектори  $\mathbf{r} \perp \mathbf{e}_0$ .

**2.14.** Струм  $\mathbf{j} = j(r) \mathbf{e}_0$  протікає вздовж нескінченного циліндру радіуса  $R$ . Зовні струмів немає. Напрямок осі циліндра задається одиничним вектором  $\mathbf{e}_0$ . Знайти індукцію магнітного поля у всьому просторі. Результат подати у векторному вигляді через вектори  $\mathbf{r} \perp \mathbf{e}_0$ .

**2.15.** Заряд рівномірно розподілений в області  $0 < z < a$ . Зовні зарядів немає. Знайти напруженість електричного поля у всьому просторі.



**2.16.** Визначити величину та напрямок стаціонарного магнітного поля, утвореного струмом всередині нескінченного циліндричного провідника радіуса  $R$ , вісь якого збігається з віссю апікат. Густина струму  $\mathbf{j}(r, \theta, \varphi) = j_0 \mathbf{e}_z \left(1 - \frac{r}{a}\right)$ . Зовні струмів немає.

**2.17.** Електричне поле в усьому просторі має вигляд:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}),$$

де  $\mathbf{E}_0$  та  $\mathbf{a}$  — постійні вектори. Знайдіть густину зарядів, що створили дане поле.

**2.18.** В стаціонарній системі індукція магнітного поля дається виразом  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$ , а  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}_0) = 0$ . Електричного поля немає.  $\mathbf{B}_0$  та  $\mathbf{a}$  — постійні вектори. Знайти густину струму, що створює дане поле.

**2.19.** В стаціонарній системі індукція магнітного поля дорівнює

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_0 - \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}_0)] (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}),$$

$\mathbf{a}^2 = 1$ , а  $\mathbf{B}_0$  та  $\mathbf{a}$  — постійні вектори. Знайти густину струму, що створює дане поле.

## 2.2. Рівняння Пуассона та Лапласа. Граничні задачі електростатики

### Теоретичні відомості

Зв'язок напруженості та потенціалу:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi. \quad (2.1)$$

З урахуванням (2.1), з рівняння (1.5) отримуємо рівняння Пуассона:

$$\Delta\phi = -4\pi\rho. \quad (2.2)$$

В областях, де заряди відсутні, рівняння (2.2) приймає вигляд рівняння Лапласа:

$$\Delta\phi = 0. \quad (2.3)$$

Рівняння Пуассона само собою має безліч розв'язків. Для кусково-неперервного розподілу об'ємної густини заряду  $\rho(\mathbf{r})$ , щоб визначити розв'язок єдиним чином в області  $\Omega$ , можна задати значення  $\phi(\mathbf{r})$  на границях цієї області. Якщо  $\Omega$  необмежена, зазвичай накладають умову:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \{|\nabla\phi(\mathbf{r})| r^2\} < \infty, \quad r = |\mathbf{r}|. \quad (2.4)$$

Якщо область  $\Omega$  складається з двох частин, розділених поверхнею  $\partial\Omega$ , на якій є поверхневі заряди, слід додати граничні умови (1.15), (1.14) на  $\partial\Omega$ . Також можна замість (1.15) задати умову неперервності потенціалу при перетині  $\partial\Omega$ . За цих умов розв'язок (2.2) визначений єдиним чином.

За наявності провідника, розташованого всередині замкненої поверхні  $\partial\Omega$ , слід задавати значення потенціалу:

$$\phi|_{\mathbf{r} \in \partial\Omega} = \phi_0 \equiv \text{const} \quad (2.5)$$

на цій поверхні.

Замість (2.5), можна задати повний заряд на провіднику

$$q = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} dS (\mathbf{n} \cdot \nabla \phi) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} dS \frac{\partial \phi}{\partial n}, \quad (2.6)$$

$\mathbf{n}$  — зовнішня нормаль на поверхні провідника; при цьому вважаємо, що потенціал на поверхні  $\phi|_{\mathbf{r} \in \partial\Omega} = \text{const}$ , хоча значення цієї константи задавати не потрібно.

Розв'язком рівнянь Пуассона у випадку ізольованої системи зарядів

$$\phi(\mathbf{r}) = \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.7)$$

де  $\mathbf{r}'$  — радіус-вектор елемента заряду  $\rho(\mathbf{r}') dV'$ , а  $\mathbf{r}$  — радіус-вектор точки спостереження.

Енергія електростатичного поля з потенціалом  $\phi(\mathbf{r})$ , створюваного об'ємними зарядами з густиною  $\rho(\mathbf{r})$  та зарядами з поверхневою густиною  $\sigma$  на межі розділу середовищ  $S$ :

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \int dV \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_{\infty} dV \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int_S dS \sigma(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}). \quad (2.8)$$

У задачах магнітостатики маємо справу з рівняннями

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (2.9)$$

Для ізольованої системи струмів, за умови спадання на нескінченності

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \{|\mathbf{B}(\mathbf{r})| r^2\} < \infty, \quad r = |\mathbf{r}|, \quad (2.10)$$

аналогічно (2.4), та з граничними умовами (1.17), (1.16) — за наявності поверхневих струмів, можна показати, що розв'язок рівнянь (2.9) визначений єдиним чином.

Для вектор-потенціалу з використанням калібрувальної умови  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  (кулонівське калібрування) отримуємо рівняння:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2.11)$$

розв'язком цього рівняння для ізольованої системи струмів є

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \iiint \frac{\mathbf{j}'(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.12)$$

де  $\mathbf{r}'$  — радіус-вектор елемента струму  $\mathbf{j}'(\mathbf{r}') dV'$ , а  $\mathbf{r}$  — радіус-вектор точки спостереження.

Енергія магнітостатичного поля з вектор-потенціалом  $\mathbf{A}$ , створюваного об'ємними струмами з густиною  $\mathbf{j}$  та струмами з поверхневою густиною  $\mathbf{i}$  на межі розділу середовищ  $S$ :

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int dV \mathbf{B}^2(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int dV \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int dS \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (2.13)$$

Розкладання розв'язків рівняння Лапласа (2.3) в ряд по ортогональній системі функцій — один з найбільш ефективних методів вирішення широкого класу задач. Конкретний вибір ортогональної системи функцій залежить від симетрії, яку має (точно або наближено) система, що розглядається.

*Декартові координати.* Рівняння Лапласа в декартових координатах має вигляд:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.14)$$

За певних умов розв'язок цього рівняння можна представити у вигляді як добутку трьох функцій, кожна з яких залежить лише від однієї координати:

$$\phi = X(x)Y(y)Z(z).$$

У більш загальному випадку розв'язок рівняння Лапласа подають як суму подібних добутків.

*Сферичні координати.* Для випадку задач з азимутальною симетрією розв'язком рівняння (2.3) є вираз:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l \left( \frac{r}{R} \right)^l + B_l \left( \frac{r}{R} \right)^{-(l+1)} \right) P_l(\cos \theta), \quad (2.15)$$

де коефіцієнти  $A_l$  та  $B_l$  визначаються з граничних умов,  $P_l(\cos \theta)$  — поліноми Лежандра (див. додаток Б).

*Циліндричні координати.* У випадку циліндричної симетрії, розв'язком рівняння (2.3) є вираз:

$$\phi(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left( A_m \left( \frac{r}{R} \right)^m + B_m \left( \frac{R}{r} \right)^m \right) \sin m\varphi + \left( C_m \left( \frac{r}{R} \right)^m + D_m \left( \frac{R}{r} \right)^m \right) \cos m\varphi \right], \quad (2.16)$$

де коефіцієнти  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$  та  $D_m$  визначаються з граничних умов.

## 2.3. Метод електричних зображень

**2.20.** Площина  $z = 0$  є провідною. Заряди  $q_1$  та  $q_2$  розташовані над нею в точках

$$\mathbf{r}_1 = (x_1, 0, z_1), \quad \mathbf{r}_2 = (x_2, 0, z_2), \quad x_1 \neq x_2, \quad z_1 > 0, \quad z_2 > 0.$$

Знайти сили, що діють на заряди.

**2.21.** Заряд провідної ізольованої кулі радіуса  $R$  дорівнює  $Q$ . Точковий заряд  $q$  знаходиться на відстані  $a > R$  від центру кулі. Знайти електричне поле зовні кулі методом зображень.

**2.22.** Точковий заряд  $q$  знаходиться на відстані  $a > R$  від центру провідної заземленої кулі. Знайти електричне поле зовні кулі методом зображень.

**2.23.** Дві концентричні провідні сфери радіусів  $R_1$  та  $R_2$  — заземлені. Між ними, на відстані  $a$  від центру  $0 < R_1 < a < R_2$  знаходиться точковий заряд  $q$ . Знайти індуковані заряди на сферах. Задачу розв'язати не запобігаючи до розкладів по сферичним функціям.

## 2.4. Пошук розв'язків методом розкладання за системою ортогональних функцій

**2.24.** На площині  $z = 0$  (декартові координати  $x, y, z$ ) поверхнева густина заряду

а)  $\sigma(x, y) = \sigma_0 \sin \frac{x}{L} \cos \frac{2y}{L},$

б)  $\sigma(x, y) = \sigma_0 \sin \frac{3x}{L} \cos \frac{4y}{L}$  та

в)  $\sigma(x, y) = \sigma_0 \sin^2 \frac{3x}{L} \cos \frac{y}{L}$

Знайти потенціал електричного поля в усьому просторі.

Випадок б) розглядається аналогічно. У випадку в) треба розкласти  $\sin^2$  на тригонометричні функції подвійного аргументу.

**2.25.** Всередині нескінченної провідної труби прямокутного перерізу  $-a < x < a, -b < y < b, -\infty < z < \infty$ , усі бічні сторони якої заземлені, усередині, у площині  $z = 0$ , вставлена тонка перегородка з поверхневою густиною заряду  $\sigma = \sigma_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$ . Координати декартові. Знайти потенціал електричного поля та енергію електричного поля всередині труби.

**2.26.** Електричне поле утворене рівномірним розподілом зарядів з густиною  $\rho_0$  усередині кулі радіуса  $R$ , зовні зарядів немає. Знайти потенціал  $\phi$  (у сферичних координатах), якщо  $\phi(\infty) = 0$ . Побудувати графік.

**2.27.** Кульовий шар між сферами радіусів  $R_1$  і  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) заряджений з густиною  $\rho = \frac{a}{r^2}$ . Знайти потенціал поля в довільній точці.

**2.28.** Знайти розподіл зарядів, які створюють потенціал

$$\phi = \frac{q}{r} e^{-\frac{r}{a}},$$

де  $a$  — деяка додатна константа.

**2.29.** Електричне поле утворене розподілом зарядів на поверхні кулі радіуса  $R$ , всередині і зовні зарядів немає. На поверхні

а)  $\phi(R, \theta, \varphi) = \phi_0 \cos \theta,$

б)  $\phi(R, \theta, \varphi) = \phi_0 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$

Знайти потенціал зовні та усередині кулі, в сферичних координатах та густину зарядів на поверхні кулі.

**2.30.** Електричне поле утворене розподілом зарядів

а)  $\sigma(r, \theta, \varphi) = \sigma_0 \cos \theta,$

б)  $\sigma(r, \theta, \varphi) = \sigma_0 \cos \theta + \sigma_1,$

на поверхні кулі радіуса  $R$ , усередині і зовні зарядів немає. Знайти потенціал зовні та усередині кулі.

**2.31.** Металеву кулю радіуса  $R$  вносять у зовнішнє однорідне електричне поле  $\mathbf{E}_0$ . Знайти індукований дипольний момент кулі та розподіл індукованих зарядів на її поверхні, якщо куля заземлена.

**2.32.** Незаряджену провідну ізольовану кулю радіуса  $R$  внесли в зовнішнє поле з потенціалом

$$\phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{R} \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n C_{nm} \left(\frac{r}{R}\right)^n Y_{nm}(\theta, \varphi).$$

Центр кулі знаходиться у початку координат  $r = 0$ . Знайти потенціал зарядів, індукованих на поверхні кулі в результаті перерозподілу.

**2.33.** Електричне поле утворене однорідним розподілом зарядів з густиною  $\rho_0$  усередині кулі радіуса  $R$ , зовні зарядів немає. Знайти потенціал  $\phi$  (у сферичних координатах), якщо  $\phi(r \rightarrow \infty) = 0$ . Побудувати графік залежності від  $r$ .

**2.34.** Електричне поле утворене розподілом зарядів зовні кулі радіуса  $R$ , всередині зарядів немає. Знайти потенціал  $\phi(r, \theta, \varphi)$  при  $r < R$ , якщо на поверхні  $\phi(R, \theta, \varphi) = \phi_0 P_n(\cos \theta)$ .

**2.35.** Електричне поле утворене розподілом зарядів усередині кулі радіуса  $R$ , зовні зарядів немає. Знайти потенціал  $\phi(r, \theta, \varphi)$  при  $r > R$ , якщо на поверхні  $\phi(R, \theta, \varphi) = \phi_0 P_n(\cos \theta)$ .

**2.36.** Розподіл заряду всередині кулі радіуса  $R$  має залежність вигляду  $\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos \theta)$ , зовні зарядів немає. Знайти потенціал в усьому просторі.

**2.37.** Отримайте розв'язок рівняння Лапласа (2.16) методом розділення змінних в циліндричних координатах для випадку циліндричної симетрії (не залежності від координати  $z$ ).

**2.38.** Електричне поле утворене розподілом зарядів на поверхні циліндру радіуса  $R$ , всередині і зовні зарядів немає. На поверхні заряд розподілений як  $\phi(R, \varphi, z) = \phi_0 \cos m\varphi$ . Знайти потенціал зовні та усередині циліндру, в циліндричних координатах та густину зарядів на поверхні циліндру.

**2.39.** Електричне поле утворене розподілом зарядів  $\sigma(r, \varphi, z) = \sigma_0 \sin 2\varphi$  на поверхні циліндру радіуса  $R$ , усередині і зовні зарядів немає. Знайти потенціал зовні та усередині кулі в циліндричних координатах та густину зарядів на поверхні циліндру.

**2.40.** На поверхні нескінченного циліндру радіуса  $R$  густина поверхневого заряду  $\sigma(r, \varphi, z) = \sigma_0 \sin^3 \varphi$ . Вісь циліндра лежить на осі  $OZ$ . Знайти потенціал в усьому просторі.

**2.41.** Знайти (з точністю до адитивної константи) вектор-потенціал магнітного поля нескінченного прямого проводу зі струмом  $I_0$ . Напрямок проводника заданий одиничним вектором  $\mathbf{e}_0$ . Результат подати у векторному вигляді через вектори  $\mathbf{r} \perp \mathbf{e}_0$ .

**2.42.** Електричне поле утворене розподілом зарядів зовні циліндру радіуса  $R$ , всередині зарядів немає. Знайти потенціал  $\phi(r, z, \varphi)$  при  $r < R$ , якщо на поверхні циліндру  $\phi(R, z, \varphi) = \phi_0 \cos 2\varphi$ .

**2.43.** Електричне поле утворене розподілом зарядів усередині циліндру радіуса  $R$ , зовні зарядів немає. Знайти потенціал  $\phi(r, z, \varphi)$  при  $r > R$ , якщо на поверхні циліндру  $\phi(R, z, \varphi) = \phi_0 \cos 3\varphi$ .

**2.44.** Струм  $\mathbf{j} = j_0 \mathbf{e}_0$  протікає вздовж нескінченного циліндру радіуса  $R$ . Зовні струмів немає. Напрямок осі циліндра задається одиничним вектором  $\mathbf{e}_0$ . Знайти (з точністю до адитивної константи) вектор-потенціал магнітного поля нескінченного прямолінійного провідника зі струмом у всьому просторі. Результат подати у векторному вигляді через вектори  $\mathbf{r} \perp \mathbf{e}_0$ .

**2.45.** В нескінченному прямому циліндричному провідникові радіуса  $R$  тече струм з густиною  $j(r) = \frac{a}{r}$ , де  $r$  — відстань від осі провідника. Циліндр напрямлений по осі  $OZ$ . Знайти векторний потенціал (з точністю до константи) та індукцію магнітного поля всередині та зовні провідника.

**2.46.** Об'ємна густина струму в обмеженій системі має вигляд

$$\mathbf{j} = c \nabla \times (\rho(r) \mathbf{a}),$$

де  $\mathbf{a} = \text{const}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ . Функція  $\rho(r)$  швидко прямує до нуля на нескінченності. Знайти магнітне поле при  $r = 0$ .

## 2.5. Розкладання потенціалів за мультиполями

### Теоретичні відомості

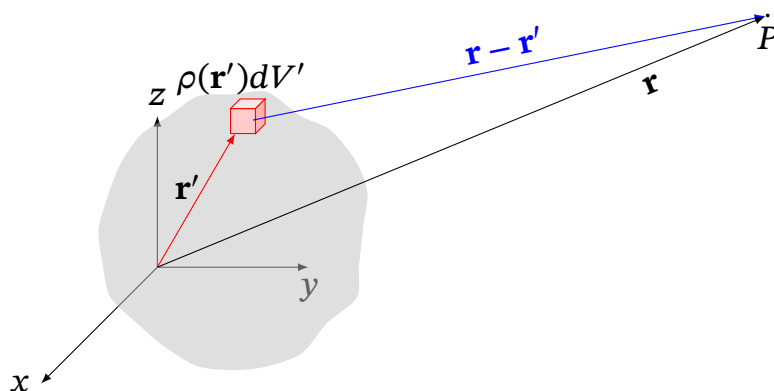


Рис. 2.7. Поле системи зарядів на далеких відстанях

Зазвичай пряме обчислення інтегралу (2.7) досить складне, тому часто потенціал подають у вигляді мультипольного розкладу.

Зокрема, в декартовій системі координат при  $r > a$  (де  $a$  — найбільша відстань від зарядів до полюса  $O$ ) такий розклад має вигляд:

$$\phi = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} D_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots, \quad (2.17)$$

де  $q = \int \rho(\mathbf{r}') dV'$  — повний заряд системи,  $\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV'$  — дипольний момент системи,  $D_{ij}$  — тензор квадрупольного моменту систем, який визначається співвідношенням:

$$D_{ij} = \int \rho(\mathbf{r}') dV' (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}). \quad (2.18)$$

Сума діагональних компонент (слід тензора)  $\sum_i D_{ii} = 0$ . Тензор квадрупольного моменту є симетричним тензором, який може бути приведений до головних осей. При цьому, завдяки нульовому сліду тензора, лише два з трьох головних значень є незалежними. Якщо ж система зарядів симетрична відносно деякої осі (наприклад осі  $OZ$ ), то вона ж є однією з головних осей тензора, а положення двох інших осей в площині  $XOY$  довільне, причому:

$$D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2} D_{zz}. \quad (2.19)$$

Квадрупольний момент системи не залежить від вибору початку координат, якщо дорівнюють нулю як повний заряд, так і дипольний момент системи.

Енергія пробного розподілу зарядів  $\rho(\mathbf{r})$  які знаходяться в зовнішньому полі з потенціалом  $\phi(\mathbf{r})$  дорівнює:

$$W = \int \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV. \quad (2.20)$$

Вважаючи, що зовнішнє поле слабо залежить від координат в області знаходження зарядів і враховуючи зв'язок (2.1)  $\mathbf{E} = -\nabla \phi$  останній вираз можна подати у вигляді розкладу за мультиполями:

$$W = q\phi(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} D_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i} + \dots \quad (2.21)$$

З виразу (2.21) видно, що енергія заряду пов'язана з потенціалом зовнішнього електричного поля, енергія диполя — з напруженістю поля, а енергія квадруполь — з градієнтом напруженості поля.

**2.47.** Довести, що у випадку електронейтральної системи її дипольний момент не залежить від вибору початку координат.

**2.48.** Знайти потенціал і поле точкового диполя з моментом  $\mathbf{p}$ .

**2.49.** Довести, що у випадку електронейтральної системи з нульовим дипольним моментом її квадрупольний момент не залежить від вибору початку координат.

**2.50.** Знайти потенціали систем на великих відстанях: а) лінійного квадруполь (рис. 2.8), б) плоского квадруполь (рис. 2.9).



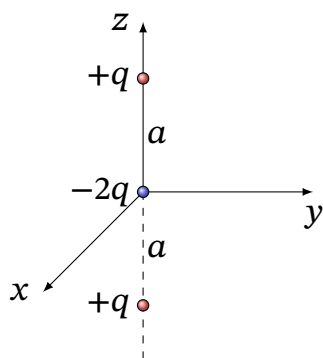


Рис. 2.8. Лінійний квадруполь

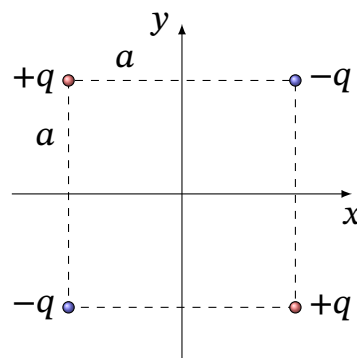


Рис. 2.9. Плоский квадруполь

**2.51.** Знайти вектор-потенціал однорідного магнітного поля  $\mathbf{B}$ : а) у декартових; б) циліндричних і в) сферичних координатах.

**2.52.** Знайти потенціал кулі радіусом  $R$  для точок, що лежать на осі  $OZ$  на відстані  $z \gg R$ . По кулі розподілений заряд з густиною:

$$\rho = \rho_0 \frac{R^2}{r^2} \left( 1 - \frac{2r}{R} \right) \sin \theta$$

де  $\rho_0$  — додатна стала,  $r$  та  $\theta$  — сферичні координати.

**2.53.** Кругле кільце радіусом  $R$  заряджене однорідно з лінійною густиною  $\lambda$  і лежить в площині  $XOY$ , так, що його центр співпадає з початком координат. Знайдіть перші три доданки мультипольного розкладання потенціалу.

**2.54.** Обчислити вектор-потенціал магнітного поля, що створюється у вакуумі коловим струмом радіусу  $R$ . Сила струму  $I$ , яка тече по витку. Показати, що на великих відстанях від колового витка магнітне поле його зводиться до поля магнітного диполя.

**2.55.** Сфера радіусом  $R$  заряджена зарядом  $q$  рівномірно по поверхні і обертається навколо одного зі своїх діаметрів з кутовою швидкістю  $\omega$ . Знайти магнітне поле всередині і зовні сфери.

**2.56.** У сферичних координатах компоненти вектора  $\mathbf{j}$  середньої об'ємної густини орбітального струму, що тече в збудженому атомі водню, дорівнюють:

$$j_r = j_\theta = 0, \quad j_\varphi = j_0 \left( \frac{r}{a} \right)^3 e^{-\frac{2r}{3a}} \sin^3 \theta.$$

де  $a$  — борівський радіус,  $\hbar$  — стала Планка,  $m$  і  $e$  — маса і заряд електрона, а  $r$  — відстань до протона. Орбітальний струм створює в просторі магнітне

поле. Знайти індукцію цього магнітного поля в центрі атома.

**2.57.** Довести, що

$$\frac{3x_i x_j - \mathbf{r}^2 \delta_{ij}}{|\mathbf{r}|^5} \int x'_i x'_j \rho(\mathbf{r}') dV' = \frac{x_i x_j}{|\mathbf{r}|^5} \int \rho(\mathbf{r}') (3x'_i x'_j - \mathbf{r}'^2 \delta_{ij}) dV'.$$

**2.58.** Система зарядів розподілена з густиною  $\rho(\mathbf{r})$  в обмеженій області простору в околі точки  $O$  і перебуває в зовнішньому електричному полі, яке в околі цієї точки можна представити у вигляді

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} a_{lm} r^l Y_{lm}^*(\theta, \varphi).$$

Знайдіть енергію системи в цьому полі, виразивши її через  $a_{lm}$  та мультипольні моменти  $Q_{lm}$  системи.

**2.59.** Два диполя з моментами  $\mathbf{p}_1$  і  $\mathbf{p}_2$ , які лежать в одній площині на відстані  $d$  один від одного, утворюють з прямою, яка з'єднує диполі, кути  $\theta_1$  і  $\theta_2$  відповідно (рис. 2.10). Обчислити енергію взаємодії диполів.

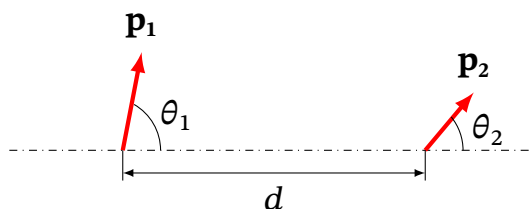


Рис. 2.10. До задачі 2.59

**2.60.** Знайти силу взаємодії двох однакових незаряджених металевих сфер радіусами  $R$ , вміщених в однорідне електричне поле з напруженістю  $E_0$ , яке напрямлене паралельно лінії, що з'єднує центри сфер. Відстань між центрами сфер дорівнює  $l$ , причому  $l \gg R$ .

**2.61.** Знайдіть енергію взаємодії електронної хмари з ядром в атомі водню. Заряд електрона розподілений в атомі з об'ємною густиною

$$\rho(r) = \frac{e}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}},$$

де  $a$  — борівський радіус,  $e$  — елементарний заряд.

# 3

## Випромінювання та поширення електромагнітних хвиль

### Теоретичні відомості

Потенціали полів, які створюються точковим зарядом  $q$ , що рухається по заданій траєкторії  $\mathbf{r}_q = \mathbf{r}_q(t_q)$  дається виразами:

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{\left(R_q - \frac{\mathbf{v}_q \cdot \mathbf{R}_q}{c}\right)}, \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{v}_q/c}{\left(R_q - \frac{\mathbf{v}_q \cdot \mathbf{R}_q}{c}\right)}, \quad (3.1)$$

де

$$\mathbf{R}_q = \mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t_q), \quad R_q = |\mathbf{R}_q|, \quad \mathbf{v}_q = \dot{\mathbf{r}}_q(t_q),$$

а  $t_q$  є розв'язком рівняння

$$t_q = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t_q)|}{c}. \quad (3.2)$$

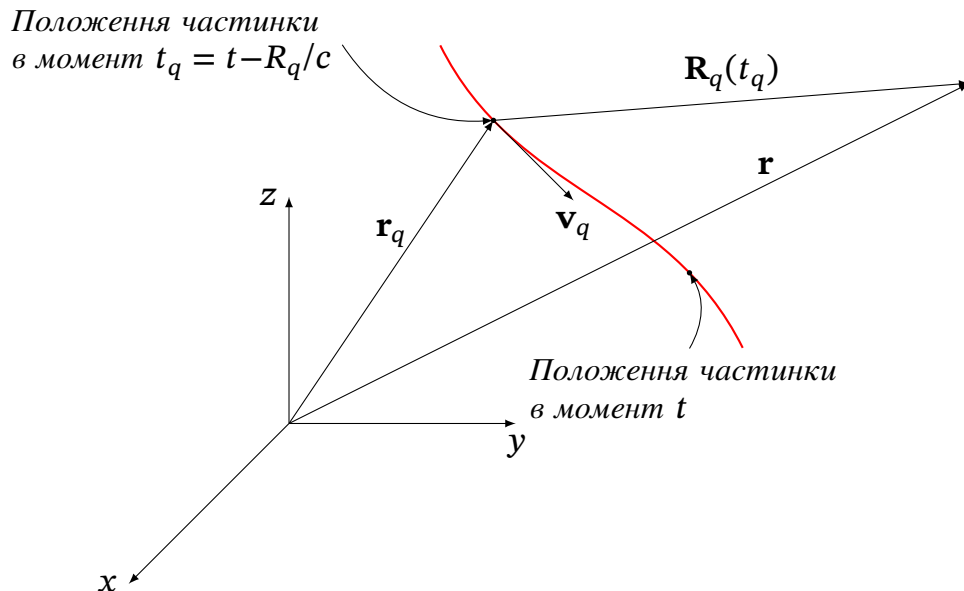


Рис. 3.1. До розрахунку запізнюючих потенціалів

Нагадаємо, що хвильовою зоною називають область на відстані від джерела, яка значно більша за характерну довжину хвилі/ У хвильовій зоні магнітне поле системи з дипольним моментом  $\mathbf{p}(t)$ , у наближенні дипольного випромінювання, є

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \frac{\left[\ddot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \mathbf{n}\right]}{c^2 r} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = [\mathbf{B} \times \mathbf{n}] = \frac{[[\ddot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}]}{c^2 r}, \quad (3.4)$$

де  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$  — одиничний вектор в напрямку точки спостереження.

Діаграма спрямованості дипольного випромінювання:

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta. \quad (3.5)$$

Повна потужність випромінювання в усіх напрямках:

$$N = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{p}}^2. \quad (3.6)$$

При розгляді поляризації випромінювання треба зважати на векторну природу польових функцій, зокрема, напруженості електричного поля. Зауважимо, що для електромагнітної хвилі, що поширюється у фіксованому напрямку, досить розглядати лише електричне поле; воно визначає також і вектор напруженості магнітного поля.

Розглянемо випадкове поле випромінювання, що поширюється в напрямку осі  $x_3$ , з напруженістю електричного поля  $\mathbf{E} = (E_1, E_2, 0) \equiv (E_x, E_y, 0)$ , причому будемо вважати, що поле є суперпозицією монохроматичних хвиль  $\sim e^{-i\omega t}$  з близькими частотами. Напрямок вектора  $\mathbf{E}$ , що є ортогональним напрямку поширення хвилі, визначає поляризацію. Для випадкового поля  $\mathbf{E}$  введемо тензор поляризації (за [0]):

$$\rho_{ij} = \frac{\langle E_i E_j^* \rangle}{\langle |E_1|^2 \rangle + \langle |E_2|^2 \rangle}, \quad i, j = 1, 2. \quad (3.7)$$

Оскільки область значень  $\det ||\rho|| = \epsilon$  є відрізком  $[0, 1/4]$ , можна записати:

$$\det ||\rho|| = \frac{1}{4}(1 - P^2), \quad 0 \leq P \leq 1, \quad (3.8)$$

де параметр  $P$  називають *ступінню поляризації*; він приймає значення від 0 (неполяризоване світло) до 1.

### 3.1. Співвідношення невизначеностей

#### 3.1. Електричний сигнал має форму

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right).$$

Розрахувати (прямим обчисленням) величину  $\langle \Delta t^2 \rangle \langle (\Delta\omega - \langle \omega \rangle)^2 \rangle$  у співвідношенні невизначеностей.

**3.2.** Коли в співвідношенні невизначеностей для хвильових пакетів

$$\langle \Delta t^2 \rangle \langle \Delta \omega^2 \rangle \geq \frac{1}{4}$$

має місце знак рівності? Відповідь обґрунтувати й знайти відповідну форму сигналу.

### 3.2. Монохроматичні хвилі. Інтерференція та поляризація хвиль

**3.3.** Гармонічні коливання двох електричних диполів відбуваються з однаковою частотою  $\omega$ , але зсунуті по фазі на  $\frac{\pi}{2}$ . Амплітуди дипольних моментів дорівнюють  $p_0$  і утворюють кут  $\frac{\pi}{2}$  один з одним. Відстань між диполями мала порівняно з довжиною хвилі. Знайти середню за часом потужність випромінювання системи.

**3.4.** Гармонічні коливання двох електричних диполів синфазні і відбуваються з однаковою частотою  $\omega$ . Амплітуди дипольних моментів дорівнюють  $p_0$  і утворюють кут  $\frac{\pi}{2}$  один з одним. Відстань між диполями мала порівняно з довжиною хвилі. Знайти середню за часом потужність випромінювання системи.

**3.5.** Два електричних диполя розташовані на прямій на відстані  $m\frac{\lambda}{2}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Їх дипольні моменти напрямлені перпендикулярні до цієї прямої, вони синфазні, дорівнюють одне одному та осцилюють з частотою  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$  та амплітудою  $p_0$ . Знайти кутовий розподіл випромінювання та повну інтенсивність.

**3.6.** Два електричних диполя розташовані на прямій на відстані  $m\frac{\lambda}{2}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) один від одного. Їх дипольні моменти напрямлені вздовж цієї прямої, вони синфазні, дорівнюють одне одному та осцилюють з частотою  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$  та амплітудою  $p_0$ . Знайти кутовий розподіл випромінювання (діаграму спрямованості) та повну інтенсивність.

**3.7.** Електромагнітна хвиля поширюється в напрямку осі  $OZ$ ; напруженість електричного поля у початку координат  $\mathbf{E} = f(t)(a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y)$ ;  $a, b$  — комплексні числа,  $f(t)$  — випадкова функція з нульовим середнім,  $\langle |f(t)|^2 \rangle = E_0^2$ ,  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  — орти осей декартових координат. Обчислити тензор

поляризації та знайти ступінь поляризації.

**3.8.** Електромагнітне випромінювання є сумою двох електромагнітних плоских хвиль, згенерованих незалежними джерелами. Хвилі поширюються в напрямку осі  $OZ$ , напруженості електричних полів у початку координат відповідно  $\mathbf{E}_1 = f_1(t)(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)$  та  $\mathbf{E}_2 = f_2(t)\mathbf{e}_x$ , де  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  — випадкові функції з нульовими середніми,  $\langle |f_1(t)|^2 \rangle = \langle |f_2(t)|^2 \rangle = E_0^2$ ,  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  — орти осей декартових координат. Знайти ступінь поляризації.

**3.9.** Електромагнітне випромінювання є сумою двох електромагнітних плоских хвиль, згенерованих незалежними джерелами. Хвилі поширюються в напрямку осі  $OZ$ , напруженості електричних полів у початку координат відповідно  $\mathbf{E}_1 = f_1(t)\mathbf{e}_x$  та  $\mathbf{E}_2 = f_2(t)\mathbf{e}_y$ , де  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  — випадкові функції з нульовими середніми,  $\langle |f_1(t)|^2 \rangle = \langle |f_2(t)|^2 \rangle = E_0^2$ ,  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  — орти осей декартових координат. Знайти ступінь поляризації.

**3.10.** Два електричних диполя розташовані на осі апікат з ортом  $\mathbf{e}_z$  на відстані  $d \ll \lambda$ . Їх дипольні моменти дорівнюють:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1(t) &= p_0 \mathbf{e}_z \exp(-i\omega t), \\ \mathbf{p}_2(t) &= p_0 \mathbf{e}_x \exp\left[-i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

Знайти тензор поляризації випромінювання у напрямку, перпендикулярному до  $\mathbf{e}_z$  та  $\mathbf{e}_x$ .

**3.11.** Два електричних диполя розташовані на осі апікат з ортом  $\mathbf{e}_z$  на відстані  $d \ll \lambda$ . Їх дипольні моменти дорівнюють:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1(t) &= p_0 \mathbf{e}_z \exp(-i\omega t) \cos \xi, \\ \mathbf{p}_2(t) &= p_0 \mathbf{e}_z \exp(-i\omega t) \sin \xi.\end{aligned}$$

Знайти кутовий розподіл випромінювання та повну інтенсивність. Випадкова величина  $\xi$  рівномірно розподілена на проміжку  $0 \leq \xi \leq 2\pi$ .

**3.12.** Два електричних диполя розташовані на осі апікат з ортом  $\mathbf{e}_z$  на відстані  $d \ll \lambda$ . Їх дипольні моменти дорівнюють:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1(t) &= p_0 \mathbf{e}_z \exp(-i\omega t) \cos \xi, \\ \mathbf{p}_2(t) &= p_0 \mathbf{e}_z \exp(-i\omega t + \pi/2) \sin \xi.\end{aligned}$$

Знайти ступінь поляризації та тензор поляризації випромінювання у на-

прямку, перпендикулярному до  $\mathbf{e}_z$ . Випадкова величина  $\xi$  рівномірно розподілена на проміжку  $0 \leq \xi \leq 2\pi$ .

### 3.3. Випромінювання та розсіювання електромагнітних хвиль

**3.13.** Отримайте потенціали Ліенара-Віхерта (3.1) із загальних формул для запізнюючих потенціалів (1.25).

**3.14.** Доведіть, що у випадку заряду, який рухається зі швидкістю  $\mathbf{v} = \text{const}$  запізнюючі потенціали (3.1) дають значення, які співпадають з «миттєвими» потенціалами:

$$\phi = \frac{q}{R_t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta}}, \quad \mathbf{A} = \frac{q\mathbf{v}}{R_t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta}},$$

де  $R_t = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t)|$  — відстань від заряду до точки спостереження в момент спостереження (див. рис. 3.1), а  $\theta$  — кут між  $\mathbf{R}_t$  та  $\mathbf{v}$ .

**3.15.** Обчислити електричне і магнітне поля рухомого заряду використовуючи потенціали Ліенара-Віхерта (3.1).

**3.16.** Доведіть, що радіально осцилююча однорідно заряджена сфера не випромінює електромагнітні хвилі.

**3.17.** Довести, що система, яка складається з  $n$  заряджених частинок, у яких однаковий питомий заряд, за відсутності зовнішніх полів не буде мати дипольного випромінювання. Частинки взаємодію за законом Кулона. Релятивістськими поправками і реакцією випромінювання знехтувати.

**3.18.** Модуль вектора індукції магнітного поля дипольного випромінювання, що створюється системою струмів на великій відстані  $r$ , має вигляд:

$$B(t, r, \theta, \varphi) = r^{-n} f\left(t - \frac{r}{c}, \theta, \varphi\right),$$

де  $f$  — довільна функція вказаних аргументів. Чому дорівнює  $n$ ?

**3.19.** Заряд  $q$  рухається з малою швидкістю  $\mathbf{v}$  та прискоренням  $\dot{\mathbf{v}}$  в обмеженій області простору. Знайти наближені вирази електромагнітного поля  $\mathbf{E}$ ,

**В** частинки в точках, відстань до яких від частинки набагато більша у порівнянні з розмірами області руху заряду. Визначити також кутовий розподіл випромінювання та повну потужність дипольного випромінювання.

**3.20.** Визначити середню повну потужність дипольного випромінювання диполя  $\mathbf{p}_e$ , що обертається в одній площині з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ .

**3.21.** Два електричні диполі, що розташовані на осі  $OX$  і орієнтовані уздовж осі  $OZ$ , осцилюють з однаковою амплітудою  $p_0$  і точно в протифазі. Їх  $x$ -координати відрізняються на  $\lambda/2$ . Обчисліть вектор Пойнтінга на великих відстанях від цієї системи.

**3.22.** Дві нерелятивістські частинки з зарядами  $q_1$  та  $q_2$  і масами  $m_1$  та  $m_2$  здійснюють коловий рух на відстані  $r$  одна від одної. Знайдіть потужність випромінювання. Віддачею випромінювання на рух частинок знехтувати.

**3.23.** Використовуючи рівняння (3.3) знайдіть рівняння силових ліній напруженості електричного та магнітного поля диполя, який знаходиться у початку координат і має момент  $\mathbf{p} = p_0 \cos \omega t \mathbf{e}_z$ . Покажіть, що існують точки, де поля дорівнюють нулю в будь-який момент часу.

**3.24.** Сила струму в тонкому круглому витку змінюється за законом  $I = I_0 \sin \omega t$ . Визначити діаграму спрямованості випромінювання цього витка та повну потужність випромінювання в хвильовій зоні.

**3.25.** В тонкій нерухомій квадратній рамці зі стороною  $a$  протікає струм за законом  $I = I_0 e^{-bt^2}$ . Знайдіть повну енергію довгохвильового випромінювання за час  $-\infty < t < \infty$ .

**3.26.** У тонкому прямому проводі розташованому на осі  $OZ$  довжиною  $L = m\lambda/2$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ), збуджено струм  $I(t, z) = I_0 e^{-i\omega t} \sin(kz)$ , де  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{m\pi}{L}$ ,  $z \in [0, L]$ . Знайти діаграму напрямленості  $\frac{dN}{d\Omega}$  як функцію кута  $\theta$  в сферичних координатах.

**3.27.** Однорідно заряджений тонкий диск радіусом  $R$  обертається навколо свого діаметра з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ . Заряд диска дорівнює  $q$ . Знайти інтенсивність випромінювання такої системи.



**3.28.** На дві плоскі паралельні металеві сітки подали напругу, завдяки чому між ними діє електричне поле  $\mathbf{E}$ , яке наближено вважаємо однорідним. Відстань між сітками  $d$ , зовні сіток поля немає. Нерелятивістська частинка з масою  $m$  та зарядом  $q$  влітає в область, де діє електричне поле, перетинаючи обидві сітки. Кут між вектором  $\mathbf{E}$  і напрямком швидкості  $\mathbf{v}_0$  частинки при вльоті дорівнював  $0 < \alpha < \pi/2$ . Знайти енергію, що втрачає частинка на дипольне випромінювання під час прольоту між сітками.

**3.29.** У класичній моделі атома Резерфорда електрон з масою  $m$  і зарядом  $e$  обертається по коловій орбіті навколо нерухомого ядра з зарядом  $Z|e|$ . Знайти закон зменшення повної енергії електрона, яке обумовлене дипольним випромінюванням. Обчислити час, після закінчення якого електрон впаде на ядро внаслідок втрати енергії на дипольне випромінювання. У початковий момент часу електрон знаходиться на відстані  $R$  від ядра.

**3.30.** На нерелятивістський заряд  $e$ , маси  $m$ , що розташований у точці  $\mathbf{r}$ , падає монохроматична електромагнітна хвиля  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ . Визначити диференціальний та повний переріз розсіювання електромагнітних хвиль. Власна частота коливань заряду  $\omega_0$ .

**3.31.** Запишіть диференціальний і повний перерізи розсіювання лінійно поляризованого і неполяризованого світла осцилятором із тертям, а також перерізи поглинання.

**3.32.** На два вільних заряди (зарядом  $q$ ), що розташовані на осі аплікату  $OZ$  на відстані  $b = n\lambda/2$  один від одного, падає монохроматична електромагнітна хвиля з напруженістю електричного поля  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx)$ . Вектор  $\mathbf{E}_0$  паралельний осі  $OZ$ . Амплітуда коливань зарядів під дією поля значно менша за довжину хвилі, швидкість нерелятивістська. Знайти диференціальний переріз розсіювання. Оцінити кут між сусідніми пелюстками перерізу діаграми розсіювання у площині  $XOZ$  при  $n \gg 1$  в околі напрямку  $\theta = \theta_0$  ( $\theta$  кут між  $\mathbf{n}$  та  $\mathbf{e}_z$ ).

# 4

## Спеціальна теорія відносності

### Теоретичні відомості

Тензор Мінковського

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

За допомогою тензора Мінковського можна опускати і підіймати індекси у 4-тензорів. Зокрема, у 4-векторів:

$$\eta_{\mu\nu} A^\nu = A_\mu, \quad \eta^{\mu\nu} A_\nu = A^\mu.$$

Контраваріантний 4-вектор густини струму:

$$j^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt} = (c\rho, \mathbf{j}), \quad (4.2)$$

де  $\rho$  – густина електричного заряду,  $\mathbf{j}$  – 3-вектор густини струму.

4-Потенціал електромагнітного поля:

$$A^\mu = (\varphi, \mathbf{A}) \quad \text{— контраваріантний,} \quad (4.3a)$$

$$A_\mu = (\varphi, -\mathbf{A}) \quad \text{— коваріантний.} \quad (4.3б)$$

Калібрувальні перетворення:

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \quad (4.4)$$

Тензор електромагнітного поля:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (4.5)$$

у формі матриці тензор  $F_{\mu\nu}$  має вигляд:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

де  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  ( $\mu$  – номерує рядки,  $\nu$  – стовпці.)

Нехай відносно інерціальної системи відліку  $K$  з координатами  $\{t, \mathbf{r}\}$ ,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  рухається із сталою швидкістю  $V$  інша інерціальна система  $K'$  з декартовими координатами  $\{t', \mathbf{r}'\}$ ,  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ , причому у момент  $t = 0$  початки просторових координат збігалися. Перетворення координат  $K \rightarrow K'$  мають вигляд:

$$t' = \frac{t - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}, \quad \mathbf{r}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{v}t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (4.7)$$

де позначки  $\parallel$  та  $\perp$  відповідають поздовжнім (паралельним) та поперечним до  $\mathbf{v}$  складовим тривимірних векторів.

Відповідні до (4.7) перетворення поперечних та поздовжніх компонент напруженості електричного поля та індукції магнітного поля мають вигляд

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{E}]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (4.8)$$

Відповідні до (4.7) перетворення густини заряду та густини струму мають вигляд

$$\rho' = \frac{\rho - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j})/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \mathbf{j}'_{\perp} = \mathbf{j}_{\perp}, \quad \mathbf{j}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{j}_{\parallel} - \rho \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (4.9)$$

Із компонент тензора можна утворити інваріанти:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \text{inv}, \quad e^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} = \text{inv},$$

де  $e^{\mu\nu\alpha\beta}$  — повністю антисиметричний тензор. У тривимірному представленні інваріанти перетворень Лоренца виглядають таким чином:

$$E^2 - B^2 = \text{inv}, \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \text{inv}.$$

Рівняння руху частинки в електромагнітному полі:

$$mc \frac{du^{\mu}}{ds} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_{\nu}, \quad (4.10)$$

де  $u_{\nu}$  — 4-швидкість частинки.

Рівняння Максвелла в тензорній формі у вакуумі

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = -\frac{4\pi}{c} j^{\mu} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} = 0. \quad (4.12)$$

Тензор енергії-імпульсу електромагнітного поля:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( -F^{\mu\alpha} F^{\nu}_{\alpha} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (4.13)$$

## 4.1. Перетворення Лоренца та закони збереження

**4.1.** У деякій системі  $K$  задано компоненти *простороподібного* коваріантного вектора  $A_\mu$ . Чи існує система відліку  $K'$ , де компоненти цього вектора мають вигляд а)  $A'_\mu = \{a, 0, 0, 0\}$ ? б)  $A'_\mu = \{0, a, 0, 0\}$ ? Якщо це так, виразіть  $A_\mu$ .

**4.2.** У деякій системі  $K$  задано компоненти *часоподібного* коваріантного вектора  $A_\mu$ . Чи існує система відліку  $K'$ , де компоненти цього вектора мають вигляд а)  $A'_\mu = \{a, 0, 0, 0\}$ ? б)  $A'_\mu = \{0, a, 0, 0\}$ ? Якщо це так, виразіть  $A_\mu$ .

**4.3.** Дві релятивістські частинки з масами спокою  $m_1$  та  $m_2$  рухаються вздовж деякої прямої з імпульсами  $p_1$  та  $p_2$ , відповідно. Знайти швидкість центру мас цієї системи. Використайте систему одиниць в якій  $c = 1$ .

**4.4.** Вільна частинка, що рухається з швидкістю  $v < c$ , розпадається на два фотони (які можуть вилітати під довільним кутом до напрямку руху частинки). Знайти мінімальний кут між напрямками розльоту фотонів.

**4.5.** При зіткненні частинки з масою спокою  $m$  та імпульсом  $p$  із нерухомою частинкою з масою  $m_1$  відбувається реакція, після якої залишаються частинки з сумою мас спокою  $\geq M$ . Знайдіть мінімальне значення кінетичної енергії частинки, що налітає. *Вказівка:* спочатку треба показати, що кінетична енергія системи в с.ц.м. є монотонною функцією  $p$ .

**4.6.** Електрон з імпульсом та фотон з частотою  $\omega$  рухаються вздовж прямої (в лабораторній системі); відбувається пружне зіткнення. Заданий кут  $\theta = \pi/2$  між напрямками імпульсів фотона та електрона після зіткнення. Знайти відношення частот фотона до і після зіткнення. Дослідити, як зміниться (збільшиться чи зменшиться) частота фотона? Розглянути випадки, коли а) електрон знаходився в спокої до зіткнення б) був ультра-релятивістським. Коли частота фотона не зміниться після зіткнення?

**4.7.** У загальній ситуації  $\pi^0$ -мезон розпадається на два  $\gamma$ -кванта; у власній системі мезона розподіл по кутах ізотропний. Пучок  $\pi^0$ -мезонів рухається зі швидкістю  $\mathbf{v}$  відносно лабораторії. Знайти (в лабораторній системі) відношення числа  $\gamma$ -квантів розпаду, що випромінюються у передню напівсферу відносно напрямку руху, до числа  $\gamma$ -квантів розпаду, що випромінюються у задню напівсферу.

**4.8.** 4-хвильовий вектор електромагнітної хвилі має вигляд  $k^\mu = \{\omega/c, \mathbf{k}\}$ , де  $\mathbf{k}$  - 3-хвильовий вектор. Використовуючи закон перетворення 4-векторів при переході від однієї системи відліку до іншої, знайдіть закон перетворення частоти  $\omega$  хвилі (ефект Доплера) і хвильового вектора  $\mathbf{k}$ .

**4.9.** Електричне та магнітне поля відносно системи  $K$  (декартові координати) визначаються векторами  $\mathbf{E} = a(1, 0, 0)$  та  $\mathbf{B} = a(1, 0, 2)$ . Відносно системи  $K'$  ці ж поля  $\mathbf{E}' = (E'_x, a, 0)$  та  $\mathbf{B}' = (a, B'_y, a)$  — невідомі. Система  $K''$  рухається відносно системи  $K'$  з швидкістю  $v$  ( $c = 1$ ) вздовж осі  $OX$ . Знайдіть поля  $\mathbf{E}'$  та  $\mathbf{B}'$  відносно  $K'$  та  $\mathbf{E}''$  та  $\mathbf{B}''$  відносно  $K''$ .

**4.10.** В системі  $K$   $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ . Яка швидкість системи  $K'$ , де залишиться лише одне з полів?

## 4.2. Електродинаміка в релятивістських позначеннях

**4.11.** Доведіть, що згортка довільного симетричного тензора з антисиметричним дорівнює 0.

**4.12.** Доведіть калібрувальну інваріантність тензора електромагнітного поля  $F^{\mu\nu}$  при перетвореннях 4-вектора потенціалу  $A_\mu \rightarrow A_{\mu i} + \partial_\mu \chi$ .

**4.13.** Показати, що з рівнянь Максвелла з джерелами (4.11)

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu,$$

випливає закон збереження для заряду  $\partial_\nu j^\nu = 0$ .

**4.14.** Показати, що з виразу тензора електромагнітного поля через потенціали (4.5)  $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$  випливають рівняння (4.12):

$$\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = 0.$$

**4.15.** Отримайте вираз для енергії і імпульсу електромагнітного поля через напруженість  $\mathbf{E}$  та індукцію  $\mathbf{B}$  виходячи з тензора енергії-імпульсу (4.13)

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( -F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right).$$

## 4.3. Рух заряджених частинок в електромагнітному полі

**4.16.** Релятивістська частинка з масою спокою  $m$  рухається в однорідних сталих магнітному  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  та електричному полі  $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ ,  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  і  $E = B$ . В момент  $t = 0$  частинка знаходилась у початку декартових координат та мала імпульс  $\mathbf{p} = (p_{0x}, p_{0y}, p_{0z})$ . Знайти залежність 4-швидкості  $u^\alpha$ , 4-прискорення  $a^\alpha$ , а також усіх чотирьох координат частинки і згортки  $u_\alpha a^\alpha$  (знайти явним обчисленням) від власного часу  $\tau$ .

**4.17.** Електричне та магнітне поля відносно системи  $K$  (декартові координати) визначаються векторами  $\mathbf{E} = a(0, 1, 0)$  та  $\mathbf{B} = a(1, 1, 0)$ . Спостерігач (система  $K'$ ) рухається з швидкістю  $v = 3c/5$  вздовж бісектриси кута  $XOY$ . Знайдіть електромагнітне поле в системі спостерігача  $K'$  і, використовуючи результат, знайдіть прямим обчисленням величину  $\mathbf{E}'^2 - \mathbf{B}'^2$  в цій системі.

**4.18.** У схрещених полях  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  рухається заряджена частинка. З якою швидкістю і в якому напрямку вона повинна рухатися, щоб її траєкторія залишалася прямолінійною, а швидкість постійною?

**4.19.** Визначте кут  $\theta$  розсіювання нерелятивістської частинки масою  $m$  з електричним зарядом  $q$ , що рухається в електричному полі нерухомого розсіювального центру, що має заряд  $Q$ . Швидкість частинки до розсіювання  $v_0$  і значення прицільного параметра  $b$  вважати відомими.

**4.20.** Знайти переріз розсіювання на малі кути нерелятивістських електронів, швидкість на нескінченності яких  $v_0$ , що пролітають з великим прицільним параметром  $\rho$  повз сферу радіуса  $R$ , якщо: а) сфера провідна і заземлена; б) сфера провідна і ізолювана.

**4.21.** Нерелятивістська частинка з питомим зарядом  $q/m$ , що рухається в присутності постійних і однорідних електромагнітних полів, заданих у вигляді  $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_y$  та  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ . В початковий момент частинка знаходиться в стані спокою у початку координат. Знайти закони руху частинки. Зобразити траєкторію частинки в площині  $xOy$ .

**4.22.** Розглянути задачу 4.21 випадку релятивістських рухів частинки. Знайти її траєкторію, як функцію власного часу для різних знаків інваріанту  $\mathbf{E}_0^2 - \mathbf{B}_0^2$ .

**4.23.** Розв'язати задачу 4.21 для випадку, якщо магнітне поле задане у вигляді  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$  електричне поле змінюється за законом  $\mathbf{E} = E_0 \cos \Omega t \mathbf{e}_y$ , де  $\Omega = \frac{qB_0}{mc}$  — циклотронна частота.

**4.24.** Знайдіть диференціальний переріз розсіювання заряджених частинок на кулонівському потенціалі. Перевірте, що повний переріз розсіювання нескінченний (розбігається за малих кутів).

#### 4.4. Випромінювання релятивістських заряджених частинок

**4.25.** (*Синхротронне випромінювання*) Знайти енергію випромінювання релятивістського електрона в однорідному магнітному полі за один оберт. Знайти повну потужність (в мегаватах) синхротронного випромінювання в прискорювачі з енергією 100 Гев. Довжина кола прискорювача 30 км, число прискорюваних частинок в кільці  $5 \cdot 10^{12}$ . Оцінити характерну довжину хвилі випромінювання.

## Частина II

# Електродинаміка суцільних середовищ

*Вважаю, що більш приземлені та матеріальні науки аж ніяк не можуть бути зневажені у порівнянні з піднесеним вивченням розуму і духу ...*

James Clerk Maxwell



# 5

## Система макроскопічних рівнянь Максвелла

---

### 5.1. Макроскопічні рівняння Максвелла

Макроскопічні рівняння Максвелла, або рівняння макроскопічної електродинаміки є результатом усереднення мікроскопічних рівнянь Максвелла.

Інтегральна форма макроскопічних рівнянь:

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \iiint_{\Omega} \rho dV, \quad (5.1)$$

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (5.2)$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (5.3)$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (5.4)$$

де  $\mathbf{E}$  – вектор напруженості електричного поля;

$\mathbf{B}$  – вектор індукції магнітного поля;

$\rho$  — густина вільних електричних зарядів (не включає зв'язані заряди);

$\mathbf{j}$  — густина вільного струму (не включає струми намагнічення чи струми, які виникають за рахунок змінної поляризації);

$\mathbf{D}$  – вектор індукції електричного поля, вводиться як:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad (5.5)$$

де  $\mathbf{P}$  — вектор поляризації, або густина дипольного моменту;

$\mathbf{H}$  – вектор напруженості магнітного поля, вводиться як:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}, \quad (5.6)$$

де  $\mathbf{M}$  — вектор намагнічення, або густина магнітного моменту.

Диференціальна форма макроскопічних рівнянь:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (5.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (5.10)$$

Зв'язок між об'ємною густиною зв'язаних  $\rho_{\text{зв'яз}}$  зарядів та вектором поляризації  $\mathbf{P}$  всередині діелектрика

$$\rho_{\text{зв'яз}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (5.11)$$

Поверхнева густина зв'язаних зарядів на межі розділу діелектриків:

$$\sigma_{\text{зв'яз}} = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \cdot \mathbf{n}, \quad (5.12)$$

де  $\mathbf{n}$  – нормаль до поверхні розділу діелектриків (напрявлена від 2-го до 1-го середовища).

Ці співвідношення не є універсальним, але вони виконуються за досить широких умов, зокрема, коли макроскопічні електромагнітні поля є значно меншими, ніж поля усередині атомів та молекул.

Зв'язок між струмами намагнічення  $\mathbf{j}_m$ :

$$\mathbf{j}_m = c \nabla \times \mathbf{M}. \quad (5.13)$$

Ця формула також не є універсальною, але вона справедлива для широкого кола задач за помірних магнітних полів.

В результаті намагнічення на поверхні магнетика утворюються ефективні струми з поверхневою густиною:

$$\mathbf{i}_m = -c [\mathbf{n} \times \mathbf{M}], \quad (5.14)$$

де  $\mathbf{n}$  – зовнішня нормаль до поверхні магнетика.

## 5.2. Співвідношення для лінійних ізотропних середовищ

Величини  $\mathbf{D}$  і  $\mathbf{H}$  залежать, інколи досить складним чином, від макроскопічних напруженості електричного поля  $\mathbf{E}$  та індукції магнітного поля  $\mathbf{B}$ . На цю залежність можуть впливати, прямо чи опосередковано, певні властивості чи характеристики середовища (густина, молекулярний склад, термодинамічні параметри), яке може бути однорідним чи неоднорідним, ізотропним чи анізотропним. Однак існує широке коло задач, де залежність  $\mathbf{D}$  і  $\mathbf{H}$  від  $\mathbf{E}$  і  $\mathbf{B}$  можна

вважати лінійною, і для її опису потрібно відносно невелике число параметрів середовища.

Так, вектор поляризації пропорційний напруженості електричного поля:

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}, \quad (5.15)$$

де коефіцієнт  $\alpha$  називають поляризованістю діелектрика.

Аналогічно, для магнітного поля вектор намагнічення пропорційний вектору напруженості магнітного поля:

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}, \quad (5.16)$$

де коефіцієнт  $\chi$  називають магнітною сприйнятливістю магнетика.

Використовуючи ці співвідношення і вводячи величини діелектричної проникності середовища

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha,$$

та магнітної проникності середовища

$$\mu = 1 + 4\pi\chi,$$

маємо співвідношення між векторами  $\mathbf{E}$  і  $\mathbf{D}$  та між  $\mathbf{B}$  і  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (5.17)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (5.18)$$

### 5.3. Умови на границі розділу двох середовищ

$$[\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)] = 0, \quad (5.19)$$

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = 4\pi\sigma_{\text{вільн}}, \quad (5.20)$$

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (5.21)$$

$$[\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}_{\text{вільн}}, \quad (5.22)$$

де  $\mathbf{n}$  – нормаль до поверхні розділу діелектриків (напрявлена від 2-го до 1-го середовища),

$\sigma_{\text{вільн}}$  – поверхнева густина вільних зарядів на границі розділу,

$\mathbf{i}_{\text{вільн}}$  – поверхнева густина вільного струму (наприклад, струму провідності в металах).

# 6

## Діелектрики та магнетики в статичних полях

### Теоретичні відомості Основна задача електростатики

За наявності діелектриків, основна задача електростатики зводиться до розв'язання узагальненого рівняння Пуассона:

$$\nabla \cdot [\varepsilon(\mathbf{r}) \nabla \phi] = -4\pi\rho(\mathbf{r}). \quad (6.1)$$

з певними граничними умовами.

**Формулювання задачі за наявності двох середовищ.**

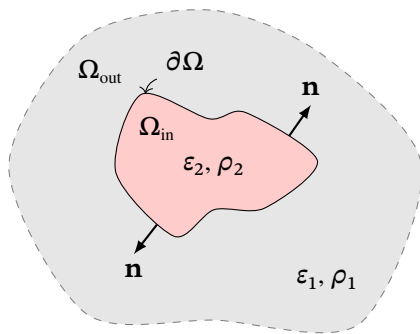


Рис. 6.1. До пояснення основної задачі електростатики

Нехай задана нескінченна область простору  $\Omega_{\text{out}}$  з діелектричною проникністю  $\varepsilon_1(\mathbf{r})$ , яка містить розподілений заряд густиною  $\rho_1(\mathbf{r})$ , що оточує внутрішню область  $\Omega_{\text{in}}$  з діелектричною проникністю  $\varepsilon_2(\mathbf{r})$  і розподілом заряду  $\rho_2(\mathbf{r})$  гладкою поверхнею  $\partial\Omega$  (функції  $\varepsilon_i(\mathbf{r})$  та  $\rho_i(\mathbf{r})$  (де  $i = 1, 2$ ) — гладкі) (див. рис 6.1). Крім того, на межі розділу є заряд, розподілений з густиною  $\sigma(\mathbf{r})$ , де  $\mathbf{r} \in \partial\Omega$ . Нехай двічі диференційовні функції  $\phi_1(\mathbf{r})$  та  $\phi_2(\mathbf{r})$  є розв'язками рівнянь (6.1):

$$\nabla \cdot [\varepsilon_i(\mathbf{r}) \nabla \phi_i] = -4\pi\rho_i(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2. \quad (6.2)$$

На межі областей  $\partial\Omega$  накладемо умови на потенціали  $\phi_1(\mathbf{r})$ ,  $\phi_2(\mathbf{r})$ :

$$\phi_1(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \partial\Omega} = \phi_2(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \partial\Omega}, \quad (6.3)$$

$$(\varepsilon_2 \mathbf{n} \cdot \nabla \phi_2)|_{\mathbf{r} \in \partial\Omega} - (\varepsilon_1 \mathbf{n} \cdot \nabla \phi_1)|_{\mathbf{r} \in \partial\Omega} = 4\pi\sigma|_{\mathbf{r} \in \partial\Omega}, \quad (6.4)$$

де  $\mathbf{n}$  — нормаль до поверхні  $\partial\Omega$  з середовища  $\Omega_{\text{in}}$  в середовище  $\Omega_{\text{out}}$ . В області  $\Omega_{\text{out}}$  накладемо умову:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \{|\nabla \phi_2(\mathbf{r})| r^2\} < \infty, \quad r = |\mathbf{r}|, \quad (6.5)$$

звідки випливає також, що  $\lim_{r \rightarrow \infty} \{|\phi_2(\mathbf{r})| r\} < \infty$ .

За умови виконання наведених умов, розв'язок основної задачі електростатики визначається однозначно. Узагальнення на більшу кількість областей не призводить до складнощів. Якщо область  $\Omega_{\text{out}}$  є обмеженою, то на її границі можна задати значення потенціалу (задача Діріхле). Якщо у системі є провідники, на їх поверхні додатково накладають умови аналогічні мікроскопічному випадку. За цих умов потенціали визначаються однозначно.

**6.1.** Діелектрична куля радіуса  $R$  з проникністю  $\varepsilon = \text{const} > 1$  заряджена вільним зарядом  $q$ , який розподілений однорідно по об'єму. Зовні — вакуум. Знайти розподіл потенціалу, електричної індукції та напруженості за допомогою інтегральної форми рівнянь Максвелла та нарисувати (схематично) графіки залежності цих величин від радіальної змінної.

**6.2.** У середині нескінченного шару  $-a < x < a$  ( $a > 0$ ) об'ємна густина (вільного) заряду  $\rho = \text{const}$ , діелектрична проникність  $\varepsilon = \text{const} > 1$  (декартові координати). Зовні — вакуум. Знайти (макроскопічну) напруженість та індукцію електричного поля, які створені зарядами шару.

**6.3.** В однорідному середовищі діелектрична проникність  $\varepsilon$ . Знайти зв'язок між густиною вільних та зв'язаних зарядів.

**6.4.** В однорідному статичному середовищі магнітна проникність  $\mu$ . Знайти зв'язок між густиною вільних струмів та струмів намагнічення.

**6.5.** На плоскій поверхні, що розділяє середовища 1 та 2, задана поверхнева густина вільного заряду  $\sigma$ . У середовищах діелектричні проникності, відповідно,  $\varepsilon_1 > 1$  та  $\varepsilon_2 > 1$ . Нормаль  $\mathbf{n}$  до поверхні спрямована з середовища 2 в 1. У середовищі 1 задана напруженість електричного поля  $\mathbf{E}_1$ . Знайти напруженість електричного поля в середовищі 2 у векторному вигляді.

**6.6.** Точковий заряд  $q$  розміщений на плоскій границі розділу двох однорідних діелектриків (границю розділу вважати нескінченною) з проникностями  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$ . Знайти напруженість і індукцію електричного поля, а також його потенціал в усьому просторі.

**6.7.** Центр провідної кулі радіуса  $R$  з зарядом  $q$  розташований на плоскій межі розділу двох нескінченних однорідних діелектриків з проникностями  $\varepsilon_1$  та  $\varepsilon_2$ . Знайти потенціал та густину поверхневого заряду на кулі.

**6.8.** У середині нескінченної провідної труби прямокутного перерізу  $-a < x < a$ ;  $-b < y < b$ ;  $-\infty < z < \infty$ , усі бічні сторони якої заземлені, у площині  $z = 0$ , вставлена тонка перетинка з поверхневою густиною вільного заряду  $\sigma = \sigma_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$ . Координати декартові. Діелектрична проникність  $\varepsilon(z < 0) = \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon(z > 0) = \varepsilon_2$ . Знайти розподіл потенціалу  $\phi(x, y, z)$  всередині труби.

**6.9.** На площині  $z = 0$  (декартові координати  $x, y, z$ ) поверхнева густина вільного заряду

а)  $\sigma(x, y) = \sigma_0 \sin(\alpha x) \cos(\beta y)$ ;

б)  $\sigma(x, y) = \sigma_0 \sin^2(x/L) \cos(y/L)$ .

Діелектрична проникність  $\epsilon(z < 0) = \epsilon_1$ ,  $\epsilon(z > 0) = \epsilon_2$ . Знайти потенціал в усьому просторі.

**6.10.** Знайти силу, що діє на точковий сферично симетричний заряд  $q$  з боку незарядженої діелектричної сфери радіусу  $R$  з проникністю  $\epsilon = \text{const}$ . Відстань від заряду до центру сфери  $D > R$ .

*Вказівка:* використати розклад потенціалу за поліномами Лежандра.

**6.11.** Усередині однорідної діелектричної кулі радіусу  $R$  з проникністю  $\epsilon = \text{const}$  об'ємна густина заряду в сферичних координатах  $\rho = \rho_0(r/R)^n \cos \theta$  ( $r < R$ ). Куля оточена провідною сферою ( $r = R$ ), яка заземлена. Знайти потенціал всередині кулі та густину зарядів, індукованих на сфері.

**6.12.** Провідну незаряджену заземлену кулю радіуса  $R$  вносять у зовнішнє однорідне електричне поле  $\mathbf{E}_0$ . Знайти індукований дипольний момент кулі та розподіл індукованих зарядів на її поверхні.

**6.13.** Провідну заряджену ізольовану кулю (заряд  $q$ ) радіуса  $R$  вносять у зовнішнє однорідне електричне поле  $\mathbf{E}_0$ . Знайти індукований дипольний момент кулі та розподіл індукованих зарядів на її поверхні.

**6.14.** Діелектричну кулю радіуса  $R$  (діелектрична проникність кулі  $\epsilon^{(i)}$ ) вносять у зовнішнє однорідне електричне поле з напруженістю  $\mathbf{E}_0$ . Діелектрична проникність середовища навколо кулі дорівнює  $\epsilon^{(e)}$ . Знайти напруженість і потенціал поля в середині і зовні кулі. Знайти вектор поляризації кулі і густину зв'язаних зарядів на його поверхні.

**6.15.** Електричне поле утворене розподілом вільних зарядів зовні кулі з діелектричною проникністю  $\epsilon$  радіуса  $R$ , всередині зарядів немає. Знайти потенціал  $\phi(r, \theta, \varphi)$  (в сферичних координатах) при  $r < R$ , якщо на поверхні  $\phi(R, \theta, \varphi) = \phi_0 \cos \theta$ , а також густину зв'язаних зарядів на поверхні.

**6.16.** Електричне поле утворене розподілом зарядів усередині кулі з діелектричною проникністю  $\epsilon$  радіуса  $R$ . Зовні кулі — вакуум, зарядів немає.

Знайти потенціал  $\phi(r, \theta, \varphi)$  (в сферичних координатах  $r, \theta, \varphi$ ) при  $r > R$ , якщо на поверхні  $\phi(R, \theta, \varphi) = \phi_0 \cos \theta$ .

**6.17.** Електричне поле утворене розподілом зарядів на поверхні кулі радіуса  $R$ , всередині і зовні зарядів немає. Усередині кулі діелектрична проникність  $\epsilon$ , зовні — вакуум. На поверхні електричний потенціал  $\phi(R, \theta, \varphi) = \phi_0 \cos \theta$ . Знайти потенціал  $\phi(r, \theta, \varphi)$  зовні та усередині кулі (в сферичних координатах) та густину вільних зарядів на поверхні кулі.

**6.18.** Електричне поле утворене розподілом зарядів на поверхні циліндру радіуса  $R$ , інших зарядів немає. Усередині діелектрична проникність  $\epsilon$ , зовні — вакуум. На поверхні  $\phi(R, z, \varphi) = \phi_0 \cos(m\varphi)$ . Знайти потенціал  $\phi(r, \theta, \varphi)$  (зовні та усередині циліндру, в циліндричних координатах) та густину вільних зарядів на поверхні циліндру (координати  $r, z, \varphi$  — циліндричні).

**6.19.** Електричне поле утворене розподілом зарядів

$$\sigma(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n s_{mn} Y_{nm}(\theta, \varphi)$$

(де припускаємо, що ряд швидко збігається) на поверхні кулі радіуса  $R$ , інших зарядів немає. Усередині кулі діелектрична проникність  $\epsilon$ , зовні — вакуум. Знайти потенціал  $\phi(r, \theta, \varphi)$  (зовні та усередині кулі, в сферичних координатах  $r, \theta, \varphi$ ).

**6.20.** Електричне поле утворене розподілом вільних зарядів на поверхні циліндру радіуса  $R$  з густиною  $\sigma(z, \varphi) = \sigma_0 \sin(m\varphi)$ , інших зарядів немає. Усередині циліндру діелектрична проникність  $\epsilon$ , зовні — вакуум. Знайти потенціал  $\phi(r, z, \varphi)$  (зовні та усередині циліндру), в циліндричних координатах та густину вільних зарядів на поверхні циліндру.

**6.21.** Електричне поле утворене розподілом зарядів  $\sigma(\theta, \varphi) = \sigma_0 \cos(\theta) + \sigma_1$  на поверхні кулі радіуса  $R$ , інших зарядів немає. Усередині діелектрична проникність  $\epsilon$ , зовні — вакуум. Знайти потенціал  $\phi(r, \theta, \varphi)$  в усьому просторі (в сферичних координатах).

**6.22.** На пласкій поверхні, що розділяє середовища 1 та 2, задана поверхнева густина вільного струму  $\mathbf{i}$ . У середовищах магнітні проникності, відповідно,  $\mu_1 > 1$  та  $\mu_2 > 1$ . Нормаль  $\mathbf{n}$  до поверхні спрямована з середовища

2 в 1. У середовищі 1 задана напруженість магнітного поля  $\mathbf{H}_1$ . Знайти напруженість магнітного поля в середовищі 2 у векторному вигляді.

**6.23.** Нескінченний прямолінійний циліндричний провідник радіуса  $R$  з магнітною проникністю  $\mu_1$  знаходиться в зовнішньому неоднорідному магнітному полі. Віссю провідника є вісь аплікату  $Z$ . Напруженість зовнішнього поля  $H_x = H_0 \frac{x}{R}$ ,  $H_y = -H_0 \frac{y}{R}$ ,  $H_z = 0$  (координати декартові). Магнітна проникність середовища зовні провідника  $\mu_2$ . Знайти напруженість поля усередині та зовні провідника, та густину поверхневого струму намагнічення на поверхні провідника.

**6.24.** В нескінченному прямому циліндричному провідникові радіуса  $R$  тече вільний струм з густиною  $a/r$ , де  $r$  — відстань від осі провідника,  $a = \text{const}$ , напрямок — по осі провідника. Усередині магнітна проникність  $\mu = \text{const}$ , зовні — вакуум. Знайти векторний потенціал струму  $\mathbf{A}(r)$  з точністю до константи всередині та зовні провідника. Калібрувальна умова  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ .

**6.25.** Струм  $\mathbf{j} = j_0 \mathbf{e}_z$  протікає вздовж нескінченного циліндру радіуса  $R$ . Зовні струмів немає. Напрямок осі циліндра заданий одиничним вектором  $\mathbf{e}_z$ . Знайти (з точністю до адитивної константи) вектор-потенціал магнітного поля  $\mathbf{A}$ ) в усьому просторі, калібрувальна умова  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Результат подати у векторному вигляді через вектори  $\mathbf{r}$  та  $\mathbf{e}_z$  ( $\mathbf{r} \perp \mathbf{e}_z$ ). Усередині магнітна проникність  $\mu = \text{const}$ , зовні — вакуум.

**6.26.** Точковий заряд  $q$  знаходиться в середовищі з діелектричною проникністю  $\epsilon_1$  на відстані  $d$  від границі розділу рідких діелектриків. Діелектрична проникність другого діелектрика дорівнює  $\epsilon_2$ . Чому дорівнює сила, що діє на заряд? Від чого залежить напрямок цієї сили?

**6.27.** У вакуумі, на відстані  $d$  від напівпростору, заповненого однорідним діелектриком з проникністю  $\epsilon$ , закріплений центр точкового жорсткого диполя з моментом  $\mathbf{p}$ . Паралельно межі півпростору прикладене однорідне зовнішнє електричне поле  $\mathbf{E}$  (рис. 6.2). Диполь може вільно обертатися в площині, паралельній до напрямку  $\mathbf{E}$  і ортогонально до межі діелектрика. Знайти значення кута  $\alpha$  між напрямком векторів  $\mathbf{E}$  і  $\mathbf{p}$ , яке відповідає стійкому положенню рівноваги.

**6.28.** Незаряджена металева сфера маси  $m$  плаває в діелектричній рідині з проникністю  $\epsilon$ , занурившись в неї на одну чверть свого об'єму. До



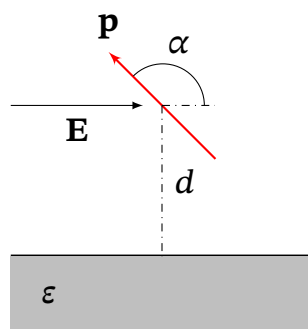


Рис. 6.2. До задачі 6.27

якого потенціалу слід зарядити сферу, щоб вона плавала зануреною в неї наполовину?

**6.29.** Однорідний ізотропний діелектрик з проникністю  $\epsilon$  заповнює весь нижній півпростір. У вакуумі на відстані  $d$  від його поверхні знаходиться точковий заряд  $q$ . Визначити поверхневу густину поляризаційних (зв'язаних) зарядів в довільній точці на межі розділу, а також повний зв'язаний заряд на поверхні діелектрика. Який результат вийде, при  $\epsilon \rightarrow \infty$ , який це має фізичний зміст?

**6.30.** Два точкових заряди  $q_1$  та  $q_2$  знаходяться на однакових відстанях  $d$  від границі розділу двох рідких діелектриків з проникностями  $\epsilon_1$  та  $\epsilon_2$ , відповідно. Знайдіть сили, що діють на кожен з зарядів. Проаналізуйте знак сил, що діють на заряди.

# 7

## Квазістаціонарні поля і струми

### Теоретичні відомості

Квазістаціонарними називають поля, які виникають за умов, коли можна знехтувати струмами зміщення. Нижче квазістаціонарні поля буде розглянуто на прикладі розрахунків скін ефекту.

Умови квазістаціонарності в провідниках виконуються, коли провідність  $\lambda \gg \omega$ , де  $\omega$  — характерна частота змін поля. Зовні провідників умова квазістаціонарності виконується, коли просторовий масштаб системи, що розглядається, значно менший за характерну довжину хвилі випромінювання, пов'язаною з процесом.

Скін-ефект — явище проникнення електромагнітного поля в провідник на певну глибину, яка називається скін-шар. Скін-ефект призводить до протікання струму в провіднику в основному в області скін-шару, і, як наслідок, збільшення опору провідника. При скін-ефекті змінний струм високої частоти протікає переважно лише в поверхневому шарі.

Усередині однорідного провідника з рівнянь Максвелла для квазістаціонарного поля впливають рівняння:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{H} &= \frac{4\pi\mu\lambda}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \Delta \mathbf{E} &= \frac{4\pi\mu\lambda}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},\end{aligned}\tag{7.1}$$

де  $\lambda$  — провідність,  $\mu$  — магнітна проникність.

Глибина проникнення електричного поля у провідник (товщина скін-шару) визначається формулою:

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\lambda\omega}}.\tag{7.2}$$

В задачах цього підрозділу вважати  $\varepsilon = \mu = 1$ .

### 7.1. Розтікання зарядів в провідниках. Струми Фуко

**7.1.** Електричне поле  $\mathbf{E} = f(x)\mathbf{e}_z e^{-i\omega t}$  паралельне площині  $x = 0$ , що розділяє метал та вакуум. Провідність металу  $\lambda$ . На межі розділу  $f(0) = E_0$ , усередині металу  $f(\infty) = 0$ . Знайти розподіл густини струму.

**7.2.** У початковий момент електрони з концентрацією  $n_0$  знаходяться в спокої і рівномірно розподілені усередині пласкої області товщиною  $2a$ . При  $t > 0$  вони починають рухатися під дією власного (усередненого) електричного поля. Знайти закон спадання густини заряду в центрі області  $\rho(0, t)$ .

**7.3.** (Максвеллівська релаксація) Пласка нескінченна однорідна плита має діелектричну проникність  $\epsilon_1$  і провідність  $\lambda_1$  і розташована між площинами  $x = 0$  і  $x = a$  (декартові координати). Навколо плити ідеальний ізолятор. У початковий момент  $t = 0$  вільний заряд з густиною  $\rho_1$  рівномірно розподілений всередині плити, на поверхні та зовні плити вільних зарядів немає. При  $t > 0$  починається квазістаціонарне перетікання зарядів, причому утворюється вільний поверхневий заряд густиною  $\sigma(t)$  на границях плити. Виконується закон Ома  $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$ . Знайти  $\sigma(t)$  а також розподіл густини струму  $\mathbf{j}(x, t)$  всередині плити.

**7.4.** Нескінченний однорідний циліндр радіуса  $R$  має діелектричну проникність  $\epsilon_1$  і провідність  $\lambda_1$ . Навколо — ідеальний ізолятор. У початковий момент  $t = 0$  вільний заряд з густиною  $\rho_1$  рівномірно розподілений всередині циліндра, на поверхні та зовні вільних зарядів немає. При  $t > 0$  починається квазістаціонарне перетікання зарядів, причому утворюється вільний заряд з поверхневою густиною  $\sigma(t)$  на поверхні циліндра. Виконується закон Ома  $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$ . Знайти  $\sigma(t)$  та розподіл густини струму  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  всередині циліндра.

**7.5.** Однорідна куля радіуса  $R$  має діелектричну проникність  $\epsilon_1$  і провідність  $\lambda_1$ . Навколо — ідеальний ізолятор. У початковий момент  $t = 0$  вільний заряд з густиною  $\rho_1$  рівномірно розподілений всередині кулі, на поверхні та зовні вільних зарядів немає. При  $t > 0$  починається квазістаціонарне перетікання зарядів, причому утворюється вільний заряд з поверхневою густиною  $\sigma(t)$  на поверхні кулі. Виконується закон Ома  $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$ . Знайти  $\sigma(t)$  та розподіл густини струму  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  всередині кулі.

**7.6.** Метал знаходиться в області  $x \in [-a, a]$ , його провідність  $\lambda$ . Електричне поле має вид  $\mathbf{E} = f(x)\mathbf{e}_z \exp(-i\omega t)$ . На границях  $f(-a) = f(a) = E_0$ . Знайти розподіл густини струму.

**7.7.** Вздовж нескінченного циліндричного провідника радіуса  $a$ , матеріал якого має провідність  $\lambda$  і магнітну проникність  $\mu$ , тече змінний струм  $I = I_0 e^{-i\omega t}$ . Зовні провідника — вакуум. Знайдіть розподіл густини струму та її асимптотику за високих частот.

**7.8.** Обчисліть активний опір на одиницю довжини циліндричного провідника радіуса  $a$  провідністю  $\lambda$ . Отримайте значення цієї величини за малих та за великих частот.

**7.9.** Для умов задачі 7.7 знайдіть розподіл магнітного поля всередині провідника.

**7.10.** Обчисліть внутрішню індуктивність на одиницю довжини циліндричного провідника радіуса  $a$  провідністю  $\lambda$ . Отримайте значення цієї величини за малих та за великих частот.

**7.11.** Всередині нескінченного циліндричного провідника радіуса  $a$  діє електричне поле, паралельне осі  $\mathbf{E} = \mathbf{e}_z f(r) e^{-i\omega t}$ , невідома функція  $f(r)$  залежить тільки від відстані до осі циліндра  $r$ . Всередині провідника провідність  $\lambda$ , магнітна проникність  $\mu = \text{const}$ . Знайдіть розподіл густини струму та її асимптотику за високих частот. Окремо оцініть відношення густини струму на осі провідника до значення при  $r = a$ , а також темп спадання біля краю.

**7.12.** Нескінченний металевий циліндр, матеріал якого має провідність  $\lambda$  і магнітну проникність  $\mu$ , розташований так, що його вісь збігається з віссю нескінченного соленоїда колового перерізу, по якому тече змінний струм  $I = I_0 e^{-i\omega t}$ . Між циліндром і намоткою соленоїда, а також зовні соленоїда — вакуум. Знайдіть напруженість магнітного та індукційного електричного поля у всьому просторі, а також розподіл густини струму в циліндрі. Радіус циліндра дорівнює  $a$ , радіус соленоїда дорівнює  $b$  ( $a < b \ll c/\omega$ ), густина обмотки соленоїда  $n$ .

**7.13.** Металевий циліндр радіусу  $a$  внесли у зовнішнє однорідне магнітне поле  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t}$ , яке паралельне до його осі. Враховуючи результати задачі 7.12, знайдіть густину струму всередині циліндру. Система знаходиться у вакуумі. Розгляньте окремо випадок великих та малих частот.

**7.14.** Яка кількість теплоти виділяється за період на одиницю довжини циліндра, розглянутого в задачі 7.12. Дослідіть випадок малих та високих частот.

## 7.2. Магнітні поля в надпровідниках

### Теоретичні відомості

Надпровідність — явище протікання електричного струму у твердому тілі без втрат, тобто при строго нульовому електричному опорі тіла. Хоча надпровідність суттєво квантове явище, його феноменологічна теорія будується на основі класичних уявлень (теорія Лондонів).

Згідно цієї теорії повні густини заряду та струму в надпровіднику складаються з нормальної та надпровідної частин:

$$\rho = \rho_{\text{над}} + \rho_{\text{норм}}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{над}} + \mathbf{j}_{\text{норм}},$$

де нормальна компонента густини струму  $\mathbf{j}_{\text{норм}} = \sigma \mathbf{E}$  підпорядковується закону Ома.

Електродинаміка надпровідників згідно теорії Лондонів описується матеріальними рівняннями вигляду:

$$c \nabla \times (\Lambda \mathbf{j}_{\text{над}}) + \mathbf{H} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{j}_{\text{над}}}{\partial t} - \frac{1}{\Lambda} \mathbf{E} = 0, \quad (7.3)$$

де  $\Lambda = \frac{m}{n_{\text{над}} e^2}$  — параметр Лондонів,  $n_{\text{над}}$  — концентрація електронів, які забезпечують надпровідність.

Надпровідність характеризується абсолютним діамagnetизмом. У магнітному полі в надпровідному матеріалі виникають такі струми, магнітне поле яких компенсує зовнішнє магнітне поле, тобто магнітне поле виштовхується із товщі надпровідника, воно проникає в провідник лише на невелику глибину, яка визначається за формулою:

$$\delta = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{4\pi}}. \quad (7.4)$$

**7.15.** Надпровідник заповнює півпростір  $x \geq 0$ , при  $x < 0$  — знаходиться вакуум. У вакуумі існує однорідне магнітне поле  $\mathbf{H}$  паралельне осі  $OY$ . Знайдіть розподіл магнітного поля і струмів на межі надпровідника в статичному випадку.

**7.16.** Надпровідна куля радіусу  $R$  знаходиться в зовнішньому однорідному магнітному полі  $H_0$ . Знайдіть розподіл струмів і магнітне поле у всьому просторі.

**7.17.** Нескінченно довгий круглий циліндр радіуса  $R$  з надпровідника знаходиться в зовнішньому магнітному полі, яке напрямлене вздовж його осі симетрії. Знайдіть розподіл магнітного поля по об'єму циліндра та середній магнітний момент одиниці об'єму.

**7.18.** В центр надпровідного кільця (без струму) індуктивністю  $L$  і радіусом  $R$  внесено магнітний диполь з моментом  $m$ , який напрямлений вздовж осі кільця. Який струм установиться в кільці?

**7.19.** Провідне кільце з індуктивністю  $L$  знаходиться в нормальному стані в зовнішньому магнітному полі (магнітний потік через контур кільця дорівнює  $\Phi_0$ ). Потім температура знижується і кільце переходить в надпровідний стан. Який струм буде текти по кільцю, якщо вимкнути зовнішнє магнітне поле?

**7.20.** У постійному однорідному магнітному полі з індукцією  $B$  знаходиться кругле жорстке надпровідникове кільце радіусом  $R$  малого перерізу. Коефіцієнт самоіндукції кільця  $L$ . У початковий момент площа кільця паралельна напрямку магнітного поля, а струм в кільці відсутній. Визначити силу струму в кільці відразу після того, як воно було повернуто так, що площа кільця стала перпендикулярна до ліній магнітного поля. Знайти витрачену роботу.

**7.21.** На якій висоті постійний магніт з магнітним моментом  $p_m$  і масою  $m$  буде левітувати в положенні над плоскою горизонтальною поверхнею надпровідника? Магніт вважати точковим диполем. магнітний момент перпендикулярний площині.

**7.22.** Невелика надпровідна кулька радіусом  $r$  знаходиться на осі на відстані  $z$  від площини кільця радіусом  $R$ , по якому тече струм  $I$ ;  $\delta \ll r$ . Знайдіть силу взаємодії між кулькою та кільцем.

**7.23.** Знайти силу, що діє на одиницю поверхні надпровідника, розглянутого в задачі 7.15.

## 8.1. Поширення електромагнітних хвиль в середовищі

## Теоретичні відомості

Електромагнітні хвилі в вакуумі — це коливання напруженостей електричного і магнітного полів, які можуть відбуватися за відсутності джерел випромінювання. У речовині ці коливання супроводжуються коливаннями заряджених частинок — електронів та іонів речовини. Тому коливальні процеси стають більш різноманітними. Зокрема, в загальному випадку в середовищах електромагнітні хвилі непоперечні — вектори поля можуть мати як поперечні, так і поздовжні складові відносно напрямку поширення.

У випадку однорідного середовища без вільних зарядів та вільних струмів, за умови, що в розглядуваному діапазоні частот діелектричну та магнітну проникності можна вважати незмінними, рівняння Максвелла зводяться до рівнянь:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \mathbf{H} - \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (8.1)$$

**Поляризація ізотропного середовища в змінних електромагнітних полях**

За наявності дисперсії, у випадку змінних полів, електрична індукція в момент часу  $t$  залежить від значень поля у попередні моменти часу:

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t f(t-t') \mathbf{E}(t') dt', \quad (8.2)$$

де  $f(t-t')$  — функція, що визначається властивостями середовища. В цьому випадку пропорційність між індукціями та напруженостями зберігається лише для Фур'є-компонент цих векторів:

$$\mathbf{D}(\omega) = \hat{\epsilon}(\omega) \mathbf{E}(\omega), \quad \mathbf{B}(\omega) = \hat{\mu}(\omega) \mathbf{H}(\omega), \quad (8.3)$$

а проникності  $\hat{\epsilon}(\omega)$ ,  $\hat{\mu}(\omega)$  в ізотропному середовищі є комплексними співмножниками, що залежать від частоти.

$$\hat{\epsilon} = \epsilon' + i\epsilon'', \quad \hat{\mu} = \mu' + i\mu''. \quad (8.4)$$

Уявні частини проникностей  $\epsilon''$  та  $\mu''$  визначають дисипацію електромагнітної енергії в середовищі.

Важливо, що у випадку монохроматичних полів (тобто, які залежать від часу гармонічно) зв'язок між амплітудами полів матиме такий самий вигляд, як в (8.3). Тому при

визначенні, наприклад, діелектричної проникності в простих моделях, як правило, цілком достатньо розглянути відгук середовища на монохроматичне електричне поле  $\mathbf{E} \sim e^{-i\omega t}$ .

Для визначення конкретного вигляду залежностей  $\hat{\epsilon}(\omega)$  та  $\hat{\mu}(\omega)$  необхідно мати уявлення про будову речовини. Так, згідно класичної механіки і моделі атома як осцилятора, на якого діє пружна сила  $\mathbf{F} = -m\omega_0^2 \mathbf{r}$  та «сила в'язкого тертя»  $\mathbf{F}_{\text{тер}} = -m\gamma \dot{\mathbf{r}}$ , діелектрична проникність речовини має вигляд:

$$\hat{\epsilon}(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}, \quad (8.5)$$

де  $\omega_p = \frac{4\pi e^2 N}{m}$ ,  $\omega_0$  — власна частота коливання атомного осцилятора,  $\gamma$  — коефіцієнт згасання,  $N$  — число атомів в одиниці об'єму,  $m$  та  $e$  — заряд та маса електрона, відповідно.

Між дійсною та уявною частиною діелектричної проникності  $\hat{\epsilon}(\omega)$  існує зв'язок, який дається співвідношенням Крамерса-Кроніга:

$$\epsilon'(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad \epsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon'(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (8.6)$$

### Поляризація анізотропних речовин змінних електромагнітних полях

У анізотропних середовищах електричні та магнітні властивості залежать від напрямків. Електрична і магнітна проникності таких середовищ є тензорами (матричними операторами). Оптична анізотропія може бути наслідком кристалічної структури тіла, виникати за наявності зовнішнього магнітного поля, механічних впливів тощо. У негіротропному прозорому (тобто за відсутності поглинання) середовищі тензори діелектричної та магнітної проникностей симетричні:

$$\epsilon_{ik}(\omega) = \epsilon_{ki}(\omega), \quad \mu_{ik}(\omega) = \mu_{ki}(\omega). \quad (8.7)$$

У більш загальному випадку, коли можливі ефекти гіротропії (див. нижче), але середовище є прозорим, вони є ермітовими:

$$\epsilon_{ik}(\omega) = \epsilon_{ki}^*(\omega), \quad \mu_{ik}(\omega) = \mu_{ki}^*(\omega). \quad (8.8)$$

У цьому випадку уявна частина кожного з тензорів антисиметрична щодо перестановки індексів  $\epsilon''_{ik} = -\epsilon''_{ki}$ ,  $\mu''_{ik} = -\mu''_{ki}$  і їх можна замінити дуальними векторами,  $\mathbf{g}_e$  і  $\mathbf{g}_m$ , які називаються векторами електричної та магнітної гірації, відповідно. Зв'язок між напруженостями полів та індукціями можна записати у вигляді:

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon}' \mathbf{E} + i [\mathbf{E} \times \mathbf{g}_e] \quad (8.9)$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mu}' \mathbf{H} + i [\mathbf{H} \times \mathbf{g}_m], \quad (8.10)$$

де  $\hat{\epsilon}' \mathbf{E}$  — компонентами  $\epsilon'_{ik} E_k$ . Тензори  $\epsilon'_{ik}$  та  $\mu'_{ik}$  дійсні і симетричні. Середовища, в яких вектори полів пов'язані такими рівняннями, називають *гіротропними*.

У гіротропних середовищах в заданому напрямку можуть поширюватися з різними швидкостями дві плоскі хвилі однієї частоти, які мають колову або еліптичну поляризацію з протилежними напрямками обертання.

**8.1.** Дослідити електромагнітні монохроматичні хвилі  $\sim e^{i(kx - \omega t)}$ , в необмеженому середовищі, що має провідність  $\lambda$ , діелектричну і магнітну



проникності  $\varepsilon = \text{const}$  та  $\mu = \text{const}$ .

**8.2.** Дослідити електромагнітні монохроматичні хвилі  $\sim e^{i(kx-\omega t)}$ , що поширюються в напрямі осі  $OX$  між двома надпровідними площинами  $z = 0$  та  $z = d$ ,  $\varepsilon = \text{const}$  та  $\mu = \text{const}$ . Знайти дисперсійні рівняння, перевірити граничні умови.

**8.3.** Дослідити електромагнітні монохроматичні хвилі  $\sim e^{i(kx-\omega t)}$ , що поширюються в напрямі осі  $OX$  в ідеальному нескінченному хвилеводі,  $\varepsilon = \text{const}$  та  $\mu = \text{const}$ . Переріз хвилеводу — квадрат з стороною  $a$ . Знайти дисперсійні рівняння, обчислити потік енергії.

**8.4.** Для деякої речовини функцію  $f(t)$  (рівняння (8.2)) можна вибрати у вигляді  $f(t) = f_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ , де  $f_0$  та  $\tau$  — сталі. Знайти діелектричну проникність такої речовини у просторі частот.

**8.5.** Напруженість електричного поля має вид  $E = E_0 \delta(t)$ . Діелектрична сприйнятливість (в усій комплексній площині частот)

$$\alpha(\omega) = \frac{\alpha_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}.$$

Знайти вектор поляризації  $P(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega) \tilde{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$  для усіх дійсних  $t$  (тільда ~ означає перетворення Фур'є) та проаналізувати модуль  $|P(t)|$  у двох випадках:

- а)  $\omega_0 > \gamma > 0$ ,
- б)  $\omega_0 = \gamma$ .

**8.6.** Хвиля падає з вакууму на грань одновісного (негіротропного) кристалу ( $z = 0$ ), яка перпендикулярна оптичній осі. У власній системі кристалу  $\hat{\varepsilon} = \text{diag}\{\varepsilon_{\perp}, \varepsilon_{\perp}, \varepsilon_{\parallel}\}$  не залежить від частоти хвилі. Кут падіння  $i$ . Знайти напрям поширення променя у кристалі (тангенс кута нахилу групової швидкості до оптичної осі).

**8.7.** Монохроматична плоска хвиля поширюється у гіротропному середовищі вздовж вектора гірації  $\mathbf{g} = (0, 0, g)$ . Зв'язок індукції з напруженістю  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + i[\mathbf{E} \times \mathbf{g}]$ . При  $z = 0$  хвиля лінійно поляризована  $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_x e^{-i\omega t}$ . Знайти кут повороту площини поляризації при проходженні відстані  $L$ .

**8.8.** Знайти діелектричну сприйнятливість атома  $\hat{\alpha} = \|\alpha_{ik}\|$  в полі плоскої монохроматичної хвилі за наявності слабкого зовнішнього постійного магнітного поля  $\mathbf{H}_0$ . Виходити з моделі пружно зв'язаного електрона з резонансною частотою  $\omega_0$ ; застосувати метод збурень за умови, що частота зовнішнього поля далека від резонансної. Дією магнітного поля плоскої хвилі і реакцією випромінювання знехтувати.

**8.9.** Тензор діелектричної проникності гіротропного середовища, що межує з вакуумом, має вид (в декартовій системі координат, оптична вісь вздовж осі  $OZ$ ):

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \alpha & i\beta & 0 \\ -i\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad (8.11)$$

де  $\alpha, \beta, \gamma$  — дійсні константи. Дослідіть, які можливі типи хвиль з різними поляризаціями, що рухаються в паралельно оптичній осі. Запишіть загальний розв'язок через суперпозицію різних типів хвиль.

**8.10.** За умов задачі 8.9 знайдіть густину потоку енергії для суперпозиції різних типів хвиль, що рухаються у додатному напрямку осі  $OZ$ .

## 8.2. Відбивання та заломлення електромагнітних хвиль на межі двох середовищ

**8.11.** На межу середовища з діелектричною проникністю  $\varepsilon > 0$  нормально падає плоска електромагнітна хвиля з вакууму. Знайти коефіцієнт відбиття.

**8.12.** На межу середовища з (дійсною) діелектричною проникністю  $\varepsilon < 0$  нормально падає електромагнітна хвиля з вакууму. Знайти коефіцієнт відбиття.

**8.13.** Границя середовища з діелектричною проникністю з задачі (8.9), яка межує з вакуумом, перпендикулярна оптичній осі (паралельній  $OZ$ ). На цю границю з вакууму нормально падає циркулярно поляризована електромагнітна хвиля. Знайти коефіцієнти відбиття та проходження для двох різних колових поляризацій.

**8.14.** На межу середовища з діелектричною проникністю  $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$  нормально падає електромагнітна хвиля з вакууму. Знайти коефіцієнт відбиття.

**8.15.** Між середовищами з показниками заломлення  $n_1$  і  $n_3$  знаходиться нескінченна плоско-паралельна пластина з показником заломлення  $n_2$  і товщиною  $d$ . Всі показники заломлення більші за одиницю. Електромагнітна хвиля падає на пластину нормально з боку середовища 1. Магнітні проникності в усіх середовищах дорівнюють одиниці. З'ясувати, за яких умов буде нульове відбиття. Частота хвилі  $\omega$ .

### 8.3. Електромагнітні хвилі в плазмі

**8.16.** Холодна розріджена плазма містить  $N$  електронів в одному кубічному метрі. Отримайте вираз для швидкості поширення електромагнітних хвиль в цьому середовищі та показник заломлення середовища.

**8.17.** Знайти тензор діелектричної проникності холодної розрідженої плазми з електронною концентрацією  $n_e$ , що знаходиться у зовнішньому магнітному полі  $\mathbf{B}$ . Рухом іонів знехтувати.

**8.18.** Використовуючи тензор діелектричної проникності холодної розрідженої плазми в зовнішньому магнітному полі (див. попередню задачу 8.17), дослідити, за яких частот можливе проходження хвиль з різною коловою поляризацією в напрямку магнітного поля. Коли неможливе проходження хвиль з будь-якою поляризацією?

### 8.4. Розсіювання та дифракція

**8.19.** Поляризоване монохроматичне світло, хвильовий вектор якого  $\mathbf{k}$  і амплітуда  $E_0$  нормально падає з вакууму на бічну поверхню нескінченного надпровідного циліндра радіуса  $a$ . Знайдіть електричне поле у всьому просторі, диференціальний та повний перерізи розсіювання, якщо напрямок поляризації а) паралельний до осі циліндра, б) якщо він перпендикулярний до цієї осі.

**8.20.** Поляризоване монохроматичне світло, хвильовий вектор якого  $\mathbf{k}_0$  і амплітуда  $E_0$  нормально падає з вакууму на бічну поверхню нескінченно довгого діелектричного циліндра радіуса  $a$  з проникністю  $\epsilon$  (для даної частоти). Знайдіть електричне поле у всьому просторі, якщо напрямок поляризації світла паралельний до осі симетрії циліндра.

**8.21.** Запишіть диференціальний і повний перерізи розсіювання природного монохроматичного світла довжиною  $\lambda$  на металевій сфері радіуса  $R \ll \lambda$ .

**8.22.** (Дифракція Фраунгофера) Плоска хвиля, яка падає нормально на площину, проходить через невеликий прямокутний отвір сторонами  $a$  та  $b$ , який вирізано в цій площині згідно умов  $|x| < a$ ,  $|y| < b$ . Знайти розподіл інтенсивності на поверхні, що знаходиться на відстані  $l$  від площини.

**8.23.** Плоска хвиля, яка падає нормально на площину, проходить через невеликий круглий отвір радіусом  $R$ , який вирізано в цій площині. Знайти розподіл інтенсивності на поверхні, що знаходиться на відстані  $l$  від площини.

**8.24.** (Дифракція Френеля) Оцінити наближений розподіл інтенсивності на площині екрану, розташованого при  $z = D$  при дифракції на напівплощині ( $z = 0$ , нормальне падіння) далеко в області тіні.

**8.25.** (Геометрична оптика) Знайти кут відхилення променя у середовищі із коефіцієнтом заломлення  $n = 1 - \frac{a}{r}$ . Промінь проходить в області, де  $\frac{a}{r} \ll 1$ . Прицільна відстань відносно початку координат  $b$ .

## Електро- та магнітостатика у вакуумі

**2.7.** а)  $\rho = q\delta(\mathbf{r})$ ; б)  $\rho = \frac{q}{2\pi R^2}\delta(r-R)\delta(\cos\theta)$ ; в)  $\rho = \frac{\lambda(\varphi)}{R}\delta(r-R)\delta(\cos\theta)$ ; г)  $\rho = \frac{q}{4\pi R^2}\delta(r-R)$ ; д)  $\rho = \sigma(\theta)\delta(r-R)$ .

**2.10.** Тілесний кут, під яким видно поверхню  $S$  з точки  $r$ :

$$\Omega(\mathbf{r}) = \int_S d\mathbf{S}' \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3}.$$

Обчислимо зміну тілесного кута при зсуві точки спостереження на малий вектор  $\delta\mathbf{r}$  ( $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ , контур залишається нерухомим). Це можна зробити, залишаючи, навпаки, точку  $\mathbf{r}$  нерухомою, але зсуваючи поверхню  $S$  на  $-\delta\mathbf{r}$ , тобто у протилежному напрямку. При цьому зміна  $\Omega$  відбувається за рахунок тонкої смужки, яка відповідає переміщенню контура  $L$ , який є границею  $S$  ( $\delta d\mathbf{S} = -\delta\mathbf{r} \times d\mathbf{l}'$ ):

$$\delta\Omega(\mathbf{r}) = \delta\mathbf{r} \times \nabla\Omega = - \oint \delta\mathbf{r} \times d\mathbf{l}' \cdot \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} = - \oint d\mathbf{l}' \times \cdot \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \delta\mathbf{r}.$$

Звідси виходячи з властивості тілесного кута, під яким видно замкнений контур  $L$ :

$$\nabla\Omega = - \oint d\mathbf{l}' \times \cdot \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} = \oint d\mathbf{l}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

З іншого боку, індукція в точці  $\mathbf{r}$ , створювана струмом в контурі  $L$ , є

$$\mathbf{B} = \frac{I}{c} \oint d\mathbf{l}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{I}{c} \nabla\Omega.$$

**2.14.**  $\mathbf{B}(r) = \frac{4\pi}{cr^2} [\mathbf{e}_0 \times \mathbf{r}] \int_0^r j(r) r dr.$

**2.24.** Розв'яжемо задачу за допомогою рівняння Лапласа в декартовій системі координат та граничних умов на площині  $z = 0$ . Умова (1.15) виконується за неперервності потенціалу

$$\phi(x, y, z)|_{z \rightarrow 0^+} = \phi(x, y, z)|_{z \rightarrow 0^-},$$

а умова (1.14) дає

$$-\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow 0^+} + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow 0^-} = 4\pi\sigma(x, y).$$

Обмежимося випадком а).

Оскільки поверхнева густина заряду в граничних умовах має вигляд добутку  $\sigma(x, y) = \sigma_0 \sin\left(\frac{x}{L}\right) \cos\left(\frac{2y}{L}\right)$  функцій від  $x$  та  $y$ , можна застосувати метод розділення змінних, покладаючи:

$$\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z).$$

Більше того, тут має сенс «вгадати»  $X(x) = \sin\left(\frac{x}{L}\right)$ ,  $Y(y) = \cos\left(\frac{2y}{L}\right)$ , щоб відповідні функції можна було скомпенсувати в граничних умовах. Розв'язок має бути вибрано так, щоб виконувалося рівняння Лапласа та граничні умови (1.15), (1.14). Підстановка в рівняння Лапласа дає рівняння на  $Z(z)$ :

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \left(\frac{5}{L^2}\right)Z = 0.$$

Площина  $z = 0$  у середньому є електронейтральною, відповідно, далеко від неї потенціал має прямувати до нуля. Відповідно до цього, при  $z > 0$  відкидаємо експоненційно зростаючий розв'язок останнього рівняння, залишаючи  $Z(z) = C_1 e^{-\frac{\sqrt{5}}{L}z}$ . Аналогічно при  $z < 0$  маємо  $Z(z) = C_2 e^{\frac{\sqrt{5}}{L}z}$ . З умови неперервності потенціалу при  $Z = 0$ , дістаємо  $C_1 = C_2$ . Тепер потенціал визначено з точністю до сталого множника

$$\phi(x, y, z) = C \sin\left(\frac{x}{L}\right) \cos\left(\frac{2y}{L}\right) \cdot e^{-\gamma|z|}.$$

З граничної умови (1.14) визначаємо  $C$ .

Відповідь а):

$$\phi = \frac{2\pi\sigma_0 L}{\sqrt{5}} e^{-\frac{\sqrt{5}}{L}|z|} \sin\left(\frac{x}{L}\right) \cos\left(\frac{2y}{L}\right).$$

**2.25.**  $\phi = \frac{2\sigma_0 ab}{\sqrt{a^2+b^2}} e^{-\alpha|z|} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$ , де  $\alpha = \frac{\pi}{ab} \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Зауважимо, що, енергію системи зручно обчислювати за допомогою формули (2.8)  $W_e = \frac{\sigma_0^2 a^2 b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ .

**2.27.** 
$$\phi(r) = \begin{cases} 4\pi a \ln \frac{R_2}{R_1}, & r \leq R_1 \\ 4\pi a \left[ \left(1 - \frac{R_1}{r}\right) + \ln \frac{R_2}{r} \right], & R_1 \leq r \leq R_2 \\ 4\pi a \frac{R_2 - R_1}{r}, & r \geq R_2 \end{cases}$$

**2.28.** Розпишемо потенціал як:

$$\phi = \frac{q}{r} e^{-\frac{r}{a}} = \frac{q}{r} + \frac{q}{r} \left( e^{-\frac{r}{a}} - 1 \right).$$

Подіємо оператором Лапласа на цей потенціал. Перший доданок відповідає полю точкового заряду з  $\delta$ -видним розподілом густини. Другий доданок обчислюємо в сферичних координатах:

$$\Delta \left[ \frac{q}{r} \left( e^{-\frac{r}{a}} - 1 \right) \right] = \frac{q}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{-r/a} - 1}{r} \right) \right] = \frac{q e^{-r/a}}{a^2 r}.$$

Співставляючи з рівнянням Пуассона, знайдемо розподіл заряду:

$$\rho = q\delta(\mathbf{r}) - \frac{q}{4\pi a^2} \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r},$$

звідки видно, що екранований кулонівський потенціал створюється точковим зарядом, навколо якого розподілена «хмара» електричного заряду. Такий характер розподілу зустрічається, наприклад, в електролітах, або плазмі.

**2.29.** Оскільки ми маємо азимутальну симетрію в розподілі заряду, будемо шукати потенціал у вигляді:

$$\phi(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left( \frac{r}{R} \right)^l P_l(\cos \theta), & r < R \\ \sum_{l=0}^{\infty} B_l \left( \frac{R}{r} \right)^{l+1} P_l(\cos \theta), & r \geq R. \end{cases} \quad (1)$$

Випадок (а)

З урахуванням граничних умов на сфері:

$$\phi = \begin{cases} \phi_0 \frac{r}{R} \cos \theta, & r < R \\ \phi_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos \theta, & r \geq R. \end{cases} \quad (2)$$

Поверхневу густину заряду на поверхні знайдемо з граничної умови:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial \phi_{\text{in}}}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow R} - \frac{\partial \phi_{\text{out}}}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow R} \right) = \frac{3\phi_0}{4\pi R} \cos \theta. \quad (3)$$

**2.30.**

а)

$$\phi = \begin{cases} \frac{4}{3} \pi \sigma_0 r \cos \theta, & r < R \\ \frac{4}{3} \pi \sigma_0 R^3 \frac{\cos \theta}{r^2}, & r \geq R. \end{cases} \quad (1)$$

б)

$$\phi = \begin{cases} \frac{4}{3} \pi \sigma_0 r \cos \theta + 4\pi \sigma_1 R, & r < R \\ \frac{4}{3} \pi \sigma_0 R^3 \frac{\cos \theta}{r^2} + \frac{4\pi \sigma_1 R^2}{r}, & r \geq R. \end{cases} \quad (2)$$

$$\mathbf{2.32.} \quad \phi_{\text{ind}}(\mathbf{r}) = -\frac{Q}{r} \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n C_{nm} \left(\frac{R}{r}\right)^n Y_{nm}(\theta, \varphi)$$

$$\mathbf{2.36.} \quad \phi(r) = \begin{cases} \frac{2\pi}{2n+3} \rho_0 R^2 \left[ \frac{2n+3}{2n+1} \left(\frac{r}{R}\right)^n - \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \right] P_n(\cos(\theta)), & r < R \\ \frac{4\pi \rho_0 R^2}{(2n+3)(2n+1)} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos(\theta)), & r > R \end{cases}$$

$$\mathbf{2.40.} \quad \phi(r, \varphi, z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sigma_0 R \left( 3 \sin(\varphi) \frac{r}{R} - \frac{1}{3} \sin(3\varphi) \left(\frac{r}{R}\right)^3 \right), & r < R, \\ \frac{\pi}{2} \sigma_0 R \left( 3 \sin(\varphi) \frac{R}{r} - \frac{1}{3} \sin(3\varphi) \left(\frac{R}{r}\right)^3 \right), & r > R. \end{cases}$$

**2.46.** Спосіб 1 (використання закону Біо-Савара-Лапласа).

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int dV' \mathbf{j} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$



Підставимо вираз густини струму з умови задачі, і будемо шукати поле в точці  $\mathbf{r} = 0$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(0) &= -\frac{1}{c} \int dV' (c\nabla \times (\rho(r)\mathbf{a})) \times \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|^3} = \\ &= - \int [\nabla \rho(r) \times \mathbf{a}] \times \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|^3} dV' = \\ &= - \int_0^\infty dr' \frac{d\rho}{dr'} \int d\Omega' [\mathbf{n}' \times [\mathbf{a} \times \mathbf{n}']], \quad (1)\end{aligned}$$

де  $\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{r}'}{r'}$ . Спрямуємо вісь  $z$  вздовж вектора  $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_z$ . Використовуючи «ВАС - САВ»

$$\int d\Omega' [\mathbf{n}' \times [\mathbf{a} \times \mathbf{n}']] = \int d\Omega' [\mathbf{a} - \mathbf{n}'(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}')],$$

можна бачити (з міркувань симетрії), що інтеграл  $\int d\Omega' [\mathbf{n}' \times [\mathbf{a} \times \mathbf{n}']]$  має напрямок вздовж  $z$ , тому, його легко обчислити:

$$\begin{aligned}\int d\Omega' [\mathbf{n}' \times [\mathbf{a} \times \mathbf{n}']] &= \mathbf{a} \int d\Omega' ([\mathbf{n}' \times [\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}']] \cdot \mathbf{e}_z) = \\ &= \mathbf{a} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi [1 - \cos^2 \theta] = \mathbf{a} \frac{8\pi}{3}. \quad (2)\end{aligned}$$

Інтеграл  $\int_0^\infty dr' \frac{d\rho}{dr'} = -\rho(0)$ . Підставляючи все в (1), маємо:

$$\mathbf{B}(0) = \mathbf{a} \frac{8\pi}{3} \rho(0).$$

Спосіб 2 (використання рівняння Максвелла).

Використаємо безпосередньо рівняння Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

і підставимо вираз густини струму з умови задачі:

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \nabla \times (\rho(r)\mathbf{a}).$$

Якщо ротори лівої і правої частин рівняння однакові, то вони можуть відрізнитись на градієнт довільної скалярної функції  $\psi$ , отже

$$\mathbf{B}(r) = 4\pi (\rho(r)\mathbf{a}) + \nabla\psi. \quad (3)$$

Причому, оскільки  $\rho(r)$  і  $\mathbf{B}(r)$  спадають до нуля на нескінченності, то  $\psi$  також спадає до нуля на нескінченності.

З іншого рівняння Максвелла  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  маємо,

$$4\pi \nabla \cdot (\rho(r)\mathbf{a}) + \Delta\psi = 0,$$

звідки отримуємо рівняння Пуассона для  $\psi$ :

$$\Delta\psi = -4\pi \nabla \cdot (\rho(r)\mathbf{a}) = -4\pi \frac{d\rho}{dr} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}).$$

Оскільки  $\psi$  спадає на нескінченності, то рівняння має єдиний розв'язок:

$$\psi(\mathbf{r}) = \int dV' \frac{d\rho}{dr'} \frac{(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{a})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Тепер знайдемо градієнт  $\psi$ :

$$\nabla\psi = - \int dV' \frac{d\rho}{dr'} \frac{(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{a})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

і в нулі

$$\nabla\psi(0) = \int dV' \frac{d\rho}{dr'} \frac{(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{a})}{|\mathbf{r}'|^3} \mathbf{r}' = \int d\Omega \int_0^\infty dr \frac{d\rho}{dr} \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})}{r^2} \mathbf{n}.$$

Далі аналогічно до попереднього способу проводимо обчислення інтегралів, а тому матимемо:

$$\nabla\psi(0) = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{a} \rho(0).$$

Підставимо тепер цей вираз в формулу (3), остаточно отримуємо

$$\mathbf{B}(0) = \mathbf{a} \frac{8\pi}{3} \rho(0),$$

що збігається з відповіддю, отриманою в попередньому способі.

**2.51.** Проведемо вісь  $OZ$  вздовж поля  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ . а)  $A_x = -\frac{1}{2}By$ ,  $A_y = \frac{1}{2}Bx$ ,  $A_z = 0$ ; б)  $A_\varphi = \frac{1}{2}Br$ ,  $A_r = A_z = 0$ ; в)  $A_\varphi = \frac{1}{2}Br \sin \theta$ ,  $A_r = A_\theta = 0$ , або у векторній формі  $\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{B} \times \mathbf{r}]$ . З огляду калібрувальної інваріантності вектор-потенціал не визначений однозначно. Тут

наведені найбільш зручні представлення вектор-потенціалу однорідного поля в різних системах координат.

**2.52.** Потенціал кулі є квадрупольним,  $\phi(z) = \frac{\pi^2 \rho_0 R^5}{48 z^3}$ .

**2.55.**  $\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{2q}{3c} \frac{1}{R} \boldsymbol{\omega}, & r < R \\ \frac{3(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3}, & r > R \end{cases}$  де  $\mathbf{p}_m = \frac{qR^2}{3c} \boldsymbol{\omega}$  — магнітний момент сфери.

**2.56.**  $B_z = \frac{324\pi a}{5c} j_0$ .

**2.58.**  $W = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Q_{lm}^*$ .

**2.59.**

$$W = -(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{E}_2) = -\frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} + \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)}{r^3} = \\ = -\frac{p_1 p_2}{d^3} [3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \cos(\theta_1 - \theta_2)],$$

**2.60.**  $F = \frac{6R^6}{l^4} E_0^2$ .

## Випромінювання та поширення електромагнітних хвиль

**3.1.** 1/4 ( реалізується знак рівності у співвідношенні невизначеностей)

**3.7.**  $P = 1$ .

**3.8.**  $P = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

**3.9.**  $P = 0$ .

**3.14.** При  $\mathbf{v} = \text{const}$  вираз

$$\mathbf{R}_q - \frac{\mathbf{v}}{c} R_q = \mathbf{R}_q - \mathbf{v}(t - t_q) = \mathbf{R}_t,$$

тобто є вектором проведеним від заряду до точки спостереження в момент самого спостереження. Знаменник потенціалів Лієнара-Віхерта можна записати як:

$$R_q - \frac{\mathbf{v}}{c} R_q = R_t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta}.$$

**3.17.** Дипольний момент системи

$$\mathbf{p} = \frac{q_i}{m_i} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = \frac{q_i}{m_i} M \mathbf{R}_{\text{CM}},$$

де  $\mathbf{R}_{\text{CM}}$  — радіус-вектор центра мас системи. Нехтуючи втратами імпульсу на випромінювання, у першому наближенні за відсутності зовнішніх полів  $\ddot{\mathbf{R}}_{\text{CM}} = 0$ , отже інтенсивність випромінювання дорівнює нулю.

**3.19.** Поля  $\mathbf{E}(t) = \frac{q\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{v}}]}{c^2 r}$ ,  $\mathbf{B}(t) = \frac{q\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{n}}{c^2 r}$ , розподіл випромінювання  $\frac{dN}{do} = \frac{q^2}{4\pi c^3} [\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{n}]^2$ , повна потужність  $N = \frac{2q^2}{3c^3} \dot{\mathbf{v}}^2$ . Прискорення  $\dot{\mathbf{v}}$  є функцією  $t - \frac{r}{c}$ .

**3.20.**  $I = \frac{2p^2 \omega^4}{3c^3}.$

**3.21.**  $\mathbf{S} = \frac{p_0^2 c k^4}{2\pi r^2} \sin^2 \theta \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos \varphi \sin \theta \right) \mathbf{n}$ , де  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $r, \theta, \varphi$  — сферичні координати,  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ .

**3.22.** Згідно (3.6) і з урахуванням  $\mathbf{p} = q_1 \mathbf{r}_1 + q_2 \mathbf{r}_2 = \mu \left( \frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right) \mathbf{r}$ , де  $\mu$  — приведена маса, а  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , маємо:

$$N(t) = \frac{2\mu^2}{3c^3} \left( \frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right)^2 \ddot{\mathbf{r}}^2(t).$$

Згідно рівнянню руху зарядів  $\mu \ddot{\mathbf{r}} = q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ , отримуємо

$$N(t) = \frac{2q_1^2 q_2^2}{3c^3} \left( \frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right)^2 \frac{1}{r^4}.$$

$$\mathbf{3.25.} \quad \varepsilon = \frac{I_0^2 a^4 b}{c^5} \sqrt{2\pi b}.$$

$$\mathbf{3.26.} \quad \langle dN/d\phi \rangle = \frac{I_0^2}{2\pi c} \frac{[\sin(m\pi \sin^2 \theta/2)]^2}{(\sin \theta)^2}$$

$$\mathbf{3.27.} \quad I = \frac{q^2 R^4 \omega^6}{10c^5}.$$

$$\mathbf{3.28.} \quad W = \frac{2qEv_0 d}{3mc^3} \left( \sqrt{\frac{2qEd}{mv_0^2} + \cos^2 \alpha} - \cos \alpha \right).$$

$$\mathbf{3.29.} \quad I = \frac{2e^2}{3c^3} \left( \frac{Ze^2}{mR^2} \right)^2, \quad t = \frac{m^2 c^3 R^3}{4Ze^4}.$$

**3.30.** При дії хвилі  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ , де  $\mathbf{E}_0 = \text{const}$ , що падає, частинка рухається згідно рівняння

$$m(\ddot{\mathbf{r}} + 2\gamma \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r}) = e\mathbf{E}e^{-i\omega t}.$$

Шукаємо розв'язок у вигляді  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$ . Дипольний момент  $\mathbf{p} = e\mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$ .

Отже,

$$\mathbf{p} = \frac{e^2 \mathbf{E}_0 \exp -i\omega t}{m[\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega]}.$$

У хвильовій зоні  $\mathbf{B} = \frac{\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}}{rc^2} = -\omega^2 \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{n}}{rc^2}$ . Густина потоку енергії розсіяного випромінювання (середнє за часом)  $\Pi = \frac{c}{8\pi} \omega^4 \frac{|\mathbf{p} \times \mathbf{n}|^2}{r^2 c^4}$ .

Отже, диференціальний переріз розсіювання:

$$\frac{d\sigma}{d\phi} = r_e^2 \frac{\omega^4 (\sin \theta)^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2},$$

де  $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$  — класичний заряд електрона,  $\theta = (\mathbf{n}, \mathbf{E}_0)$ .

Повний переріз розсіювання:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}$$

## Спеціальна теорія відносності

**4.1.** а) Не існує, оскільки  $A'_\mu$  часоподібний. б)  $A_\mu = \left\{ -\frac{Va}{\sqrt{1-V^2}}, \frac{a}{\sqrt{1-V^2}}, 0, 0 \right\}$ .

**4.2.** а)  $A_\mu = \left\{ \frac{a}{\sqrt{1-V^2}}, -\frac{aV}{\sqrt{1-V^2}}, 0, 0 \right\}$ . б) Не існує, оскільки  $A'_\mu$  простороподібний.

**4.3.**  $V_C = \frac{p_1 + p_2}{\sqrt{p_1^2 + m_1^2} + \sqrt{p_2^2 + m_2^2}}.$

**4.7.**  $\frac{N_{\rightarrow}}{N_{\leftarrow}} = \frac{1+\beta}{1-\beta},$  де  $\beta = \frac{v}{c}.$

**4.9.**  $\mathbf{E}' = a(-1, 1, 0), \mathbf{B}' = a(1, 2, 1), \mathbf{E}'' = a(-1, \Gamma(1-v), 2\Gamma v), \mathbf{B}'' = a(1, 2\Gamma, \Gamma(1-v)),$  де  $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$

**4.18.**  $\mathbf{v} = c \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{B^2},$  при  $E < B.$

**4.19.**  $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{q}{m} \frac{Q}{bv_0^2}.$

**4.20.** а) провідна заземлена сфера:  $\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{\pi R e^2}{4m v_0^2} \cdot \frac{1}{\theta^3},$  б) провідна ізольована сфера:  $\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{\pi R^2}{8} \cdot \sqrt{\frac{3e^2}{R\pi m v_0^2}} \cdot \theta^{-5/2}.$

**4.21.**  $x(t) = \frac{E_0}{B_0} c \left( t - \frac{1}{\Omega} \sin \Omega t \right), y(t) = \frac{E_0}{B_0} \frac{c}{\Omega} (1 - \cos \Omega t),$  де  $\Omega = \frac{qB_0}{mc}$  — циклотронна частота.

$$4.23. \quad x(t) = \frac{qE_0}{2m\Omega^2} (\sin \Omega t - \Omega t \cos \Omega t), \quad y(t) = \frac{qE_0}{2m\Omega} t \sin \Omega t.$$

### Діелектрики та магнетики в статичних полях

$$6.5. \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 + \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1) - \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_2} \mathbf{n}.$$

$$6.6. \quad \phi = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q}{r}, \quad \mathbf{E} = \frac{2q}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{D}_i = \frac{2\varepsilon_i}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q\mathbf{r}}{r^3} \quad (i = 1, 2).$$

6.7. Граничні умови на поверхні провідника  $\phi = \text{const}$  та межі розділу діелектриків можна задовольнити, використовуючи сферично-симетричний потенціал  $\phi(r) = \frac{C}{r}$ ,  $r > R$ . Константу  $C$  знаходимо з теореми Гаусса для індукції. Остаточно маємо потенціал:

$$\phi(r) = \frac{2q}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r}, \quad r > R,$$

та густину зарядів на поверхнях кулі:

$$\sigma_i = \frac{q\varepsilon_i}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)R^2}, \quad i = 1, 2.$$

6.14. Зовні кулі на зовнішнє однорідне поле накладається поле, що створюється поляризаційними зарядами які виникли на кулі. З урахуванням нульової умови на нескінченності для поля зарядів на кулі та умови регулярності в початку координат, шукатимемо потенціал у вигляді:

$$\phi(r) = \begin{cases} -Cr \cos \theta, & r \leq R \\ -E_0 r \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{r^2}, & r > R. \end{cases}$$

Граничні умови мають вигляд:

$$\phi^{(i)}|_{r=R} = \phi^{(e)}|_{r=R}, \quad \varepsilon^{(i)} \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial r} \Big|_{r=R} = \varepsilon^{(e)} \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial r} \Big|_{r=R},$$

і дають змогу визначити константу  $C$  та дипольний момент  $p$ :

$$\begin{cases} -CR \cos \theta = -E_0 R \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{R^2} \\ \varepsilon^{(i)}(-C \cos \theta) = \varepsilon^{(e)} E_0 \cos \theta + \varepsilon^{(e)} \frac{2p \cos \theta}{R^3}. \end{cases}$$

Звідки:

$$p = \frac{\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}} R^3 E_0,$$

$$C = \frac{3\varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}}.$$

Потенціал дорівнює:

$$\phi = \begin{cases} -\frac{3\varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}), & r \leq R \\ -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}) + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, & r > R. \end{cases}$$

Густина зв'язаного заряду:

$$\sigma_{\text{зв'яз}} = P_{1n} - P_{2n} = \frac{1}{4\pi} \left( \left. \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial r} \right|_{r=R} - \left. \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial r} \right|_{r=R} \right) = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} E_0 \cos \theta.$$

**6.15. Вказівка:** Шукаємо розв'язок рівняння Лапласа всередині кулі (в сферичних координатах) у вигляді  $\phi(r, \theta, \varphi) = f(r) \cos \theta$ . Маємо загальний розв'язок для  $f(r) = A \frac{r}{R} + B \left( \frac{R}{r} \right)^2$ . Константи знаходимо з умови регулярності в нулі та з граничної умови при  $r = R$ . Густина зв'язаних зарядів визначається за формулою  $\sigma = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ .

**6.16.**  $\phi = \phi_0 \left( \frac{R}{r} \right)^2 \cos \theta.$

**6.17. Вказівка:** Шукаємо розв'язок рівняння Лапласа всередині кулі (в сферичних координатах) у вигляді  $\phi(r, \theta, \varphi) = f(r) \cos \theta$ . Маємо загальний розв'язок для  $f(r) = A \frac{r}{R} + B \left( \frac{R}{r} \right)^2$ . Константи  $A$  та  $B$  в середині та зовні кулі різні. Знаходимо їх з нульової умови на нескінченності при  $r > R$ , умови регулярності та з граничної умови при  $r = R$ . Густина вільного заряду знаходимо з граничної умови для нормальної компоненти індукції на поверхні кулі.

**6.18.**  $\phi(R, z, \varphi) = \begin{cases} \phi_0 \left( \frac{r}{R} \right)^m \cos(m\varphi), & r < R \\ \phi_0 \left( \frac{R}{r} \right)^m \cos(m\varphi), & r \geq R. \end{cases}, \quad \sigma_{\text{вільн}} = \frac{m(\varepsilon+1)}{4\pi} \cos(m\varphi).$



**6.19.** Розв'язок слід шукати окремо зовні кулі ( $r > R$ ) та всередині ( $r < R$ ). Користуючись повнотою системи сферичних функцій на сфері, шукаємо розв'язок у вигляді:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n f_{nm}(r) Y_{nm}(\theta, \varphi).$$

Підставимо це в рівняння Лапласа в сферичних координатах:

$$\Delta\phi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \hat{\Lambda} \psi = 0, \quad (1)$$

$$\text{де } \hat{\Lambda} Y_{nm} \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{nm}}{\partial \varphi^2} = -n(n+1) Y_{nm}(\theta, \varphi).$$

Звідси, з огляду на незалежність сферичних функцій з різними індексами і лінійність рівняння Лапласа по  $\phi$  (принцип суперпозиції!), кожен складову потенціалу можна розглядати окремо. Маємо

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f_{nm}}{\partial r} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2} f_{nm}(r) = 0$$

для усіх  $n = 0, 1, 2, \dots$ , і  $m = -n, -(n-1), \dots, 0, \dots, n-1, n$  для кожного  $n$ . Загальний розв'язок рівняння (1) є комбінацією степеневих функцій

$$f_{nm}(r) = A_{nm} \left( \frac{r}{R} \right)^n + B_{nm} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \quad (2)$$

Нормування на  $R$  введено для зручності, константи  $A_{nm}$  та  $B_{nm}$  — різні всередині і зовні кулі. Зовні кулі ( $r > R$ ) поле обмеженої системи зарядів має прямувати до нуля на нескінченності, тому  $A_{nm} = 0$ ,

$$\phi_{\text{out}}(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_{nm} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} Y_{nm}(\theta, \varphi). \quad (3)$$

Аналогічно розглядаємо розв'язок усередині кулі, де, однак, поле має бути регулярним в нулі (в центрі немає якихось точкових зарядів); тому в (2) слід відкинути члени з від'ємними степенями змінної  $r < R$ :

$$\phi_{\text{in}}(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{A}_{nm} \left( \frac{r}{R} \right)^n Y_{nm}(\theta, \varphi) \quad (4)$$

Маємо дві граничні умови на поверхні кулі ( $r = R$ ). Умову для тангенціальних компонент напруженості електричного поля в даній задачі можна замінити умовою неперервності потенціалу

$$\phi_{\text{out}}(R, \theta, \varphi) = \phi_{\text{in}}(R, \theta, \varphi).$$

Це дає  $\tilde{A}_{nm} = B_{mn}$ . Друга гранична умова використовує нормальні компоненти індукції  $D_n = -\varepsilon \mathbf{n} \cdot \nabla \phi = -\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial r}$ , вона дає

$$-\left. \frac{\partial \phi_{\text{out}}}{\partial r} \right|_{r=R} + \varepsilon \left. \frac{\partial \phi_{\text{in}}}{\partial r} \right|_{r=R} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n s_{nm} Y_{nm}(\theta, \varphi).$$

Підстановка (3), (4) з урахуванням  $\tilde{A}_{nm} = B_{mn}$  визначає ці коефіцієнти:

$$(n+1+n\varepsilon)B_{nm} = 4\pi s_{nm}.$$

Отже, остаточно маємо:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{s_{nm}}{n+1+n\varepsilon} \left(\frac{r}{R}\right)^n Y_{nm}(\theta, \varphi), & r < R \\ 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{s_{nm}}{n+1+n\varepsilon} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_{nm}(\theta, \varphi), & r \geq R. \end{cases}$$

$$\mathbf{6.22.} \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right) \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_1) + \frac{4\pi}{c} [\mathbf{n} \times \mathbf{i}].$$

$$\mathbf{6.24.} \quad \mathbf{A}(r) = \begin{cases} -\mu a(r-R)\mathbf{e}_z, & r \leq R, \\ -\mu a R \ln\left(\frac{r}{R}\right)\mathbf{e}_z, & r > R. \end{cases}$$

$$\mathbf{6.26.} \quad F = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)\varepsilon_1} \frac{q}{4d^2}.$$

$$\mathbf{6.27.} \quad \text{В діелектрику виникає зображення диполя, з моментом } \mathbf{p}' = -\mathbf{p} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}.$$

Сумарний момент сил, що діє на диполь

$$[\mathbf{p} \times \mathbf{E}] + \left[ \mathbf{p} \times \left( \frac{3(\mathbf{p}'\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}'}{r^3} \right) \right] = 0$$

Звідси для положень рівноваги маємо  $\alpha = 0$  та  $\alpha = \pi$ . При  $\xi =$

$\left| \frac{E}{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \frac{3}{8} \frac{p}{d^3}} \right| < 1$  також маємо  $\alpha = \pi \pm \arccos \xi$ . Положення рівноваги

$\alpha = 0$  є стійким. Положення рівноваги  $\alpha = \pi$  є нестійким при  $\xi > 1$ , але стає стійким при  $\xi < 1$ . Положення, що відповідають  $\alpha = \pi \pm \arccos \xi$  при  $\xi < 1$ , є нестійкими.

$$6.28. \varphi = \sqrt{8mg/(\varepsilon - 1)}.$$

$$6.29. \sigma_{зв'яз} = -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \frac{qd}{2\pi(x^2+h^2)^{3/2}}, \text{ де } x - \text{координата вздовж межі розділу,}$$

$$q_{зв'яз} = -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} q.$$

$$6.30. F_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\varepsilon_1} \frac{q_1^2}{4d^2} + \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q_1 q_2}{4d^2}, F_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\varepsilon_2} \frac{q_2^2}{4d^2} + \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q_1 q_2}{4d^2}.$$

## Квазістаціонарні поля і струми

**7.2.** Передусім відзначимо, що тут ми розглядаємо ідеальну картину з неперервним рівномірним розподілом густини заряду, як це зазвичай прийнято в макроскопічній електродинаміці. Виберемо систему декартових координат з абсцисою ортогонально до початкового шару.

Нехай  $X(x, t)$  — траєкторія частинки, яка при  $t = 0$  мала координату  $x$ , тобто  $X(0, t) = x$ . Напруженість поля зростає монотонно по  $x$ , відповідно, швидкість і прискорення кожної частинки — також. Тому «задні» частинки не наздоганяють «передні», тобто  $X(x_1, t) > X(x_2, t)$  при  $x_1 > x_2$ .

Оскільки поле плоского шару — однорідне у просторі, це означає, що на кожную частинку весь час діє одне і теж саме електричне поле:

$$\frac{\partial^2 X(x, t)}{\partial t^2} = \frac{e}{m_e} E(x) = \omega_p^2 x,$$

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e},$$

$m_e$  — маса електрона. Поле однорідного шару визначено за теоремою Гаусса.

З рівнянь рівноприскореного руху:

$$X(x, t) = x \left[ 1 + \omega_p^2 \frac{t^2}{2} \right]$$

видно, що розподіл частинок весь час пропорційний початковому положенню.

$$\text{Положення крайніх частинок } X(a, t) = a \left[ 1 + \omega_p^2 \frac{t^2}{2} \right].$$

Густина у будь-якій точці шару, що розширюється, є

$$\rho(x, t) = en_0 \left[ 1 + \omega_p^2 \frac{t^2}{2} \right]^{-1} \theta [X(a, t) - x].$$

**7.3.** Всередині плити відбувається розтікання заряду (максвелівська релаксація), яке має місце за умови виконання закону Ома. А саме, з рівняння неперервності, закону Ома та рівняння Максвелла  $\nabla \cdot \mathbf{E} = -4\pi\rho$  випливає:

$$\rho(x, t) = \rho_1 \exp\left(-\frac{4\pi\lambda_1}{\varepsilon_1} t\right).$$

Для плаского розподілу заряду поле спрямовано по осі  $x$ . З рівняння Максвелла маємо:

$$E_x(x, t) = 4\pi \left(x - \frac{a}{2}\right) \frac{\rho_1}{\varepsilon_1} \exp\left(-\frac{4\pi\lambda_1}{\varepsilon_1} t\right),$$

звідки, за законом Ома:

$$\mathbf{j}(x, t) = 4\pi \mathbf{e}_x \left(x - \frac{a}{2}\right) \frac{\lambda_1 \rho_1}{\varepsilon_1} \exp\left(-\frac{4\pi\lambda_1}{\varepsilon_1} t\right).$$

Заряд, що був всередині, з часом порівну розподіляється між двома поверхнями плити і на кожній з них

$$\sigma(t) = \frac{a\rho_1}{2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{4\pi\lambda_1}{\varepsilon_1} t\right) \right].$$

**7.4.** Задача аналогічна 7.3. З урахуванням циліндричної симетрії задачі видно, що напруженість електричного поля має лише радіальну (перпендикулярну до осі циліндра) компоненту. З інтегральної форми рівнянь Максвелла в середовищі маємо:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 2\pi \mathbf{r} \frac{\rho_1}{\varepsilon_1} \exp\left(-\frac{4\pi\lambda_1}{\varepsilon_1} t\right),$$

звідки

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 2\pi \mathbf{r} \frac{\lambda_1 \rho_1}{\varepsilon_1} \exp\left(-\frac{4\pi\lambda_1}{\varepsilon_1} t\right).$$

Для поверхневої густини заряду маємо:

$$\sigma(t) = \frac{R\rho_1}{2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{4\pi\lambda_1}{\varepsilon_1} t\right) \right].$$

**7.5.** Всередині кулі маємо:

$$\rho(t) = \rho_1 \exp\left(-\frac{4\pi\lambda_1}{\varepsilon_1}t\right).$$

Заряд зосереджується на поверхні кулі з густиною:

$$\sigma(t) = \frac{R\rho_1}{3} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{4\pi\lambda_1}{\varepsilon_1}t\right) \right].$$

З урахуванням сферичної симетрії задачі (напруженість електричного в окремій точці спрямована по радіусу) та з інтегральної форми рівнянь Максвелла в середовищі отримуємо напруженість поля. Густина струму:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\mathbf{r} \frac{\lambda_1\rho_1}{3\varepsilon_1} \exp\left(-\frac{4\pi\lambda_1}{\varepsilon_1}t\right).$$

**7.7.** Використавши рівняння для електричного поля в циліндричних координатах та закон Ома отримаємо рівняння для густини струму:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial j_z}{\partial r} \right) + k^2 j_z = 0, \quad k^2 = \frac{4i\pi\lambda\mu\omega}{c^2} = \frac{2i}{\delta^2}.$$

Розв'язком цього рівняння є функція вигляду  $j_z = AJ_0(kr) + BN_0(kr)$ . Оскільки  $\lim_{r \rightarrow 0} N_0(kr) = -\infty$ , то стала  $B = 0$ . Сталу  $A$  можна знайти знаючи амплітуду струму

$$I_0 = \int_0^a j_z(r) 2\pi r dr = 2\pi A \int_0^a r J_0(kr) dr = 2\pi A \frac{a}{k} J_1(ka),$$

отже, густина струму

$$j_z = \frac{k}{2\pi a J_1(ka)} J_0(kr) I_0 e^{-i\omega t}.$$

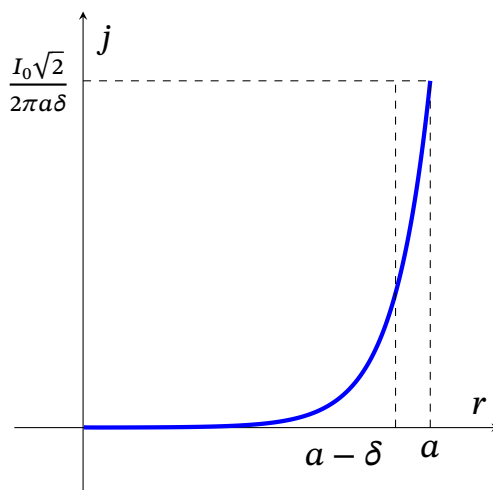
За великих частот  $ka \gg 1$  та в області біля краю провідника  $r \lesssim a$  (див. формулу (Г.10)) маємо:

$$j_z = \frac{1-i}{2\pi\delta} I_0 \sqrt{\frac{1}{ar}} e^{\left(\frac{i-1}{\delta}(a-r)-i\omega t\right)}.$$

Дійсна амплітуда густини струму має вигляд:

$$j_0(r) = \frac{I_0\sqrt{2}}{2\pi\delta} \sqrt{\frac{1}{ar}} e^{\frac{r-a}{\delta}},$$

графічне зображення цієї залежності подано на рисунку



**7.8.** Густина струму в циліндричному провіднику (див. розв'язок до задачі 7.7)

$$j_z = \frac{k}{2\pi a} \frac{J_0(kr)}{J_1(ka)} I_0 e^{-i\omega t}.$$

Опір будемо шукати як  $R = \frac{\langle Q \rangle}{\frac{1}{2} I_0^2}$ .

Із закону Джоуля-Ленца розрахуємо теплоту, яка виділяється в провіднику як

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \frac{1}{2\lambda} \int_0^a |j_z|^2 2\pi r dr = \frac{2\pi}{2(2\pi a)^2} \frac{I_0^2}{\lambda} \frac{|k|^2}{J_1(ka)J_1(k^*a)} \int_0^a J_0(kr)J_0(k^*r)r dr = \\ &= \frac{2\pi a}{2(2\pi a)^2} \frac{I_0^2}{\lambda} \frac{|k|^2}{J_1(ka)J_1(k^*a)} \frac{kJ_1(ka)J_0(k^*a) - k^*J_1(k^*a)J_0(ka)}{k^2 - k^{*2}} = \\ &= \frac{2\pi a}{2(2\pi a)^2} \frac{I_0^2}{\lambda} \frac{|k|^2 \delta^2}{4i} \left( \frac{kJ_0(k^*a)}{J_1(k^*a)} - \frac{k^*J_0(ka)}{J_1(ka)} \right) = \\ &= \frac{2\pi a}{2(2\pi a)^2} \frac{I_0^2}{\lambda} \frac{1}{2} \left( \frac{k^*J_0(k^*a)}{J_1(k^*a)} + \frac{kJ_0(ka)}{J_1(ka)} \right) = \frac{1}{4\pi a} \frac{I_0^2}{\lambda} \operatorname{Re} \left( \frac{kJ_0(ka)}{J_1(ka)} \right). \end{aligned}$$

Отже

$$R = \frac{1}{2\pi a\lambda} \operatorname{Re} \left[ \frac{kJ_0(ka)}{J_1(ka)} \right].$$

Розглянемо випадок малих частот  $|ka| \ll 1$ :

$$R \approx \frac{1}{2\pi a\lambda} \operatorname{Re} \left[ k \left( 1 - \frac{k^2 a^2}{4} \right) \frac{2}{ka} \right] = \frac{1}{\pi a^2 \lambda}.$$

Тобто, при малих частотах опір такий же, як і для постійного струму.

Розглянемо випадок великих частот  $|ka| \gg 1$ :

$$R \approx \frac{1}{2\pi a \lambda} \operatorname{Re} [k e^{k(r-a)}] \approx \frac{1}{2\pi a \lambda} \operatorname{Re} [k(1 - k(r-a))] = \frac{1}{2\pi a \delta \lambda}.$$

З останньої формули випливає, що ефективна площа перерізу провідника в області великих частот дорівнює  $2\pi a \delta$ , тобто має дуже маленьку величину, зосереджену поблизу поверхні провідника.

$$\mathbf{7.9.} \quad B_{\varphi_{\text{in}}} = \frac{2}{cr} \int_0^r j_z 2\pi r dr = \frac{2I J_1(kr)}{ca J_1(ka)}.$$

**7.10.** Внутрішню індуктивність можна обчислити знаючи магнітне поле в середині провідника (див. відповідь до задачі 7.9) виходячи з виразу

$$\frac{1}{4c^2} L_{\text{in}} I^2 = \int_0^a \frac{\langle B_{\varphi_{\text{in}}}^2 \rangle}{8\pi} 2\pi r dr, \text{ маємо } L_{\text{in}} = -\frac{\delta^2}{2a} \left[ \frac{k^* J_0(ka)}{J_1(ka)} + \frac{k J_0(k^*a)}{J_1(k^*a)} \right]. \text{ За низьких частот } |ka| \ll 1 \text{ внутрішня індуктивність } L_{\text{in}} = \frac{1}{2}, \text{ за великих частот } |ka| \gg 1 \text{ — } L_{\text{in}} = \frac{\delta}{a}.$$

**7.12.** Соленоїд створює однорідне магнітне поле, напрямлене по осі Z всередині нього. Зовні соленоїда поле дорівнює нулю. За наявності циліндра в ньому виникають індукційні струми, що течуть по колам в площинах, ортогональних осі циліндра. Цю систему струмів можна розглядати як систему коаксіальних соленоїдів, поле яких не дає внесок зовні провідного циліндра.

Звідси магнітне поле  $\mathbf{B} = \mathbf{H} = B_0 \mathbf{e}_z$  при  $r \in [a, b]$ , де  $B_0 = \frac{4\pi}{c} nI$ , а зовні соленоїда (при  $r > b$ )  $\mathbf{B} = 0$ .

Усередині циліндра магнітне поле також напрямлене по осі OZ. Залежність усіх полів та струмів від часу така ж, як струм через обмотку.

З рівнянь для квазістаціонарного поля (див. «Теоретичні відомості, ф-ла (8.4)») отримуємо

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + k^2 H_z = 0, \quad k^2 = \frac{4i\pi\lambda\mu\omega}{c^2} = \frac{2i}{\delta^2},$$

що зводиться до рівняння для функції Бесселя  $J_0$ . Звідси, з урахуванням

граничних умов для магнітного поля при  $r = a$  та  $r = b$ , маємо

$$H_z = \begin{cases} \frac{4\pi}{c} \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)} nI_0 e^{-i\omega t}, & r < a \\ nI_0 e^{-i\omega t}, & a \leq r \leq b \\ 0, & r > b. \end{cases}$$

Зауважимо, що  $J_0(ka) \neq 0$ , оскільки  $k$  — комплексне, а нулі функції Бесселя лежать на дійсній осі. З розкладу для  $J_0$  видно, що в формулу входить саме степені  $k^2$ , тому знак  $k$  тут несуттєвий.

При  $r < a$ ,  $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{H} = \frac{c}{4\pi} \frac{dH_z}{dr} [\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z]$ , звідки

$$\mathbf{j} = knI_0 \frac{J_1(kr)}{J_0(ka)} e^{-i\omega t} \mathbf{e}_\varphi,$$

де використано що  $J'_0(x) = -J_1(x)$ . Використовуючи закон Ома  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\lambda}$ , отримуємо електричне поле в середині провідника. Для областей  $r > a$  та  $r > b$  електричне поле можна знайти з рівняння Максвелла

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\varphi) = \frac{i\omega}{c} B_z = \frac{i\omega}{c} B_0(t).$$

Остаточно маємо

$$E_\varphi = \begin{cases} \frac{kcB_0}{4\pi\lambda} \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} e^{-i\omega t}, & r < a \\ \frac{k}{\lambda} \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} \frac{a}{r} nI_0 e^{-i\omega t} + \frac{4i\pi\omega}{2c^2 r} (r^2 - a^2) nI_0 e^{-i\omega t}, & a \leq r \leq b \\ \frac{k}{\lambda} \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} \frac{a}{r} nI_0 e^{-i\omega t} + \frac{4i\pi\omega}{2c^2 r} (b^2 - a^2) nI_0 e^{-i\omega t}, & r > b. \end{cases}$$

**7.13.** Розподіл полів і струму аналогічний задачі 7.12, але тут немає соленоїду. Розв'язок шукаємо в циліндричних координатах у вигляді  $\mathbf{B}(r) = f(r)\mathbf{e}_z e^{-i\omega t}$ ,  $\mathbf{e}_z$  — одиничний вектор осі  $OZ$ . Зовні циліндру є лише зовнішнє поле, тому гранична умова для напруженості така  $f(a) = B_0$ .

Аналогічно до задачі 7.12 рівняння для магнітного поля за умови регулярності при  $r = 0$  дає

$$\mathbf{H}(r) = \mathbf{e}_z B_0 \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)} e^{-i\omega t},$$



де  $k = \frac{1+i}{\delta}$ ,  $\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\lambda\omega}}$ .

Густина струму знайдемо з рівняння Максвелла як

$$\mathbf{j} = -\frac{c}{4\pi} \frac{dH_z}{dr} \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi B_0 \frac{kc}{4\pi} \frac{J_1(kr)}{J_0(ka)} e^{-i\omega t}.$$

Для малих частот  $|ka| \ll 1$  (або  $\delta \gg a$ ) маємо

$$\mathbf{j} = \mathbf{e}_\varphi \frac{\lambda\mu\omega r}{2c} e^{-i\omega t}.$$

За високих частот  $|ka| \gg 1$  (або  $\delta \ll a$ ) в області  $r \gg \delta$

$$\mathbf{j} = \mathbf{e}_\varphi \frac{cB_0(i-1)}{4\pi\delta} \sqrt{\frac{a}{r}} \exp\left[-\frac{a-r}{\delta}(1-i) - i\omega t\right].$$

Тут використано асимптотичні формули для функцій Бесселя (Г.10).

**7.14.** Використаємо формулу густини струму  $j_\varphi = knI_0 \frac{J_1(kr)}{J_0(ka)} e^{-i\omega t}$ , отриману в задачі 7.12.

Кількість теплоти, яка виділяється на одиницю довжини циліндра знайдемо як:

$$Q = \frac{1}{2\lambda} \int_0^a |j_\varphi|^2 2\pi r dr.$$

За малих частот  $|ka| \ll 1$  (або  $\delta \gg a$ ) маємо  $j_\varphi \approx nI_0 \frac{k^2}{2} r e^{-i\omega t} = inI_0 \frac{r}{\delta^2} e^{-i\omega t}$  ( $k^2 = \frac{2i}{\delta^2}$ ,  $\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\lambda\omega}}$ ), звідки

$$Q = \frac{\pi n^2 I_0^2}{16\lambda} \left(\frac{a}{\delta}\right)^4.$$

За високих частот  $|ka| \gg 1$  (або  $\delta \ll a$ ) основний внесок дає область поблизу поверхні циліндра, де можна застосувати асимптотичну формулу (див. (Г.10)) для густини струму

$$j_\varphi = nI_0 \frac{i-1}{\delta} \sqrt{\frac{a}{r}} e^{-(1-i)\frac{a-r}{\delta} - i\omega t},$$

звідси

$$Q = \frac{\pi n^2 I_0^2}{\lambda} \left(\frac{a}{\delta}\right).$$

$$7.15. \mathbf{H} = H_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \mathbf{e}_y, \mathbf{j} = -\frac{cH_0}{4\pi\delta} e^{-\frac{x}{\delta}} \mathbf{e}_z.$$

7.16. Магнітне поле зовні кулі ( $r > R$ ):

$$H_r = \left( H_0 + \frac{2m}{r^3} \right) \cos \theta,$$

$$H_\theta = \left( -H_0 + \frac{m}{r^3} \right) \sin \theta,$$

де

$$m = -\frac{H_0 R^3}{2} \left( 1 - 3 \frac{\delta}{R} \operatorname{cth} \frac{R}{\delta} + 3 \frac{\delta^2}{R^2} \right).$$

Магнітне всередині кулі ( $r < R$ ):

$$H_r = \frac{2\delta^2 A}{r^3} \left[ \operatorname{sh} \frac{r}{\delta} - \frac{r}{\delta} \operatorname{ch} \frac{r}{\delta} \right] \cos \theta,$$

$$H_\theta = \frac{\delta^2 A}{r^3} \left[ \left( 1 + \frac{r^2}{\delta^2} \right) \operatorname{sh} \frac{r}{\delta} - \frac{r}{\delta} \operatorname{ch} \frac{r}{\delta} \right] \sin \theta,$$

де

$$A = -\frac{3H_0 R}{2 \operatorname{sh} \frac{R}{\delta}}.$$

7.17.  $H_z = H_0 \frac{I_0(r/\delta)}{I_0(R/\delta)}$ ,  $\langle M_z \rangle = -\frac{1}{4\pi} H_0 \left( 1 - 2 \frac{\delta}{R} \frac{I_1(r/\delta)}{I_0(R/\delta)} \right)$ , де  $I_0$  та  $I_1$  — модифіковані функції Бесселя,  $\delta$  — глибина проникнення магнітного поля.

7.18. Потік вектора магнітної індукції через довільну поверхню, що «на-тягнута» на кільце (тобто опирається на кільце), не залежить від вибору цієї поверхні. Далі обчислюємо потік через напівсферу радіуса  $R$ , що опирається на кільце. Повний магнітний потік, що пронизує пронизує надпровідне кільце, зберігається  $\Phi = \text{const}$ . Оскільки, в спочатку диполь не було внесено,  $\Phi = 0$ , і він залишатиметься таким же. Коли магнітний диполь опиниться в центрі кільця, повний магнітний потік, що пронизує кільце, є сумою потоку, створюваного струмом кільця, та потоку  $\Phi_m$ , створюваного диполем:

$$\Phi = \frac{1}{c} LI + \Phi_m = 0,$$

де  $L$  — індуктивність кільця,  $I$  — струм, що тече по кільцю.

Потік  $\Phi_m$  через напівсферу легко обчислити, виходячи з формули

для поля магнітного диполя, розташованого в центрі кільця:

$$\mathbf{B} = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{m}r^2}{r^5}.$$

Обчислення потоку дає

$$\Phi_m = \frac{2\pi m}{R}.$$

Звідси,

$$I = -\frac{2\pi c m}{RL}.$$

Знак мінус вказує на те, що індукційний що магнітний момент струму протилежний напрямку магнітного диполя.

$$\mathbf{7.19.} \quad I = \frac{c\Phi_0}{L}.$$

$$\mathbf{7.20.} \quad I = \frac{cB\pi R^2}{L}, \quad A = \frac{\Phi^2}{2L} = \frac{B^2\pi^2 R^4}{2L}.$$

$$\mathbf{7.21.} \quad h = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3p_m^2}{mg}}.$$

$$\mathbf{7.22.} \quad \text{За умови } \delta \ll r, \quad F = \frac{6\pi^2 I^2 R^4 r^3 z}{(R^2 + z^2)^4}.$$

$$\mathbf{7.23.} \quad F_x = \frac{H_0^2}{8\pi}.$$

## Електромагнітні хвилі в середовищі

$$\mathbf{8.8.} \quad \alpha_{ik} = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \delta_{ik} - i \frac{e^3 \omega H_{0l}}{m^2 c (\omega_0^2 - \omega^2)^2} e_{ikl}.$$

**8.15.** Виберемо вісь  $OZ$  декартових координат у напрямку руху хвилі, електричне поле направимо по осі  $OX$ . Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_1 \mathbf{e}_x e^{i(k_1 z - \omega t)}, \quad z < 0, \\ \mathbf{E} &= E_2 \mathbf{e}_x e^{i(k_2 z + \omega t)} + E'_2 \mathbf{e}_x e^{-i(k_2 z + \omega t)}, \quad 0 < z < d, \end{aligned}$$

$$\mathbf{E} = E_2 \mathbf{e}_x e^{i(k_2(z-d) - \omega t)}, \quad z > d,$$

де  $k_s = \frac{\omega_s}{c} n_s$ ,  $s = 1, 2, 3$ .

Магнітні поля отримуємо з рівнянь Максвелла. З граничних умов для тангенціальних компонент електричного та магнітного поля при  $z = 0$  маємо:

$$E_2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{k_1}{k_2} \right) E_1, \quad E_2' = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{k_1}{k_2} \right) E_1.$$

З граничних умов при  $z = d$ :

$$e^{ik_2 d} E_2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{k_3}{k_2} \right) E_3, \quad E_2' e^{-ik_2 d} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{k_3}{k_2} \right) E_3.$$

Аналіз сумісності цих рівнянь дає умову існування нетривіального розв'язку:

$$e^{2ik_2 d} = \frac{(n_2 - n_1)(n_2 + n_3)}{(n_2 + n_1)(n_2 - n_3)}.$$

Ліва частина цього співвідношення є дійсною, коли вона дорівнює 1 чи  $-1$ . Звідси маємо дві можливості:

$$d = \begin{cases} m \frac{\lambda_2}{2}, & n_1 = n_3 \\ (2m + 1) \frac{\lambda_2}{2}, & n_2^2 = n_1 n_3 \end{cases}.$$

де  $\lambda_2 = \frac{2\pi c}{\omega n_2}$ .

**8.16.** Дисперсійне рівняння  $\mathbf{k}^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$ . Групова швидкість

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k} c}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \omega_p^2 / c^2}},$$

показник заломлення  $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ , де  $\omega_p = \frac{4\pi N e^2}{m}$  — плазмова частота.

**8.17.**

$$\{\varepsilon\} = \begin{pmatrix} \alpha & i\beta & 0 \\ -i\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

де константи  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  задані формулами:

$$\alpha = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2},$$

$$\beta = \frac{\omega_B \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_B^2)},$$

$$\gamma = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

де  $\omega_p^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m_e}$ ,  $\omega_B = \frac{|e|B}{m_e c}$ .

**8.18.** Магнітне поле направимо по осі  $OZ$  (в декартових координатах) та позначимо  $\mathbf{m}_{\pm} = (1, \mp i, 0)$ ,  $k_{\pm}^2 = \frac{\omega}{c^2} \cdot \frac{\omega^2 \pm \omega \omega_B - \omega_p^2}{\omega \pm \omega_B}$ .

Для хвиль, що поширюються у додатному напрямку осі  $OZ$ , розв'язки рівнянь Максвелла мають вигляд  $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{m}_{\pm} e^{i(k_{\pm} z - \omega t)}$  при  $\omega > 0$  для дійсного  $k_{\pm} > 0$ .

Хвилі з поляризацією  $\mathbf{m}_{+}$  проходять у додатному напрямку осі  $OZ$  при  $\omega > \omega_1 = \sqrt{\frac{\omega_B^2}{4} + \omega_p^2} - \frac{\omega_B}{2}$ .

Хвилі з поляризацією  $\mathbf{m}_{-}$  проходять при  $0 < \omega < \omega_B$  та при

$$\omega > \sqrt{\frac{\omega_B^2}{4} + \omega_p^2} + \frac{\omega_B}{2}.$$

Якщо  $\omega_p > \sqrt{2}\omega_B$ , тоді інтервал  $\omega_B < \omega_1$  є забороненим для обох типів хвиль.

**8.19.** На рисунку показана плоска хвиля, яка поширюється в напрямку  $x$  перпендикулярно до металевого циліндра, вісь якого напрямлена вздовж осі  $z$ .

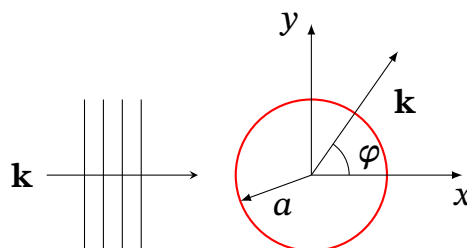


Рис. 1. До пояснення задачі

Розглянемо випадок а) ( $\mathbf{E} \parallel \mathbf{e}_z$ ).

Поляризація, паралельна до осі циліндра, викликає поверхневі струми лише у напрямку осі  $z$ , а тому магнітного поля вздовж осі  $z$  немає.

Монохроматична плоска хвиля з частотою  $\omega$  індукує гармонічні струми і, як наслідок ми маємо розсіяну хвилю, яка теж є гармонічною.

Поза циліндром електричне та магнітне поля задовольняють хвильовому рівнянню. Тому просторові частини  $E_z$  і  $B_z$  задовольняють рівнянню Гельмгольца:

$$\left[ \Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right] u = 0,$$

або в циліндричних координатах:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0.$$

Розділимо змінні в останньому рівнянні  $u(r, \varphi) = R(r)G(\varphi)$ , одразу отримаємо  $G(\varphi) = e^{\pm im\varphi}$ , а рівняння для  $R(r)$ , як відомо, задовольняє рівняння диференціального Бесселя (Г.1), якщо покласти  $x = kr$ :

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left( 1 - \frac{m^2}{x^2} \right) R = 0, \quad (*)$$

розв'язок якого, як відомо, можна представити за допомогою функцій Бесселя  $J_m(x)$  та Неймана  $N_m$ . В нашому випадку краще скористатись функціями Ганкеля 1-го роду, що дають асимптотику на нескінченності  $e^{ikr}/\sqrt{r}$  (див. (Г.12)), яка відповідає умовам випромінювання.

Поле  $E_z$  розсіяної хвилі будемо шукати як лінійну комбінацію функцій  $H_m^{(1)} e^{im\varphi}$  з коефіцієнтами  $A_m$ :

$$E_{z,\text{розс}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(kr) e^{im\varphi}.$$

Поле плоскої падаючої хвилі  $E_{z,\text{пад}} = E_0 e^{ikx} = E_0 e^{ikr \cos \varphi}$  розкладемо за функціями Бесселя (див (Г.13)):

$$E_{z,\text{пад}} = E_0 e^{ikr \cos \varphi} = E_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(kr) e^{im\varphi}.$$

Загальне поле є сумою падаючої та розсіяної хвиль, за принципом суперпозиції:

$$E_z = E_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} [i^m J_m(kr) + A_m H_m^{(1)}(kr)] e^{im\varphi}.$$

Далі скористаємось граничною умовою  $E_z(r = a) = 0$  і визначимо  $a_m$  з рівняння (\*); матимемо:

$$E_z(r, \varphi) = E_0 e^{ikr \cos \varphi} - E_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \frac{J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} H_m^{(1)}(kr) e^{im\varphi}.$$

Магнітне поле отримуємо з рівняння Максвелла  $\mathbf{B} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{k} \nabla E_z \times \mathbf{e}_z$ ,

$$B_r = \frac{1}{kr} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi},$$

$$B_\varphi = -\frac{1}{k} \frac{\partial E_z}{\partial r}.$$

Легко перевірити, що  $B_r = 0$  при  $r = a$  на поверхні надпровідного циліндра і, таким чином, задовольняє граничній умові.

Випадок б) ( $\mathbf{E} \perp \mathbf{e}_z$ ).

Для перпендикулярної поляризації викладки аналогічні, але тут зручніше починати з складової магнітного поля, яке у плоскій хвилі має вигляд  $B_z = E_0 e^{ikx}$ . Гранична умова для тангенціальної компоненти електричного поля дає:

$$E_\varphi(r = a) = \frac{1}{k} \frac{\partial B_z}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0.$$

Отже

$$B_z = E_0 e^{ikr \cos \varphi} - E_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \frac{J'_m(ka)}{H_m^{(1)'}(ka)} H_m^{(1)}(kr) e^{im\varphi},$$

де штрих «'» означає похідну по радіальній аргументу  $kr$ .

Знайдемо тепер диференціальні перерізи розсіювання  $\frac{d\sigma}{d\varphi} = r \frac{|\mathbf{E}_{\text{розс}}|^2}{|\mathbf{E}_{\text{пад}}|^2}$ .

Враховуючи, що  $\lim_{r \rightarrow \infty} H_m^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}$ , маємо:

$$\frac{d\sigma_{\parallel}}{d\varphi} = \frac{2}{\pi k} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} e^{im\varphi} \right|^2, \quad \frac{d\sigma_{\perp}}{d\varphi} = \frac{2}{\pi k} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J'_m(ka)}{H_m^{(1)'}(ka)} e^{im\varphi} \right|^2.$$

Ці диференціальні перерізи мають розмірність довжини (а не площі), оскільки вони визначають потужність на одиницю довжини циліндра, тобто потужність, випромінювана через границю великого кола, співвісного з циліндром.

Повні перерізи:

$$\sigma_{\parallel} = \frac{4}{k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m^2(ka)}{J_m^2(ka) + N_m^2(ka)}, \quad \sigma_{\perp} = \frac{4}{k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m^{2'}(ka)}{J_m^{2'}(ka) + N_m^{2'}(ka)}.$$

**8.20.** На рисунку показана плоска хвиля, яка поширюється в напрямку  $x$  перпендикулярно до діелектричного циліндра, вісь якого напрямлена вздовж осі  $z$ .

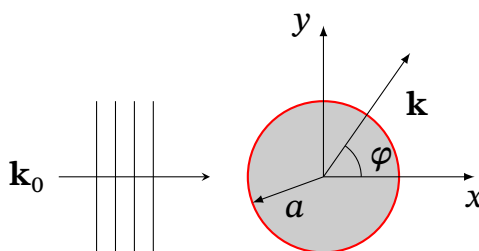


Рис. 2. До пояснення задачі

Вказівка: дивіться розв'язок задачі 8.19 і врахуйте необхідну поляризацію, та граничні умови для поля на межі розділу.

Поле в циліндрі  $r < a$  шукаємо у вигляді:

$$E_{z,\text{in}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m J_m(kr) e^{im\varphi}, \quad k = \sqrt{\epsilon}\omega/c.$$

Зовні, електричне поле є сумою падаючої та розсіяної хвилі:

$$E_z = E_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( i^m J_m(k_0 r) + B_m H_m^{(1)}(k_0 r) \right) e^{im\varphi}, \quad k = \omega/c.$$

де

$$A_m = E_0 i^m \frac{H_m^{(1)}(k_0 a) J_m'(k_0 a) - H_m^{(1)'}(k_0 a) J_m(k_0 a)}{\sqrt{\epsilon} H_m^{(1)}(k_0 a) J_m'(ka) - H_m^{(1)'}(k_0 a) J_m(ka)},$$

$$B_m = E_0 i^m \frac{J_m(ka) J_m'(k_0 a) - \sqrt{\epsilon} J_m'(ka) J_m(k_0 a)}{\sqrt{\epsilon} H_m^{(1)}(k_0 a) J_m'(ka) - H_m^{(1)'}(k_0 a) J_m(ka)}.$$

**8.21.** За умови задачі електричне і магнітне поля хвилі, які можна вважати квазістаціонарними, індукують в надпровідній кулі електричний дипольний момент  $p_e = ER^3$  та магнітний момент  $p_m = -BR^{3/2}$ . Звідси отримуємо сумарне магнітне поле в хвильовій зоні за формулами дипольного та магнітодипольного випромінювання. Диференціальний переріз

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = R^6 k^4 \left[ \frac{5}{8} (1 + \cos^2 \theta) - \cos \theta \right],$$

де  $k$  — хвильове число,  $\theta = \widehat{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}}$  — кут між напрямками падаючої та розсіяної хвилі. Повний переріз  $\sigma = \frac{10\pi R^6 k^4}{3}$ .



**8.22.**  $I(x, y) = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$ , де  $\alpha = \frac{kax}{2l}$ ,  $\beta = \frac{kby}{2l}$ .

**8.23.** Вказівка: при інтегруванні слід врахувати співвідношення для функцій Бесселя (Г.7)  $\int_0^x x' J_0(x') dx' = x J_1(x)$ .

Відповідь:  $I(r) = 4I_0 \left( \frac{J_1\left(\frac{kRr}{l}\right)}{\frac{kRr}{l}} \right)^2$ .

## А. Основні формули векторного аналізу

### А.1. Тривимірний символ Леві-Чівіті

Тривимірний символ Леві-Чівіті визначений співвідношеннями

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj}. \quad (\text{A.1})$$

Деякі співвідношення з цим символом:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}, \quad (\text{A.2})$$

$$\varepsilon_{iqk}\varepsilon_{pqk} = 2\delta_{ip}. \quad (\text{A.3})$$

Ротор та векторний добуток у декартових координатах  $\{x, y, z\} = \{x_1, x_2, x_3\}$ :

$$[\nabla \times \mathbf{A}]_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k, \quad (\text{A.4})$$

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_i = \varepsilon_{ijk}A_j B_k, \quad (\text{A.5})$$

всі індекси пробігають значення 1, 2, 3.

### А.2. Диференціальні операції в різних системах координат

#### Декартова система координат

$$\text{grad } \psi \equiv \nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (\text{A.6})$$

$$\text{div } (\text{grad } \psi) \equiv \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (\text{A.7})$$

$$\text{div } \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.8})$$

$$\text{rot } \mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \quad (\text{A.9})$$

## Циліндрична система координат

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_z \quad (\text{A.10})$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\varphi + \\ & + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Орти циліндричної системи координат зв'язані з декартовими ортами як:

$$\mathbf{e}_r = \cos\varphi\mathbf{e}_x + \sin\varphi\mathbf{e}_y, \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\mathbf{e}_x + \cos\varphi\mathbf{e}_y, \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z. \quad (\text{A.16})$$

## Сферична система координат

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi \quad (\text{A.17})$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \quad (\text{A.18})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right)\mathbf{e}_\theta + \\ & + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Орти сферичної системи координат зв'язані з декартовими ортами як:

$$\mathbf{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{e}_y + \cos\theta\mathbf{e}_z, \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\mathbf{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\mathbf{e}_y - \sin\theta\mathbf{e}_z, \quad (\text{A.22})$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\mathbf{e}_x + \cos\varphi\mathbf{e}_y. \quad (\text{A.23})$$

$$(\text{A.24})$$

### А.3. Другі похідні

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \times (\nabla \varphi) = 0 \quad (\text{A.25})$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \quad (\text{A.27})$$

### А.4. Похідні від добутків

$$\operatorname{grad} (\varphi \psi) = \psi \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{grad} \psi \quad (\text{A.28})$$

$$\operatorname{div} (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \operatorname{grad} \varphi \quad (\text{A.29})$$

$$\operatorname{rot} (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{A} \quad (\text{A.30})$$

$$\operatorname{grad} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B} \quad (\text{A.31})$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad (\text{A.32})$$

$$\operatorname{rot} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A} \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad} A^2 = (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (\text{A.34})$$

### А.5. Інтегральні характеристики та теореми

Теорема Остроградського-Гаусса:

$$\oint_{\partial \Omega} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{A} dV, \quad (\text{A.35})$$

де  $\Omega$  — об'єм,  $\partial \Omega$  — його межа.

Теорема Стокса:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (\text{A.36})$$

де  $S$  — поверхня, що спирається на контур  $\partial S$ .

Теорема Гріна:

$$\iiint_{\Omega} (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV = \iint_{\partial \Omega} (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{A.37})$$

## Б. Поліноми Лежандра

Поліноми Лежандра застосовуються у теорії потенціалу при розкладанні виразу:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_0 \cos \chi + r_0^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \chi),$$

де  $r_{>}$ ,  $r_{<}$  — більша і менша із величин  $|\mathbf{r}|$  та  $|\mathbf{r}_0|$ , відповідно,  $\cos \chi$  — кут між векторами  $\mathbf{r}$  та  $|\mathbf{r}_0|$ .

### Деякі поліноми Лежандра

$$\begin{aligned} P_0(\cos \chi) &= 1, & P_1(\cos \chi) &= \cos \chi, \\ P_2(\cos \chi) &= \frac{1}{2}(3 \cos^2 \chi - 1), & P_3(\cos \chi) &= \frac{1}{2}(5 \cos^2 \chi - 3 \cos \chi). \end{aligned}$$

## В. Сферичні гармоніки

Сферичні функції, що залежать від полярних кутів визначаються формулою:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^{(m+|m|)/2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

де  $l = 0, 1, 2, \dots$ ,  $m$  пробігає значення від  $-l$  до  $l$ , а  $P_l^{|m|}(x)$  — приєднані функції Лежандра.

Вони утворюють повну ортонормовану систему функцій:

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} Y_{l',m'}^*(\theta, \varphi) Y_{l,m}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}.$$

Деякі сферичні гармоніки:

$$\begin{aligned} Y_{0,0}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \\ Y_{1,\pm 1}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}, \\ Y_{1,0}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \\ Y_{2,0}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), \\ Y_{2,\pm 1}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi}, \end{aligned}$$

$$Y_{2,\pm 2}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi}.$$

## Г. Циліндричні функції

Рівняння, що виникають в задачах з циліндричною симетрією, мають вигляд:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0, \quad (\text{Г.1})$$

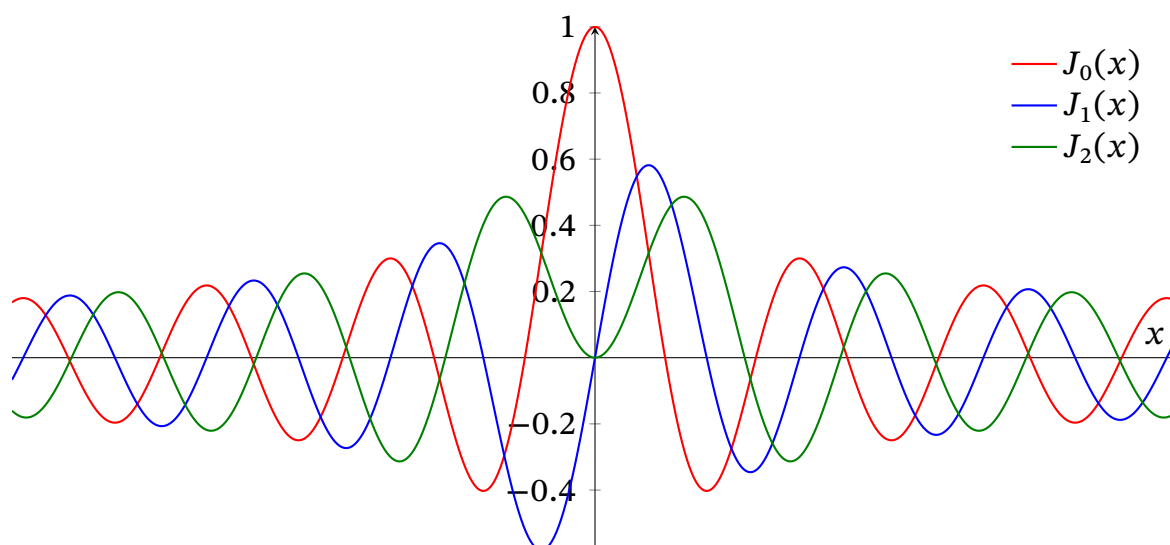
розв'язок яких можна представити за допомогою функцій Бесселя  $J_m(x)$  та Неймана  $N_m$  у вигляді лінійної комбінації  $y(x) = AJ_m(x) + BN_m(x)$  або у вигляді лінійної комбінації  $y(x) = AH_m^{(1)}(x) + BH_m^{(2)}(x)$ , де функції  $H_m^{(1,2)} = J_m \pm iN_m$  — називаються функціями Ганкеля 1-го та 2-го роду, відповідно. Доцільність введення функцій Ганкеля обумовлена тим, що вони мають прості асимптотичні розкладання при  $|x| \gg 1$  і зручні для задач, пов'язаних з поширенням хвиль.

Для  $m = 0, 1, 2, \dots$  функції Неймана нескінченні в точці  $x = 0$ , тобто  $\lim_{x \rightarrow 0} N_m(x) = -\infty$ .

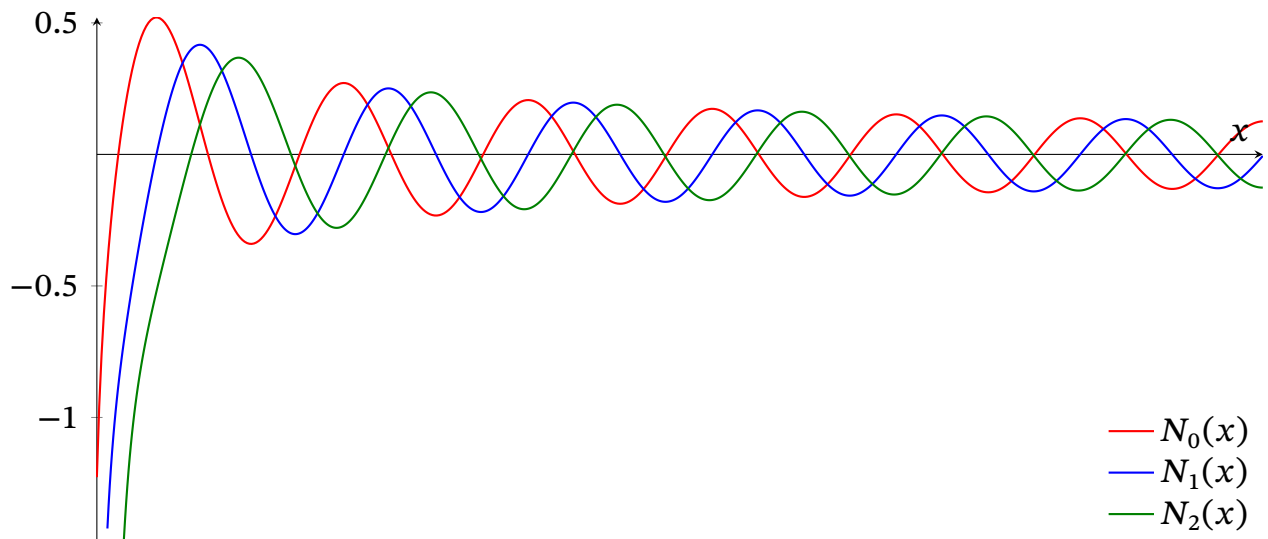
Функції Бесселя можна представити за допомогою ряду (в околі точки  $x = 0$  для цілих, або невід'ємних  $m$ ):

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + m + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}, \quad (\text{Г.2})$$

де  $\Gamma$  — [гамма-функція](#). Для  $m \in \mathbb{Z}$  має місце рівність  $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$ .



Графіки функцій Бесселя  $J_m$  для  $m = 0, 1, 2$ .



Графіки функцій Неймана  $N_m$  для  $m = 0, 1, 2$ .

Функції Неймана визначаються через функції Бесселя як:

$$N_m(x) = \frac{J_m(x) \cos m\pi - J_{-m}(x)}{\sin m\pi}. \quad (\Gamma.3)$$

Деякі рекурентні співвідношення:

$$J_{m+1}(x) + J_{m-1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x). \quad (\Gamma.4)$$

Деякі диференціальні та інтегральні співвідношення для нецілих  $m$  (для цілих  $m$  ці функції можна визначити за допомогою граничного переходу):

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x), \quad (\Gamma.5)$$

$$\frac{d}{dx} (x^{-m} J_m(x)) = -x^{-m} J_{m+1}(x), \quad (\Gamma.6)$$

$$\int_0^x x'^{m+1} J_m(x') dx' = x^{m+1} J_{m+1}. \quad (\Gamma.7)$$

Інтеграли від добутків:

$$\int_0^x J_m(k_1 x') J_m(k_2 x') x' dx' = \frac{x (k_2 J_m(k_1 x) J'_m(k_2 x) - k_1 J_m(k_2 x) J'_m(k_1 x))}{k_1^2 - k_2^2}. \quad (\Gamma.8)$$

В задачах, зазвичай, часто необхідно знайти наближений вигляд циліндричних функцій при малих та великих значеннях аргументу  $x$ :

при  $|x| \ll 1$  з (Г.2)

$$J_0(x) \approx 1 - \frac{x^2}{4}, \quad J_m \approx \frac{x^m}{2^m m!}, \quad m \geq 1, m \in \mathbb{N}; \quad (\Gamma.9)$$

при  $|x| \gg 1$

$$J_m \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{Г.10})$$

$$N_m \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{Г.11})$$

$$H_m^{(1,2)} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{\pm i\left(x - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (\text{Г.12})$$

Співвідношення Якобі-Ангера (розкладання за функціями Бесселя):

$$e^{ix \cos \theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(x) e^{im\theta}, \quad e^{ix \sin \theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) e^{im\theta}. \quad (\text{Г.13})$$

## Д. Дельта-функція Дірака

Дельта-функція Дірака (або  $\delta$ -функція) є узагальненою функцією і була введена фізиком Полем Діраком для моделювання густини ідеалізованої точкової маси або точкового заряду.

На «фізичному рівні строгості» можна визначити  $\delta$ -функцію формальним співвідношенням:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0), \quad (\text{Д.1})$$

У випадку інтегрування по скінченному об'єму  $V$ :

$$\int_V f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = f(\mathbf{r}_0), \quad (\text{Д.2})$$

де точка  $\mathbf{r}_0$  знаходиться всередині об'єму  $V$ .

## Властивості дельта-функції

- а) Дельта-функція парна  $\delta(-x) = \delta(x)$ ,
- б)  $x\delta(x) = 0$ ,
- в)  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ ,
- г)  $x\delta'(x) = -\delta(x)$ ,
- д)  $\delta(f(x)) = \sum_k \frac{\delta(x-x_k)}{|f'(x_k)|}$ , де  $x_k$  — нулі функції  $f(x)$ ,



## Е. Фізичні константи

Таблиця Е.1. Деякі фізичні константи в системі СГС

Константа	Символ	Значення
Швидкість світла у вакуумі	$c$	$2.99792458 \cdot 10^{10}$ см/с
Гравітаційна стала	$G$	$6.67428 \cdot 10^{-8}$ см <sup>3</sup> /(г·с <sup>2</sup> )
Стала Планка	$\hbar$	$1.0545716 \cdot 10^{-27}$ ерг·с
Елементарний заряд	$e$	$4.80320427 \cdot 10^{-10}$ СГСЕ <sub>q</sub> <sup>1</sup> $1.60217662 \cdot 10^{-19}$ Кл (в SI)
Маса електрона	$m_e$	$9.10938215 \cdot 10^{-20}$ г
Енергія спокою електрона	$m_e c^2$	$0.511 \cdot 10^6$ еВ
Маса протона	$m_p$	$1.6726219 \cdot 10^{-30}$ г
Енергія спокою протона	$m_p c^2$	$938.26 \cdot 10^6$ еВ
Електрон-Вольт	еВ	$1.602 \cdot 10^{-12}$ ерг
Борівський радіус	$a_0$	$5.2917720859 \cdot 10^{-9}$ см
Магнетон Бора	$\mu_B$	$9.27400915 \cdot 10^{-21}$ ерг/Гс
Стала Больцмана	$k$	$1.3806504 \cdot 10^{-16}$ ерг/К
Універсальна газова стала	$R$	$8.314 \cdot 10^7$ ерг/(К·моль)
Число Авогадро	$N_A$	$6.022 \cdot 10^{23}$ моль <sup>-1</sup>
Атомна одиниця маси	$u$	$1.6604210^{-24}$ г

<sup>1</sup> Міжнародна назва цієї одиниці — Франклін (позначення: Fr, Фр). У радянській і сучасній вітчизняній літературі зазвичай називається просто СГСЕ-од. заряду. Франклін є однією з чотирьох основних одиниць системи Гауса (поряд з сантиметром, грамом і секундою).

# Література

---

## Підручники та посібники

1. *Greiner W.* Classical electrodynamics. — Springer, 1998. — 556 с. — ISBN 978-1-4612-0587-6.
2. *Griffiths D. J.* Introduction to Electrodynamics. — Addison Wesley, 2012. — 625 с. — ISBN 0-321-85656-2.
3. *Jackson J. D.* Classical Electrodynamics. — 3-е вид. — New York : John Wiley & Sons, 1998. — С. 808. — ISBN 978-0-471-30932-1.
4. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* The Classical Theory of Fields. Т. 2. — 4-е вид. — Oxford; New York : Pergamon Press, 1975. — 402 с. — ISBN 0080181767.
5. *Landau L. D., Lifshitz E. M., Pitaevskiĭ L. P.* Electrodynamics of Continuous Media. Т. 8. — 2-е вид. — Oxford : Butterworth-Heinemann, 1984. — 460 с. — ISBN 0750626348.
6. *Жданов В. І.* [Вступ до електродинаміки суцільних середовищ](#). — КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. — 122 с.
7. *Жданов В. І.* Вступ до теорії відносності. — ВПЦ «Київський університет», 2008. — 290 с. — ISBN 978-966-439-050-4.
8. *Жданов В. І.* [Класична теорія електромагнітного поля. Мікроскопічна теорія](#). — ФТІ, НТУУ «КПІ», 2014. — 84 с.
9. *Сугаков В. Й.* Теоретична фізика : Електродинаміка. — Київ : Вища школа, 1975. — С. 272.
10. *Федорченко А. М.* Теоретична фізика. Т. 1: Класична механіка і електродинаміка. — Київ : Вища школа, 1992. — С. 535. — ISBN 5-11-003760-4.

## Задачники

11. *Batygin V. V., Toptygin I. N.* Problems in Electrodynamics. — 2nd ed. — London; New York : Academic Press, 1978. — 494 p.
12. Сборник задач по теоретической физике / Л. Г. Гречко, В. Й. Сугаков, О. Ф. Томасевич, А. М. Федорченко. — 2-е изд. — М. : Высшая школа, 1984. — 319 с.

**Жданов Валерій Іванович**  
**Пономаренко Сергій Миколайович**  
**Долгошей Володимир Борисович**

## **Класична електродинаміка**

### **Збірник задач**

*Комп'ютерне верстання в системі  $\text{\LaTeX}$  2<sub>ε</sub> С. М. Пономаренко*

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
Свідоцтво про державну реєстрацію: серія ДК № 5354 від 25.05.2017 р.  
просп. Перемоги, 37, м. Київ, 03056