У нескінченому прямому циліндричному провіднику радіуса R тече струм із густиною:

$$\mathbf{j}(r) = \frac{a}{r}\mathbf{e}_z,$$

де $a = \text{const}$, r — відстань від осі циліндра. Магнітна проникність: $\mu = \text{const}$ всередині провідника та μ_0 (вакуум) зовні. Потрібно знайти векторний потенціал $\mathbf{A}(r)$ з умовою калібрування $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

1 Розв'язок

Векторний потенціал $\mathbf{A}$ має лише z-компоненту: $\mathbf{A} = A_z(r)\mathbf{e}_z$. Рівняння для $A_z(r)$:

$$\nabla^2 A_z = -\mu\frac{a}{r}.$$

1.1 Внутрішня область ($r \leq R$)

У циліндричних координатах:

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}r}\right) = -\mu\frac{a}{r}.$$

Інтегруємо:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}r}\right) = -\mu a.$$

Перше інтегрування:

$$r\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}r} = -\mu a r + C_1.$$

Поділимо на r:

$$\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}r} = -\mu a + \frac{C_1}{r}.$$

Друге інтегрування:

$$A_z(r) = -\mu a r + C_1 \ln r + C_2.$$

Оскільки A_z має бути скінченним при $r = 0$, то $C_1 = 0$. Тому:

$$A_z^{\text{in}}(r) = -\mu a r + C_2.$$

1.2 Зовнішня область ($r \geq R$)

Тут $\mathbf{j} = 0$, тому:

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}r}\right) = 0.$$

Інтегруємо:

$$r\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}r} = C_3.$$

Поділимо на r:

$$\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}r} = \frac{C_3}{r}.$$

Інтегруємо ще раз:

$$A_z^{\text{out}}(r) = C_3 \ln r + C_4.$$

1.3 Умови зшивання при $r = R$

1. Неперервність A_z:

$$-\mu a R + C_2 = C_3 \ln R + C_4.$$

2. Неперервність $\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}r}$:

$$-\mu a = \frac{C_3}{R}.$$

З другого рівняння:

$$C_3 = -\mu a R.$$

Підставляємо C_3 у перше рівняння:

$$-\mu a R + C_2 = -\mu a R \ln R + C_4.$$

Виберемо $C_4 = 0$ (калібрувальна свобода), тоді:

$$C_2 = \mu a R(1 - \ln R).$$

1.4 Фінальні вирази

- Всередині провідника ($r \le R$):
$$A_z^{\text{in}}(r) = \mu a(R - r) - \mu a R \ln R.$$

- Зовні провідника ($r \ge R$):
$$A_z^{\text{out}}(r) = -\mu a R \ln r.$$

Можна опустити загальну константу $-\mu a R \ln R$, оскільки вона не впливає на магнітне поле $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Тому остаточно:

$$\boxed{\mathbf{A}(r) = \begin{cases} \mu a(R - r)\hat{\mathbf{e}}_z, & r \le R, \\ -\mu a R \ln\left(\dfrac{r}{R}\right)\hat{\mathbf{e}}_z, & r \ge R. \end{cases}}$$

Перевірка

- Умова калібрування $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$ виконується.

- На межі $r = R$:
$$A_z^{\text{вн}}(R) = 0, \quad A_z^{\text{зов}}(R) = -\mu a R \ln R.$$

  Щоб була неперервність, потрібно додати константу $\mu a R \ln R$ до $A_z^{\text{вн}}$, що вже зроблено.

- Похідна на межі:
$$\left.\frac{\mathrm{d}A_z^{\text{вн}}}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R} = -\mu a, \quad \left.\frac{\mathrm{d}A_z^{\text{зов}}}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R} = -\mu a.$$

  Умова зшивання похідної виконується.