0.1. Металевий циліндр радіусу a внесли у зовнішнє однорідне магнітне поле $B_z = B_0 e^{-i\omega t}$, яке паралельне до його осі. Система знаходиться у вакуумі. а) Знайдіть густину струму Фуко всередині циліндра нехтуючи ефектами самоіндукції. б) Знайдіть першу поправку до магнітного поля та густини струму Фуко в циліндрі врахувавши ефекти самоіндукції. Порівняйте результати з точним розв'язком.

Використовуючи закон Фарадея $\oint\limits_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \iint\limits_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$

$$2\pi r E_\varphi^{(0)} = -\frac{1}{c}(-i\omega\mu) B_0 e^{-i\omega t} \pi r^2,$$

маємо

$$E_\varphi^{(0)} = B_0 e^{-i\omega t} \frac{i\mu\omega}{2c} r.$$

Використовуючи закон Ома, знайдемо густину струмів Фуко:

$$j_\varphi^{(0)} = B_0 e^{-i\omega t} \frac{i\lambda\mu\omega}{2c} r.$$

Введемо коефіцієнт $k^2 = \frac{4i\pi\mu\lambda\omega}{c^2}$:

$$j_\varphi^{(0)}(r) = B_0 e^{-i\omega t} \frac{k^2 c}{8\pi} r.$$

Поправки

Знайдемо першу поправку до магнітного поля, зумовлену виникненням струму Фуко. Ці струми Фуко утворюють вкладені один в одний «соленоїди», тому магнітне поле цих струмів можна знайти як

$$H_z^{(1)} = \int\limits_r^a \frac{4\pi}{c} j_\varphi^{(0)}(r') dr' = B_0 e^{-i\omega t} \frac{k^2}{4}(a^2 - r^2).$$

З урахуванням цієї поправки, повне магнітне поле буде в циліндрі:

$$H_z = B_0 e^{-i\omega t} \left[1 + \frac{k^2}{4}(a^2 - r^2)\right].$$

Знайдемо першу поправку до електричного поля:

$$2\pi r E_\varphi^{(1)} = -\frac{1}{c}\mu \dot{H}_z^{(1)} \pi r^2,$$

звідки

$$E_\varphi^{(1)} = \frac{\mu i\omega}{c}\frac{k^2}{4}B_0 e^{-i\omega t} r(a^2 - r^2),$$

а перша поправка до густини струму

$$j_\varphi^{(1)} = \lambda E_\varphi^{(1)} = \frac{\lambda\mu i\omega}{c}\frac{k^2}{4}B_0 e^{-i\omega t}(a^2 - r^2) = \frac{k^4 c}{16\pi}B_0 e^{-i\omega t} r(a^2 - r^2),$$

отже густина струму Фуко

$$j_\varphi = j_\varphi^{(0)} + j_\varphi^{(1)} = \frac{k^2 c}{8\pi}B_0 e^{-i\omega t} r\left[1 + \frac{k^2}{4}\left(a^2 - r^2\right)\right].$$

З останнього виразу видно, що впливом самоіндукції можна нехтувати у випадку, якщо $ka \ll 1$, тобто при низьких частотах.

Порівняємо з точним розв'язком:

Магнітне поле в середині циліндра:

$$H_z = \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)}B_0 e^{-i\omega t}.$$

Оскільки $J_0(kr) \approx 1 - \frac{k^2 r^2}{4}$, $J_0(ka) \approx 1 - \frac{k^2 a^2}{4}$, а

$$H_z \approx \frac{1 - \frac{k^2 r^2}{4}}{1 - \frac{k^2 a^2}{4}}B_0 e^{-i\omega t} \approx \left(1 - \frac{k^2 r^2}{4}\right)\left(1 + \frac{k^2 a^2}{4}\right)B_0 e^{-i\omega t} \approx$$

$$\approx B_0 e^{-i\omega t}\left[1 + \frac{k^2}{4}(a^2 - r^2)\right].$$

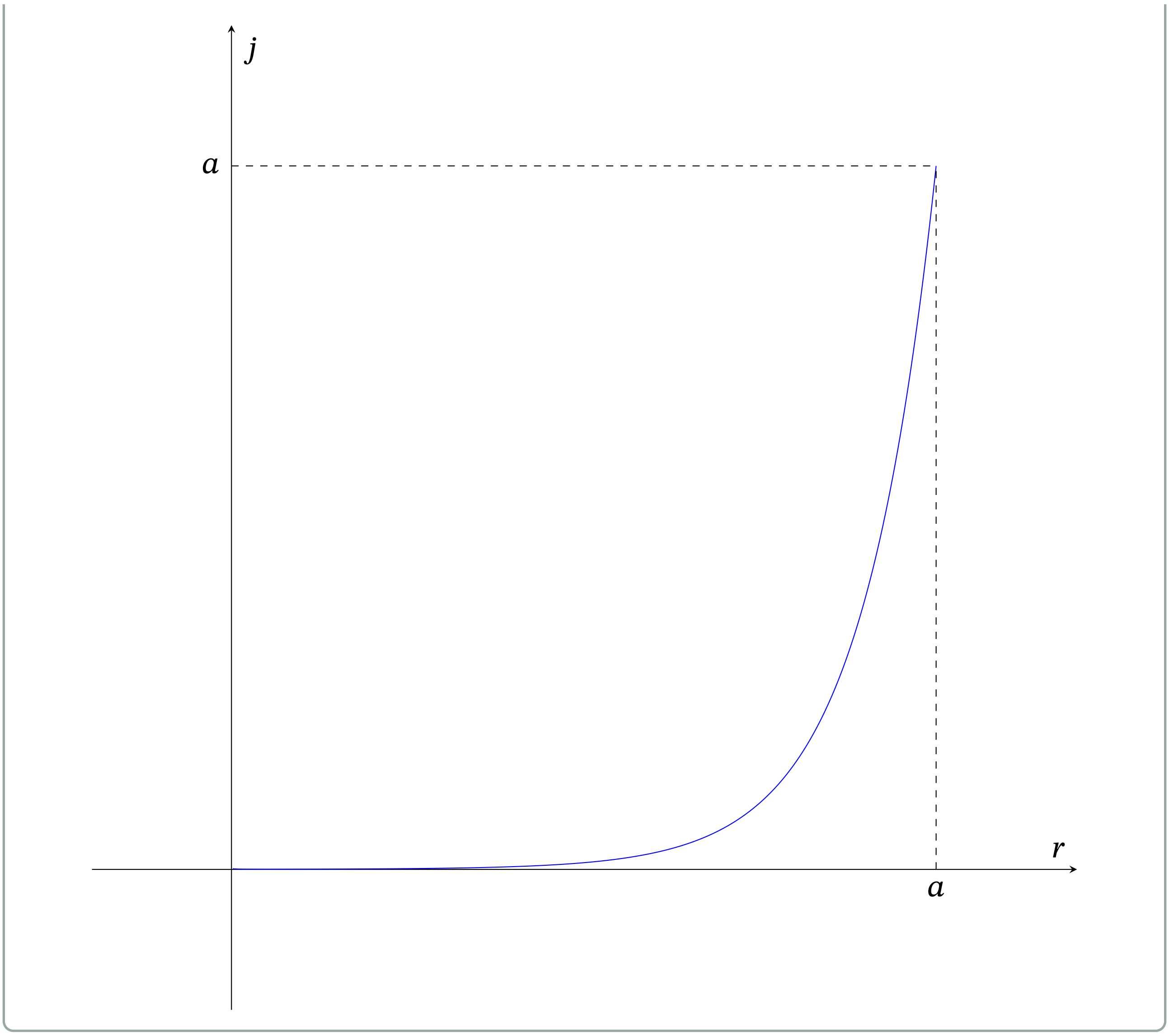
Точний вираз для густини струму

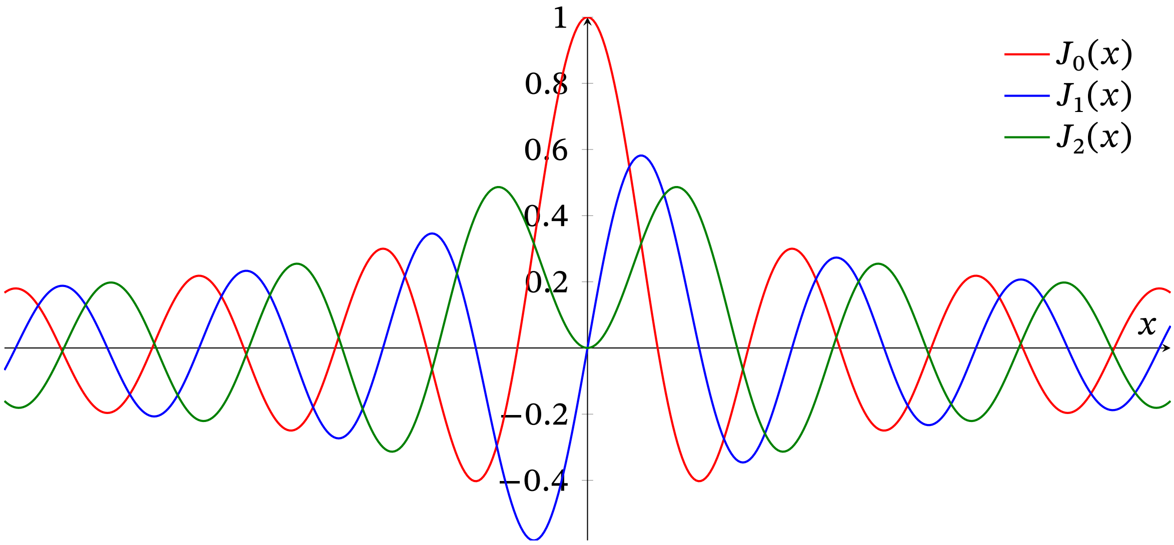
$$j_\varphi = \frac{kc}{4\pi}\frac{J_1(kr)}{J_0(ka)}B_0 e^{-i\omega t}.$$

Наближений вираз для $J_1(kr) \approx \frac{kr}{2} - \frac{k^3 r^3}{8}$:

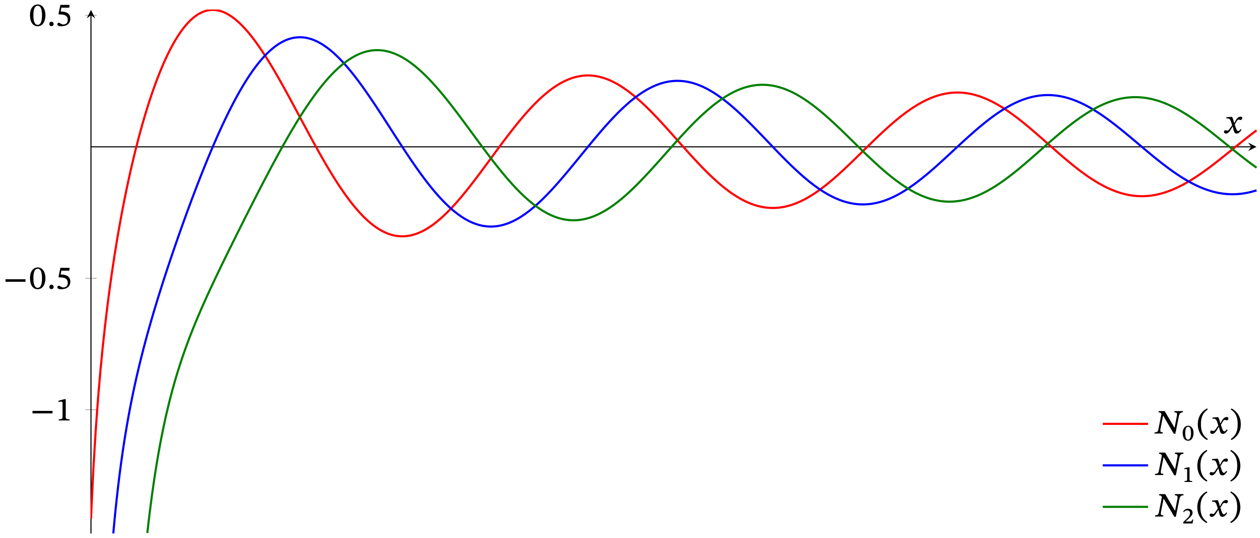
$$j_\varphi \approx \frac{kc}{4\pi}\left(\frac{kr}{2} - \frac{k^3 r^3}{8}\right)\left(1 + \frac{k^2 a^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{kc}{4\pi}B_0 e^{-i\omega t}\left(\frac{kr}{2} + \frac{k^3 a^2 r}{8} - \frac{k^3 r^3}{8}\right) = \frac{k^2 c}{8\pi}B_0 e^{-i\omega t} r\left[1 + \frac{k^2}{4}\left(a^2 - r^2\right)\right]$$





Графіки функцій Бесселя J_m для $m = 0, 1, 2$.



Графіки функцій Неймана N_m для $m = 0, 1, 2.$