

Виведення щільності енергії електромагнітного поля через векторний потенціал

1 Векторний потенціал хвилі

Розглянемо плоску електромагнітну хвилю у вакуумі з векторним потенціалом:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.}$$

де:

- \vec{A}_0 — амплітуда векторного потенціалу,
- \vec{k} — хвильовий вектор,
- $\omega = c|\vec{k}|$,
- c.c. — комплексно спряжене.

2 Електричне і магнітне поля

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i \frac{\omega}{c} \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.} \\ \Rightarrow \langle |\vec{E}|^2 \rangle &= 2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 |\vec{A}_0|^2\end{aligned}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = i(\vec{k} \times \vec{A}_0) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.}$$

Оскільки $\vec{A}_0 \perp \vec{k}$, маємо:

$$\Rightarrow \langle |\vec{B}|^2 \rangle = 2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 |\vec{A}_0|^2$$

3 Густина енергії електромагнітного поля

$$u = \frac{1}{8\pi} (\langle |\vec{E}|^2 \rangle + \langle |\vec{B}|^2 \rangle) = \frac{1}{8\pi} \cdot 4 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 |\vec{A}_0|^2 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 |\vec{A}_0|^2$$

$$\boxed{\rho = \frac{\omega^2}{2\pi c^2} |\vec{A}_0|^2}$$

Це і є шуканий вираз для щільності енергії через амплітуду векторного потенціалу.