Обзор сложностей некоторых головоломок и настольных игр

Кунин-Богоявленский Сергей

16 декабря 2023 г.

Аннотация

Данный проект подготовлен для зачета на курсе «Сложности вычислений» в МФТИ. Речь идет о вычислительной сложности различных головоломок и игр, показавшихся автору интересными. Также приведено доказательство **NP**-полноты ребусов определенного типа, именуемых «криптарифмами».

Введение

Различные игры и головоломки окружают нас с детства. Многие из них интересны своей сложностью — для решения иной головоломки приходится изрядно поломать голову. Часто эту сложность можно показать математически: каждая **NP**-полная задача в некотором смысле является головоломкой, и, наоборот, многие головоломки являются **NP**-полными. Игры для двух игроков обычно имеют более высокую сложность, например, являются **PSPACE**-полными.

Когда мы говорим о вычислительной сложности таких игр, речь идет не о классических их вариантах, которые, разумеется, лежат в P просто из-за конечности числа каких-либо игровых конфигураций, а об их обобщениях до сколь угодно больших размеров.

Не стоит думать, что эта тема искусственна — многие ученые всерьез занимаются этим, подтверждением чему является международная конференция «Fun with Algorithms», каждый год привносящая в науку интересные статьи по самым разным играм и головоломкам.

В первую очередь я перечисляю здесь реальные игры и головоломки, которые были изобретены для того, чтобы в них играли, а не анализировали.

Игры и головоломки

Шахматы

Описание: Надеюсь, не нуждается в представлении, но основная идея состоит в том, чтобы передвигать фигуры по доске 8×8, захватывая фигуры своих противников, до тех пор, пока игра не закончится или матом, или различными видами ничьих

Сложность: Классический вариант конечен, но обобщение до $n \times n$ **PSPACE**-полно с «правилом 50-ти ходов», и **EXP**-полно — без него [3].

Рис. 1: Шахматы

Реверси

Рис. 2: Реверси

Описание: Играют двусторонними фишками на квадратной доске. Игроки поочередно размещают фишки на доске своим цветом вверх, переворачивая фишки цвета противника, зажатые между новой и старой фишкой своего цвета, захватывая таким образом отрезок. Цель — к концу игры занять своим цветом больше полей, чем противник.

Сложность: Обобщенная на $n \times n$, **PSPACE**-полна [4].

Пятнашки

Описание: В матрице 4×4 все поля, за исключением одного, заняты фишками. Фишки, примыкающие к пустому полю, могут быть сдвинуты на его место. Цель заключается в том, чтобы добиться определенной перестановки фишек.

Сложность: Классика конечна, но легко обобщается до $n \times n$. Проверка того, существует ли решение, находится в **P**, но поиск решения с наименьшим количеством ходов является **NP**-полным [5].

Рис. 3: Пятнашки

Японские кроссворды

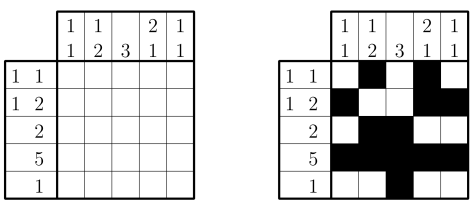

Рис. 4: Решение японского кроссворда

Описание: Изображение закодировано числами по строкам и по столбцам. Количество чисел показывает, сколько групп чёрных клеток находятся в соответствующих строке или столбце, а сами числа — сколько слитных клеток содержит каждая из этих групп. Необходимо определить размещение черных клеток.

Сложность: **NP**-полна [6].

Го

Описание: Игра на доске размером 19×19. Суть заключается в том, что нужно отгородить на игровой доске камнями своего цвета большую территорию, чем противник.

Сложность: Обобщение до $n \times n$ **PSPACE**-полно. Вариация игры с *ko*-правилом (запретом повторения позиции на следующем ходу) **EXP**-полна [7].

Рис. 5: Го

Криптарифмы

Рис. 6: Ребус

Описание: В этих головоломках последовательность букв упорядочена в виде примера сложения в столбик. Задача заключается в том, чтобы построить биекцию между буквами и цифрами, в результате которой получится корректный пример.

Сложность: Обобщения на n-ичные основания **NP**-полны.

NP-полнота языка CRYPTA[1]

Мы докажем, что язык CRYPTA, состоящий из множества корректных разрешимых криптарифмов, является **NP**-полным.

Принадлежность NP

Тривиально, в качестве сертификата посылается строка, задающая биекцию между алфавитом криптарифма и неотрицательными целыми числами меньше основания.
Проверка корректности сложения выполняется за полином.

NP - трудность

Верно следующее: 3SAT $\leq_p$ CRYPTA

Для доказательства сводимости нам необходимо предъявить полиномиально вычислимую функцию F, такую что $\forall\varphi \quad \varphi \in \text{3SAT} \Leftrightarrow F(\varphi) \in \text{CRYPTA}$

Построение криптарифма

Первым делом обязательно отдадим крайние правые три столбца под следующую конструкцию (*см. слева*):

$$\begin{array}{ccc} k & p & k \\ k & p & k \\ \hline l & q & k \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} 0 & p & 0 \\ 0 & p & 0 \\ \hline 1 & q & 0 \end{array}$$

Для верности этой части critарифма необходимо, чтобы $k = 0$ и $l = 1$ (действительно, единственное значение k, при котором $2k \,\%\, n = k$ — это 0, откуда из невозможности соответствия разным буквам одного числа следует, что на третий разряд происходит перенос, и это дает l значение 1). Таким образом, мы сразу зарезервировали буквы k и l, поэтому для простоты дальнейшем будем вместо них писать сразу 0 и 1 соответственно.

Теперь обратим свой взор на литералы и их отрицания. Следующая конструкция

$$\begin{array}{cccccccccccc} d_i & 0 & 1 & y_i & 0 & c_i & y_i & 0 & b_i & y_i & 0 & a_i & 0 \\ e_i & 0 & d_i & y_i & 0 & c_i & y_i & 0 & b_i & y_i & 0 & a_i & 0 \\ \hline \overline{v_i} & 0 & e_i & z_i & 0 & d_i & z_i & 0 & v_i & z_i & 0 & b_i & 0 \end{array}$$

обязывает буквы v_i и $\overline{v_i}$ быть по модулю 4 равными 0 и 1 или наоборот. В самом деле, b_i точно четно как $2a_i$, поэтому v_i равно либо $4a_i$, либо $4a_i + 1$. В первом случае переноса при суммировании y_i не происходит, а значит $d_i = 2c_i$, $e_i = 2c_i + 1$, $\overline{v_i} = 4c_i + 1$. Во втором случае аналогичными умозаключениями, но уже с переносом, получается $\overline{v_i} = 4c_i + 4$. Раз так, скажем, что v_i соответствует булевой истине, если по модулю 4 оно равно 1, и булевой лжи — в случае 0, а $\overline{v_i}$ есть её отрицание.

Наконец, в 3-КНФ формуле φ будут дизъюнкты вида $v_a \vee v_b \vee v_c$. Для них соорудим следующую конструкцию (для дизъюнкта $v_a \vee v_b \vee v_d$ нужно будет использовать ту же u_{ab}, что здесь)

$$\begin{array}{cccccccccc} u_{ab} & 0 & v_a & 0 & 1 & r_i & 0 & g_i & w_i & 0 & f_i & 0 \\ v_c & 0 & v_b & 0 & h_i & r_i & 0 & g_i & w_i & 0 & f_i & 0 \\ \hline t_i & 0 & u_{ab} & 0 & t_i & s_i & 0 & h_i & x_i & 0 & g_i & 0 \end{array}$$

Тут можно заметить, что h_i по модулю 4 равна либо 0, либо 1, а t_i равна либо $h_i + 1$, либо $h_i + 2$. Таким образом, t_i по модулю 4 может принимать значения $1, 2, 3$ – и только их. С другой стороны, $t_i = v_a + v_b + v_c$, каждая из которых по модулю 4 может принимать лишь 0 и 1 (предыдущую конструкцию мы соорудили для каждого литерала). Таким образом, t_i обязывает хотя бы одну из переменных v_a, v_b, v_c быть истинной – чего мы и хотим от дизъюнкта.

[1] Доказательство основано на материале Дэвида Эпштейна [2]

Итак, созданные ограничения гарантируют противоположные значения литералу и его отрицанию, а также истинность каждого дизъюнкта. Значит, решение криптарифма $F(\varphi)$ дает решение формулы φ. Это будет верно для любого основания нашего криптарифма. Однако нам также необходима возможность обратной операции — по разрешимой φ получить разрешимую $F(\varphi)$. Оказывается, при выборе основания, равного $3072n^3$, где n – число переменных в формуле φ, можно обеспечить и это.

Разрешение криптарифма

Возьмем основание, кратное 128, и сопоставим буквам следующие значения по модулю 128:

Буква:	a	b	c	d	e	f	g	h	$v, \overline{v}$	u	t	p, r, w, y	q, s, x, z
Значение:	$2, 34$ $66, 98$	$4, 68$	$1, 2, 33, 34$ $65, 66, 97, 98$	$3, 4$ $67, 68$	$5, 69$	$6, 38$ $70, 102$	$12, 76$	$24, 25$	$8, 9$	$16, 17$ 18	$25, 26$ 27	$7, 71$	14

Каждой переменной x сопоставим класс $\left\lceil \dfrac{x}{128} \right\rceil$. Нужно чтобы у каждого экземпляра построенных выше конструкций был свой класс, и они не пересекались.
Можно заметить, что при сложении вида $y + y + carry = x$ значение y определется так: $y = \left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor$. Поэтому при заданных v и $\overline{v}$ все остальные буквы, кроме последних двух столбцов таблички, будут определены однозначно. С заданием букв из этих столбцов проблем также не возникнет, мы выберем из возможных вариантов нужный в зависимости от того, нужен ли перенос.

Оставшаяся проблема — ситуация, при которой букве необходимо присвоить значение, превосходящее основание криптарифма. Это решается выбором основания, большего чем утроенное максимальное значение, присвоенное переменным вида v (так как самая большая из задаваемых ими букв t_i будет суммой v_a, v_b, v_c).

Таким образом, наша задача свелась к тому, чтобы присвоить классам переменных v_i такие значения, чтобы суммы всевозможных троек из них не пересекались. Если у нас это получится, мы, в соответствии с таблицей, выберем для v_i остаток 8 или 9 по модуля 128 в зависимости от истинности или ложности переменной в формуле, и это задаст значения остальных букв.

Здесь мы воспользуемся результатом [1]. Доказано, что для любого k между 1 и k^3 найдется множество из k чисел, таких что суммы всевозможных троек различны. Поэтому достаточно, чтобы наши классы пробегали между 1 и $(2n)^3$. Умножив на $128 \cdot 3$, чтобы все буквы вместились, получим $3072n^3$ - достаточный размер основания, при котором все буквы вместятся без поворений. То есть мы доказали и то, что по разрешимой формуле можно за полином построить и разрешимый криптарифм. **NP**-полнота доказана.

Список литературы

[1] S.C. Bose and S. Chowla. Theory of numbers. *Report Inst., University of Colorado*, 1959.

[2] D. Eppstein. *On the NP-completeness of cryptarithms.* SIGACT News, 1987.

[3] A. S. Fraenkel and D. Lichtenstein. *Computing a perfect strategy for $n \times n$ chess requires time exponential in n.* Proc. 8th Int. Coll. Automata, Languages, and Programming, Springer LNCS, 1981.

[4] S. Iwata and T. Kasai. *The Othello game on an $n \times n$ board is PSPACE-complete*, volume 123. Theor. Comp. Sci., 1990.

[5] D. Ratner and M. Warmuth. *Finding a shortest solution for the $n \times n$-extension of the 15-puzzle is intractable*, volume 10. J. Symb. Comp., 1994.

[6] Jan N. van Rijn. *The complexity of Klondike, Mahjong, Nonograms and Animal Chess.* Universiteit Leiden Opleiding Informatica, 1990.

[7] D. Wolfe. Go endgames are hard. *MSRI Combinatorial Game Theory Research Worksh.*, 2000.