Conjuntos Numéricos

Introdução

Como o próprio nome indica, toda coleção de objetos, pessoas, animais ou coisas constitui um **conjunto**. Os objetos que formam um conjunto são denominados **elementos**. Os elementos de um conjunto são indicados por letras minúsculas **a, b, c, ...** e os conjuntos, por letras maiúsculas **A, B, C, ...**.

Alguns termos e definições são importantes para o nosso estudo dos conjuntos:

- **Pertinência**

  Um elemento pode pertencer ou não pertencer a um determinado conjunto. Para indicar que um elemento pertence a um dado conjunto, utilizamos o símbolo $\in$ e quando não pertence usamos o $\notin$.
  Exemplos:
  $x \in A$ (Lê-se: x pertence a A)
  $x \notin B$ (Lê-se: x não pertence a B)

  Observação: Os símbolos $\in$ e $\notin$ são utilizados para relacionar elemento com conjunto.

- **Igualdade de conjuntos**

  Dois conjuntos são iguais quando possuem os mesmos elementos.
  Indica-se: $A = B$

- **Conjunto vazio**

  Conjunto vazio é o conjunto que não possui elementos.
  Representa-se o conjunto vazio por $\{\}$ ou $\emptyset$.

- **Conjunto universo**

  Conjunto universo é o conjunto ao qual pertencem os elementos de todos os conjuntos que fazem parte do nosso estudo.

- **subconjuntos**

  Dados dois conjuntos, A e B, dizemos que A é subconjunto de B se cada elemento do conjunto A é, também, elemento do conjunto B.
  Indicamos essa relação por:

  $$A \subset B \text{ (Lê-se: } A \text{ está contido em } B\text{)}$$

  Ou também por:

  $$B \supset A \text{ (Lê-se: } B \text{ contém } A\text{).}$$

  Observações:

  1ª) Escreveremos $A \not\subset B$ (A não está contido em B) ou $B \not\supset A$ (B não contém A), se A não for subconjunto de B.

  2ª) Os símbolos $\subset$, $\not\subset$, $\supset$ e $\not\supset$ são utilizados para relacionar conjunto com conjunto.

Como representar um conjunto

Um conjunto pode ser representado de três formas:

- **1ª forma**: por extensão

Enumeram-se seus elementos, escrevendo-os entre chaves e separando-os por vírgulas. Por exemplo, o conjunto dos dias da semana:

$A = \{$domingo, segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado$\}$.

Podemos também utilizar a representação por extensão mesmo que o conjunto seja **infinito** ou seja **finito** mas com um número elevado de elementos.

Exemplos:

a) Conjunto dos números pares:
   $A = \{\ 2,\ 4,\ 6,\ ...\} \to$ Conjunto infinito

b) Conjunto dos números naturais menores que 500:
   $B = \{\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ 499\ \} \to$ Conjunto finito

- **2ª forma**: por compreensão

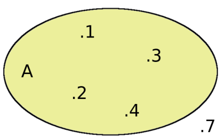
O conjunto será representado por meio de uma propriedade que caracteriza os seus elementos.

Exemplos: a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } x < 8\}$ b) $B = \{x \mid x \text{ é vogal}\}$

Observe que a propriedade que caracteriza o conjunto permite estabelecer se um dado elemento pertence ou não ao conjunto.

- **2ª forma**: por figuras

Toda figura utilizada para representar um conjunto é chamada de **diagrama de Venn**. Por exemplo, o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ pode ser representado pelo diagrama:



Os elementos de A são representados por pontos internos desta figura. Observe que $2 \in A$ (é um ponto interno) e $7 \notin B$ (é um ponto externo)

Operações com conjuntos

- # União de conjuntos

Sejam os conjuntos $A = \{0, 2, 4, 6\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Vamos determinar um conjunto C formado pelos elementos que pertencem a A ou a B ou a ambos:

$$\begin{array}{r} A = \{0, 2, 4, 6\} \\ B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{array} \Longrightarrow C = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$$

O conjunto C assim formado, é chamado **união** de A e B.

Então:

A união de dois conjuntos, A e B, é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou a B. Designamos a união de A e B por $A \cup B$ (lê-se: A união B).
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Exemplos:

a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\} \Rightarrow A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

b) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

c) $A = \{0, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\} \Rightarrow A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 5\}$

▪ Intersecção de conjuntos

Sejam os conjuntos $A = \{0, 2, 4, 6\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Vamos determinar um conjunto C formado pelos elementos que são comuns a A e a B, ou seja, pelos elementos que pertencem a A e também pertencem a B:

$$\begin{array}{r} A = \{0, 2, 4, 6\} \\ B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{array} \Longrightarrow \quad C = \{0, 2, 4\}$$

O conjunto C assim formado, é chamado **intersecção** de A e B.

Então:

A intersecção de dois conjuntos, A e B, é o conjunto formado pelos elementos que são comuns a A e a B, isto é, pelos elementos que pertencem a A e também pertencem a B. Designamos a intersecção de A e B por $A \cap B$ (lê-se: A inter B).
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

Exemplos:

a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\} \Rightarrow A \cap B = \{1, 3\}$

b) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow A \cap B = \{0, 1, 2\}$

c) $A = \{0, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$

Observação: Quando $AcapB = \emptyset$, os conjuntos A e B são chamados **disjuntos**.

▪ Diferença de conjuntos

Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Vamos determinar um conjunto C formado pelos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B:

$$\begin{array}{r} A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ B = \{2, 4, 6, 8\} \end{array} \Longrightarrow \quad C = \{1, 3, 5\}$$

O conjunto C, assim formado, é chamado **diferença** de A e B.

Então:

A diferença de dois conjuntos, A e B, é o conjunto dos elementos que pertencem a A e não pertencem a B. Designamos a diferença de A e B por $A - B$ (lê-se: A menos B).
$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$

Observação Se $B \supset A$, a diferença $A - B$ denomina-se **complementar de** B **em relação a** A, e indica-se $\complement_{A^B}$

Atividades

1) Classifique os conjuntos abaixo em vazio, unitário, finito ou infinito.

a) $B = \{0, 1, 2, ..., 70\}$

b) $C = \{x \mid x \text{ é um número par positivo}\}$

c) $E = \{x \mid x \text{ é um número ímpar, solução da equação } x^2 = 4\}$

2) Sejam $A = \{x \mid x \text{ é um número par compreendido entre 3 e } 15\}$, $B = \{x \mid x \text{ é um número par menor que } 15\}$ e $C = \{x \mid x \text{ é um número par diferente de } 2\}$. Usando os símbolos $\subset$ ou $\not\subset$, relacione entre si os conjuntos:

a) A e B

b) A e C

c) B e C

3) No diagrama seguinte, A, B e C são três conjuntos não vazios. Associe **V** ou **F** a cada uma das seguintes sentenças, conforme ela seja verdadeira ou falsa:

a) $A \subset B$

b) $C \subset B$

c) $B \subset A$

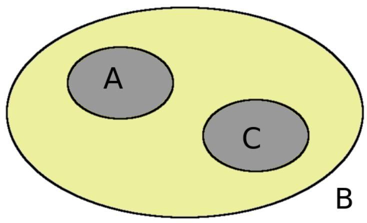
d) $A \subset C$

d) $B \not\subset A$

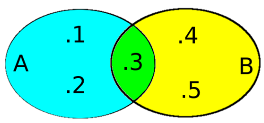
e) $A \not\subset C$

f) $B \supset A$

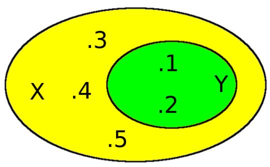
g) $A \not\supset B$



4) Considere o diagrama abaixo e dê, por extensão, os conjuntos A e B



5) Considere o diagrama abaixo e dê, por extensão, os conjuntos X e Y



6) Sendo $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 3, 5\}$, $C = \{x \mid x \text{ é um número par positivo menor que } 10\}$ e $D = \{x \mid x \text{ é um número ímpar compreendido entre 4 e } 10\}$, determine:

a) $A \cup B$

b) $A \cup C$

c) $A \cup D$

d) $B \cup C$

e) $B \cup D$

f) $C \cup D$

7) Sendo $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, $C = \{x \mid s$ é par positivo menor que $10\}$ e $D = \{x \mid x$ é ímpar compreendido entre 0 e $6\}$, determine:

a) $A \cap B$

b) $A \cap C$

c) $C \cap D$

d) $B \cap C$

e) $(A \cap B) \cap C$

f) $(A \cap C) \cap D$

8) Responda:

a) Se $A \cap B = \emptyset$, como se chamam os conjuntos A e B?

b) Se um conjunto A tem 3 elementos e um conjunto B tem 5 elementos, quantos elementos, no máximo, terá o conjunto $A \cap B$?

c) Se A e B são disjuntos, quantos elementos terá o conjunto $A \cap B$?

9) Dados $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 4\}$, $C = \{1, 3, 5\}$ e $D = \{2, 3\}$, determine:

a) $(A \cap B) \cup C$

b) $(B \cup D) \cap A$

c) $(A \cup C) \cap D$

d) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$

e) $(A \cup D) \cap (B \cup C)$

f) $(A \cap C) \cap (B \cup D)$

10) Sendo A o conjunto dos divisores naturais de 18 e B o conjunto dos divisores naturais de 30, escreva:

a) O conjunto A.

b) O conjunto B.

c) O conjunto dos divisores comuns de 18 e 30.

d) O máximo divisor comum de 18 e 30.

11) Considere os conjuntos $A = \{$divisores naturais de $30\}$, $B = \{$múltiplos de $6\}$ e $C = \{$múltiplos de $3\}$. Calcule:

a) $A \cup C$

b) $B \cap C$

c) $A \cap (B \cup C)$

d) $A \cap B \cap C$

e) Quais os elementos de A que não pertencem a B.

12) Com base no diagrama ao lado, calcule:

a) $A \cup B$

b) $A \cap C$

c) $A \cup C$

d) $B \cap C$

e) $B \cup C$

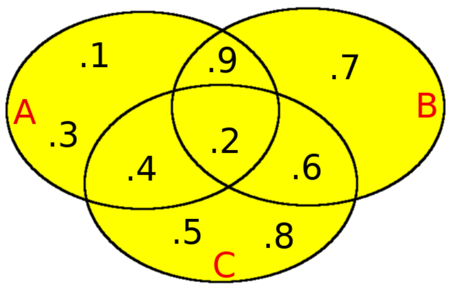
f) $A \cap B \cap C$

g) $A \cup B \cup C$

h) $(A \cup B) \cap C$

i) $(A \cap B)$

j) $(A \cap B) \cup C$



13) Dados $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{2, 3, 4, 5\}$, determine:

a) $A - B$

b) $A - C$

c) $B - C$

f) $(A \cap B) - C$

g) $(A - C) \cap (B - C)$

h) $A - \emptyset$

f) $\complement_A^B$

g) $\complement_A^{(B \cap C)}$

h) $(\emptyset - B) \cup \complement_C^{\emptyset}$

14) Diga qual proposição é verdadeira e qual é falsa:

a) $A \cap \emptyset$

b) $A - \emptyset$

c) $\emptyset - A = \emptyset$

d) $(A - A) \cup A = A$

f) $(A - A) \cap A = A$

g) $(A \cap A) \cup \emptyset = \emptyset$

h) $\complement_A^{(\complement_A^B)} = B$ com $B \subset A$

Gabarito

1) a) Finito, b) Infinito, c) Vazio

2) a) $A \subset B$, b) $A \subset C$, c) $B \not\subset C$

3) a) V, b) V, c) F, d) F, e) V,
f) V, g) V, h) V

4) $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$

5) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{1, 2\}$

6) a) $\{0, 1, 2, 3, 5\}$, b) $\{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, c) $\{0, 1, 2, 3, 5, 7, 9\}$,
d) $\{0, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$, e) $\{0, 2, 3, 5, 7, 9\}$, f) $\{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

7) a) $\{0, 1, 2\}$, b) $\{0, 2, 4\}$, c) $\{1, 3\}$
d) $\{0, 2\}$, e) $\{0, 2\}$, f) $\emptyset$

8) a) disjuntos, b) 3, c) zero

9) a) $\{0, 1, 2, 3, 5\}$, b) $\{0, 2, 3\}$, c) $\{2, 3\}$,
d) $\{0, 2, 3\}$, e) $\{0, 1, 2, 3\}$, f) $\{3\}$

10) a) $A = \{1, 2, 3, 5\}$, b) $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, c) $\{1, 2, 3, 6\}$,
d) 6.

11) a) $\{3, 6, 15, 30\}$, b) B, c) $\{3, 6, 15, 30\}$,
d) $\{6, 30\}$, e) $\{1, 2, 3, 5, 10, 15\}$

12) a) $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$, b) $\{2, 4\}$, c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$,
d) $\{2, 6\}$ e) $\{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, f) $\{2\}$,
g) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, h) $\{2, 4, 6\}$, i) $\{2, 9\}$,
j) $\{2, 4, 5, 6, 8, 9\}$

13) a) $\{0\}$, b) $\{0, 1\}$, c) $\{1\}$, d) $\{1\}$,
e) $\{1\}$, f) $\{0, 1, 2, 3\}$, g) $\{0\}$, h) $\{0, 1\}$,
i) $\{2, 3, 4, 5\}$

14) a) V, b) V, c) V, d) V, e) F,
f) F, g) V