

Cadenas de Markov y Aplicaciones (2025-II)

Tarea 1: Aplicación del muestreo de Gibbs a los modelos *Hard-Core* y q-coloraciones

Profesor: Freddy Hernández-Romero

Instrucciones de Entrega

- **Formato de Trabajo:** Escriba un “notebook” (usando Python, Julia o R) realizando los experimentos descritos a continuación.
 - **Grupos:** El trabajo debe realizarse en grupos de 2 o 3 alumnos.
 - **Entrega:** Solo un miembro por grupo debe subir la tarea al Classroom. La entrega debe consistir en:
 1. Un **reporte en formato PDF** que contenga las explicaciones, el código, los resultados y las gráficas generadas.
 2. Un **enlace de acceso al notebook**. Se recomienda trabajar en **Google Colab** y compartir el enlace correspondiente.
-

Ejercicios

1. Muestreo de Gibbs para el Modelo Hard-Core

- a) Implemente el algoritmo **Gibbs sampler** visto en clase para generar muestras de una distribución que se aproxime a la **distribución uniforme sobre las configuraciones factibles** del modelo Hard-Core.

El modelo se debe implementar en una rejilla cuadrada de tamaño $K \times K$. Se sugiere experimentar con tamaños de rejilla donde K esté en el rango de $3 \leq K \leq 20$.

Visualización: Lo ideal es que se puedan visualizar las muestras generadas (es decir, las configuraciones finales de la rejilla) y también algunos pasos intermedios de la trayectoria de la Cadena de Markov que condujo a la muestra final.

Sugerencia: Tome un tiempo final para la cadena de Markov de $X_{10,000}$ o $X_{100,000}$ para asegurar que la cadena ha llegado a su distribución estacionaria.

- b) **Estimación del Número de Partículas**

Use las muestras generadas en el ejercicio anterior para estimar el número de partículas “típico” que tiene una configuración factible en la rejilla $K \times K$.

Análisis: Lo ideal sería generar un **histograma de frecuencias** que muestre la distribución del número de partículas en las muestras obtenidas.

Verificación: Verifique cómo cambia el histograma si, en lugar de tomar el estado final de la cadena ($X_{10,000}$ o $X_{100,000}$), se toman otros tiempos de la cadena. ¿Qué observa?

2. Generalización a q -Coloraciones

Replicar lo hecho en el ítem a) del punto anterior para generar muestras de la distribución uniforme sobre las q -**coloraciones propias** de la rejilla. Además, replicar lo hecho en b) para estimar el número “típico” de partículas de cada color.

Parámetros sugeridos:

- Número de colores, q : $2 \leq q \leq 10$.
- Tamaño de la rejilla, K : $3 \leq K \leq 20$.

Visualice algunas de las coloraciones obtenidas.