

Cadenas de Markov y Aplicaciones (2025-II)

Tarea 2: Conteo aproximado con MCMC aplicado a los modelos *Hard-Core* y q -coloraciones

Profesor: Freddy Hernández-Romero

Instrucciones de Entrega

- **Formato de Trabajo:** Escriba un “notebook” (usando Python, Julia o R) realizando los experimentos descritos a continuación.
- **Grupos:** El trabajo debe realizarse en grupos de 2 o 3 alumnos.
- **Entrega:** Solo un miembro por grupo debe subir la tarea al Classroom. La entrega debe consistir en:
 1. Un **reporte en formato PDF** que contenga las explicaciones, el código, los resultados y las gráficas generadas.
 2. Un **enlace de acceso al notebook**. Se recomienda trabajar en **Google Colab** y compartir el enlace correspondiente.

Ejercicios

1) Aproximación del Número de q -Coloraciones

- a) Con base en el siguiente resultado teórico visto en clase, realice experimentos que permitan dar valores aproximados del número de q -coloraciones de un *lattice* (rejilla) de tamaño $K \times K$.

Theorem 9.1 Fix integers q and $d \geq 2$ such that $q > 2d^*$, and consider the problem of counting q -colorings for graphs in which each vertex has at most d neighbors. There exists a randomized polynomial time approximation scheme for this problem.

Let us summarize: The algorithm has k factors Y_i to compute. Each one is obtained using no more than $\frac{48d^2k^3}{\varepsilon^2}$ simulations, and, by (76), each simulation requires no more than $k \left(\frac{2\log(k)+\log(\varepsilon^{-1})+\log(8)}{\log\left(\frac{q}{q-1}\right)} + 1 \right)$ steps of the Gibbs sampler.

The total number of steps needed is therefore at most

$$dk \times \frac{48d^2k^3}{\varepsilon^2} \times k \left(\frac{2\log(k) + \log(\varepsilon^{-1}) + \log(8)}{\log\left(\frac{q}{q-1}\right)} + 1 \right)$$

which is of the order $Ck^5 \log(k)$ as $k \rightarrow \infty$ for some constant C that does not depend on k . [...] Theorem 9.1 is established. \square

Parámetros: Considere los rangos $3 \leq K \leq 20$ y $2 \leq q \leq 15$.

Reporte: Su reporte para este ítem debe incluir:

- Valores de ε (precisión) usados en sus experimentos.
- Número de simulaciones (muestras) usadas.
- Número de pasos del Gibbs Sampler usados para generar cada muestra.

b) Comparación con Conteo Exacto

Use algún paquete o librería de su elección que permita realizar el conteo exacto de coloraciones (por ejemplo, calculando el polinomio cromático). Compare los resultados exactos con algunas de las aproximaciones obtenidas en el ítem anterior para lattices pequeños.

2) Aproximación del Número de Configuraciones del Modelo Hard-Core

Obtenga valores aproximados para el número total de configuraciones factibles en el modelo “Hard-Core” para lattices $K \times K$, con $3 \leq K \leq 20$.

Reporte: Reporte los resultados de manera similar a lo hecho en el ítem **a)** del ejercicio anterior, detallando los parámetros de simulación utilizados para obtener su aproximación.