

# Cadenas de Markov y Aplicaciones (2025-II)

## Tarea 3: Muestreo MCMC vs Simulación perfecta aplicadas al modelo de Ising

Profesor: Freddy Hernández-Romero

### Instrucciones de Entrega

- **Formato de Trabajo:** Escriba un “notebook” (usando Python, Julia o R) realizando los experimentos descritos a continuación.
  - **Grupos:** El trabajo debe realizarse en grupos de 2 o 3 alumnos.
  - **Entrega:** Solo un miembro por grupo debe subir la tarea al Classroom. La entrega debe consistir en:
    1. Un **reporte en formato PDF** que contenga las explicaciones, el código, los resultados y las gráficas generadas.
    2. Un **enlace de acceso al notebook**. Se recomienda trabajar en **Google Colab** y compartir el enlace correspondiente.
- 

### Ejercicios

#### 1. Análisis del Modelo de Ising

Considere el modelo de Ising en un *lattice* (rejilla)  $K \times K$  con  $10 \leq K \leq 20$ . La distribución de Gibbs está dada por:

$$\pi_{\beta}(\eta) = \frac{1}{Z_{\beta}} e^{-\beta H(\eta)}$$

donde el Hamiltoniano (energía) es  $H(\eta) = -\sum_{x \sim y} \eta_x \eta_y$ , y  $\beta \geq 0$  es el inverso de la temperatura.

- a) **Muestreo MCMC:** Use un algoritmo MCMC (como Gibbs sampler o Metropolis-Hastings) para generar 100 muestras **aproximadas** del modelo de Ising. Las muestras deben ser los estados de la cadena en tiempos largos (ej.,  $X_{10^3}, X_{10^4}, X_{10^5}$ ) para asegurar la convergencia a la distribución estacionaria. Realice esto para un rango de temperaturas inversas:

$$\beta = \{0, 0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots, 0, 9, 1, 0\}$$

- b) **Muestreo Perfecto (Propp-Wilson):** Use el algoritmo de Propp-Wilson (Coupling From The Past) para obtener 100 muestras **exactas** de la distribución estacionaria del modelo de Ising, para el mismo rango de temperaturas  $\beta$  del ítem anterior.

- c) **Estimación de la Magnetización:** Estime el valor esperado de la magnetización,  $\mathbb{E}[M(\eta)]$ , donde la magnetización de una configuración  $\eta$  se define como:

$$M(\eta) = \frac{1}{|V_K|} \sum_{x \in V_K} \eta_x$$

(siendo  $|V_K| = K^2$  el número de sitios). Realice esta estimación usando tanto las muestras aproximadas del ítem (a) como las muestras exactas del ítem (b).

**Reporte:**

- Reporte el **tiempo de coalescencia** observado en el algoritmo de Propp-Wilson para cada valor de  $\beta$ .
- Presente una **comparación gráfica** de las estimaciones de la magnetización obtenidas en (a) y (b) en función de  $\beta$ . La gráfica debería ser similar a la siguiente:

