Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Aplicación de Cadenas de Markov para la ruleta de casino

Implementación de Simulaciones Monte Carlo

Estudiantes: Sergio Andrés Díaz Vera
seadiazve@unal.edu.co

Julián Mateo Espinosa Ospina
juespinosao@unal.edu.co

Profesor: Freddy Hernández-Romero

Fecha de entrega: 09 de diciembre de 2025
Bogotá D.C., Colombia

Índice de Contenidos

1. Introducción

1.1. Contexto y Motivación

La ruleta es uno de los juegos de azar más emblemáticos en casinos y plataformas en línea. A pesar de su aparente simplicidad, la ruleta constituye un excelente laboratorio matemático para estudiar procesos estocásticos, toma de decisiones bajo incertidumbre y análisis de estrategias de apuestas. En particular, cuando un jugador gestiona su capital con el objetivo de alcanzar una meta predeterminada —por ejemplo, duplicar su dinero— o evitar la bancarrota, la evolución de su riqueza puede modelarse rigurosamente mediante cadenas de Markov.

Una cadena de Markov permite describir un sistema cuya evolución depende únicamente del estado actual y no de cómo llegó hasta allí. Esto la vuelve una herramienta poderosa para representar la dinámica del capital de un jugador, donde en cada apuesta el capital puede aumentar o disminuir según el resultado del juego elegido. Al definir adecuadamente estos estados de capital y las probabilidades de transición entre ellos, es posible estudiar diversos aspectos fundamentales del comportamiento del jugador, como el tiempo esperado hasta la ruina, la probabilidad de alcanzar una meta de ganancias y la efectividad comparada de diferentes sistemas de apuestas.

En el contexto específico de la ruleta, surgen preguntas de gran interés tanto práctico como teórico: ¿cuál estrategia de apuesta permite al jugador permanecer más tiempo en el juego antes de caer en un estado absorbente como la ruina? ¿Qué modalidad de apuestas incrementa la probabilidad de duplicar el capital inicial? ¿Cómo cambia el comportamiento del sistema al variar el capital inicial? Estas preguntas pueden abordarse mediante un modelo basado en cadenas de Markov, donde se comparan diferentes modos de apuesta como par,rojo,docena,cuadro,etc; y se analiza la evolución del capital del jugador bajo cada una.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Analizar, mediante simulaciones Monte Carlo de cadenas de Markov, el desempeño de diferentes estrategias de apuesta en la ruleta para determinar cuáles permiten al jugador maximizar la probabilidad de alcanzar una meta de ganancias o minimizar el riesgo de ruina.

1.2.2. Objetivos especificos

1. Construir un modelo de cadena de Markov que represente la evolución del capital del jugador bajo distintas modalidades de apuesta (color, par/impar, docena, número pleno, cuadro, etc.).

2. Calcular las probabilidades de transición asociadas a cada tipo de apuesta, considerando los pagos reales de la ruleta y la ventaja de la casa.

3. Estimar el tiempo esperado hasta la absorción (ruina o meta de ganancia) bajo cada estrategia de apuesta y comparar cuál permite al jugador permanecer más tiempo en juego.

4. Comparar cuantitativamente el rendimiento de las estrategias analizadas y establecer cuál, en términos probabilísticos, es más favorable para el jugador en alcanzar la meta o postergar la ruina.

2. Marco teórico

2.1. Cadenas de Markov en tiempo discreto

Una cadena de Markov es un proceso estocástico en tiempo discreto que satisface la *propiedad markoviana*:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1}, \ldots, X_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{ij},$$

donde p_{ij} son las probabilidades de transición del sistema entre los estados i y j. Estas probabilidades se organizan en la matriz de transición:

$$P = (p_{ij})_{i,j=0}^{N}, \qquad p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{N} p_{ij} = 1.$$

Los estados pueden clasificarse como:

- **Transitorios**: estados desde los cuales existe una probabilidad positiva de abandonarlos para siempre.
- **Recurrentes**: estados que serán visitados infinitamente a menudo con probabilidad uno.
- **Absorbentes**: estados i tales que $p_{ii} = 1$ y $p_{ij} = 0$ para $j \neq i$.

En modelos de juegos de azar, la ruina y la meta de ganancia suelen representarse mediante estados absorbentes.

2.2. Modelo de ruina del jugador

El modelo clásico de ruina del jugador considera un capital inicial $X_0 = x$ y dos estados absorbentes: 0 (ruina) y M (meta de ganancia). El capital evoluciona según cambios aleatorios asociados a apuestas sucesivas. Si el jugador apuesta una cantidad fija b en cada ronda y la apuesta tiene probabilidad p de ganar y $q = 1 - p$ de perder, entonces:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + b, & \text{con probabilidad } p, \\ X_n - b, & \text{con probabilidad } q. \end{cases}$$

Para un juego justo (sin ventaja de la casa) se tendría $p = q = 1/2$; sin embargo, en la ruleta se cumple:

$$p < \frac{1}{2},$$

debido a la presencia del cero (o doble cero), lo que introduce una esperanza negativa para el jugador.

2.3. Probabilidades de absorción

Sea h_x la probabilidad de alcanzar el estado M antes que el estado 0, partiendo de un capital x. Para apuestas de cambio fijo b, es bien conocido que:

$$h_x = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^M}, & \text{si } p \neq q, \\ \dfrac{x}{M}, & \text{si } p = q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dado que en la ruleta $p < q$, se tiene que:

$$\frac{q}{p} > 1 \quad \Rightarrow \quad h_x \text{ decrece exponencialmente con } x.$$

Esto refleja matemáticamente que la ruleta, como juego con expectativa negativa, favorece estructuralmente a la casa.

2.4. Tiempo esperado hasta la absorción

El tiempo esperado hasta la ruina o meta, denotado por t_x, satisface el sistema de ecuaciones:

$$t_x = 1 + p\,t_{x+b} + q\,t_{x-b}, \qquad 1 \leq x \leq M-1,$$
$$t_0 = t_M = 0.$$

La solución puede expresarse en forma cerrada, y para el caso $p \neq q$ se tiene:

$$t_x = \frac{x}{q-p} - \frac{M}{q-p}\,\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^M}.$$

Este tiempo permite comparar estrategias: una estrategia con mayor t_x mantiene al jugador más tiempo en el juego antes de la absorción.

2.5. Monte Carlo

El método de Monte Carlo es una técnica numérica basada en la repetición de experimentos aleatorios para aproximar cantidades probabilísticas que no pueden calcularse de forma directa o cuyo cálculo analítico es complejo. La idea fundamental consiste en simular muchas veces un proceso estocástico y utilizar la frecuencia relativa de los resultados para estimar probabilidades, así como promedios muestrales para estimar valores esperados.

En este caso, el capital del jugador se modela como un proceso aleatorio que evoluciona ronda a ronda según las reglas de la apuesta seleccionada —probabilidad de ganar p y ganancia k. Cada simulación representa una trayectoria independiente: se inicia con un capital dado y se actualiza en cada ronda hasta alcanzar uno de los estados finales (bancarrota o meta). Repetir este procedimiento miles de veces permite estimar: la probabilidad de éxito, a partir de la proporción de simulaciones en las que se alcanza la meta, y

la duración esperada, calculada como el promedio del número de rondas requeridas en cada trayectoria.

De esta manera, el método de Monte Carlo ofrece una aproximación empírica y flexible del comportamiento del proceso sin necesidad de resolverlo analíticamente.

3. Aplicación y resultados

3.1. Aplicación en la Ruleta de casino

La ruleta es uno de los juegos de azar más populares a nivel mundial. En su versión europea, el cilindro está compuesto por 37 números, del 0 al 36, donde el 0 es de color verde, mientras que los demás se distribuyen en 18 números rojos y 18 números negros. En la versión americana, se incorpora un número adicional, el 00, también de color verde, lo que eleva el total a 38 casillas.

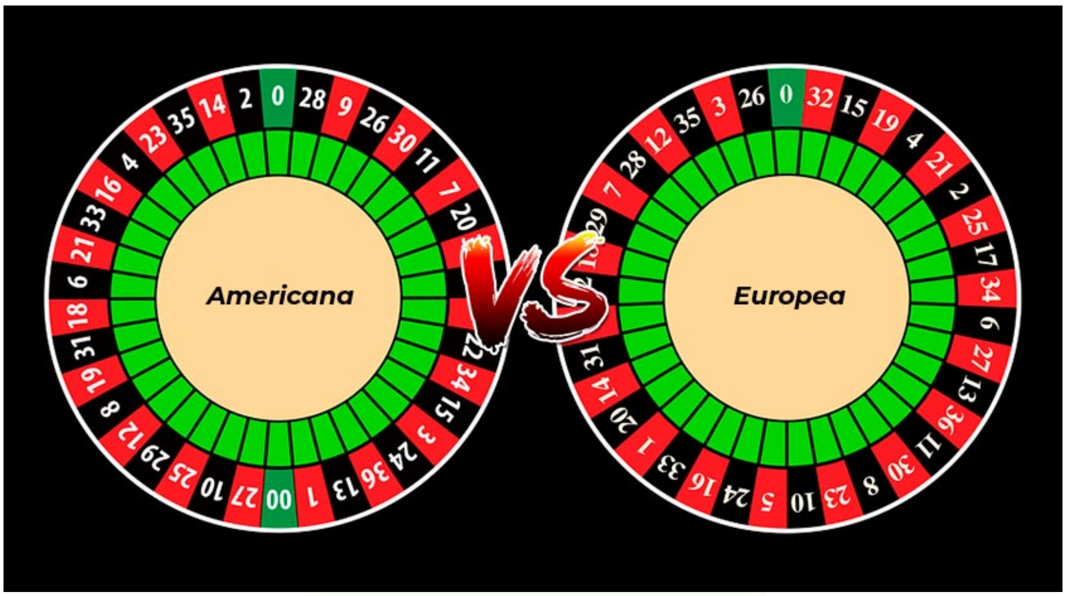


Figura 1: Ruleta Americana vs Ruleta Europea

Las probabilidades de ganar para cada modalidad de apuesta dependen del tipo de ruleta utilizada —europea o americana— y se definen de la siguiente manera:

- **Color**: paga 1 dólar por cada dólar apostado. La probabilidad de ganar es de $\frac{18}{37}$ en la ruleta europea y de $\frac{18}{38}$ en la ruleta americana.
- **Docena**: paga 2 dólares por cada dólar apostado. La probabilidad de ganar es de $\frac{12}{37}$ en la ruleta europea y de $\frac{12}{38}$ en la ruleta americana.
- **Seisena**: paga 5 dólares por cada dólar apostado. La probabilidad de ganar es de $\frac{6}{37}$ en la ruleta europea y de $\frac{6}{38}$ en la ruleta americana.
- **Cuadro**: paga 8 dólares por cada dólar apostado. La probabilidad de ganar es de $\frac{4}{37}$ en la ruleta europea y de $\frac{4}{38}$ en la ruleta americana.
- **Semipleno**: paga 17 dólares por cada dólar apostado. La probabilidad de ganar es de $\frac{2}{37}$ en la ruleta europea y de $\frac{2}{38}$ en la ruleta americana.

- **Pleno**: paga 35 dólares por cada dólar apostado. La probabilidad de ganar es de $\frac{1}{37}$ en la ruleta europea y de $\frac{1}{38}$ en la ruleta americana.

Figura 2: Tablero de apuestas Ruleta Europea

Para el caso del color tenemos $p = \frac{18}{37}$ la probabilidad de ganar y $q = \frac{19}{37}$ la probabilidad de perder en una ruleta Europea, por lo que la probabilidad de arruinarse empezando con i dolares y con una meta de llegar a N dolares es

$$h_i = \frac{(\frac{19}{18})^i - (\frac{19}{18})^N}{1 - (\frac{19}{18})^N}$$

El desarrollo de la formula anterior se encuentra en [1]. Por lo tanto si se empiezan con 5 dolares y una meta de 10 obtenemos la probabilidad de ruina $h_5 = 0.4328$.

Por otro lado, el tiempo medio de absorción, cuyo desarrollo completo se presenta en [1], está dado por

$$k_i = \frac{i}{q-p} - \frac{N}{q-p}\frac{1-(\frac{q}{p})^i}{1-(\frac{q}{p})^N}$$

Aplicando esta expresión al caso de un jugador que inicia con un capital de 5 dólares y busca alcanzar una meta de 10 dólares apostando al color en una ruleta europea, se obtiene que el tiempo medio de absorción es $k_5 = 24.85$ rondas

Finalmente, la matriz de transición es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Recordando que $\pi_0 * P^n$ representa la distribución de probabilidades de estar en cada estado después de n pasos, para un estado inicial de 5 dolares, es decir

$$\pi_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtenemos el siguiente gráfico:

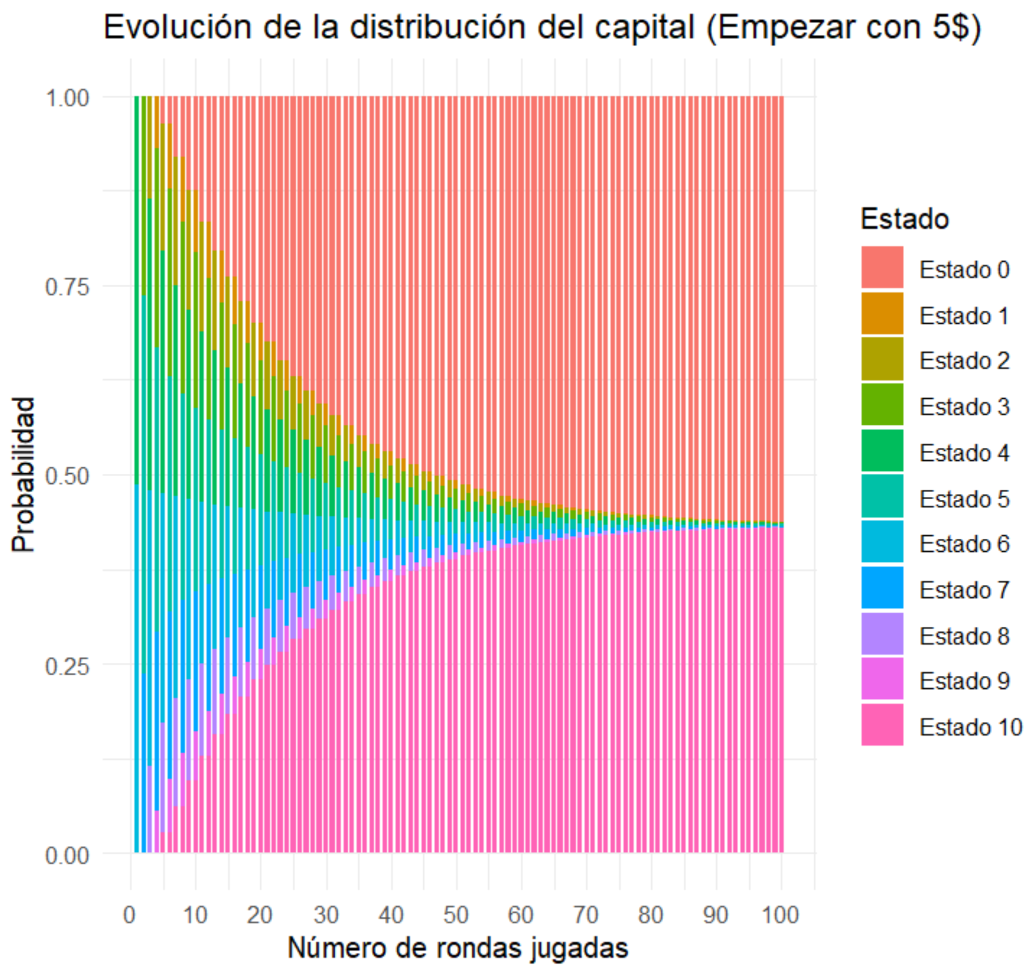


Figura 3: Resultado de $\pi_0 * P^n$ para $1 \leq n \leq 100$

Se observa que, dado que los estados 0 y 10 son estados absorbentes, las probabilidades asociadas a ellos aumentan conforme crece el valor de n. Esto ocurre porque, a medida que la cadena evoluciona, la distribución $\pi_0 * P^n$ concentra progresivamente más masa de probabilidad en los estados absorbentes, reduciendo la probabilidad de encontrarse en los estados transitorios.

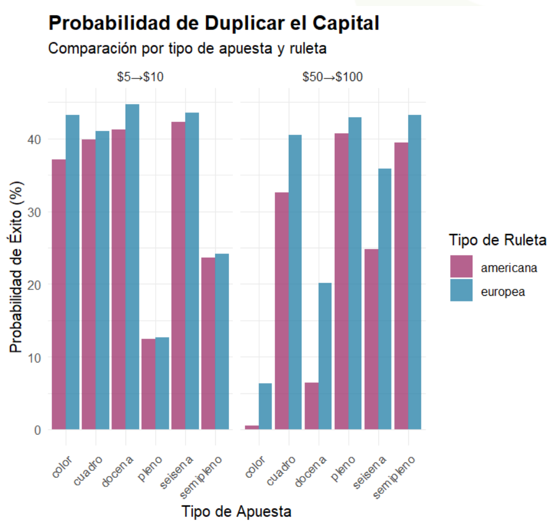
3.2. Simulaciones Monte Carlo

Mediante el método de simulaciones Monte Carlo, se realizan 100,000 simulaciones para cada uno de los modos de apuesta, obteniendo el siguiente resultado.

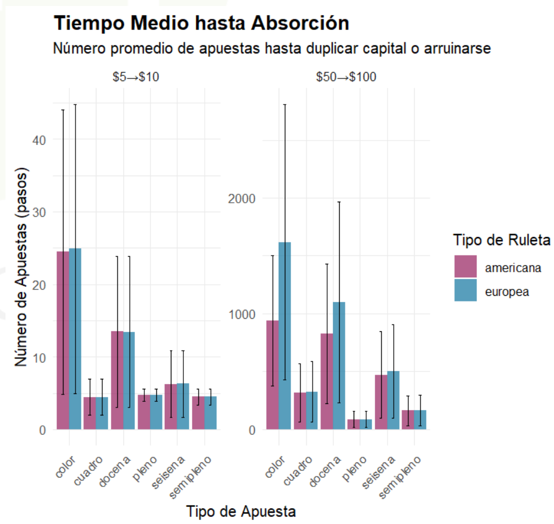
Tabla 1: Resultados de 100000 simulaciones Monte Carlo (primeras 10 filas).

Escenario	Tipo de apuesta	Tipo de ruleta	Prob. de éxito	Tiempo medio
\$5 →\$10	docena	europea	43.73 %	13.4 ± 10.4
\$5 →\$10	seisena	europea	44.52 %	6.3 ± 4.6
\$50 →\$100	semipleno	europea	43.29 %	163.7 ± 131.7
\$5 →\$10	color	europea	43.21 %	24.9 ± 19.9
\$50 →\$100	pleno	europea	43.87 %	88.5 ± 68.7
\$5 →\$10	seisena	americana	41.29 %	6.3 ± 4.5
\$5 →\$10	docena	americana	41.27 %	13.5 ± 10.4
\$5 →\$10	cuadro	europea	41.06 %	4.5 ± 2.5
\$50 →\$100	pleno	americana	41.74 %	88.9 ± 67.8
\$50 →\$100	cuadro	europea	40.46 %	326.7 ± 262.3

Observando los resultados, se aprecia que la mayor probabilidad de éxito al intentar duplicar el capital es del 43.73 %, la cual se obtiene comenzando con 5 dólares y apostando a las docenas en una ruleta europea. En cambio, si el objetivo es maximizar la duración del juego y permanecer el mayor número posible de rondas antes de alcanzar un estado absorbente, la mejor opción es apostar al color, ya que esta modalidad presenta el mayor tiempo medio de absorción. Esto puede visualizarse con mayor claridad en los siguientes gráficos.



a Probabilidad duplicar



b Tiempo medio absorción

Se observa que, cuando se dispone de un capital inicial reducido y la meta es relativamente cercana, las opciones más convenientes son apostar al color, a la docena o al cuadro, ya que proporcionan una probabilidad de éxito superior en estos escenarios. En cambio, cuando la meta es más elevada, resulta necesario asumir un mayor nivel de riesgo para tener posibilidades de alcanzarla; en estos casos, las apuestas al semipleno o al pleno se vuelven más favorables.

Para el caso de la apuesta al color, se realiza una comparación entre los resultados teóricos y los obtenidos mediante simulaciones, con el fin de evaluar qué tan cerca se encuentran las simulaciones del comportamiento predicho por la teoría.

Tabla 2: Comparación entre resultados simulados y teóricos.

Escenario	Ruleta	Prob. Simulación	Prob. Teórica	Error Prob.	Tiempo Simulación	Tiempo Teórico	Error Tiempo
\$5→ \$10	europea	0.4321	0.4328	0.0007	24.90	24.85	0.05
\$50→ \$100	europea	0.0630	0.0628	0.0003	1617.88	1617.73	0.15
\$5→ \$10	americana	0.3711	0.3713	0.0002	24.47	24.46	0.01
\$50→ \$100	americana	0.0051	0.0051	0.0001	938.63	940.26	1.63

Los resultados de las simulaciones son muy cercanos a los valores teóricos, lo cual confirma la validez del modelo utilizado y la consistencia del método de Monte Carlo. Esta coincidencia indica que, a pesar de la naturaleza aleatoria de cada trayectoria individual, el promedio de un gran número de simulaciones reproduce con alta precisión el comportamiento esperado según la teoría de cadenas de Markov absorbentes. En consecuencia, podemos afirmar que el modelo teórico describe adecuadamente la dinámica del capital del jugador y que las simulaciones numéricas sirven como una verificación empírica fiable de dichos resultados.

Finalmente, a partir de las simulaciones se encontró que jugar en una ruleta americana, en comparación con una ruleta europea, reduce las probabilidades de éxito en aproximadamente un 4.77 %.

4. Conclusiones

- El método de simulaciones Monte Carlo, al emplear un número suficientemente grande de repeticiones, produce resultados que se ajustan notablemente a los valores teóricos, confirmando la validez del modelo y la consistencia del enfoque numérico.

- Para maximizar la probabilidad de éxito al intentar duplicar el capital, resulta más conveniente fijar una meta pequeña y apostar a la docena, ya que esta modalidad presenta el mayor porcentaje de éxito en dichos escenarios.

- Si el objetivo del jugador es prolongar su permanencia en el juego antes de alcanzar un estado absorbente (bancarrota o duplicar el capital), la estrategia más efectiva es apostar al color, pues es la que ofrece un mayor tiempo medio de absorción.

- Las simulaciones muestran que jugar en una ruleta americana reduce de manera significativa la probabilidad de éxito en comparación con la ruleta europea. Por lo tanto, desde el punto de vista probabilístico, apostar en ruletas europeas resulta más favorable.

5. Referencias

Referencias

[1] Ji, P. (2023). *Cadena de Markov y el problema de la ruina del jugador*. Trabajo de Fin de Grado, Departamento de Matemáticas e Informática, Universidad de Barcelona.

[2] Sportium. (2024). *Pagos y premios de ruleta*. Disponible en: https://blog.sportium.es/pagos-premios-ruleta/.

[3] CasasDeApuestas.com. (2024). *Diferencias entre la ruleta europea y la americana*. Disponible en: https://www.casasdeapuestas.com/blog/diferencias-la-ruleta-europea-la-americana/.

Recursos Adicionales

Presentación en Video

Este proyecto incluye una presentación en video donde se explican los conceptos principales, la implementación y los resultados obtenidos.

Video de presentación:

https://youtu.be/GZBsazgbVAY

Código Fuente y Documentación

El código completo del proyecto, incluyendo las implementaciones de las simulaciones Monte Carlo en scripts de R y toda la documentación técnica, está disponible en el repositorio de GitHub.

Repositorio GitHub:

https://github.com/sergiomath/Tarea1_Cadenas/tree/main/Proyecto%20Final