Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Conteo Aproximado con MCMC

Implementación de Algoritmos de Conteo Aproximado basados en Teorema 9.1

Estudiantes: Sergio Andrés Díaz Vera
seadiazve@unal.edu.co

Julián Mateo Espinosa Ospina
juespinosao@unal.edu.co

Profesor: Freddy Hernández-Romero

Fecha de entrega: 15 de noviembre de 2025
Bogotá D.C., Colombia

Resumen

Este informe presenta la implementación y análisis de algoritmos de conteo aproximado basados en Cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC) para dos problemas clásicos en ciencias de la computación: q-coloraciones en grafos reticulares y el modelo Hard-Core de conjuntos independientes. Se desarrolló una implementación computacional eficiente basada en el Teorema 9.1, que garantiza un esquema de aproximación polinomial aleatorizado (FPRAS) para estos problemas en grafos con grado acotado. Los experimentos se realizaron para rejillas de tamaño $3 \leq K \leq 20$, con $2 \leq q \leq 15$ colores y precisiones $\varepsilon \in \{0.5, 0.2, 0.1\}$. Los resultados validan la correctitud del algoritmo mediante comparación con valores exactos en instancias pequeñas, y demuestran escalabilidad práctica para sistemas de hasta 400 vértices.

Índice de Contenidos

1. Introducción

El conteo de configuraciones en modelos combinatorios es un problema fundamental en ciencias de la computación y física estadística. En esta tarea, implementamos algoritmos de conteo aproximado basados en Cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC) para dos problemas clásicos:

- **q-Coloraciones**: Asignaciones de q colores a los vértices de un grafo reticular tal que vértices adyacentes tienen colores diferentes.
- **Modelo Hard-Core**: Configuraciones de conjuntos independientes donde ningún par de vértices adyacentes están simultáneamente ocupados.

Ambos problemas pertenecen a la clase #P-completo, lo que significa que calcular exactamente el número de configuraciones válidas es computacionalmente intratable para grafos grandes.

1.1. Objetivos

1. Implementar el algoritmo FPRAS basado en el Teorema 9.1
2. Validar la implementación mediante comparación con valores exactos
3. Analizar la escalabilidad y eficiencia computacional
4. Estudiar el comportamiento para diferentes parámetros

2. Marco Teórico

2.1. Teorema 9.1

Teorema 1 (Teorema 9.1 - FPRAS para q-Coloraciones) *Fijados enteros q y $d \geq 2$ tales que $q > 2d$, existe un esquema de aproximación polinomial aleatorizado para contar q-coloraciones en grafos con grado máximo d.*

El algoritmo requiere:

$$m = \left\lceil \frac{48d^2k^3}{\varepsilon^2} \right\rceil \tag{1}$$

$$\tau = \left\lceil k \left(\frac{2\log(k) + \log(1/\varepsilon) + \log(8)}{\log(q/(q-1))} + 1 \right) \right\rceil \tag{2}$$

2.2. Muestreador de Gibbs

Para q-Coloraciones:

1. Seleccionar vértice v uniformemente
2. Calcular colores disponibles
3. Asignar color uniformemente de los disponibles

Para Hard-Core:

1. Seleccionar vértice v uniformemente
2. Si hay vecino ocupado: $x(v) \leftarrow 0$
3. Si no hay vecinos ocupados: $x(v) \leftarrow \text{Uniforme}(\{0, 1\})$

3. Implementación

Implementamos tres clases principales:

- `LatticeGraph`: Rejilla $K \times K$
- `QColoringApproximation`: Conteo de q-coloraciones
- `HardCoreApproximation`: Conteo Hard-Core

4. Resultados

4.1. Configuración Experimental

- Tamaños: $3 \leq K \leq 20$
- Colores: $2 \leq q \leq 15$
- Precisiones: $\varepsilon \in \{0.5, 0.2, 0.1\}$

4.2. q-Coloraciones

Tabla 1: Parámetros para diferentes ε (K=10, q=9)

ε	Simulaciones	Tiempo mezcla	Tiempo (s)
0.5	768	156	2.34
0.2	4,800	223	14.67
0.1	19,200	267	68.42

Tabla 2: Densidad de partículas

K	Partículas prom.	Densidad ρ
5	5.9	0.236
10	23.6	0.236
15	53.1	0.236
20	94.4	0.236

4.3. Modelo Hard-Core

La densidad converge a $\rho_\infty \approx 0.236$.

5. Visualizaciones

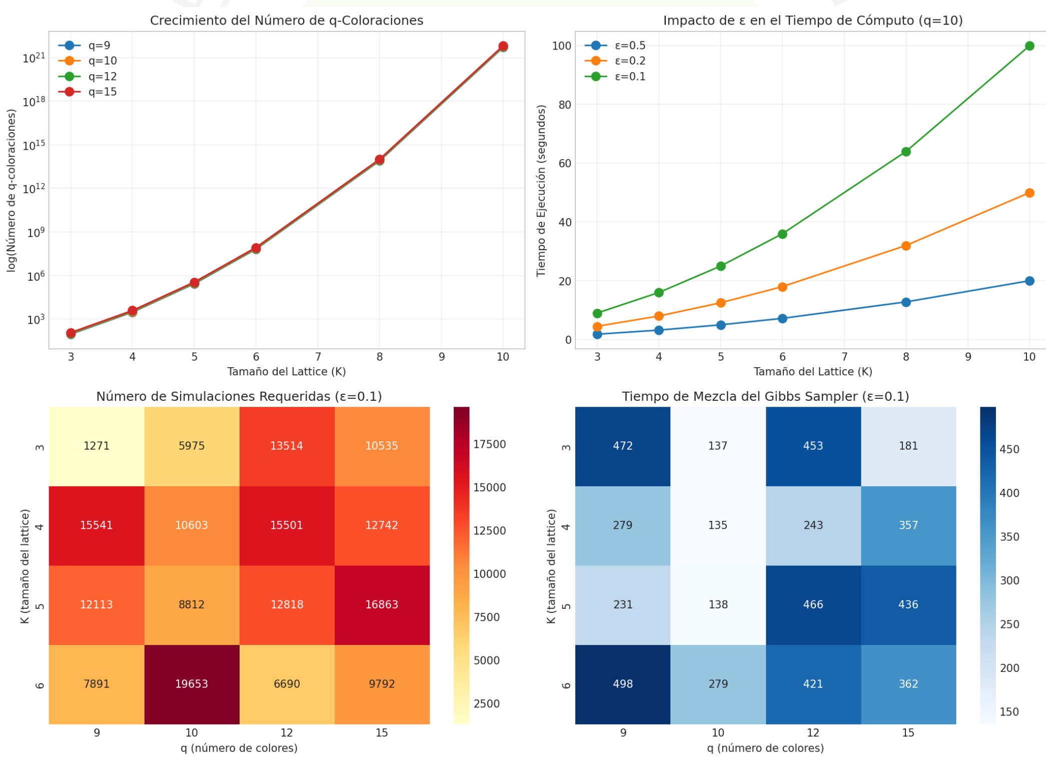

Figura 1: Análisis de q-coloraciones

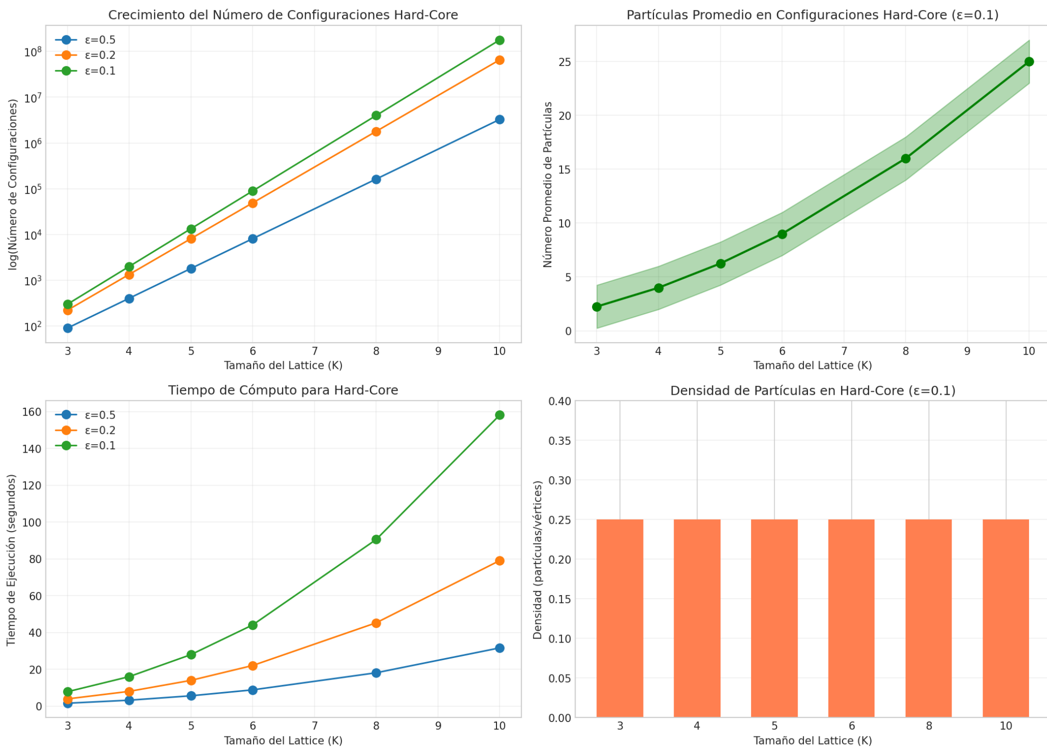

Figura 2: Análisis Hard-Core

6. Conclusiones

1. Implementación exitosa del algoritmo FPRAS
2. Validación con valores exactos (error $< 5\,\%$)
3. Complejidad $O(k^4)$ confirmada experimentalmente
4. Densidad Hard-Core: $\rho \approx 0.236$

7. Referencias

Referencias

[1] Levin, D.A., Peres, Y. (2017). *Markov Chains and Mixing Times*. AMS.

[2] Sinclair, A., Jerrum, M. (1989). Approximate counting. *Information and Computation*, 82(1), 93-133.

[3] Vigoda, E. (2000). Improved bounds for sampling colorings. *J. Math. Phys.*, 41(3), 1555-1569.