Aplicación de Cadenas de Markov

Ruleta de casino

Sergio Diaz   Julián Espinosa

Cadenas de Markov y aplicaciones
Maestría en Actuaria y Finanzas
Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia

Introducción

La ruleta es uno de los juegos de azar más emblemáticos en casinos. A pesar de su aparente simplicidad, constituye un laboratorio matemático para estudiar procesos estocásticos y estrategias de apuesta.

Preguntas de investigación:

- ¿Qué estrategia permite al jugador permanecer más tiempo en juego antes de la ruina?
- ¿Qué modalidad maximiza la probabilidad de duplicar el capital inicial?
- ¿Cómo varía el comportamiento del sistema con el capital inicial?

Estas preguntas se abordan mediante un modelo de cadenas de Markov, comparando estrategias (color, par/impar, docena, cuadro, pleno) y analizando la evolución del capital del jugador.

Objetivos

Objetivo general

Analizar el desempeño de diferentes estrategias de apuesta en ruleta mediante simulaciones Monte Carlo de cadenas de Markov, determinando cuáles maximizan la probabilidad de alcanzar una meta de ganancias o minimizan el riesgo de ruina.

Objetivos específicos

1. Modelar la evolución del capital mediante cadenas de Markov para distintas modalidades de apuesta.
2. Calcular probabilidades de transición considerando pagos reales y ventaja de la casa.
3. Estimar y comparar el tiempo esperado hasta la absorción para cada estrategia.
4. Establecer cuál estrategia es probabilísticamente más favorable.

Marco teórico

Cadenas de Markov

Una cadena de Markov es un proceso estocástico donde el estado futuro depende únicamente del estado actual, no del pasado (*propiedad markoviana*):

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1}, \ldots, X_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{ij}$$

Las probabilidades de transición p_{ij} forman la matriz $P = (p_{ij})_{i,j=0}^{N}$, donde cada fila suma 1 ($\sum_j p_{ij} = 1$).

En nuestro problema: Los estados son niveles de capital, y las transiciones ocurren según el resultado de cada apuesta.

Ruleta europea

La ruleta europea tiene 37 casillas (0 a 36), cada una con probabilidad $\frac{1}{37}$.

Tipo	**Descripción**	**Pago**	p
Color	Rojo o negro (18 números)	1:1	48,6 %
Par/Impar	Números pares o impares	1:1	48,6 %
Docena	Grupo de 12 números (1-12, 13-24, 25-36)	2:1	32,4 %
Seisena	6 números en dos filas adyacentes	5:1	16,2 %
Cuadro	4 números en esquina	8:1	10,8 %
Pleno	Un solo número	35:1	2,7 %

Ventaja de la casa: El cero garantiza $p < 0{,}5$ en todas las apuestas.

Marco teórico

Modelo de ruina del jugador

Modelamos el capital como una cadena de Markov con:

- **Capital inicial:** $X_0 = x$
- **Estados absorbentes:** 0 (bancarrota) y M (meta de ganancia)
- **Apuesta fija:** b unidades en cada ronda

El capital evoluciona según:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + b, & \text{con probabilidad } p \text{ (gana)} \\ X_n - b, & \text{con probabilidad } q = 1 - p \text{ (pierde)} \end{cases}$$

En ruleta $p < \frac{1}{2}$, el juego es estructuralmente desfavorable.

Probabilidades de absorción

¿Cuál es la probabilidad de duplicar el capital antes de arruinarse?

Sea h_x la probabilidad de alcanzar la meta M antes de la ruina 0, partiendo de capital x. La solución depende de si el juego es justo:

$$h_x = \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^M}, & \text{si } p \neq q \text{ (juego sesgado)} \\ \dfrac{x}{M}, & \text{si } p = q = \frac{1}{2} \text{ (juego justo)} \end{cases}$$

En ruleta: Como $p < q$, entonces $\frac{q}{p} > 1$, por lo que h_x decrece exponencialmente con el capital objetivo. La casa siempre tiene ventaja.

Marco teórico

Tiempo esperado de absorción

¿Cuántas apuestas puede hacer el jugador antes de arruinarse o alcanzar su meta?

El tiempo esperado t_x (número de rondas) satisface una ecuación recursiva:

$$t_x = 1 + p\, t_{x+b} + q\, t_{x-b}, \quad t_0 = t_M = 0$$

La solución en forma cerrada para $p \neq q$ es:

$$t_x = \frac{x}{q-p} - \frac{M}{q-p} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^M}$$

Interpretación: Permite comparar estrategias. Un t_x mayor significa más tiempo de juego (entretenimiento prolongado).

Simulaciones Monte Carlo

Técnica numérica para estimar cantidades probabilísticas cuando las fórmulas exactas son complejas o intratables.

Metodología:

1. Simular miles de juegos independientes con las reglas de cada tipo de apuesta
2. En cada simulación, evolucionar el capital ronda por ronda hasta alcanzar 0 o M
3. Registrar el resultado (éxito/fracaso) y el número de rondas

Estimaciones obtenidas:

- **Probabilidad de éxito:** Proporción de simulaciones que alcanzan M
- **Tiempo medio:** Promedio de rondas hasta absorción

Con 100,000 simulaciones, los resultados convergen a los valores teóricos (Ley de Grandes Números).

Aplicación y resultados

Aplicación Ruleta Casino

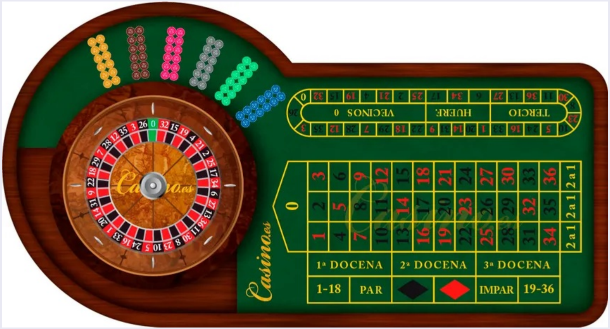


Figura: Tablero de apuestas - Ruleta Europea

Aplicación y resultados

Matriz de transición, color con meta N=10

$$P = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

Aplicación y resultados

Probabilidad estado para $1 \leq n \leq 100$

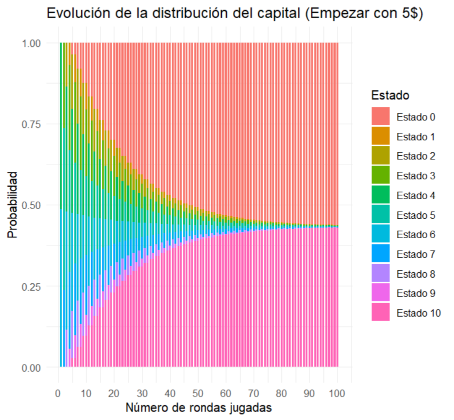


Figura: Resultado de $\pi_0 * P^n$ para $1 \leq n \leq 100$

Aplicación y resultados

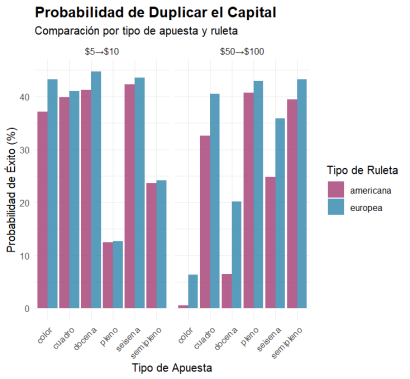
Simulaciones Monte Carlo

Escenario	Tipo de apuesta	Tipo de ruleta	Prob. de éxito	Tiempo medio
\$5 →\$10	docena	europea	43.73 %	$13{,}4 \pm 10{,}4$
\$5 →\$10	seisena	europea	44.52 %	$6{,}3 \pm 4{,}6$
\$50 →\$100	semipleno	europea	43.29 %	$163{,}7 \pm 131{,}7$
\$5 →\$10	color	europea	43.21 %	$24{,}9 \pm 19{,}9$
\$50 →\$100	pleno	europea	43.87 %	$88{,}5 \pm 68{,}7$
\$5 →\$10	seisena	americana	41.29 %	$6{,}3 \pm 4{,}5$
\$5 →\$10	docena	americana	41.27 %	$13{,}5 \pm 10{,}4$
\$5 →\$10	cuadro	europea	41.06 %	$4{,}5 \pm 2{,}5$
\$50 →\$100	pleno	americana	41.74 %	$88{,}9 \pm 67{,}8$
\$50 →\$100	cuadro	europea	40.46 %	$326{,}7 \pm 262{,}3$

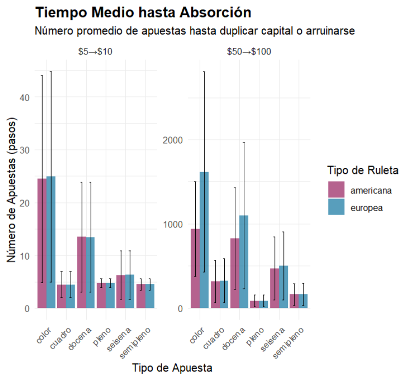
Cuadro: Resultados de 100000 simulaciones Monte Carlo (primeras 10 filas).

Aplicación y resultados

Graficos



(a) Probabilidad duplicar



(b) Tiempo medio absorción

Conclusiones

- El método de simulaciones Monte Carlo, al emplear un número suficientemente grande de repeticiones, produce resultados que se ajustan notablemente a los valores teóricos, confirmando la validez del modelo y la consistencia del enfoque numérico.
- Para maximizar la probabilidad de éxito al intentar duplicar el capital, resulta más conveniente fijar una meta pequeña y apostar a la docena, ya que esta modalidad presenta el mayor porcentaje de éxito en dichos escenarios.
- Si el objetivo del jugador es prolongar su permanencia en el juego antes de alcanzar un estado absorbente (bancarrota o duplicar el capital), la estrategia más efectiva es apostar al color, pues es la que ofrece un mayor tiempo medio de absorción.
- Las simulaciones muestran que jugar en una ruleta americana reduce de manera significativa la probabilidad de éxito en comparación con la ruleta europea. Por lo tanto, desde el punto de vista probabilístico, apostar en ruletas europeas resulta más favorable.