Taller 2: Estadística bayesiana

Sergio Andres Diaz Vera

2022-08-26

1. Sean x, y, y z variables aleatorias con función de densidad conjunta (discreta o continua) dada por $p(x, y, z) \propto p(x, z)p(y, z)p(z)$. Muestre que:
   (a) $p(x \mid y, z) \propto p(x, z)$, i.e., $p(x \mid y, z)$ es función de x y z.
   (b) $p(y \mid x, z) \propto p(y, z)$, i.e., $p(y \mid x, z)$ es función de y y z.
   (c) x y y son condicionalmente independientes dado z.
2. Sean A, B, y C proposiciones de falso-verdadero. Suponga que A y B son condicionalmente independientes, dado C. Muestre que:
   (a) A y B^C son condicionalmente independientes, dado C.
   (b) A^C y B^C son condicionalmente independientes, dado C.
3. Sea $y \mid x \sim \mathsf{Poi}(x)$ y $x \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$.
   (a) Muestre que la distribución marginal de y es:

$$p(y) = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{y+1}}\,, \qquad y = 0, 1, \ldots \qquad \lambda > 0\,.$$

Desarrollo:
veamos que si $y \mid x \sim \mathsf{Poi}(x)$ entonces $p(y \mid x) = \frac{e^{-x}x^y}{y!}$ y $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ así

$$p(y) \overset{\text{Definición}}{=} \int_\Theta p(y,\theta)d\theta = \int_0^\infty p(y \mid x)p(x)dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}x^y}{y!}\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda}{y!}\int_0^\infty x^y e^{-(\lambda+1)x}dx$$

ahora que la integral toma la forma de la función de distribución de una distribución gamma la integral de esta es 1

$$p(y) = \frac{\lambda}{y!}\frac{\Gamma(y+1)}{(\lambda+1)^{y+1}}\overbrace{\int_0^\infty \frac{(\lambda+1)^{y+1}}{\Gamma(y+1)}x^{(y+1)-1}e^{-(\lambda+1)x}dx}^{\text{Densidad distri Gamma }=1} = \frac{\lambda}{y!}\frac{(y)!}{(\lambda+1)^{y+1}} = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{y+1}}$$

   (b) Simule $N = 100,000$ muestras independientes e idénticamente distribuidas de y con $\lambda = 1$, y compare la distribución empírica correspondiente con la distribución exacta obtenida en el numeral anterior.

Desarrollo:

```
##   y     Sim         Exact          Diff
## ---  ------  -----------  -----------
##   0  0.5039  0.5           0.0039
##   1  0.2432  0.25          0.0068
```

```
## 2 0.123 0.125 0.002
## 3 0.0672 0.0625 0.0047
## 4 0.0312 0.03125 5e-05
## 5 0.0157 0.015625 7.5e-05
## 6 0.0082 0.0078125 0.0003875
## 7 0.0034 0.00390625 0.00050625
## 8 0.0017 0.00195312 0.000253125
## 9 0.0012 0.000976562 0.000223438
## 10 0.0005 0.000488281 1.17188e-05
## 11 0.0001 0.000244141 0.000144141
## 12 0.0005 0.00012207 0.00037793
## 13 0.0001 6.10352e-05 3.89648e-05
## 14 0.0001 3.05176e-05 6.94824e-05
```

4. Muestre que si $y \mid \theta$ tiene distribución exponencial con parámetro θ, entonces la distribución Gamma sirve como distribución previa conjugada para hacer inferencias sobre θ, dada una muestra aleatoria de valores de y.

Desarrollo:

Se tiene que $y_i \mid \theta \overset{\text{iid}}{\sim} exp(\theta)$ y la distribución previa $\theta \sim Gamma(a, b)$