Taller 2: Estadística bayesiana

Sergio Andres Diaz Vera

2022-08-31

1. Sean x, y, y z variables aleatorias con función de densidad conjunta (discreta o continua) dada por $p(x, y, z) \propto p(x, z)p(y, z)p(z)$. Muestre que:
   (a) $p(x \mid y, z) \propto p(x, z)$, i.e., $p(x \mid y, z)$ es función de x y z.
   (b) $p(y \mid x, z) \propto p(y, z)$, i.e., $p(y \mid x, z)$ es función de y y z.
   (c) x y y son condicionalmente independientes dado z.
2. Sean A, B, y C proposiciones de falso-verdadero. Suponga que A y B son condicionalmente independientes, dado C. Muestre que:
   (a) A y B^C son condicionalmente independientes, dado C.
   (b) A^C y B^C son condicionalmente independientes, dado C.
3. Sea $y \mid x \sim \mathsf{Poi}(x)$ y $x \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$.
   (a) Muestre que la distribución marginal de y es:

$$p(y) = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{y+1}}\,, \qquad y = 0, 1, \ldots \qquad \lambda > 0\,.$$

Desarrollo:
veamos que si $y \mid x \sim \mathsf{Poi}(x)$ entonces $p(y \mid x) = \frac{e^{-x}x^y}{y!}$ y $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ así

$$p(y) \overset{\text{Definición}}{=} \int_\Theta p(y,\theta)d\theta = \int_0^\infty p(y \mid x)p(x)dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}x^y}{y!}\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda}{y!}\int_0^\infty x^y e^{-(\lambda+1)x}dx$$

ahora que la integral toma la forma de la función de distribución de una distribución gamma la integral de esta es 1

$$p(y) = \frac{\lambda}{y!}\frac{\Gamma(y+1)}{(\lambda+1)^{y+1}}\overbrace{\int_0^\infty \frac{(\lambda+1)^{y+1}}{\Gamma(y+1)}x^{(y+1)-1}e^{-(\lambda+1)x}dx}^{\text{Densidad distri Gamma }=1} = \frac{\lambda}{y!}\frac{(y)!}{(\lambda+1)^{y+1}} = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{y+1}}$$

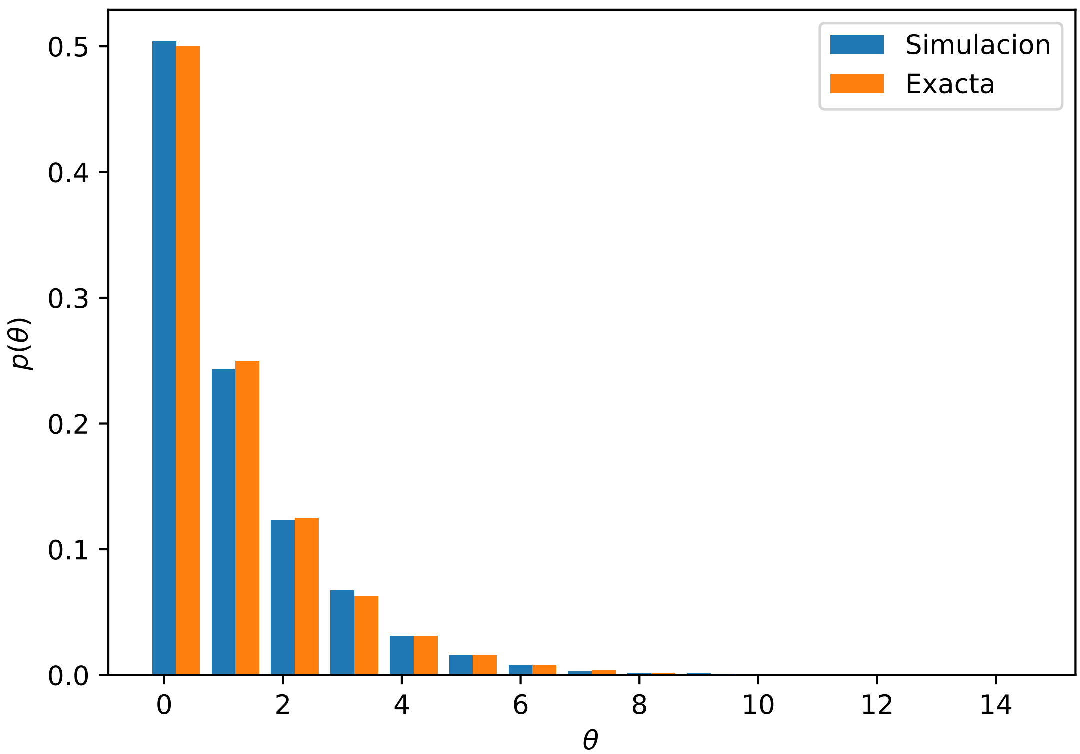
   (b) Simule $N = 100,000$ muestras independientes e idénticamente distribuidas de y con $\lambda = 1$, y compare la distribución empírica correspondiente con la distribución exacta obtenida en el numeral anterior.

Desarrollo:

```
##   y     Sim         Exact          Diff
## ---  ------  -----------  -----------
##   0  0.5039  0.5          0.0039
##   1  0.2432  0.25         0.0068
```

```
##    2  0.123   0.125         0.002
##    3  0.0672  0.0625        0.0047
##    4  0.0312  0.03125       5e-05
##    5  0.0157  0.015625      7.5e-05
##    6  0.0082  0.0078125     0.0003875
##    7  0.0034  0.00390625    0.00050625
##    8  0.0017  0.00195312    0.000253125
##    9  0.0012  0.000976562   0.000223438
##   10  0.0005  0.000488281   1.17188e-05
##   11  0.0001  0.000244141   0.000144141
##   12  0.0005  0.00012207    0.00037793
##   13  0.0001  6.10352e-05   3.89648e-05
##   14  0.0001  3.05176e-05   6.94824e-05
```

Veamos gráficamente este hecho



4. Muestre que si $y \mid \theta$ tiene distribución exponencial con parámetro θ, entonces la distribución Gamma sirve como distribución previa conjugada para hacer inferencias sobre θ, dada una muestra aleatoria de valores de y.

Desarrollo:

Se tiene que $y_i \mid \theta \overset{\text{iid}}{\sim} exp(\theta)$ y la distribución previa $\theta \sim Gamma(a, b)$ entonces

$$p(y \mid \theta) = \theta e^{-\theta y} \quad \text{ y ademas } \quad p(\theta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta}$$

así $s = \sum_{i=1}^{n} y_i$ estadístico suficiente y la distribución a posterior sera

$$p(\theta \mid \boldsymbol{y}) \overset{\text{T.Bayes}}{=} \frac{p(\boldsymbol{y} \mid \theta)p(\theta)}{p(\boldsymbol{y})}$$

luego

$$p(\boldsymbol{y}) = \int_{\Theta} p(\boldsymbol{y}, \theta) d\theta = \int_{\Theta} p(\boldsymbol{y} \mid \theta)p(\theta) d\theta = \int_0^{\infty} \theta^n e^{-\sum y_i \theta} [\frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta}] d\theta = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} \theta^{(a+n)-1} e^{-(b+s)\theta} d\theta$$

recordando la forma de la densidad de una distribución gamma completamos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{y}) =& \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} \theta^{(a+n)-1} e^{-(b+s)\theta} d\theta & (1) \\ =& \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+n)}{(b+s)^{(a+n)}} \int_0^{\infty} \overbrace{\frac{(b+s)^{(a+n)}}{\Gamma(a+n)} \theta^{(a+n)-1} e^{-(b+s)\theta}}^{\text{Densidad Gamma}} d\theta & (2) \\ =& \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+n)}{(b+s)^{(a+n)}} & (3) \end{aligned}$$

luego usando el teorema de Bayes

$$\begin{aligned} p(\theta \mid \boldsymbol{y}) &\overset{\text{T.Bayes}}{=} \frac{p(\boldsymbol{y} \mid \theta)p(\theta)}{p(\boldsymbol{y})} & (4) \\ &= \frac{\theta^n e^{-s\theta} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta}}{\frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+n)}{(b+s)^{(a+n)}}} \quad \text{cancelando} & (5) \\ &= \frac{(b+s)^{(a+n)}}{\Gamma(a+n)} \theta^{(a+n)-1} e^{-(b+s)\theta} & (6) \\ \theta \mid \boldsymbol{y} &\sim Gamma(a+n, b+s.) & (7) \end{aligned}$$

entonces la distribución Gamma sirve como distribución previa conjugada para hacer inferencias sobre θ.

5. Suponga que Su estado de información previo para θ, la proporción de individuos que apoyan la pena de muerte en California, es Beta con media $E(\theta)$=0.6 y desviación estándar $DE(\theta) = 0.3$.

   (a) Determine los hiperparámetros de Su distribución previa y dibuje la función de densidad correspondiente.

   Desarrollo:

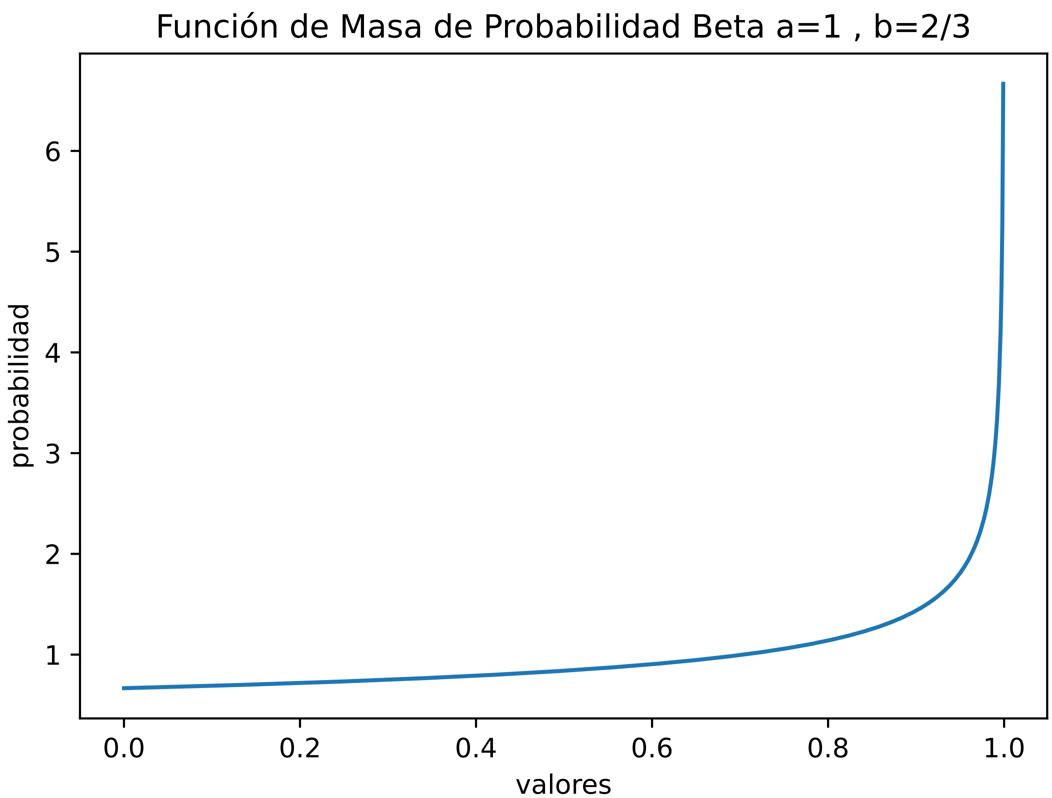
   Puesto que el estado de información previa se puede modelar a través de una función beta de parámetros a y b ,tendremos entonces que :

$$E(\theta) = 0.6 \Longrightarrow \frac{a}{a+b} = 0.6 \Longrightarrow b = (2/3)a$$

de la misma manera

$$
\begin{aligned}
DE(\theta) = (\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)})^{1/2} &\Longrightarrow 0.09 = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \\
0.09 &= \frac{(2/3)a^2}{(\frac{5}{3}a)^2(\frac{5}{3}a+1)} \\
\frac{2}{3} &= (\frac{9}{100})(\frac{25}{9})(\frac{5}{3}a+1) \\
\frac{8}{3} &= \frac{5}{3}a+1 \\
a &= 1
\end{aligned}
$$

así $a = 1$ y $b = 2/3$ entonces el modelo será $Beta(1, \frac{2}{3})$

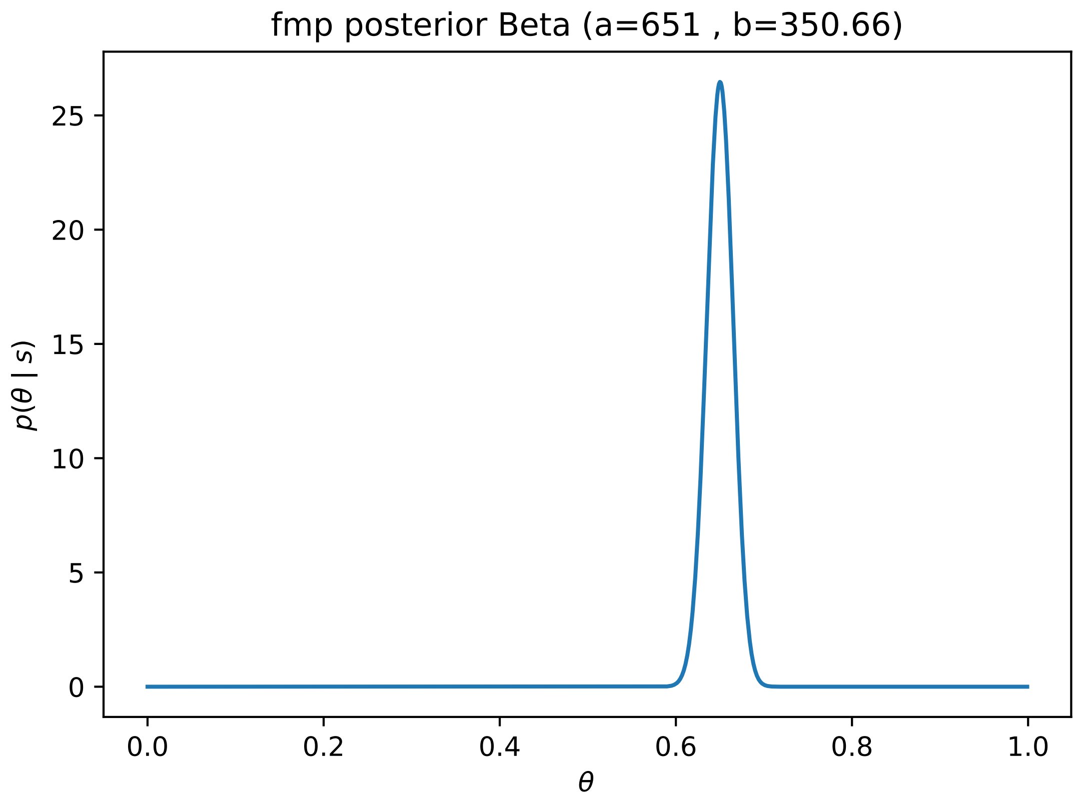


(b) Se toma una muestra aleatoria de 1,000 californianos y el 65% apoya la pena de muerte. Calcule tanto la media como la desviación estándar posterior para θ. Dibuje la función de densidad posterior correspondiente.

Solución:

Se tiene que la distribución muestral $s \mid \theta \sim binomial(n = 1000, p = 0.65)$ y $\theta \sim beta(a = 1, b = \frac{2}{3})$ por el modelo beta-binomial se tiene que la distribución posterior es $beta(1 + 650, 1 + 350)$ donde $s = 650$

Además tenemos que el valor esperado es $E(s \mid \theta) = \frac{651}{651+351} = 0.6497$ y la $Var(s \mid \theta) = \frac{(651)(351)}{(651+351)^2(651+351+1)} = 0.0002269$


fmp posterior Beta (a=651 , b=350.66)
25
20
15
10
5
0
$p(\theta \mid s)$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
θ