Taller 2: Estadística bayesiana

Sergio Andres Diaz Vera

2022-08-28

1. Sean x, y, y z variables aleatorias con función de densidad conjunta (discreta o continua) dada por $p(x,y,z) \propto p(x,z)p(y,z)p(z)$. Muestre que:
   (a) $p(x \mid y,z) \propto p(x,z)$, i.e., $p(x \mid y,z)$ es función de x y z.
   (b) $p(y \mid x,z) \propto p(y,z)$, i.e., $p(y \mid x,z)$ es función de y y z.
   (c) x y y son condicionalmente independientes dado z.
2. Sean A, B, y C proposiciones de falso-verdadero. Suponga que A y B son condicionalmente independientes, dado C. Muestre que:
   (a) A y B^C son condicionalmente independientes, dado C.
   (b) A^C y B^C son condicionalmente independientes, dado C.
3. Sea $y \mid x \sim \mathsf{Poi}(x)$ y $x \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$.
   (a) Muestre que la distribución marginal de y es:

$$p(y) = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{y+1}}\,, \qquad y = 0, 1, \ldots \qquad \lambda > 0\,.$$

Desarrollo:
veamos que si $y \mid x \sim \mathsf{Poi}(x)$ entonces $p(y \mid x) = \frac{e^{-x}x^y}{y!}$ y $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ así

$$p(y) = \overbrace{\int_\Theta p(y,\theta)d\theta}^{\text{Definición}} = \int_0^\infty p(y \mid x)p(x)dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}x^y}{y!}\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda}{y!}\int_0^\infty x^y e^{-(\lambda+1)x}dx$$

ahora que la integral toma la forma de la función de distribución de una distribución gamma la integral de esta es 1

$$p(y) = \frac{\lambda}{y!}\frac{\Gamma(y+1)}{(\lambda+1)^{y+1}}\overbrace{\int_0^\infty \frac{(\lambda+1)^{y+1}}{\Gamma(y+1)}x^{(y+1)-1}e^{-(\lambda+1)x}dx}^{\text{Densidad distri Gamma }=1} = \frac{\lambda}{y!}\frac{(y)!}{(\lambda+1)^{y+1}} = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{y+1}}$$

   (b) Simule $N = 100,000$ muestras independientes e idénticamente distribuidas de y con $\lambda = 1$, y compare la distribución empírica correspondiente con la distribución exacta obtenida en el numeral anterior.

Desarrollo:

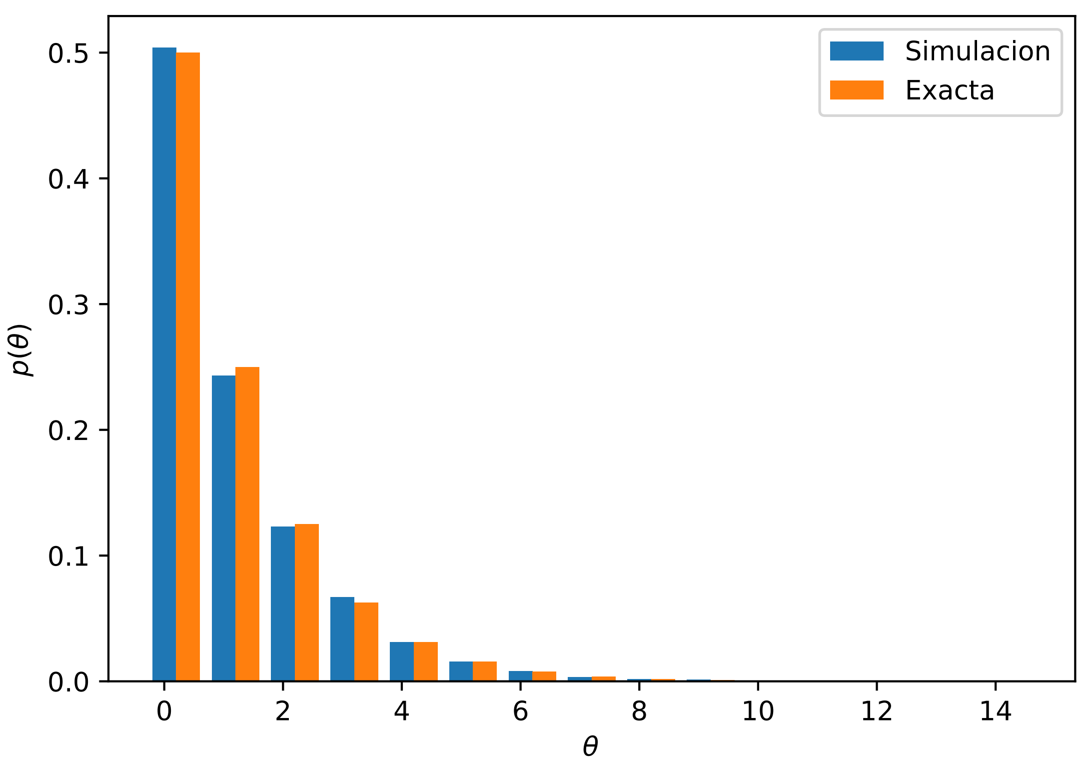
```
##   y    Sim         Exact          Diff
## ---  ------  -----------  -----------
##   0  0.5039  0.5          0.0039
##   1  0.2432  0.25         0.0068
```

```
##   2  0.123   0.125        0.002
##   3  0.0672  0.0625       0.0047
##   4  0.0312  0.03125      5e-05
##   5  0.0157  0.015625     7.5e-05
##   6  0.0082  0.0078125    0.0003875
##   7  0.0034  0.00390625   0.00050625
##   8  0.0017  0.00195312   0.000253125
##   9  0.0012  0.000976562  0.000223438
##  10  0.0005  0.000488281  1.17188e-05
##  11  0.0001  0.000244141  0.000144141
##  12  0.0005  0.00012207   0.00037793
##  13  0.0001  6.10352e-05  3.89648e-05
##  14  0.0001  3.05176e-05  6.94824e-05

## <BarContainer object of 15 artists>

## <BarContainer object of 15 artists>

## (array([-2.,  0.,  2.,  4.,  6.,  8., 10., 12., 14., 16.]), [Text(0, 0, ''), Text(0, 0, ''), Text(0,
```



4. Muestre que si $y \mid \theta$ tiene distribución exponencial con parámetro θ, entonces la distribución Gamma sirve como distribución previa conjugada para hacer inferencias sobre θ, dada una muestra aleatoria de valores de y.

Desarrollo:

Se tiene que $y_i \mid \theta \overset{\text{iid}}{\sim} exp(\theta)$ y la distribución previa $\theta \sim Gamma(a,b)$ entonces

$$p(y \mid \theta) = \theta e^{-\theta y} \quad \text{y ademas} \quad p(\theta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{a-1}e^{-b\theta}$$

así $s = \sum_{i=1}^{n} y_i$ estadístico suficiente y la distribución a posterior sera

$$p(\theta \mid \boldsymbol{y}) \overset{\text{T.Bayes}}{=} \frac{p(\boldsymbol{y} \mid \theta)p(\theta)}{p(\boldsymbol{y})}$$

luego

$$p(\boldsymbol{y}) = \int_{\Theta} p(\boldsymbol{y},\theta)d\theta = \int_{\Theta} p(\boldsymbol{y} \mid \theta)p(\theta)d\theta = \int_0^{\infty} \theta^n e^{-\sum y_i \theta}[\frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{a-1}e^{-b\theta}]d\theta = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty} \theta^{(a+n)-1}e^{-(b+s)\theta}d\theta$$

recordando la forma de la densidad de una distribución gamma completamos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
p(\boldsymbol{y}) &= \frac{b^a}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty} \theta^{(a+n)-1}e^{-(b+s)\theta}d\theta && (1)\\
&= \frac{b^a}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(a+n)}{(b+s)^{(a+n)}}\int_0^{\infty} \overbrace{\frac{(b+s)^{(a+n)}}{\Gamma(a+n)}\theta^{(a+n)-1}e^{-(b+s)\theta}}^{\text{Densidad Gamma}}d\theta && (2)\\
&= \frac{b^a}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(a+n)}{(b+s)^{(a+n)}} && (3)
\end{aligned}$$

luego usando el teorema de Bayes

$$\begin{aligned}
p(\theta \mid \boldsymbol{y}) &\overset{\text{T.Bayes}}{=} \frac{p(\boldsymbol{y} \mid \theta)p(\theta)}{p(\boldsymbol{y})} && (4)\\
&= \frac{\theta^n e^{-s\theta}\frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{a-1}e^{-b\theta}}{\frac{b^a}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(a+n)}{(b+s)^{(a+n)}}} \quad \text{cancelando} && (5)\\
&= \frac{(b+s)^{(a+n)}}{\Gamma(a+n)}\theta^{(a+n)-1}e^{-(b+s)\theta} && (6)\\
\theta \mid \boldsymbol{y} &\sim Gamma(a+n, b+s.) && (7)
\end{aligned}$$

entonces la distribución Gamma sirve como distribución previa conjugada para hacer inferencias sobre θ.