Modulaciones Multipulso

Comunicaciones Digitales
Curso Académico 2020/2021

Práctica 2 (b)
Modulación OFDM

Objetivos

En esta práctica el alumno aprenderá a:

- Simular un sistema de comunicaciones con una modulación OFDM en tiempo discreto.
- Analizar las características de la modulación, la importancia del prefijo cíclico, y relacionarlas con las prestaciones obtenidas.

Normas y plazos de entrega

- La práctica debe realizarse en grupos de 2 alumnos.
- Cada grupo deberá realizar los ejercicios descritos en la práctica, y entregar a su profesor de prácticas el cuestionario en el que se da respuesta a las cuestiones planteadas en cada apartado de la práctica del modo especificado en Aula Global.

Introducción

En una modulación OFDM en tiempo discreto con un número N de portadoras, la señal modulada en banda base, $s_r(t)$, se obtiene reconstruyendo las muestras de la señal, $s[m]$

$$s_r(t) = \sum_m x[m]\, g_r\left(t - m\frac{T}{N}\right).$$

El filtro $g_r(t)$ es el habitual filtro reconstructor

$$g_r(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{N}{T}\, t\right).$$

Las muestras $s[m]$ se obtienen procesando los símbolos por bloques de tamaño N (lo que equivale en cada bloque a un símbolo por portadora). Cada bloque se denota como

$$s^{(n)}[m],\ \text{con } m \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$$

de modo que la secuencia se puede escribir como

$$s[m] = \sum_n s^{(n)}[m + nN],$$

y las muestras del bloque de índice n se obtienen como

$$s^{(n)}[m] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{N-1} A_k[n]\, e^{j\frac{2\pi k}{N}m}.$$

Esta operación, salvo por un factor de escala, es una DFT inversa de N puntos de los símbolos $A_k[n]$, es decir

$$s^{(n)}[m] = \frac{N}{\sqrt{T}} \mathrm{IDFT}_N\{A_k[n]\}.$$

En el receptor, las observaciones a tiempo de símbolo OFDM de cada portadora se pueden obtener procesando las muestras a T/N de la salida del filtro adaptado al filtro receptor, $v[m]$, haciendo la operación inversa

$$q_k[n] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi k}{N}\,m}\; v[nN+m] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi k}{N}\,m}\; v^{(n)}[m].$$

Esta operación, hasta un factor de escala, es una DFT del bloque de índice n de las muestras $v[m]$, es decir

$$q_k[n] = \frac{1}{\sqrt{T}} \mathrm{DFT}_N\left\{v^{(n)}[m]\right\}.$$

El proceso de generación de las muestras y de recuperación de las observaciones en el receptor se muestra en la Figura 1.

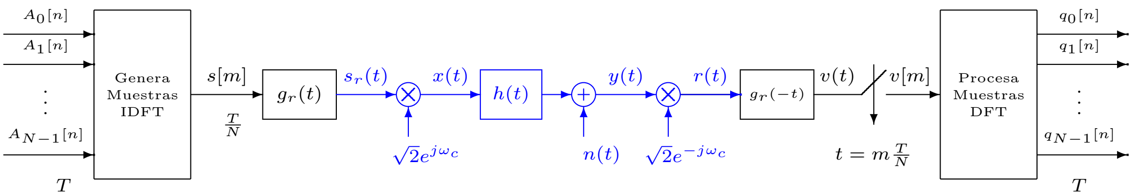

Figura 1: Transmisor y receptor de una modulación OFDM utilizando la IDFT y la DFT.

Los $N \times N$ canales discretos equivalentes para esta modulación son

$$p_{k,i}[n] = \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi i}{N}\,m}\; e^{-j\frac{2\pi k}{N}\,\ell}\; d[nN+\ell-m]$$

donde $d[m]$ es el canal discreto equivalente a $\frac{T}{N}$

$$d[m] = \left(g_r(t) * h_{eq}(t) * g_r(-t)\right)\big|_{t=m\frac{T}{N}}.$$

Bajo esta modulación la única situación en que no hay ni interferencia entre símbolos (ISI) ni interferencia entre portadoras (ICI) es cuando el canal es ideal, es decir, si

$$d[m] = C\;\delta[m].$$

Cuando el canal no es ideal, sino que $d[m]$ tiene una respuesta con memoria K_d, tanto la ISI como la ICI pueden evitarse en esta modulación mediante la introducción de un prefijo cíclico de $C \geq Kd$ muestras, como se ilustra en la Figura 2.

En este caso, como hay que transmitir $N+C$ muestras en T segundos, el filtro reconstructor es ahora

$$g_r(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{N+C}{T}\,t\right),$$

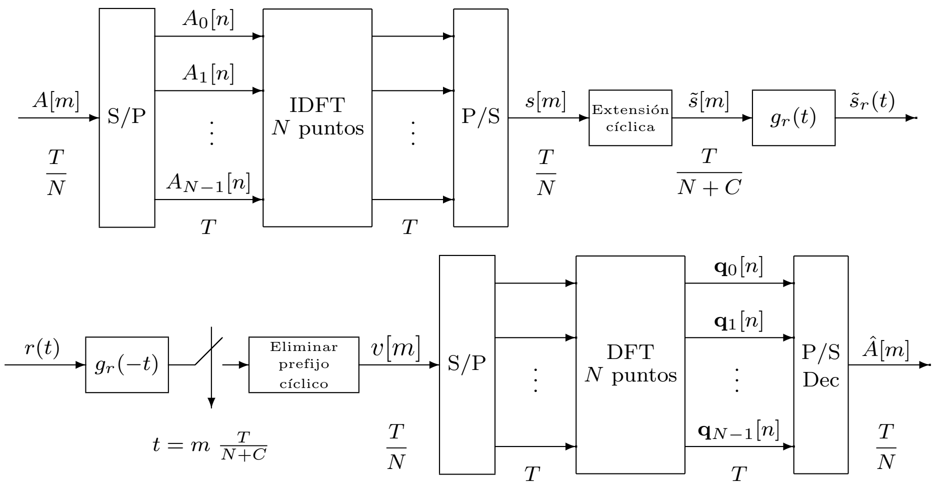

Figura 2: Transmisor y receptor de una modulación OFDM con prefijo cíclico.

la señal reconstruida

$$s_r(t) = \sum_m x[m]\; g_r\left(t - m\frac{T}{N+C}\right),$$

y el canal discreto equivalente $d[m]$ se define ahora a tiempo $T/(N+C)$

$$d[m] = \left.\left(g_r(t) * h_{eq}(t) * g_r(-t)\right)\right|_{t=m\,\frac{T}{N+C}}.$$

Esto hace que los canales discretos equivalentes sean ahora

$$p_{k,i}[n] = \frac{1}{T} \sum_{m=-C}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi i}{N}\;m}\; e^{-j\frac{2\pi k}{N}\;\ell}\; d[n(N+C)+\ell-m], \tag{1}$$

y es sencillo demostrar que si la longitud del prefijo cíclico es al menos igual a la memoria de $d[m]$, es decir, $C \geq K_d$, entonces

$$p_{k,i}[n] = \frac{N}{T}\;\delta[n]\;\delta[k-i]\;D[k].$$

Esto significa que las observaciones a tiempo de símbolo son

$$q_k[n] = \frac{N}{T}\;D[k]\;A_k[n] + z_k[n],$$

con lo que no existe ni ISI ni ICI. Por otro lado, ahora la relación señal a ruido en cada portadora será diferente aun cuando en todas se transmita la misma constelación con la misma energía media por símbolo, E_s. Esto ocurre porque aunque la energía del término de ruido es la misma en todas las portadoras, no lo es así la del término de señal, al estar multiplicado por el factor $\frac{N}{T}\;D[k]$. En concreto, la relación señal a ruido de cada portadora es ahora proporcional a $|D[k]|^2$, que en general será distinto para cada portadora, por lo que

$$\left.\frac{S}{N}\right|_k = \frac{\mathcal{E}\left\{\frac{N}{T}\;D[k]\;A_k[n]\right\}}{\mathcal{E}\left\{z_k[n]\right\}} = \frac{E\left[\left|\frac{N}{T}\;D[k]\;A_k[n]\right|^2\right]}{E\left[|z_k[n]|^2\right]} = \frac{\left|\frac{N}{T}\;D[k]\right|^2 E_{s,k}}{\sigma_z^2}.$$

Esta es otra característica importante de este tipo de modulaciones.

El fichero OFDM_p.m implementa una función del mismo nombre que calcula el canal discreto equivalente a tiempo de símbolo a partir del canal $d[m]$ a $T/(N+C)$, mediante la expresión (1).

1. Sistema OFDM sin prefijo cíclico

El fichero demoP2b.m simula la transmisión sobre un canal $d[m]$ ideal, de la secuencia de datos de un usuario, $A[m]$, con una modulación OFDM con N portadoras y sin prefijo cíclico. Este fichero puede resultar útil para la realización de los apartados de la práctica.

En este apartado se va a considerar un sistema con $N = 16$ portadoras para la transmisión de una modulación 16-QAM con niveles normalizados. Por simplicidad, se considerará $T = 1$, es decir, que la tasa de símbolo OFDM es $R_s = 1$ baudio (por portadora). En varios casos se considerará el siguiente canal

$$d[m] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{2}$$

con $a = 9/10$.

El estudiante debe realizar en MATLAB las siguientes tareas:

- Transmitiendo sobre un canal ideal, $d[m] = \delta[m]$:
  - Calcule los canales discretos equivalentes $p_{k,i}[n]$, y discuta a partir de dichos valores si existirá ISI o ICI durante la transmisión.
  - Estime la probabilidad de error de símbolo en cada portadora, y el promedio sobre las N portadoras si la varianza del ruido añadido a $v[m]$ es $\sigma^2 = 4$ para cada una de las componentes (tenga en cuenta que el ruido es complejo).
- Transmitiendo sobre el canal (2):
  - Calcule los canales discretos equivalentes $p_{k,i}[n]$, y discuta a partir de dichos valores si existirá ISI o ICI durante la transmisión.
  - Estime la probabilidad de error de símbolo en cada portadora, y el promedio sobre las N portadoras si la varianza del ruido eañadido a $v[m]$ es $\sigma^2 = 4$ para cada una de las componentes.

2. Sistema OFDM con prefijo cíclico

Ahora se debe implementar un sistema OFDM que transmita con un prefijo cíclico de C muestras. En todos los casos se considerará la transmisión sobre el canal (2)

Debe realizar las siguientes tareas:

- Transmitiendo sin ruido, y para los siguientes valores $C \in \{1, 2, \cdots, 10\}$:
  - Calcule los canales discretos equivalentes $p_{k,i}[n]$, y discuta a partir de dichos valores si existirá ISI o ICI durante la transmisión.
  - Estime la probabilidad de error de símbolo en cada portadora, y el promedio sobre las N portadoras.
- Transmitiendo ahora con una varianza del ruido sobre $v[m]$ de $\sigma^2 = 4$ en cada una de las componentes, y para los mismos valores de longitud del prefijo cíclico:
  - Estime la probabilidad de error de símbolo en cada portadora, y el promedio sobre las N portadoras.

A la vista de los resultados obtenidos, extraiga las conclusiones más importantes, centrando la discusión en el valor óptimo para la longitud del prefijo cíclico.