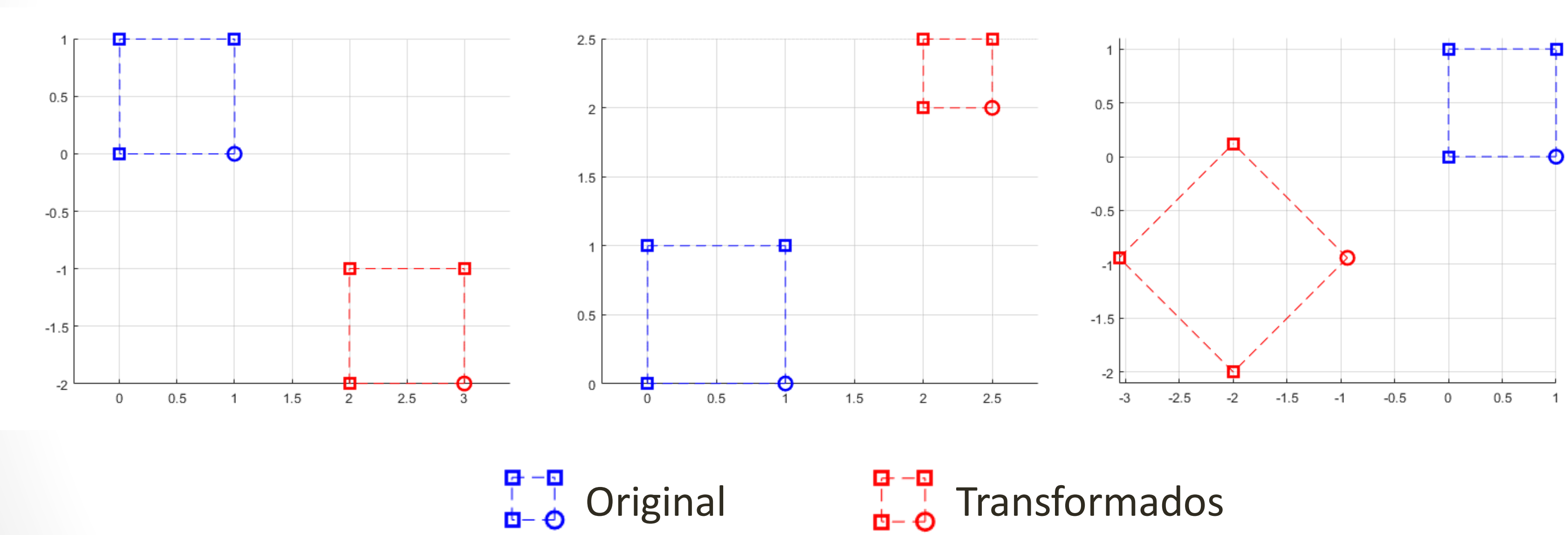
Transformación geométrica en un problema de Optimización

Introducción

La transformación de similitud se utiliza para trasladar, rotar y escalar puntos en un plano.



La transformación de similitud tiene una gran área de aplicación, especialmente el tratamiento digital de imágenes.

Transformación de similitud

Podemos transformar una coordenada (x, y) a una nueva coordenada (x', y') utilizamos la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\cos(\theta) & -s\sin(\theta) \\ s\sin(\theta) & s\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

donde:

- d_x y d_y son desplazamientos
- θ indica un ángulo de rotación
- s es el escalamiento

Transformación de similitud (continuación)

Para tres coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) tenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\cos(\theta) & -s\sin(\theta) \\ s\sin(\theta) & s\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

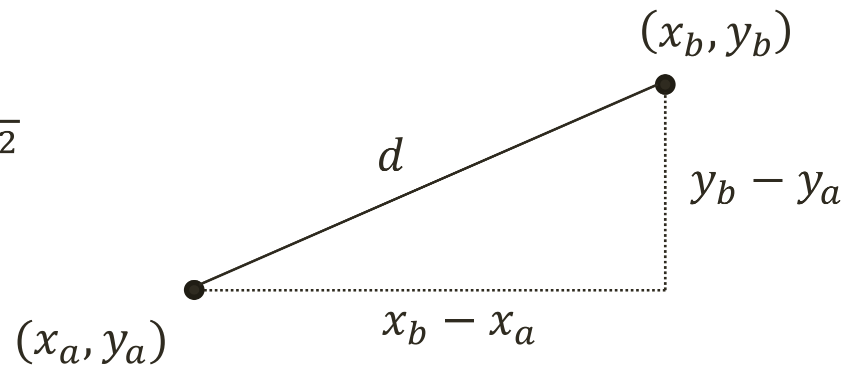
$$\begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\cos(\theta) & -s\sin(\theta) \\ s\sin(\theta) & s\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\cos(\theta) & -s\sin(\theta) \\ s\sin(\theta) & s\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

Distancia Euclidiana

La distancia Euclidiana expresa la distancia entre una coordenada (x_a, y_a) y otra coordenada (x_b, y_b) utilizando:

$$d = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$



donde e es una medida de error que indica la distancia entre los dos puntos.

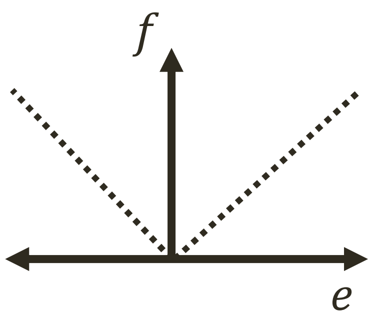
Nota: Si una coordenada es igual al otra, entonces $e = 0$.

Función objetivo

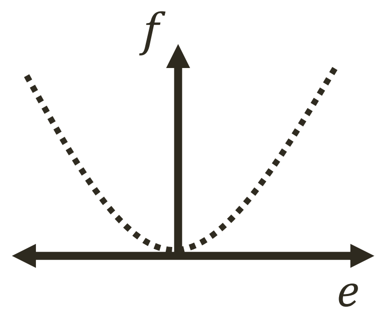
Para un valor estimado $\hat{y}$ y un valor esperado y, se suele proponer funciones objetivo f con base en errores definidos como

$$e = y - \hat{y}$$

Algunas definiciones de función objetivo son



Absoluto: $f = |e|$



Cuadrático: $f = e^2$

Función objetivo (continuación)

Cuando contamos con mas de un error, $e_1, e_2, \cdots, e_n$, entonces tenemos

Error Absoluto Medio

$$f = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i - \hat{y}_i|$$

Error Cuadrático Medio

$$f = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

Raíz del Error Cuadrático Medio

$$f = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}$$

Planteamiento del problema

Se propone utilizar la transformación de similitud para posicionar una imagen deseada, en un área en específico dentro de imagen de referencia.

Resultados

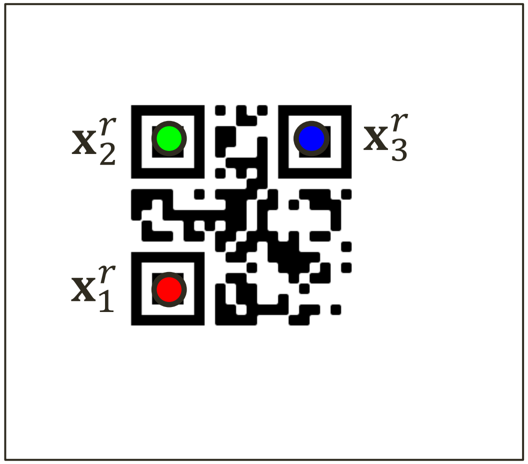
Planteamiento del problema (continuación)

Comenzamos por definir $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$ que representan las dimensiones de la imagen deseada. Tenemos:

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$$

h - alto
w - ancho

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ h \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix}$$

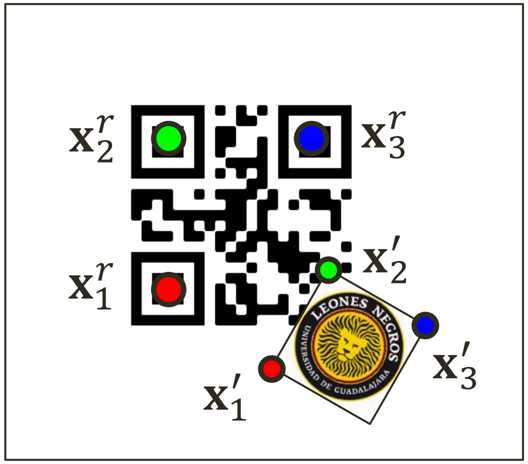


$$\mathbf{x}_i^r = \begin{bmatrix} x_i^r \\ y_i^r \end{bmatrix}$$

Utilizamos la información de un QR para definir valores de referencia $\mathbf{x}_1^r$, $\mathbf{x}_2^r$ y $\mathbf{x}_3^r$.

Planteamiento del problema (continuación)

Utilizamos los parámetros s, θ, d_x y d_y de la transformación de similitud para transformar cada coordenada $\mathbf{x}_i$ como sigue:



$$\begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\cos(\theta) & -s\sin(\theta) \\ s\sin(\theta) & s\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_i' = \begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \end{bmatrix}$$

Las intención es minimizar los errores entre cada par de coordenadas $\mathbf{x}_i^r$ y $\mathbf{x}_i'$. Esto se puede resolver como un problema de optimización.

Planteamiento del problema (continuación)

Para resolver el problema de optimización debemos considerar lo siguiente:

- Los parámetros que se deben optimizar son: d_x, d_y, θ y s. Definimos:
$$\mathbf{q}^T = [d_x \quad d_y \quad \theta \quad s].$$
- Se debe plantear una función objetivo que considere los errores entre $\mathbf{x}_i^r$ y $\mathbf{x}_i'$.
- Es necesario identificar un espacio de búsqueda.

Planteamiento del problema (continuación)

Para plantear una función objetivo, definimos los siguientes errores:

$$e_1 = \sqrt{(x_1^r - x_1')^2 + (y_1^r - y_1')^2}$$

$$e_2 = \sqrt{(x_2^r - x_2')^2 + (y_2^r - y_2')^2}$$

$$e_3 = \sqrt{(x_3^r - x_3')^2 + (y_3^r - y_3')^2}$$

Ahora planteamos la siguiente función objetivo:

$$f = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}(e_i)^2 = \frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}{3}$$

Planteamiento del problema (continuación)

Respecto al espacio de búsqueda:

- Podemos inicializar los desplazamientos d_x y d_y considerando las dimensiones de la imagen de referencia (H, W).
- El ángulo θ se puede inicializar en el rango de $\theta \in [-\pi, \pi]$.
- El escalamiento s se debe consider positivo.

En conclusión, podemos establecer los siguientes limites del espacio de búsqueda:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ \theta \\ s \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{q}_l = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\pi \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{q}_u = \begin{bmatrix} W \\ H \\ \pi \\ 10 \end{bmatrix}$$