Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo

Paulo Lopes dos Santos

Identificação e Estimação de Sistemas, 2010
DEEC, FEUP

Resumo

1. 1 - Representação de Sistemas no Espaço de Estados.
2. 2 - Estabilidade Assintótica.
3. 3 - Acessibilidade e Controlabilidade.
4. 4 - Observabilidade.
5. 5 - Decomposição Canónica de Kalman.
6. 6 - Funções de Transferência e Realizações Mínimas.
7. 7 - Realizações Equilibradas.
8. 8 - Redução da Ordem do Modelo.

1 - Representação de Sistemas no Espaço de Estados

- Sistema linear e invariante no tempo com m entradas e ℓ saídas:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

  - $x(t) \in \mathbb{R}^n$ - vector de estado
  - $u(t) \in \mathbb{R}^m$ - vector das entradas
  - $y(t) \in \mathbb{R}^\ell$ vector das saídas
  - $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$ - parâmetros do modelo

- Conhecendo $x(t_0)$ podemos calcular

$$\begin{aligned} x(t_0+1) &= Ax(t_0) + Bu(t_0) \\ x(t_0+2) &= Ax(t_0+1) + Bu(t_0+1) = \\ & A\left[Ax(t_0) + Bu(t_0)\right] + Bu(t_0+1) = \\ & A^2x(t_0) + ABu(t_0) + Bu(t_0+1). \end{aligned}$$

- Admitindo que, para $t > t_0$,

$$\begin{aligned} x(t) &= A^{t-t_0}x(t_0) + A^{t-t_0-1}Bu(t_0) + A^{t-t_0-2}Bu(t_0+1) + \\ &\quad \cdots + ABu(t-2) + Bu(t-1), \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) = \\ &\quad A\left[A^{t-t_0}x(t_0) + A^{t-t_0-1}Bu(t_0) + \right. \\ &\quad \left. A^{t-t_0-2}Bu(t_0+1) + \cdots + Bu(t-1)\right] + Bu(t) = \\ &\quad A^{t+1-t_0}x(t_0) + A^{t-t_0}Bu(t_0) + A^{t-t_0-1}Bu(t_0+1) + \\ &\quad \cdots + ABu(t-1) + Bu(t). \end{aligned}$$

- Fica provado que

$$x(t) = A^{t-t_0}x(t_0) + \sum_{\tau'=0}^{t-t_0-1} A^{t-t_0-1-\tau'}Bu(t_0+\tau').$$

- A saída do sistema é

$$y(t) = CA^{t-t_0}x(t_0) + \sum_{\tau'=0}^{t-t_0-1} CA^{t-t_0-1-\tau'}Bu(t_0+\tau') + Du(t).$$

- Definindo $\tau = t - t_0 - \tau'$ $(\tau' = t - t_0 - \tau)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= A^{t-t_0}x(t_0) + \textstyle\sum_{\tau=1}^{t-t_0} A^{\tau-1}Bu(t-\tau) \\ y(t) &= CA^{t-t_0}x(t_0) + Du(t) + \textstyle\sum_{\tau=1}^{t-t_0} CA^{\tau-1}Bu(t-\tau) \end{aligned}$$

- Sejam:
  - t_0=0;
  - $x(0) = 0_n$;
  - $u(t)$ impulso de Dirac: $u(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$

então

$$
\begin{aligned}
y(0) &= D\underbrace{u(0)}_{1} + \underbrace{\sum_{\tau=1}^{0} CA^{\tau-1}Bu(0-\tau)}_{0} = \mathbf{D} \\
y(1) &= D\underbrace{u(1)}_{0} + \sum_{\tau=1}^{1} CA^{\tau-1}Bu(1-\tau) = CB\underbrace{u(0)}_{1} = \mathbf{CB} \\
y(2) &= D\underbrace{u(2)}_{0} + \sum_{\tau=1}^{2} CA^{\tau-1}Bu(2-\tau) = CB\underbrace{u(1)}_{0} + CAB\underbrace{u(0)}_{1} = \\
&\quad \mathbf{CAB} \\
y(3) &= D\underbrace{u(3)}_{0} + \sum_{\tau=1}^{3} CA^{\tau-1}Bu(3-\tau) = CB\underbrace{u(2)}_{0} + \\
&\quad CAB\underbrace{u(1)}_{0} + CA^2B\underbrace{u(0)}_{1} = \mathbf{CA^2B} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

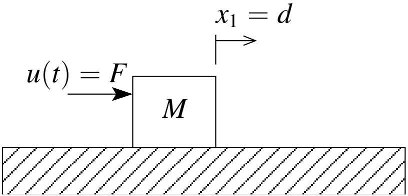
$$\begin{aligned} y(t) &= D\underbrace{u(t)}_{0} + \sum_{\tau=1}^{t-t_0} CA^{\tau-1}Bu(t-\tau) = CB\underbrace{u(t-1)}_{0} + \\ & CAB\underbrace{u(t-2)}_{0} + CA^2B\underbrace{u(t-3)}_{0} + \cdots + CA^{t-1}B\underbrace{u(0)}_{1} = \mathbf{CA^{t-1}B} \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Obtemos assim a resposta impulsional do sistema:

$$h(t) = \begin{cases} D, & t = 0 \\ CA^{t-1}B, & t > 0 \end{cases}$$

- Fazendo $t_0 \to -\infty$ e $x(t_0) = 0$, $y(t)$ é pode ser calculado a partir da soma de convolução
$$y(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau).$$
- $y(t)$ depende da sequência de entrada $u(k)$ desde $k = -\infty$ até $k = t$.
- A equações $y(t)$ e $x(t)$ mostram-nos, porém, que, para saber a evolução do sistema a partir de $t_0 \neq \infty$, só necessitamos de conhecer $x(t_0)$ e $u(k)$ a partir desse instante.
- $x(t_0)$ constitui a memória de todo o comportamento do sistema para $t < t_0$, sendo, por isso, o seu **estado** no instante t_0.

Exemplo 1

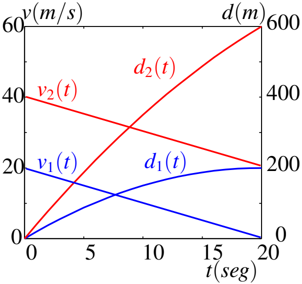


- Entrada: Força ($u(t) = F$).
- Saídas: Posição ($x_1(t) = d(t)$) e velocidade ($x_2(t) = \dot{d}(t)$).
- Modelo discreto:

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{M} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- $M = 1000\ Kg$, $u(t) = -1000\ N$, $x_1(0) = 0$
- Se $x_2(0) = 20\ m/s$ então $\begin{cases} x_1(20) = 200\ m \\ x_2(20) = 0 \end{cases}$, ou seja o corpo pára em 20 segundos a uma distância de 200 m da origem.
- Se $x_2(0) = 40\ m/s$ então $\begin{cases} x_1(40) = 800\ m \\ x_2(40) = 0 \end{cases}$, ou seja o corpo pára em 20 segundos a uma distância de 200 m da origem.



2 - Estabilidade Assintótica

- Sistema autónomo: $u(t) = 0_m$
$$x(t+1) = Ax(t).$$
- Pontos de equilíbrio: $\{x | Ax = x\}$
- Como
$$Ax = x \Leftrightarrow Ax - x = 0_n \Leftrightarrow (A - I_n)\, x = 0_n,$$
o conjunto dos pontos de equilíbrio é o núcleo de
$$\boldsymbol{A - I_n \ (\ker(I_n - A))}.$$
- car$(A - I_n) =$
$\begin{cases} n \Rightarrow \ker(I_n - A) = 0_n \text{ (núcleo de } I_n - A \text{ é a origem).} \\ r < n \Rightarrow \ker(I_n - A) \text{ é um subespaço de dimensão } n - r. \end{cases}$
- Recordar que, da definição de valor próprio, Λ é um valor próprio de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e v de A é o vector próprio associado a Λ se
$$Av = \lambda v.$$

2 - Estabilidade Assintótica

- Calculemos os valores próprios de $A + KI_n$, em que K é um escalar:

$$(A + KI_n)\, v = \underbrace{Av}_{\lambda v} + Kv = \lambda v + Kv = (\lambda + K)\, v$$

- Podemos concluir que:
  - $\lambda_i(A + KI_n) = \lambda_i(A) + K$, em que $\lambda_i(A)$ e $\lambda_i(A + kI_n)$, $i = 1, \ldots, n$ são os valores próprios de A e de $A + KI_n$, respectivamente.
  - Os vectores próprios de $A + KI_n$ são os de A.
- Se car$(A - I_n) = r < n$ então $\det(A - I_n) = 0 \ \Rightarrow A - I_n$ tem pelo menos um valor próprio nulo.

- Como

$$\lambda_i(A - I_n) = \lambda_i(A) - 1 \Leftrightarrow \lambda_i(A) = \lambda_i(A - I_n) + 1,$$

então A tem, pelo menos, um valor próprio unitário (o sistema contém um integrador discreto).

Definição 1

O sistema autónomo $x(t+1) = Ax(t)$ é **assintoticamente estável** se, quando largado em qualquer estado inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$, o seu vector de estado $x(t)$ convergir para a origem. Nestas condições, dizemos, simplesmente, que A é **uma matriz estável**.

Teorema 1 - Teorema de Lyapunov

O sistema $x(t+1) = Ax(t)$ é estável se e só se qualquer uma destas condições se verificar

1. Os valores absolutos de todos os valores próprios de A serem inferiores a 1, isto é,

   $$|\lambda_i(A)| < 1 \quad i = 1, \ldots, n, \qquad \text{ou} \qquad \rho(A) < 1$$

   em que $\rho(A)$ significa raio espectral de A.

2. Se para qualquer $Q \succ 0_{n\times n}$ a equação de Lyapunov

   $$P = A^T P A + Q$$

   tem uma única solução $P \succ 0_{n\times n}$. Aqui as notações $X \succ 0_{n\times n}$ e $X \succ Y$, para $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ significam X e $X - Y$ são, respectivamente, matrizes definidas positivas.

Demonstração

1. Primeira condição:
   - Se largarmos o sistema num estado $x(0) = x_0$, este segue uma trajectória
     $$x(t) = A^t x_0$$
   - Fazendo a mudança de variáveis $x(t) = Tz(t)$ ($T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não singular)
     $$z(t+1) = T^{-1}ATz(t) = \Lambda z(t) \Rightarrow z(t) = \Lambda^t z_0 \rightarrow x(t) = T\Lambda^t T^{-1} x_0$$

- Esta mudança de variáveis pode ser feita de forma a que

$$\Lambda = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
J_1(n_1) & 0_{n_1\times n_2} & \cdots & 0_{n_1\times n_j} & \cdots & 0_{n_1\times n_k} \\ \hline
0_{n_2\times n_1} & J_2(n_2) & \ddots & 0_{n_2\times n_j} & \ddots & 0_{n_2\times n_k} \\ \hline
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline
0_{n_j\times n_1} & 0_{n_j\times n_2} & \ddots & J_j(n_j) & \ddots & 0_{n_j\times n_k} \\ \hline
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline
0_{n_k\times n_1} & 0_{n_k\times n_2} & \cdots & 0_{n_k\times n_j} & \cdots & J_k(n_k)
\end{array}\right]$$

2 - Estabilidade Assintótica

- Onde n_j é a multiplicidade do valor próprio $\lambda_{n_1+n_2+\cdots+n_{j-1}+1}$ e $J_j(n_j)$ é o bloco de Jordan

$$J_j(n_j) = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_j & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \bar{\lambda}_j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \bar{\lambda}_j & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bar{\lambda}_j \end{bmatrix},$$

em que $\bar{\lambda}_j = \lambda_{n_1+n_2+\cdots+n_{j-1}+1}$.

- Pode-se provar que, para $t \geq n$,

$$J_j^t(n_j) = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_j^t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t\bar{\lambda}_j^{t-1} & \bar{\lambda}_j^t & 0 & \cdots & 0 \\ \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix} \bar{\lambda}_j^{t-1} & t\bar{\lambda}_j^{t-1} & \bar{\lambda}_j^t & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ \begin{pmatrix} t \\ n_j - 1 \end{pmatrix} \bar{\lambda}_j^{t-n_j+1} & \begin{pmatrix} t \\ n_j - 2 \end{pmatrix} \bar{\lambda}_j^{t-n_j+2} & \begin{pmatrix} t \\ n_j - 3 \end{pmatrix} \bar{\lambda}_j^{t-n_j+3} & \cdots & \bar{\lambda}_j^t \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{pmatrix} t \\ k \end{pmatrix} = \frac{t!}{k!(t-k)!}$$

- Como

$$\Lambda^t = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} J_1^t(n_1) & 0_{n_1\times n_2} & \cdots & 0_{n_1\times n_j} & \cdots & 0_{n_1\times n_k} \\ \hline 0_{n_2\times n_1} & J_2^t(n_2) & \ddots & 0_{n_2\times n_j} & \ddots & 0_{n_2\times n_k} \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0_{n_j\times n_1} & 0_{n_j\times n_2} & \ddots & J_j^t(n_j) & \ddots & 0_{n_j\times n_k} \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0_{n_k\times n_1} & 0_{n_k\times n_2} & \cdots & 0_{n_k\times n_j} & \cdots & J_k^t(n_k) \end{array}\right]^t$$

então

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = T \lim_{t\to\infty} \Lambda^t T x_0 = 0_n \quad \forall_{x_0\in\mathbf{R}^n}$$

sse $\lim\limits_{t\to\infty} \Lambda^t T = 0_{n\times n}$. Isto só acontece sse

$\left|\bar{\lambda}_j\right| < 1, \quad j = 1,\ldots,k$ ou seja, $|\lambda_i| < 1, \quad i = 1,\ldots,n.$

2. Segunda condição:
   - Condição necessária:
     - Vectorizando a equação Lyapunov
       $$P = A^T P A + Q$$
       teremos
       $$\text{vec}(P) = (A^T \otimes A^T)\text{vec}(P) + \text{vec}(Q).$$
     - Esta equação é linear em vec(P) logo uma única solução sse $I_{n^2} - A^T \otimes A^T$ for não uma matriz não singular.
     - Sabemos que
       $$\lambda_k(A \otimes A) = \lambda_i(A)\lambda_j(A), \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n$$
       $$\lambda_k\left(I_n^2 - A \otimes A\right) = 1 - \lambda_k(A \otimes A)$$
     - A matriz $I_{n^2} - A^T \otimes A^T$ é singular sse existir um $\lambda_k(A \otimes A) = 1$

- Se o sistema for estável então $-1 < \text{Re}\left[\lambda_i(A)\right] < 1$, $i = 1, \ldots, n$ e, consequentemente, $\lambda_k(A \otimes A) \neq 1,\ \forall_k$. Logo a equação de Lyapunov tem uma e uma só solução.
- Se A for estável a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(A^T\right)^k QA^k$$

converge e é a solução da equação de Lyapunov pois

$$A^T P A + Q = A^T \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(A^T\right)^k QA^k \right) A + Q = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A^T\right)^k QA^k A^0 + \underbrace{\left(A^T\right)^0}_{I_n} Q \underbrace{A^0}_{I_n} =$$

$$= \left(A^T\right)^0 QA^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A^T\right)^k QA^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A^T\right)^k QA^k = P.$$

- Como $Q \succ 0_{n\times n}$ então $P \succ 0_{n\times n}$.

2 - Estabilidade Assintótica

- Condição suficiente:
  - Suponhamos que
    1. $P \succ 0_{n\times n}$.
    2. A é instável
  - Se A é instável tem um valor próprio λ_0 tal que $|\lambda_0| \geq 1$.
  - Se λ_0 é valor próprio de A então o seu conjugado complexo λ_0^* também é.
  - se v_0 for um vector próprio associado a λ_0, v_0^* é um vector próprio associado a λ_0^*.
  - $v_0^H = (v_0^T)^*$ é o hermitiano de v_0.

- Multiplicando a equação de Lyapunov à esquerda por v_0^H e à direita por v_0:

$$\begin{aligned}
v_0^H P v_0 &= \underbrace{v_0^H A^T}_{(Av_0)^H} P A v_0 + v_0^H Q v_0 = (Av_0)^H P A v_0 + v_0^H Q v_0 = \\
&= (\underbrace{Av_0}_{\lambda_0 v_0})^H P \underbrace{Av_0}_{\lambda_0 v_0} + v_0^H Q v_0 = (\lambda_0 v_0)^H P \lambda_0 v_0 + v_0^H Q v_0 = \\
&= \underbrace{\lambda_0^* \lambda_0}_{|\lambda_0|^2} v_0^H P v_0 + v_0^H Q v_0 = |\lambda_0|^2 v_0^H P v_0 + v_0^H Q v_0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left(1 - |\lambda_0|^2\right) v_0^H P v_0 = v_0^H Q v_0 .
\end{aligned}$$

- Sendo $Q \succ 0_{n\times n}$ então $v_0^H Q v_0 > 0$ e, consequentemente, $\left(1 - |\lambda_0|^2\right) v_0^H P v_0 > 0$.

2 - Estabilidade Assintótica

- Como $|\lambda_0| > 1$, então $1 - |\lambda_0|^2 < 0$ e $v_0^H P v_0 < 0$, o que nunca pode acontecer pois, P é, por hipótese, uma matriz definida positiva ($P \succ 0_{n\times n}$).

$\square$

Exemplo 2 - Estabilidade dum sistema de ordem 1.

- Sistema de primeira ordem

$$x(t+1) = ax(t) \quad x(t), a \in \mathbb{R}.$$

- Como $a \in \mathbb{R}$ então $n = 1$ e $\lambda_1(a) = a$
- O sistema será estável se e só se $|a| < 1$.
- A equação de Lyapunov será

$$p = a^2 p + q, \quad q > 0.$$

sendo

$$p = \frac{q}{1 - a^2}$$

sua solução.

- Esta solução existe e é positiva sse $|a| < 1$, isto é, sse o sistema for estável.

Exemplo 3 - Estabilidade dum sistema de de ordem 2 com valores próprios reais e distintos.

- Sistema de segunda ordem:

$$x(t+1) = Ax(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^2,\ A \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

- $\lambda_1 \neq \lambda_2$ são os valores próprios de A.
- v_1 e v_2 vectores próprios associados a λ_1 e λ_2.
- Equação de Lyapunov:

$$P = A^T PA + Q.$$

- $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ matriz não singular.

- Multiplicar a equação de Lyapunov à esquerda por T^T e á direita por T:

$$T^TPT = T^TA^TPAT + T^TQT = T^TA^T \underbrace{T^{-T}T^T}_{I_2} PTT^{-1}AT + T^TQT =$$
$$= \left(T^{-1}AT\right)^T \left(T^TPT\right) \left(T^{-1}AT\right) + T^TQT$$

- Definir

$$\begin{aligned} \bar{A} &= T^{-1}AT \\ \bar{P} &= T^TPT \\ \bar{Q} &= T^TQT \end{aligned}$$

- Reescrever a equação de Lyapunov utilizando $\bar{P}$, $\bar{Q}$ e $\bar{A}$:

$$\begin{aligned} \underbrace{T^TPT}_{\bar{P}} &= (\underbrace{T^{-1}AT}_{\bar{A}})^T \underbrace{T^TPT}_{\bar{P}} \underbrace{T^{-1}AT}_{\bar{A}} + \underbrace{T^TQT}_{\bar{Q}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \bar{P} &= \bar{A}^T\bar{P}\bar{A} + \bar{Q}. \end{aligned}$$

2 - Estabilidade Assintótica

- A e $\bar{A}$ têm os mesmos valores próprios. Logo, o sistema será estável sse a solução $\bar{P}$ desta equação for única e definida positiva quando $\bar{Q} \succ 0_{2\times 2}$.
- Se $T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$ então,

$$\bar{A} = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

- a solução desta última equação de Lyapunov é a matriz cuja vectorização é

$$\text{vec}(\bar{P}) = \left(I_4 - \Lambda^T \otimes \Lambda^T\right)^{-1} \text{vec}(\bar{Q}) = (I_4 - \Lambda \otimes \Lambda)^{-1} \text{vec}(\bar{Q}),$$

pois Λ é diagonal e, consequentemente $\Lambda^T = \Lambda$.

- Seja

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{11} & \bar{q}_{12} \\ \bar{q}_{12} & \bar{q}_{22} \end{bmatrix}.$$

- $\bar{Q}$ é definida positiva, logo

$$\begin{aligned} \bar{q}_{11} &> 0 \\ \bar{q}_{22} &> 0 \\ \det \bar{Q} &= \bar{q}_{11}\bar{q}_{22} - \bar{q}_{12}^2 > 0 \end{aligned}$$

- Reescrever a expressão da vectorização da solução da equação de Lyapunov:

$$
\begin{aligned}
\text{vec}(\bar{P}) &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \bar{q}_{11} \\ \bar{q}_{12} \\ \bar{q}_{12} \\ \bar{q}_{22} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\lambda_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\lambda_1\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\lambda_1\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-\lambda_2^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{q}_{11} \\ \bar{q}_{12} \\ \bar{q}_{12} \\ \bar{q}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{q}_{11}}{1-\lambda_1^2} \\ \frac{\bar{q}_{12}}{1-\lambda_1\lambda_2} \\ \frac{\bar{q}_{12}}{1-\lambda_1\lambda_2} \\ \frac{\bar{q}_{22}}{1-\lambda_2^2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- Podemos determinar $\bar{P}$ a partir de vec $(\bar{P})$:

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \dfrac{\bar{q}_{11}}{1-\lambda_1^2} & \dfrac{\bar{q}_{12}}{1-\lambda_1\lambda_2} \\ \dfrac{\bar{q}_{12}}{1-\lambda_1\lambda_2} & \dfrac{\bar{q}_{22}}{1-\lambda_2^2} \end{bmatrix}$$

- se $\bar{P}$ for definida positiva, então

$$\begin{aligned} \frac{\bar{q}_{11}}{1-\lambda_1^2} &> 0 \Rightarrow |\lambda_1| < 1 \text{ pois } q_{11} > 0 \\ \frac{\bar{q}_{12}}{1-\lambda_2^2} &> 0 \Rightarrow |\lambda_2| < 1 \text{ pois } q_{22} > 0 \end{aligned}$$

e, consequentemente o sistema é estável.

- Por outro lado

$$\left(1-\lambda_1^2\right)\left(1-\lambda_2^2\right)-(1-\lambda_1\lambda_2)^2=-(\lambda_2-\lambda_1)^2<0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(1-\lambda_1^2\right)\left(1-\lambda_2^2\right)<(1-\lambda_1\lambda_2)^2$$

e

$$\bar{q}_{11}\bar{q}_{22}>\bar{q}_{12}^2.$$

- Logo,se $|\lambda_1|<1$ e $|\lambda_2|<1$ isto é, se o sistema for estável, temos

$$(1-\lambda_1\lambda_2)^2\,\bar{q}_{11}\bar{q}_{22}>\left(1-\lambda_1^2\right)\left(1-\lambda_2^2\right)\bar{q}_{12}^2,$$

pelo que

$$\frac{\bar{q}_{11}\bar{q}_{22}}{\left(1-\lambda_1^2\right)\left(1-\lambda_2^2\right)}>\frac{\bar{q}_{12}^2}{(1-\lambda_1\lambda_2)^2}$$

- consequentemente, $\bar{P}$ é definida positiva, o mesmo acontecendo com P

Definição 2

Um sistema é acessível se a origem puder ser transferida para qualquer estado $x_1 \in \mathbb{R}^n$ em n períodos de amostragem, ou seja, se existir uma sequência de n entradas $u(t_0), u(t_0+1), \ldots, u(t_0+n-1)$ que transfira o sistema do estado $x(t_0) = 0_n$ para $x(n) = x_1$ em que x_1 é qualquer estado de R^n.

Definição 3

Um sistema é controlável se qualquer estado $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ puder ser transferido para a origem através de uma sequência de n entradas $u(t_0), u(t_0+1), \ldots, u(t_0+n-1)$.

3 - Acessibilidade e Controlabilidade

- Quando um sistema é acessível dizemos simplesmente que o par (A, B) é acessível.
- Se for controlável dizemos, identicamente, que o par (A, B) é controlável.
- Os conceitos de acessibilidade e controlabilidade são idênticos quando A é o matriz **não singular**.

Teorema 2

As condições seguintes são condições necessárias e suficientes para que o par (A, B) seja acessível

1. car$(\mathcal{C}) = n$ ou im$(\mathcal{C}) = \mathbb{R}^n$ em que $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times nm}$.
2. car $\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_i I_n & | & B \end{bmatrix}\right) = n$, para todos os valores próprios λ_i de A.
3. Os valores próprios de $A - BK$, $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ podem ser alocados arbitrariamente.

Demonstração

1. Primeira condição

- Vimos anteriormente que

$$x(t) = A^{t-t_0}x(t_0) + \sum_{\tau=1}^{t-t_0} A^{\tau-1}Bu(t-\tau)$$

- Desenvolvendo esta expressão,

$$x(t) = A^{t-t_0}x(t_0) + Bu(t-1) + ABu(t-2) + \cdots + A^{t-t_0-1}Bu(t_0) =$$

$$= A^{t-t_0}x(t_0) + \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{t-t_0-2}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(t_0) \end{bmatrix} = A^{t-t_0}x(t_0) + \mathcal{C}_{t-t_0}\mathcal{U}^R_{t_o:t-1}$$

em que

$$\mathcal{U}^R_{t_o:t-1} = \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(t_0) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_{t-t_0} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{t-t_0-1}B \end{bmatrix}.$$

3 - Acessibilidade e Controlabilidade

- Partindo de $x(t_0) = 0_n$, o sistema atinge, ao fim de n períodos de amostragem, o estado

$$x_1 = x(t_0 + n) = \mathcal{C}\mathcal{U}^R_{t_0:t_0+n-1}$$

- $x_1 \in \text{im}(\mathcal{C})$ e, consequentemente, x_1 só pode ser qualquer ponto de $\mathbb{R}^n$ sse

$$\text{im}(\mathcal{C}) = R^n \Leftrightarrow \text{car}(\mathcal{C}) = n.$$

2. Segunda condição
   - <u>Condição necessária</u>
     - Seja
$$\text{car}\left(\begin{bmatrix} A-\lambda_i I_n & | & B \end{bmatrix}\right) = r \leq n.$$
     - o subespaço gerado pelas colunas desta matriz, im $\left(\begin{bmatrix} A-\lambda_i I_n & | & B \end{bmatrix}\right)$, tem dimensão r.
     - O seu complemento ortogonal, $\ker\left(\begin{bmatrix} A-\lambda_i I_n & | & B \end{bmatrix}\right)^T$ tem dimensão $n-r$ (as colunas são vectores em $\mathbf{R}^n$).
     - dim $\left(\ker\left(\begin{bmatrix} A-\lambda_i I_n & | & B \end{bmatrix}\right)^T\right) = n-r.$
     - Se $v \in \ker\left(\begin{bmatrix} A-\lambda_i I_n & | & B \end{bmatrix}^T\right)$,
$$v^T \begin{bmatrix} A-\lambda_i I_n & | & B \end{bmatrix} = 0_{1\times(n+m)}$$

- Estes vectores são ortogonais às colunas de $A - \lambda_i I_n$ e de B:

$$\left\{ \begin{array}{l} v^T(A - \lambda_i I_n) = 0_{1\times n} \Leftrightarrow v^T A = \lambda_i v^T \\ v^T B = 0_{1\times m} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} v^T AB & = & \lambda_i v^T B = 0_{1\times m} \\ v^T A^2 B & = & \lambda_i v^T AB = \lambda_i^2 v^T B = 0_{1\times m} \\ \vdots & & \\ \lambda_i v^T A^k B & = & \lambda_i v^T A^{k-1} B = \cdots = \\ & = & \lambda_i^k v^T B = 0_{1\times m} \\ \vdots & & \end{array} \right.$$

- Multiplicando v^T por $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned} v^T \mathcal{C} &= v^T \left[\begin{array}{cccc} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} \underbrace{v^T B}_{0_{1\times m}} & \underbrace{v^T AB}_{0_{1\times m}} & \cdots & \underbrace{v^T A^{n-1} B}_{0_{1\times m}} \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{cccc} 0_{1\times m} & 0_{1\times m} & \cdots & 0_{1\times m} \end{array} \right] = 0_{1\times nm}, \end{aligned}$$

verificamos que $v \in \ker(\mathcal{C}^T)$.

- Logo

$$\ker\left(\left[\begin{array}{ccc} A-\lambda_i I_n & | & B \end{array}\right]^T\right) \subseteq \ker\left(\mathcal{C}^T\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n - \text{car}\left(\left[\begin{array}{ccc} A-\lambda_i I_n & | & B \end{array}\right]\right) \leq n - \text{car}(\mathcal{C}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{car}\left(\mathcal{C}\right) \leq \text{car}\left(\left[\begin{array}{ccc} A-\lambda_i I_n & | & B \end{array}\right]\right)$$

- Se (A, B) for acessível então car $\left(\mathcal{C}^T\right) = n$ e, consequentemente,

$$\text{car}\left(\left[\begin{array}{ccc} A-\lambda_i I_n & | & B \end{array}\right]\right) = n.$$

- Condição suficiente: Ver Kailath (1980).

3. Terceira condição: Ver Kailath (1980).

□

- Um sistema é controlável se qualquer estado $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ puder ser transferido para a origem através de uma sequência de n entradas $u(t_0), u(t_0+1), \ldots, u(t_0+n-1)$.
- Num sistema controlável, para qualquer estado inicial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe sempre um vector $\mathcal{U}^R_{t_0:t_0+n}$ que é solução da equação

$$x(t_0+n) = A^n x_0 + \left(-\mathcal{C}\mathcal{U}^R_{t_0:t_0+n-1}\right) = 0_n \Leftrightarrow A^n x_0 = \mathcal{C}\mathcal{U}^R_{t_0:t_0+n-1}$$

- Esta equação mostra-nos que o **sistema é controlável** se e só ,

$$A^n x_0 \in \text{im}\,(\mathcal{C})\ \ \forall_{x_0 \in \mathbf{R}^n} \Leftrightarrow \text{im}(A) \subseteq \text{im}(\mathcal{C})$$

3 - Acessibilidade e Controlabilidade

- Se A for **não singular** e o sistema controlável, então car $(\mathcal{C}) = n$ e o sistema também é acessível $\Rightarrow$:

Se A for **não singular**
ACESSIBILIDADE $\equiv$ **CONTROLABILIDADE**

- **Acessibilidade** $\Rightarrow$ **Controlabilidade**, qualquer que seja A pois car$(\mathcal{C}) = n \geq$ car$(A) \Rightarrow$ im$(\mathcal{C}) \supseteq$ im(A).
- se A for singular, o sistema pode não ser acessível e ser controlável desde que im$(A) \subseteq$ im$(\mathcal{C})$

3 - Acessibilidade e Controlabilidade

- Se $x(t_0) = 0_n$ então

$$x(t_0 + n) = \mathcal{C}\mathcal{U}^R_{t_0:t_0+n-1}$$

- Esta equação mostra que podemos sempre transferir o sistema da origem para qualquer estado de $\text{im}(\mathcal{C})$ em n períodos de amostragem.
- A imagem de $\mathcal{C}$ será, então, o conjunto dos estados acessíveis.
- Este conjunto é um subespaço.
- Existe uma representação em que o conjunto dos estados acessíveis é definido por n_c variáveis de estado ($n_c = \text{car}(\mathcal{C})$) e o seu complemento ortogonal definido pelas $n - n_c$ restantes.

Teorema 3

Se o par (A, B) não for acessível tal que car$(\mathcal{C}) = n_c < n$, então existe uma matriz T não singular tal que

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0_{n-n_c \times n_c} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0_{n-n_c \times m} \end{bmatrix}$$

Demonstração

- Seja
$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$
a matriz da controlabilidade do par (A, B) e

- Seja

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathcal{C}} &= \left[\begin{array}{cccc} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{array}\right] = \\
&= \left[\begin{array}{c|c|c|c} T^{-1}B & T^{-1}ATT^{-1}B & \cdots & T^{-1}A^{n-1}TT^{-1}B \end{array}\right] = \\
&= \left[\begin{array}{cccc} T^{-1}B & T^{-1}AB & \cdots & T^{-1}A^{n-1}B \end{array}\right] = \\
&= T^{-1}\left[\begin{array}{cccc} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{array}\right] = T^{-1}\mathcal{C}
\end{aligned}
$$

a matriz da controlabilidade do par $(\bar{A}, \bar{B})$.

- Como

$$
\begin{aligned}
\bar{A}\bar{B} &= \left[\begin{array}{cc} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0_{n-n_c \times n_c} & \bar{A}_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \bar{B}_1 \\ 0_{n-n_c \times m} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \bar{A}_{11}\bar{B}_1 \\ 0_{n-n_c \times m} \end{array}\right] \\
\bar{A}^2\bar{B} &= \bar{A}\left(\bar{A}\bar{B}\right) = \left[\begin{array}{cc} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0_{n-n_c \times n_c} & \bar{A}_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \bar{A}_{11}\bar{B}_1 \\ 0_{n-n_c \times m} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \bar{A}_{11}^2\bar{B}_1 \\ 0_{n-n_c \times m} \end{array}\right] \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$\bar{A}^k\bar{B} = \bar{A}\left(\bar{A}^{k-1}\bar{B}\right) = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0_{n-n_c\times n_c} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}^{k-1}\bar{B}_1 \\ 0_{n-n_c\times m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}^{k}\bar{B}_1 \\ 0_{n-n_c\times m} \end{bmatrix},$$

- então

$$\bar{\mathcal{C}} = T^{-1}\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 & \bar{A}_{11}\bar{B}_1 & \dots & \bar{A}_{11}^{n-1}\bar{B}_1 \\ 0_{n-n_c\times m} & 0_{n-n_c\times m} & \dots & 0_{n-n_c\times m} \end{bmatrix}.$$

- A decomposição em valores singular (svd) de $\mathcal{C}$ é

$$\mathcal{C} = USV^T$$

onde

$$\begin{aligned} S &= \begin{bmatrix} S_+ & 0_{n_c\times nm-n_c} \\ 0_{n-n_c\times n_c} & 0_{n-n_c\times nm-n_c} \end{bmatrix} \\ V &= \begin{bmatrix} V_{n_c} & V_{n-n_c} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

com

$$
\begin{aligned}
S_+ &= \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{n-n_c} \end{bmatrix} \\
V_{n_c} &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{n_c} \end{bmatrix} \\
V_{n-n_c} &= \begin{bmatrix} v_{n_c+1} & v_{n_c+2} & \cdots & v_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- Fazendo $T = U$, então

$$
\begin{aligned}
T^{-1}\mathcal{C} &= U^T U S V^T = \begin{bmatrix} S_+ & 0_{n_c \times nm - n_c} \\ 0_{n-n_c \times n_c} & 0_{n-n_c \times nm-n_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n_c}^T \\ V_{n-n_c}^T \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} S_+ V_{n_c}^T \\ 0_{n-n_c \times mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 & \bar{A}_{11}\bar{B}_1 & \cdots & \bar{A}_{11}^{n-1}\bar{B}_1 \\ 0_{n-n_c \times m} & 0_{n-n_c \times m} & \cdots & 0_{n-n_c \times m} \end{bmatrix} = \bar{\mathcal{C}}.
\end{aligned}
$$

□

- De

$$\bar{\mathcal{C}} = T^{-1}\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 & \bar{A}_{11}\bar{B}_1 & \dots & \bar{A}_{11}^{n-1}\bar{B}_1 \\ 0_{n-n_c \times m} & 0_{n-n_c \times m} & \cdots & 0_{n-n_c \times m} \end{bmatrix}$$

  podemos ver que a matriz de similaridade T pode ser qualquer uma matriz não singular desde que as $n - n_c$ últimas linhas de T^{-1} sejam ortogonais às colunas de $\mathcal{C}$ (as $n - n_c$ últimas linhas de T^{-1} têm que ser uma base de $\ker(\mathcal{C}^T)$).
- Qualquer sistema pode ser dividido em dois sub-sistemas:
  - Acessível
  - Não Acessível
- A demonstração do teorema 3 sugere uma forma de obter esta divisão.

Algoritmo 1- Determinação do subsistema acessível

- **Entrada:** Par (A, B)
- **Saída:** Transformação de Similaridade T

1. Calcular a Matriz da Controlabilidade $\mathcal{C} = \left[\begin{array}{cccc} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{array} \right]$.
2. Efectuar a decomposição em valores singulares (svd) de $\mathcal{C} = USV^T$
3. Fazer $T = U$.

Exemplo 4 – Determinação do subsistema acessível num sistema de $2^{\underline{a}}$ ordem

- Sistema

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 1.4 & 0.48 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -0.6 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0.8 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned}$$

- Matriz da controlabilidade é

$$\mathcal{C} = \left[\underbrace{\begin{bmatrix} -0.6 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \middle| \underbrace{\begin{bmatrix} 1.4 & 0.48 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} -0.6 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \right] = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.36 \\ 1 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

- $\det(\mathcal{C}) = 0$, logo a sua característica é $1 \Rightarrow$ o sistema não é acessível.

- Valores próprios:

$$\lambda_1 = 0.6$$
$$\lambda_2 = 0.8.$$

- Como

$$\text{car}\left(\left[\begin{array}{c|c} A - \lambda_2 I_2 & B \end{array}\right]\right) = \text{car}\left(\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1.4 & 0.48 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -0.6 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}\right]\right)$$
$$= \text{car}\left(\begin{bmatrix} 0.6 & 0.48 & -0.6 \\ -1 & -0.8 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1$$

O modo $\lambda_2^t = 0.8^t$ não é acessível.

- Decompor $\mathcal{C}$ em valores singulares:

$$\mathcal{C} = USV^T = \begin{bmatrix} -0.5145 & 0.8575 \\ 0.8575 & 0.5145 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.36 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8575 & 0.5145 \\ 0.5145 & -0.8575 \end{bmatrix}.$$

3 - Acessibilidade e Controlabilidade

- Fazer a mudança de coordenadas

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_a(t) \\ \bar{x}_{\bar{a}}(t) \end{bmatrix} = T^{-1}x(t)$$

com

$$T = U = \begin{bmatrix} U_a & U_{\bar{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5145 & 0.8575 \\ 0.8575 & 0.5145 \end{bmatrix}$$

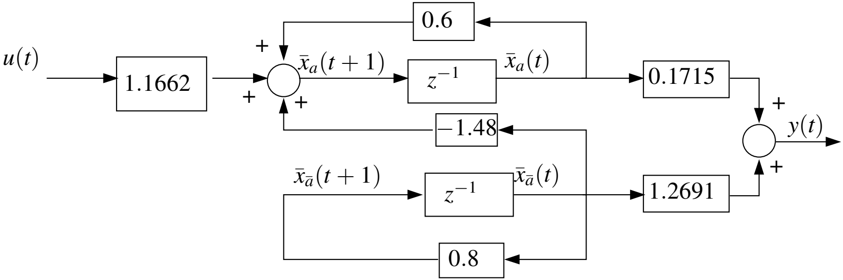
para obter a representação

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_a(t+1) \\ \bar{x}_{\bar{a}}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -1.48 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_a(t) \\ \bar{x}_{\bar{a}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1662 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0.1715 & 1.2691 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_a(t) \\ \bar{x}_{\bar{a}}(t) \end{bmatrix}$$

- O eixo $\bar{x}_a$ constitui o subespaço dos estados acessíveis e $\bar{x}_{\bar{a}}$ o seu complemento ortogonal.

- Dado que a matriz de estado $\bar{A}$ é triangular superior, os elementos da sua diagonal principal são os valores próprios do sistema.
- O segundo elemento de $\bar{B}$ é nulo e $[\bar{A}]_{22} = \lambda_2 = 0.8$ é o valor próprio *não acessível*.



- Se trocarmos a ordem das colunas de T:

$$T_1 = \begin{bmatrix} U_{\bar{a}} & U_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8575 & -0.5145 \\ 0.5145 & 0.8575 \end{bmatrix},$$

obtemos a permutação $\begin{bmatrix} \bar{x}_{\bar{a}}^T & \bar{x}_a^T \end{bmatrix}^T$ do vector de estado a que corresponde o seguinte modelo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{x}_{\bar{a}}(t+1) \\ \bar{x}_a(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ -1.48 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{\bar{a}}(t) \\ \bar{x}_a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.1662 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1.2691 & 0.1715 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{\bar{a}}(t) \\ \bar{x}_a(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Definição 4

Dizemos que um sistema é **observável** se o seu estado inicial for recuperável das n primeiras observações da saída $y(0)$, $y(1),\dots,y(n-1)$. Nestas condições dizemos que o par (C,A) é **observável**.

Teorema 4

As condições seguintes são condições necessárias e suficientes para que o par (C,A) seja observável

1. car$(\mathcal{O}) = n$ ou im$(\mathcal{O}) = \mathbb{R}^n$ em que
$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\ell \times n}.$$

2. car $\left(\left[\frac{A-\lambda_i I_n}{C}\right]\right) = n$, para todos os valores próprios λ_i de A.
3. Os valores próprios de $A - LC$, $L \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ podem ser alocados arbitrariamente.

Demonstração

1. Primeira condição.
   - para t_0=0,

$$x(t) \;=\; A^t x(0) + \mathcal{C}_t \mathcal{U}^R_{0:t-1} = A^t x(0) + \left[\begin{array}{cccc} B & AB & \cdots & A^{t-1}B \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{array}\right].$$

   - Definir

$$\mathcal{C}^R_t = \left[\begin{array}{cccc} A^{t-1}B & \cdots & AB & B \end{array}\right] \quad \text{e} \quad \mathcal{U}_{t-1} \left[\begin{array}{c} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(t-1) \end{array}\right].$$

4 - Observabilidade

- Calcular

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = CA^t x(0) + \begin{bmatrix} C\mathcal{C}_t^R & D \end{bmatrix} \mathcal{U}_t,$$

- Desta expressão determinar

$$\begin{aligned}
y(0) &= Cx(0) + Du(0) = \\
&= Cx(0) + \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathcal{U}_{n-1} \\
y(1) &= CAx(0) + \begin{bmatrix} C\mathcal{C}_1^R & D \end{bmatrix} \mathcal{U}_1 = CAx(0) + CBu(0) + Du(1) = \\
&= CAx(0) + \begin{bmatrix} CB & D & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathcal{U}_{n-1} \\
y(2) &= CA^2x(0) + \begin{bmatrix} C\mathcal{C}_1^R & D \end{bmatrix} \mathcal{U}_2 = CA^2x(0) + CABu(0) + CBu(1) + Du(2) = \\
&= CA^2x(0) \begin{bmatrix} CAB & CB & D & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathcal{U}_{n-1} \\
&\vdots \\
y(n-1) &= CA^{n-1}x(0) + \begin{bmatrix} C\mathcal{C}_1^R & D \end{bmatrix} \mathcal{U}_{n-1} = \\
&= CA^{n-1}x(0) + \begin{bmatrix} CA^{n-2}B & CA^{n-3}B & CA^{n-4} & \cdots & D \end{bmatrix} \mathcal{U}_{n-1}.
\end{aligned}$$

- Escrever este sistema de equações na forma matricial:

$$\begin{aligned} Y_{n-1} &= \mathcal{O}x(0) + H_n U_{n-1} \Leftrightarrow \\ \mathcal{O}x(0) &= Y_{n-1} - H_n U_{n-1} \end{aligned}$$

com

$$H_n = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{n-2}B & CA^{n-3}B & CA^{n-4} & \cdots & D \end{bmatrix}.$$

- $\mathcal{O}$ tem $n\ell$ linhas (ℓ é o número de saídas) e n colunas $\Rightarrow$ número de linhas $\geq$ número de colunas.
- se car$(\mathcal{O}) = n$, o seu pseudo-inverso será $\mathcal{O}^\dagger = \left(\mathcal{O}^T\mathcal{O}\right)^{-1}\mathcal{O}^T$ e $\mathcal{O}^\dagger\mathcal{O} = I_n$.

- Podemos determinar $x(0)$ multiplicando à esquerda ambos os membros por $\mathcal{O}^\dagger$:

$$x(0) = \mathcal{O}^\dagger \left(Y_{n-1} - H_n U_{n-1}\right) = \left(\mathcal{O}^T \mathcal{O}\right)^{-1} \mathcal{O}^T \left(Y_{n-1} - H_n U_{n-1}\right).$$

- Se car$\mathcal{O} < n$, então $\mathcal{O}^\dagger \mathcal{O} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é singular $x(0)$ tem uma infinidade de soluções.

2. Segunda e Terceira condições:

- Definir o sistema

$$\begin{aligned} x_d(t+1) &= A^T x_d(t) + C^T u(t) \\ y_d(t) &= B^T x_d(t) \end{aligned}$$

- A observabilidade do par (C, A) é equivalente à acessibilidade de (A^T, C^T) deste sistema. Logo todas as condições deste teorema são equivalentes às do Teorema 2.

□

Teorema 5

Se o par (C, A) não for observável tal que car$(\mathcal{O}) = n_o < n$, então existe uma matriz T não singular tal que

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0_{n_o \times n-n_o} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \bar{C} = CT = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & 0_{\ell \times n-n_o} \end{bmatrix}$$

Demonstração:

- Matriz de observabilidade do par (C, A)

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

- Matriz de observabilidade do par $(\bar{C}, \bar{A})$

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathcal{O}} &= \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CT \\ CTT^{-1}AT \\ \vdots \\ CTT^{-1}A^{n-1}T \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} CT \\ CAT \\ \dots \\ CA^{n-1}T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \mathcal{O}T.
\end{aligned}
$$

- Calcular

$$\begin{aligned}
\bar{C}\bar{A} &= \left[\begin{array}{cc} \bar{C}_1 & 0_{\ell\times n-n_o} \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} \bar{A}_{11} & 0_{n_o\times n-n_o} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \bar{C}\bar{A}_{11} & 0_{\ell\times n-n_o} \end{array}\right] \\
\bar{C}\bar{A}^2 &= \left(\bar{C}\bar{A}\right)\bar{A} = \left[\begin{array}{cc} \bar{C}\bar{A}_{11} & 0_{\ell\times n-n_o} \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} \bar{A}_{11} & 0_{\ell\times n-n_o} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{array}\right] = \\
&= \left[\begin{array}{cc} \bar{C}\bar{A}_{11}^2 & 0_{\ell\times n-n_o} \end{array}\right] \\
&\vdots \\
\bar{C}\bar{A}^k &= \left(\bar{C}\bar{A}^{k-1}\right)\bar{A} = \left[\begin{array}{cc} \bar{C}\bar{A}_{11}^{k-1} & 0_{\ell\times n-n_o} \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} \bar{A}_{11} & 0_{\ell\times n-n_o} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{array}\right] = \\
&= \left[\begin{array}{cc} \bar{C}\bar{A}_{11}^k & 0_{\ell\times n-n_o} \end{array}\right],
\end{aligned}$$

- Reescrever a matriz de observabilidade do par $(\bar{C}, \bar{A})$:

$$\bar{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \bar{C} & 0_{\ell \times n-n_o} \\ \bar{C}\bar{A}_{11} & 0_{\ell \times n-n_o} \\ \vdots & \vdots \\ \bar{C}\bar{A}_{11}^{n-1} & 0_{\ell \times n-n_o} \end{bmatrix} = \mathcal{O}T.$$

- Decompor $\mathcal{O}$ em valores singulares:

$$\mathcal{O} = USV^T$$

com

$$\begin{aligned} S &= \begin{bmatrix} S_+ & 0_{n_o \times n-n_o} \\ 0_{\ell n-n_o \times n_o} & 0_{\ell n-n_o \times n-n_o} \end{bmatrix} \\ U &= \begin{bmatrix} U_{n_o} & U_{n-n_o} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde

$$
\begin{aligned}
S_+ &= \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{n-n_o} \end{bmatrix} \\
U_{n_o} &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_{n_o} \end{bmatrix} \\
U_{n-n_o} &= \begin{bmatrix} u_{n_o+1} & u_{n_o+2} & \cdots & u_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- Fazer

$$T = V$$

- Verificar que $\mathcal{O}T = \bar{\mathcal{O}}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}T &= SV^TV = US = \begin{bmatrix} U_{n_o} & U_{n-n_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_+ & 0_{n_o \times n-n_o} \\ 0_{\ell n-n_o \times n_o} & 0_{\ell n-n_o \times n-n_o} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} U_{n_o}S_+ & 0_{\ell n \times n-n_o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C} & 0_{\ell \times n-n_o} \\ \bar{C}\bar{A}_{11} & 0_{\ell \times n-n_o} \\ \vdots & \vdots \\ \bar{C}\bar{A}_{11}^{n-1} & 0_{\ell \times n-n_o} \end{bmatrix} = \bar{\mathcal{O}}.
\end{aligned}$$

$\square$

- De

$$\bar{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \bar{C} & 0_{\ell \times n-n_o} \\ \bar{C}\bar{A}_{11} & 0_{\ell \times n-n_o} \\ \vdots & \vdots \\ \bar{C}\bar{A}_{11}^{n-1} & 0_{\ell \times n-n_o} \end{bmatrix} = \mathcal{O}T.$$

vemos que a matriz de similaridade T pode ser qualquer matriz não singular com as $n - n_o$ últimas colunas ortogonais às linhas de $\mathcal{O}$ (as $n - n_o$ últimas colunas de T têm que ser uma base de $\ker(\mathcal{O})$).

- Qualquer sistema pode ser decomposto em dois sub-sistemas:
  - Observável
  - Não observável
- A demonstração do teorema 5 sugere uma forma de obter esta decomposição.

Algoritmo 2

- **Entrada:** Par (C, A)
- **Saída:** Transformação de Similaridade T

1. Calcular a Matriz da Observabilidade $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$.
2. Efectuar a decomposição em valores singulares (svd) de $\mathcal{O} = USV^T$
3. Fazer $T = V$.

Exemplo 5 - Determinação do subsistema observável num sistema de $2^{\underline{a}}$ ordem

- Sistema:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 1.4 & 0.48 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -0.8 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0.6 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned}$$

- Matriz da observabilidade:

$$\mathcal{O} = \left[\begin{array}{c} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0.6 \end{bmatrix}}^{C} \\ \hline \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0.6 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} 1.4 & 0.48 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 \\ 0.8 & 0.48 \end{bmatrix}.$$

- $\det(\mathcal{O}) = 0$, logo, a sua característica é $1 \Rightarrow$ Sistema não observável
- Valores próprios:

$$\lambda_1 = 0.6$$
$$\lambda_2 = 0.8$$

- Como

$$\begin{aligned}
\text{car}\left(\left[\frac{A-\lambda_1 I_2}{C}\right]\right) &= \text{car}\left\{\left[\frac{\begin{bmatrix} 1.4 & 0.48 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0.6 \end{bmatrix}}\right]\right\} = \\
&= \text{car}\left\{\begin{bmatrix} 0.8 & 0.48 \\ -1 & -0.6 \\ 1 & 0.6 \end{bmatrix}\right\} = 1
\end{aligned}$$

O modo $\lambda_1^t = 0.6^t$ não é observável.

- Decompor $\mathcal{O}$ em valores singulares:

$$\mathcal{O} = USV^T = \begin{bmatrix} -0.7809 & -0.6247 \\ -0.6247 & 0.7809 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.4835 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.8575 & -0.5145 \\ -0.5145 & 0.8575 \end{bmatrix}^T$$

- Fazer a mudança de coordenadas

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_o(t) \\ \bar{x}_{\bar{o}}(t) \end{bmatrix} = T^{-1}x(t)$$

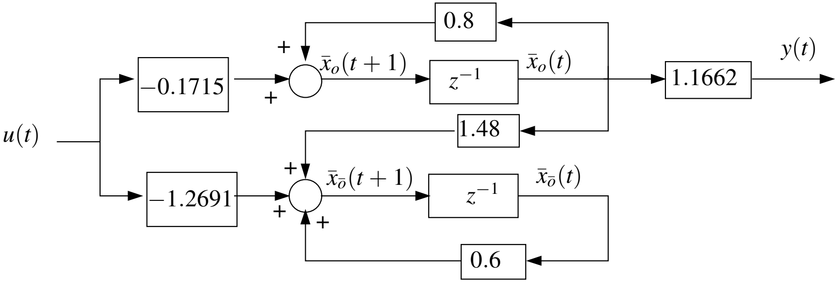
com

$$T = V = \begin{bmatrix} V_o & V_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8575 & -0.5145 \\ -0.5145 & 0.8575 \end{bmatrix}$$

para obter a representação

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \bar{x}_o(t+1) \\ \bar{x}_{\bar{o}}(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 1.48 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_o(t) \\ \bar{x}_{\bar{o}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.1715 \\ -1.2691 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1.1662 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_o(t) \\ \bar{x}_{\bar{o}}(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- O eixo $\bar{x}_{\bar{o}}$ constitui o subespaço dos estados não observáveis e $\bar{x}_o$ o seu complemento ortogonal
- Dado que a matriz de estado $\bar{A}$ é triangular inferior, os elementos da sua diagonal principal são os valores próprios do sistema.
- O segundo elemento de $\bar{C}$ é nulo e $[\bar{A}]_{22} = \lambda_2 = 0.8$ é o valor próprio *não observável*.



0.8
+
$\bar{x}_o(t+1)$
z^{-1}
$\bar{x}_o(t)$
$y(t)$
-0.1715
+
1.1662
$u(t)$
1.48
+
$\bar{x}_{\bar{o}}(t+1)$
z^{-1}
$\bar{x}_{\bar{o}}(t)$
-1.2691
+
+
0.6

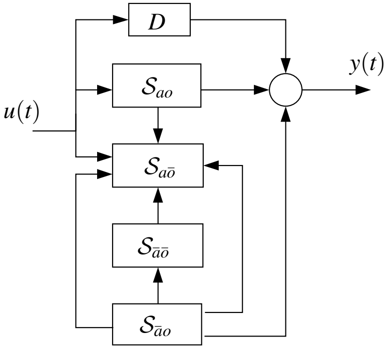
- Se trocarmos a ordem das colunas de T, isto é, se fizermos

$$T_1 = \left[\begin{array}{cc} V_r & V_o \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} -0.5145 & -0.8575 \\ 0.8575 & -0.5145 \end{array} \right]$$

obtemos a permutação $\left[\begin{array}{cc} \bar{x}_{\bar{o}}^T & \bar{x}_o^T \end{array} \right]^T$ do vector de estado a que corresponde o seguinte modelo

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} \bar{x}_{\bar{o}}(t+1) \\ \bar{x}_o(t+1) \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{cc} 0.6 & 1.48 \\ 0 & 0.8 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \bar{x}_{\bar{o}}(t) \\ \bar{x}_o(t) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} -1.2691 \\ -0.1715 \end{array} \right] u(t) \\ y(t) &= \left[\begin{array}{cc} 0 & 1.1662 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \bar{x}_{\bar{o}}(t) \\ \bar{x}_o(t) \end{array} \right]. \end{aligned}$$

5 - Decomposição Canónica de Kalman



- $\mathcal{S}_{ao}$, acessível e observável
- $\mathcal{S}_{a\bar{o}}$, acessível e não observável
- $\mathcal{S}_{\bar{a}\bar{o}}$, não acessível e não observável
- $\mathcal{S}_{\bar{a}o}$, não acessível e observável

Teorema 6 - Decomposição canónica de Kalman

Um sistema $\mathcal{S} = (A, B, C, D)$, com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$, pode ser representado na forma

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{a\bar{o}}(t+1) \\ \bar{x}_{ao}(t+1) \\ \bar{x}_{\bar{a}\bar{o}}(t+1) \\ \bar{x}_{\bar{a}o}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} & \bar{A}_{14} \\ 0_{n_{ao}\times n_{a\bar{o}}} & \bar{A}_{22} & 0_{n_{ao}\times n_{\bar{a}\bar{o}}} & \bar{A}_{24} \\ 0_{n_{\bar{a}\bar{o}}\times n_{a\bar{o}}} & 0_{n_{\bar{a}\bar{o}}\times n_{ao}} & \bar{A}_{33} & \bar{A}_{34} \\ 0_{n_{\bar{a}o}\times n_{a\bar{o}}} & 0_{n_{\bar{a}o}\times n_{ao}} & 0_{n_{\bar{a}o}\times n_{\bar{a}\bar{o}}} & \bar{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{a\bar{o}}(t) \\ \bar{x}_{ao}(t) \\ \bar{x}_{\bar{a}\bar{o}}(t) \\ \bar{x}_{\bar{a}o}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ 0_{n_{\bar{a}\bar{o}}\times m} \\ 0_{n_{\bar{a}o}\times m} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0_{\ell\times n_{a\bar{o}}} & \bar{C}_2 & 0_{\ell\times n_{\bar{a}\bar{o}}} & \bar{C}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{a\bar{o}}(t) \\ \bar{x}_{ao}(t) \\ \bar{x}_{\bar{a}\bar{o}}(t) \\ \bar{x}_{\bar{a}o}(t) \end{bmatrix} + Du(t)$$

onde

- $x_{a\bar{o}}(t) \in \mathbb{R}^{n_{a\bar{o}}}$ é acessível mas não observável;
- $x_{ao}(t) \in \mathbb{R}^{n_{co}}$ é acessível e observável;
- $x_{\bar{a}\bar{o}}(t) \in \mathbb{R}^{n_{\bar{c}\bar{o}}}$ é não acessível e não observável;
- $x_{\bar{c}o}(t) \in \mathbb{R}^{n_{\bar{a}o}}$ é não acessível e observável;
- $n_{a\bar{o}} + n_{ao} + n_{\bar{a}\bar{o}} + n_{\bar{a}o} = n$.

6 - Funções de Transferência e Realizações Mínimas

- Resposta impulsional;

$$h(t) = \begin{cases} D, & t = 0 \\ CA^{t-1}B & t > 0 \end{cases}$$

- A função de transferência do sistema é a transformada z da sua resposta impulsional:

$$H(z) = \sum_{t=0}^{\infty} h(t)z^{-t} = D + \sum_{t=1}^{\infty} CA^{t-1}Bz^{-t}$$

- A função de transferência pode ser calculada a partir das equações do modelo de estado:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

- Para condições iniciais nulas,

$$\begin{cases} zX(z) = AX(z) + BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(z) = (zI_n - A)^{-1} BU(z) \\ Y(z) = C (zI_n - A)^{-1} BU(z) + DU(z) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C (zI_n - A)^{-1} B + D$$

- Calcular a função de transferência do sistema $\mathcal{S}_T = \left(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D\right)$:

$$\begin{aligned} H_T(z) &= CT \left(zI_n - T^{-1}AT\right)^{-1} T^{-1}B + D = \\ &= CT \left[\left(zT^{-1} - T^{-1}A\right) T\right]^{-1} T^{-1}B + D = \\ &= C \underbrace{TT^{-1}}_{I_n} \left(zT^{-1} - T^{-1}A\right)^{-1} T^{-1}B + D = \\ &= C \left[T^{-1} (zI_n - A)\right]^{-1} T^{-1}B + D = \\ &= C (zI_n - A)^{-1} \underbrace{TT^{-1}}_{I_n} B + D = C (zI_n - A)^{-1} B + D = H(z) \end{aligned}$$

6 - Funções de Transferência e Realizações Mínimas

- Os sistemas $\mathcal{S}_T = (A, B, C, D)$ e $\mathcal{S}_T = \left(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D\right)$ têm a mesma função de transferência.
- A função de transferência $H(z)$ pode ser representada por uma infinidade de modelos de estado.
- Chamamos, a cada um desses modelos de estado, uma **realização** de $H(z)$.
- A dimensão das diferentes realizações também não é única.
- Cada realização tem que ter uma dimensão superior ou igual a um determinado limite inferior.
- Quando a dimensão de uma realização é igual a esse limite dizemos que essa realização é **mínima**

Teorema 7

Uma realização (A, B, C, D) de $H(z)$ é mínima se e só se os pares (A, B) e (A, C) forem simultaneamente acessível e observável, respectivamente. Se $\mathcal{S}_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1)$ e $\mathcal{S}_2 = (A_2, B_2, C_2, D_2)$ forem realizações mínimas de ordem n da mesma função de transferência $H(z)$, então existe uma matriz não singular $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\begin{aligned} A_2 &= T^{-1} A_1 T \\ B_2 &= T^{-1} B_1 \\ C_2 &= C_1 T \\ D_2 &= D_1 \end{aligned}$$

Demonstração:
Ver Katayama.

Definição 5

Se (A, B, C, D) for uma realização estável então as soluções P e Q das equações de Lyapunov

$$\begin{aligned} P &= APA^T + BB^T \\ Q &= A^T QA + C^T C \end{aligned}$$

são, respectivamente, os **Gramianos da Controlabilidade** e da **Observabilidade**.

Teorema 8

Se A for estável, então,

1. (A, B) acessível $\Leftrightarrow P \succ 0_{n\times n}$
2. (C, A) observável $\Leftrightarrow Q \succ 0_{n\times n}$

Demonstração

1. Condição 1:
   - A solução da primeira equação de Lyapunov é

$$P = \sum_{i=0}^{\infty} A^i B B^T \left(A^T\right)^i = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^i B & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T \left(A^T\right)^i \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathcal{C}_\infty C_\infty^T$$

   onde

$$\mathcal{C}_\infty = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^i B & \cdots \end{bmatrix}$$

   é a matriz da controlabilidade alargada a um horizonte infinito.
   - Da solução da equação de Lyapunov

$$\text{car}(P) = \text{car}(\mathcal{C}_\infty).$$

7 - Realizações Equilibradas

- Do teorema de Cayley-Hamilton

$$A^i = \alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n-1} A^{n-1}, \quad i \geq n, \ \alpha_k \in \mathbb{R}, \ k = 0, \ldots, n-1.$$

- Logo

$$BA^i = \alpha_0 B + \alpha_1 AB + \cdots + \alpha_{n-1} A^{n-1} B, \quad i \geq n.$$

- Isto significa que os blocos de colunas $A^i B$, $i = n, n+1, \ldots,$ de $\mathcal{C}_\infty$ são combinações lineares de $A^k B$, $k = 0, \ldots, n-1$, ou seja, dos seus n primeiros blocos de colunas.
- Concluímos que

$$\text{car}(\mathcal{C}_\infty) = \text{car}(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \text{car}(P) = \text{car}(\mathcal{C})$$

- Logo o par (A, B) só é acessível se e só se $\text{car}(P) = n$ o que é equivalente a $P \succ 0_{n \times n}$ pois, sendo A estável, P é sempre uma matriz não negativa.

2. Condição 2:
   - Sistema
   $$\begin{aligned} x_d(t+1) &= A^T x_d(t) + C^T u_d(t) \\ y_d(t) &= B^T x_d(t) + Du(t) \end{aligned}$$
   - Matriz da controlabilidade:
   $$\mathcal{C}_d = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \cdots & \left(A^T\right)^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^T = \mathcal{O}^T$$
   - Gramiano da controlabildade P_d=Q Gramiano da observabilidade de (A,B,C,D) pois Solução de
   $$\left\{ \begin{aligned} P_d &= A^T P_d A + C^T C \\ Q &= A^T Q A + C^T C \end{aligned} \right. \Rightarrow P_d = Q_d$$
   - Como (A^T, C^T, B^T, D) é acessível se e só se $P_d \succ 0_{n\times n}$, (A,B,C,D) é observável de $Q \succ 0$ (acessibilidade de (A^T, C^T, B^T, D) é equivalente à observabilidade de (A,B,C,D).$\square$

7 - Realizações Equilibradas

- Partindo dum estado inicial nulo, o sistema (A, B, C, D) atingirá, no instante $t > t_0$, o estado

$$x(t) \quad = \quad \mathcal{C}_{t-t_0}\mathcal{U}^R_{t_o:t-1}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^R_{t_o:t-1} &= \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(t_0) \end{bmatrix} \\ \mathcal{C}_{t-t_0} &= \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{t-t_0-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- Se $t_0 \to -\infty$,

$$x(t) = \mathcal{C}_\infty \mathcal{U}^R_\infty$$

- $\mathcal{U}_\infty^R$ é a matriz de cauda infinita

$$\mathcal{U}_\infty^R = \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

- Calcular

$$\begin{aligned} x(t)^T P^{-1} x(t) &= \left(\mathcal{C}_\infty \mathcal{U}_\infty^R\right)^T \left(\mathcal{C}_\infty \mathcal{C}_\infty^T\right)^{-1} \left(\mathcal{C}_\infty \mathcal{U}_\infty^R\right) = \\ &= {\mathcal{U}_\infty^R}^T \mathcal{C}_\infty^T \left(\mathcal{C}_\infty \mathcal{C}_\infty^T\right)^{-1} \mathcal{C}_\infty \mathcal{U}_\infty^R. \end{aligned}$$

- Decompor $\mathcal{C}_\infty$ em valores singulares,

$$\mathcal{C}_\infty = USV^T$$

para verificar que

$$\mathcal{C}_\infty^T \left(\mathcal{C}_\infty \mathcal{C}_\infty^T\right)^{-1} \mathcal{C}_\infty = VV^T.$$

- Utilizar este resultado na equação de $x(t)^T P^{-1} x(t)$:

$$x(t)^T P^{-1} x(t) \quad = \quad {\mathcal{U}_\infty^R}^T V V^T \mathcal{U}_\infty^R = \left(V^T \mathcal{U}_\infty^R\right)^T \left(V^T \mathcal{U}_\infty^R\right) = \left\|V^T \mathcal{U}_\infty^R\right\|_2^2 .$$

- Como V é uma matriz ortonormal, a transformação $V^T \mathcal{U}_\infty^R$ é uma rotação, logo

$$\left\|V^T \mathcal{U}_\infty^R\right\|_2^2 = \left\|\mathcal{U}_\infty^R\right\|_2^2 \quad = \quad {\mathcal{U}_\infty^R}^T \mathcal{U}_\infty^R = \sum_{\tau=-\infty}^{t} u^2(\tau) = E_c$$

- $E_c = x(t)^T P^{-1} x(t)$ **é a energia necessária à entrada** $u(t)$ **para que, no intervalo de tempo** $(-\infty, t]$**, consiga levar o estado do sistema da origem até** $x(t)$

- Decompor P em valores singulares

$$P \quad = \quad U_p S_p U_p^T .$$

- Designar os valores singulares de P por $\sigma_{p_1}, \sigma_{p_2}, \ldots, \sigma_{p_n}$.
- Designar as colunas de U_p por $u_{p_1}, u_{p_2}, \ldots, u_{p_n}$.
- Decompor $x(t)$ segundo $u_{p_1}, u_{p_2}, \ldots, u_{p_n}$

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha_1 u_{p_1} + \alpha_2 u_{p_2} + \cdots + \alpha_n u_{p_n} = \\ &= \begin{bmatrix} u_{p_1} & u_{p_2} & \cdots & u_{p_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = U_p \alpha. \end{aligned}$$

- Recalcular E_c:

$$E_c = x(t)^T P^{-1} x(t) = (U_p\alpha)^T \left(U_p S_p U_p^T\right)^{-1} (U_p\alpha) =$$

$$= \alpha^T U_p^T \left(U_p S_p^{-1} U_p^T\right) U_p \alpha = \alpha^T S_p^{-1} \alpha = \frac{\alpha_1^2}{\sigma_{p_1}} + \frac{\alpha_2^2}{\sigma_{p_2}} + \cdots + \frac{\alpha_n^2}{\sigma_{p_n}}$$

7 - Realizações Equilibradas

- Como $\sigma_{p_1} \geq \sigma_{p_2} \cdots \geq \sigma_{p_n}$, então, se $i < j < n$ e $\alpha_i = \alpha_j$, a entrada necessita de menos energia para levar o sistema ao estado $x_i = \alpha_i u_{p_i}$ do que para o levar a $x_j = \alpha_j u_{p_j}$.
- os estados na direcção de u_{p_i} são *mais acessíveis* do que os da direcção de u_{p_j}.
- **O Gramiano de Controlabilidade permite-nos dividir o o espaço de estados em subespaços com diferentes graus de acessibilidade.**

- Se, no instante $t = 0$ *largarmos* o sistema no estado x_0, teremos

$$\left\{\begin{array}{rcr} y(0) & = & Cx_0 \\ y(1) & = & CAx_0 \\ y(2) & = & CA^2x_0 \\ & \vdots & \\ y(t) & = & A^{t-1}x_0 \\ & \vdots & \end{array}\right. \Leftrightarrow \mathcal{Y}_{0:\infty} = \mathcal{O}_\infty x_0$$

onde

$$\mathcal{Y}_{0:\infty} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(t) \\ \vdots \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{O}_\infty = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{t-1} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

- A energia de $y(t)$ é

$$
\begin{aligned}
E_0 &= \sum_{t=0}^{\infty} y^2(t) = \mathcal{Y}_{0:\infty}^T \mathcal{Y}_{0:\infty} = \left(\mathcal{O}_\infty x_0\right)^T \left(\mathcal{O}_\infty x_0\right) = \\
&= x_0^T \mathcal{O}_\infty^T \mathcal{O}_\infty x_0 = x_0^T \left(\mathcal{O}_\infty^T \mathcal{O}_\infty\right) x_0 = x_0^T Q x_0
\end{aligned}
$$

  em que Q é o Gramiano da Observabilidade.

- Decomposição de Q em valores singulares:

$$
Q = U_q S_q U_q^T
$$

- Designar os valores singulares de Q por $\sigma_{q_1}, \sigma_{q_2}, \ldots, \sigma_{q_n}$.
- Designar as colunas de U_q por $u_{q_1}, u_{q_2}, \ldots, u_{q_n}$.

7 - Realizações Equilibradas

- Decompor x_0 segundo $u_{q_1}, u_{q_2}, \dots, u_{q_n}$:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \beta_1 u_{q_1} + \beta_2 u_{q_2} + \cdots + \beta_n u_{q_n} = \\
&= \begin{bmatrix} u_{q_1} & u_{q_2} & \cdots & u_{q_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = U_q \beta
\end{aligned}
$$

- Recalcular E_0:

$$
\begin{aligned}
E_0 &= x_0^T Q x_0 = (U_q \beta)^T \left(U_q S_q U_q^T \right) (U_q \beta) = \\
&= \beta^T U_q^T U_q S_q U_q^T U_q \beta = \beta^T S_q \beta = \beta_1 \sigma_{q_1} + \beta_2 \sigma_{q_2} + \cdots + \beta_n \sigma_{q_n}.
\end{aligned}
$$

- Esta expressão mostra que também podemos dividir o espaço de estados em subespaços com diferentes graus de observabilidade.

7 - Realizações Equilibradas

- A função de transferência é determinada pelo subsistema acessível e observável.
- Logo, os modos associados a estados pouco acessíveis (ou pouco observáveis) não deverão ter influência significativa.
- Neste contexto, se vários valores singulares do Gramiano da Controlabilidade (ou do Gramiano da Observabilidade) forem muito pequenos, podemos ser tentados a reduzir a ordem do modelo, retirando do espaço de estados o subespaço gerado pelos vectores singulares associados a esses valores singulares.
- Este raciocínio pode falhar porque um subespaço *pouco acessível* pode ser *muito observável* (e vice-versa) e, consequentemente, ter uma influência significativa na função de transferência.

7 - Realizações Equilibradas

- Nas **realizações equilibradas** os graus de acessibilidade e controlabilidade são idênticos.
- Estas realizações permitem reduzir a ordem de um modelo desprezando os subespaços de estado que são simultaneamente pouco acessíveis e pouco controláveis.

Definição 6

Seja $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ uma realização mínima da função de transferência $H(z)$. $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ é designada como realização equilibrada se

1. A for uma matriz estável
2. Os Gramianos da Controlabilidade e da Observabilidade $\bar{P}$ e $\bar{Q}$, respectivamente, são matrizes diagonais iguais, isto é,

$$\bar{P} = \bar{Q} = \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix}$$

com $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots > \sigma_n$ e satisfazendo

$$\begin{aligned} \Sigma &= \bar{A}\Sigma\bar{A}^T + \bar{B}\bar{B}^T \\ \Sigma &= \bar{A}^T\Sigma\bar{A} + \bar{C}^T\bar{C} \end{aligned}$$

Algoritmo 4 - Determinação duma Realização Equilibrada

- **Entrada:** Realização mínima estável (A, B, C), $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$.
- **Saída:** Matriz de valores singulares do sistema Σ e Matriz de Transformação de Similaridade $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) = (T^{-1}AT, T^{-1}B, CT)$ seja uma realização equilibrada

1. Calcular P e Q através da resolução de
$$\begin{aligned} P &= APA^T + BB^T \\ Q &= A^TQA + C^TC \end{aligned}$$
2. Efectuar a svd de Q
$$Q = U_qS_qU_q^T$$

3. Definir

$$R = S_q^{\frac{1}{2}} U_q^T$$

4. Calcular a svd de RPR^T

$$RPR^T = USU^T$$

5. Fazer

$$\begin{aligned} \Sigma &= S^{\frac{1}{2}} \\ T &= R^{-1} U \Sigma^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Demonstração do algoritmo 4

Objectivo: Demonstrar que a realização $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) = (T^{-1}AT, T^{-1}B, CT)$ é equilibrada em que T é a matriz calculada pelo algoritmo 4.

- Definir

$$\mathcal{C}_\infty = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^kB & \cdots \end{bmatrix}$$

- Calcular

$$\bar{\mathcal{C}}_\infty = \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^k\bar{B} & \cdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} T^{-1}B & T^{-1}ATT^{-1}B & \cdots & T^{-1}A^kTT^{-1}B & \cdots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} T^{-1}B & T^{-1}AB & \cdots & T^{-1}A^kB & \cdots \end{bmatrix} =$$

$$T^{-1}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^kB & \cdots \end{bmatrix} = T^{-1}\mathcal{C}_\infty$$

- Calcular

$$\bar{P} = \bar{\mathcal{C}}_\infty \bar{\mathcal{C}}_\infty^T = T^{-1}\mathcal{C}_\infty \mathcal{C}_\infty^T T^{-T} = T^{-1}PT^{-T}.$$

- Definir

$$\mathcal{O}_\infty = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^k \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

- Calcular

$$\bar{\mathcal{O}}_\infty = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^k \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CT \\ CTT^{-1}AT \\ \vdots \\ CTT^{-1}A^iT \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CT \\ CAT \\ \vdots \\ CA^kT \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^k \\ \vdots \end{bmatrix} T = \mathcal{O}_\infty T.$$

- Calcular

$$\bar{Q} = \bar{\mathcal{C}}_{\infty}^{T} \bar{\mathcal{C}}_{\infty} = T^{T} \mathcal{C}_{\infty}^{T} \mathcal{C}_{\infty} T = T^{T} Q T.$$

- Fazer

$$\begin{aligned} Q &= U_q S_q U_q^T \\ R &= S_q^{\frac{1}{2}} U_q^T \Rightarrow Q = R^T R \\ RPR^T &= USU^T \\ \Sigma &= S^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow S = \Sigma^2 \\ T &= R^{-1} U \Sigma^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

- Calcular

$$\bar{P} = \underbrace{T^{-1}}_{\Sigma^{-\frac{1}{2}} U^T R} \, P \, \underbrace{T^{-T}}_{R^T U \Sigma^{-\frac{1}{2}}} = \Sigma^{-\frac{1}{2}} U^T R P R^T U \Sigma^{-\frac{1}{2}} = \Sigma^{-\frac{1}{2}} U^T \underbrace{RPR^T}_{USU^T} U \Sigma^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \Sigma^{-\frac{1}{2}} U^T USU^T U \Sigma^{-\frac{1}{2}} = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \underbrace{U^T U}_{I_n} \underbrace{S}_{\Sigma^2} \underbrace{U^T U}_{I_n} \Sigma^{-\frac{1}{2}} = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Sigma^2 \Sigma^{-\frac{1}{2}} = \Sigma$$

- Calcular

$$
\begin{aligned}
\bar{Q} &= \underbrace{T^T}_{\Sigma^{\frac{1}{2}}U^TR^{-T}} \; Q \; \underbrace{T}_{R^{-1}U\Sigma^{\frac{1}{2}}} = \Sigma^{\frac{1}{2}}U^TR^{-T}\underbrace{Q}_{R^TR}R^{-1}U\Sigma^{\frac{1}{2}} = \\
&= \Sigma^{\frac{1}{2}}U^TR^{-T}R^TRR^{-1}U\Sigma^{\frac{1}{2}} = \Sigma^{\frac{1}{2}}U^T\underbrace{R^{-T}R^T}_{I_n}\underbrace{RR^{-1}}_{I_n}U\Sigma^{\frac{1}{2}} = \\
&= \Sigma^{\frac{1}{2}}\underbrace{U^TU}_{I_n}\Sigma^{\frac{1}{2}} = \Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}} = \Sigma.
\end{aligned}
$$

$\square$

- Seja

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t+1) \\ \bar{x}_2(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} + \bar{D}u(t) \end{aligned}$$

  uma realização equilibrada com $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^r$ e $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}^k$.

- Gramianos da Controlabilidade e Observabilidade, $\bar{P}$ e $\bar{Q}$, respectivamente:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \bar{Q} = \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \\ \Sigma_1 &= \operatorname{diag}\{\sigma_i\}_{i=1,\dots,r} \in \mathbb{R}^{r\times r} \\ \Sigma_2 &= \operatorname{diag}\{\sigma_{r+i}\}_{i=1,\dots,k} \in \mathbb{R}^{k\times k}, \quad r+k=n. \end{aligned}$$

com

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{n_r} > \sigma_{n_r+1} \geq \cdots \geq \sigma_n > 0.$$

- Se $\sigma_{n_r+1} \approx 0$ o sistema pode ser aproximado por

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(t+1) &= \bar{A}_{11}\bar{x}_1(t) + \bar{B}_1 u(t) \\ y_r(t) &= \bar{C}_1\bar{x}_1(t) + \bar{D}u(t). \end{aligned}$$

Lema 1

Se $\left(\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix}, \bar{D}\right)$ for uma realização equilibrada de uma função de transferência $H(z)$, com Gramianos de Controlabilidade e Observabilidade $\bar{P}$ e $\bar{Q}$, respectivamente, então a função de transferência $H_r(z) = \bar{C}_1 \left(I_{n_r} - \bar{A}_{11}\right)^{-1} \bar{B}_1 + \bar{D}$ tem as seguintes características:

1. É estável
2. $(\bar{A}_{11}, \bar{B}_1, \bar{C}_1, \bar{D})$ é uma realização mínima de H_r
3. $\left\|H(e^{j\omega}) - H_r(e^{j\omega})\right\|_\infty = \max_\omega \left\|H(e^{j\omega}) - H_r(e^{j\omega})\right\|_2 \leq$
   $\leq 2\left(\sigma_{n_r+1} + \cdots + \sigma_n\right)$

Demonstração

Ver Katayama.

- $(\bar{A}_{11}, \bar{B}_1, \bar{C}_1, \bar{D})$ é uma realização duma função de transferência $H_r(z)$ com as seguintes características:
  - É uma boa aproximação de $H(z)$.
  - Não é uma realização equilibrada.
  - Tem um ganho DC diferente do de $H(z)$.
- É possível obter uma realização equilibrada duma outra função de transferência $H_{r1}(z)$ com ordem e erro de aproximação igual às de $H_r(z)$, e ganho DC igual ao de $H(z)$.

8 - Redução da Ordem do Modelo

- Seja

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1(t+1) &= \bar{A}_{11}\bar{x}_1(t) + \bar{A}_{12}\bar{x}_2(t) + \bar{B}_1 u(t) \\
\bar{x}_2(t+1) &= \bar{A}_{21}\bar{x}_1(t) + \bar{A}_{22}\bar{x}_2(t) + \bar{B}_2 u(t) \\
y(t) &= \bar{C}_1\bar{x}_1(t) + \bar{C}_2\bar{x}_2(t) + \bar{D}u(t).
\end{aligned}$$

uma realização equilibrada de $H(z)$.

- Se $u(t)$ for um sinal contínuo $x_2(t)$ vai estabilizar em

$$\begin{aligned}
\bar{x}_{2ss} &= \bar{A}_{21}\bar{x}_1(t) + \bar{A}_{22}\bar{x}_{2ss} + \bar{B}_2 u(t) \Leftrightarrow \\
\left(I_k - \bar{A}_{22}\right)\bar{x}_{2ss} &= \bar{A}_{21}\bar{x}_1(t) + \bar{B}_2 u(t) \Leftrightarrow \\
\bar{x}_{2ss} &= \left(I_k - \bar{A}_{22}\right)^{-1}\bar{A}_{21}\bar{x}_1(t) + \left(I_k - \bar{A}_{22}\right)^{-1}\bar{B}_2 u(t)
\end{aligned}$$

8 - Redução da Ordem do Modelo

- Substituindo $x_2(t)$ por x_{2ss} nas equações de $x_1(t)$ e $y(t)$,

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_1(t+1) &= \bar{A}_{11}\bar{x}_1(t)+ \\
&\quad +\bar{A}_{12}\left[\left(I_k-\bar{A}_{22}\right)^{-1}\bar{A}_{21}\bar{x}_1(t)+\left(I_k-\bar{A}_{22}\right)^{-1}\bar{B}_2u(t)\right]+\bar{B}_1u(t) \\
y(t) &= \bar{C}_1\bar{x}_1(t)+ \\
&\quad +\bar{C}_2\left[\left(I_k-\bar{A}_{22}\right)^{-1}\bar{A}_{21}\bar{x}_1(t)+\left(I_k-\bar{A}_{22}\right)^{-1}\bar{B}_2u(t)\right]+\bar{D}u(t).
\end{aligned}
$$

- Pondo $\bar{x}_1(t)$ e $u(t)$ em evidência

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_1(t+1) &= \underbrace{\left(\bar{A}_{11} + \bar{A}_{12}\left(I_k - \bar{A}_{22}\right)^{-1}\bar{A}_{21}\right)}_{\bar{A}_r}\bar{x}_1(t) + \\
&\quad + \underbrace{\left(\bar{B}_1 + \bar{A}_{12}\left(I_k - \bar{A}_{22}\right)^{-1}\bar{B}_2\right)}_{\bar{B}_r}u(t) \\
y_{r1}(t) &= \underbrace{\left(\bar{C}_1 + \bar{C}_2\left(I_k - \bar{A}_{22}\right)^{-1}\bar{A}_{21}\right)}_{\bar{C}_r}\bar{x}_1(t) + \\
&\quad + \underbrace{\left(\bar{D} + \bar{C}_2\left(I_k - \bar{A}_{22}\right)^{-1}\bar{B}_2\right)}_{\bar{D}_r}u(t).
\end{aligned}
$$

verifica-se que $\left(\bar{A}_r, \bar{B}_r, \bar{C}_r, \bar{D}_r\right)$ é uma realização da função de transferência

$$H_{r1}(z) \quad = \quad \bar{C}_r \left(I_{n_r} - \bar{A}_r\right)^{-1} \bar{B}_r + \bar{D}_r$$

com

$$\begin{aligned}
\bar{A}_r &= \bar{A}_{11} + \bar{A}_{12} \left(I_k - \bar{A}_{22}\right)^{-1} \bar{A}_{21} \\
\bar{B}_r &= \bar{B}_1 + \bar{A}_{12} \left(I_k - \bar{A}_{22}\right)^{-1} \bar{B}_2 \\
\bar{C}_r &= \bar{C}_1 + \bar{C}_2 \left(I_k - \bar{A}_{22}\right)^{-1} \bar{A}_{21} \\
\bar{D}_r &= \bar{D} + \bar{C}_2 \left(I_k - \bar{A}_{22}\right)^{-1} \bar{B}_2.
\end{aligned}$$

- Como, quando $u(t)$ for constante, $y_{r1}(t) = y(t)$ o ganho DC de $H_{r1}(z)$ é igual ao de $H(z)$.

Lema 2

Se $\left(\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix}, \bar{D}\right)$ for uma realização equilibrada de uma função de transferência $H(z)$, com Gramianos de Controlabilidade e Observabilidade $\bar{P}$ e $\bar{Q}$, respectivamente, então a função de transferência $H_{r1}(z)$ e a sua realização $(\bar{A}_r, \bar{B}_r \bar{C}_r, \bar{D}_r)$ têm as seguintes características:

1. $(\bar{A}_r, \bar{B}_r \bar{C}_r, \bar{D}_r)$ é uma realização equilibrada de H_{r1} com Gramianos de Controlabilidade e Observabilidade $\bar{P}_{r1} = \bar{Q}_{r1} = \Sigma_1$.
2. $\left\|H(e^{j\omega}) - H_{r1}(e^{j\omega})\right\|_\infty = \max_\omega \left\|H(e^{j\omega}) - H_{r1}(e^{j\omega})\right\|_2 \leq$ $\leq 2\left(\sigma_{n_r+1} + \cdots + \sigma_n\right)$
3. $H_{r1}(1) = H(1)$.

Demonstração:

Ver Katayama.