Introdução à Identificação no Subespaço de Estados

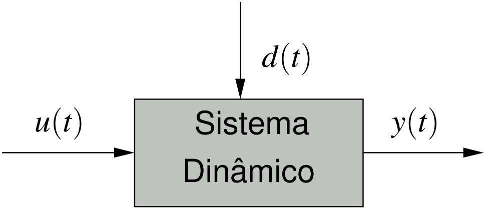
Paulo Lopes dos Santos

Universidade do Porto - Faculdade de Engenharia
2014

Paulo Lopes dos Santos
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Porto, Portugal

Resumo

Modelos de Entrada-Saída (ES)



$$w^T(t) = \begin{bmatrix} u^T(t) & d^T(t) \end{bmatrix}^T$$

Modelo de Entrada-Saída (ES) dum sistema contínuo:

$$f_{wy}\left(\frac{d^n y(t)}{dt^n}, \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}(t)}, \ldots, \frac{dy(t)}{dt}, y(t), \frac{d^m w(t)}{dt^m}, \frac{d^{m-1}w(t)}{dt^{m-1}}, \ldots, \frac{dw(t)}{dt}, w(t), t, \theta\right) = 0$$

Modelo ES dum sistema discreto (normalmente sistema amostrado):

$$f_{d_{wy}}\Big(y[(k-n)T_s], \ldots, y[(k-1)T_s], y(kT_s), w[(k-n)T_s], \ldots, w[(k-1)T_s], w(kT_s), k, \theta\Big) = 0$$

Modelos de Estados (ME)

$$
\begin{aligned}
\theta &= \begin{bmatrix} \theta_x^T & \theta_y^T \end{bmatrix}^T \\
x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

Modelo ME dum sistema contínuo:

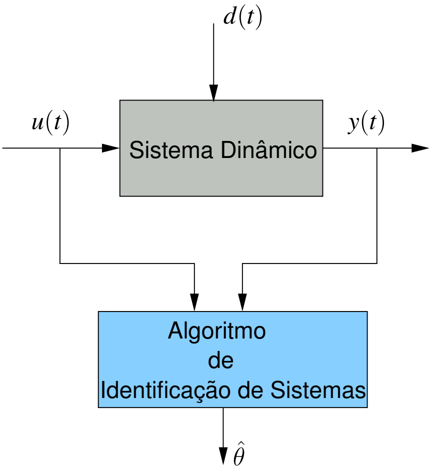
$$
\begin{cases} \dot{x}(t) = f\big(x(t), w(t), t, \theta_x\big) \\ y(t) = g\big(x(t), w(t), t, \theta_y\big) \end{cases}
$$

Modelo ME dum sistema discreto:

$$
\begin{cases} x(k+1) = f\big(x(k), w(k), k, \theta_x, \big) \\ y(k) = g\big(x(k), w(k), k, \theta_y\big) \end{cases}
$$

Na notação dos modelos discretos não explicitaremos mais o período de amostragem T_s.

Identificação de Sistemas



Modelo padrão I

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + q(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) + r(k) \end{aligned}$$

$$u(k) \in \mathbb{R}^m, \quad y(k) \in \mathbb{R}^\ell$$

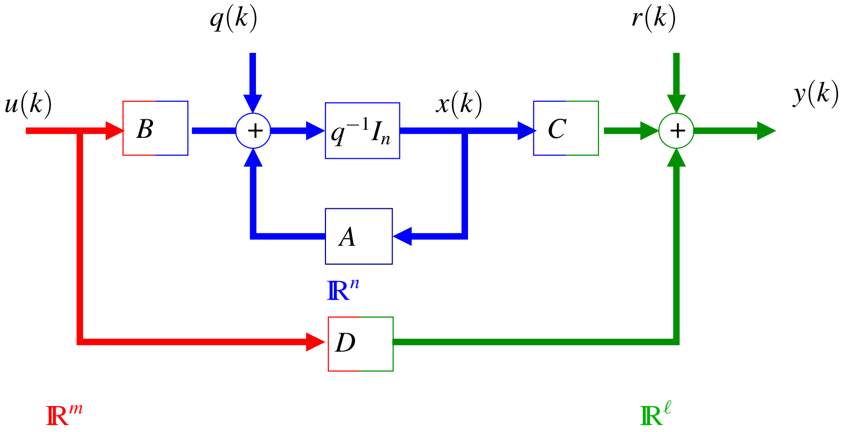
$$\left.\begin{array}{lll} q(k) \in \mathbb{R}^n & - & \text{ruído de processo} \\ r(k) \in \mathbb{R}^\ell & - & \text{ruído de medida} \end{array}\right\} - \begin{array}{c} \text{ruído branco de média nula} \\ \text{com covariância conjunta} \end{array}$$

$$\mathbf{E}\left\{ \begin{bmatrix} q(k) \\ r(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^T(k) & r^T(k) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$$

$$d(k) = \begin{bmatrix} q^T(k) & r^T(k) \end{bmatrix}^T \text{ - sinal de ruído}$$

θ: Vetor ou matriz construído com os elementos de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{\ell\times\ell}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{\ell\times\ell}$ e $S \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$.

Modelo padrão II



Modelo de Inovação

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Ke(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) + e(k) \end{aligned}$$

$e(k) \in \mathbb{R}^{\ell}$ - sequência de ruído branco de média nula, $\quad K \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$

θ: Vetor ou matriz construído com os elementos de A, B, C, D e $K \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$.

Propriedades dos ME

$\rightarrow$ Função de Transferência ou Matriz de Transferência (modelo ES)

$$Y(z) = H(z)U(z) \text{ onde } H(z) = C(zI_n - A)^{-1}B + D.$$

$\rightarrow$ Não unicidade

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(k+1) & = & Ax(k) + Bu(k) \\ y(k = & = & Cx(k) + Du(k) \end{array} \right. \text{ e } \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x}(k+1) & = & \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{B}u(k) \\ y(k) & = & \bar{C}\bar{x}(k) + \bar{D}u(k) \end{array} \right.$$

com

$$\bar{x}(k) = T^{-1}x(k);$$

$$\bar{A} = T^{-1}AT,\ \bar{B} = T^{-1}B,\ \bar{C} = CT,\ \bar{D} = D;$$

têm a mesma função de transferência.

Definições I

→ Parâmetros de Markov

$$h(k) = \begin{cases} D, & k = 0 \\ CA^{k-1}B, & k > 0 \end{cases}$$

$$h(k) \quad - \quad \text{Resposta impulsional.}$$

→ Acessibilidade (Controlabilidade para sistemas contínuos), matriz da Acessibilidade, matriz Aumentada da Acessibilidade:

$$\mathcal{C}_i = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{i-1}B \end{bmatrix} \text{ - matriz Aumentada da Acessibilidade}$$
$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_n \text{ - matriz da Acessibilidade}$$

Condição de Acessibilidade: $\mathrm{rank}(\mathcal{C}_i) = n, \quad i \geq n$.

Definições II

→ Observabilidade, matriz da Observabilidade, matriz Aumentada da Observabilidade:

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix}, \; i > n \text{ - matriz Aumentada da Observabilidade} \\ \Gamma &= \Gamma_n \text{ - matriz da Observabilidade} \end{aligned}$$

Condição de Observabilidade: $\mathrm{rank}(\Gamma_i) = n, \quad i \geq n$.

→ **Realização Mínima**: Realização no espaço de estados que é **simultaneamente acessível e observável**.

Resposta temporal

$$\bar{U}_k = \begin{bmatrix} u(k) & u(k-1) & \cdots & u(k_0) \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{aligned}
x(k) &= A^{k-k_0}x(k_0) + \mathcal{C}_{k-k_0}\bar{U}_{k-1} \\
y(k) &= CA^{k-k_0}x(k_0) + Du(k) + \sum_{i=1}^{k_0} CA^{i-1}Bu(k-i) \\
&= CA^{k-k_0}x(k_0) + \begin{bmatrix} D & CB & CAB & \cdots & CA^{k-k_0-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k-1) \\ \cdots \\ u(k_0) \end{bmatrix} \\
&= CA^{k-k_0}x(k_0) + \begin{bmatrix} h(0) & h(1) & h(2) & \cdots & h(k-k_0) \end{bmatrix} \bar{U}_k
\end{aligned}$$

Matriz de Hankel da resposta Impulsional I

$$
\begin{aligned}
\Gamma_i \mathcal{C}_j &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{j-1}B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} CB & CAB & CA^2B & \cdots & CA^{j-1}B \\ CAB & CA^2B & CA^3B & \cdots & CA^jB \\ CA^2B & CA^3B & CA^4B & \cdots & CA^{j+1}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{i-1}B & CA^iB & CA^{i+1}B & \cdots & CA^{i+j-2}B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} h(1) & h(2) & h(3) & \cdots & h(j) \\ h(2) & h(3) & h(4) & \cdots & h(j+1) \\ h(3) & h(4) & h(5) & \cdots & h(j+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h(i) & h(i+1) & h(i+2) & \cdots & h(i+j-1) \end{bmatrix} = H_{ij} \in \mathbf{R}^{\ell i \times mj}
\end{aligned}
$$

Matriz de Hankel da resposta Impulsional II

H_{ij} - MATRIZ DE HANKEL

Problema: Dado H_{ij} determinar Γ_i e $\mathcal{C}_j$

Solução não única:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{A} = T^{-1}AT \\ \bar{B} = T^{-1}B \\ \bar{C} = TC \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} CT \\ CAT \\ \vdots \\ CA^{i-1}T \end{bmatrix} = \Gamma_i T \\ \bar{\mathcal{C}}_j = \begin{bmatrix} T^{-1}B & T^{-1}AB & \cdots & T^{-1}A^{j-1}B \end{bmatrix} = T^{-1}\mathcal{C}_j \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad \bar{\Gamma}_i \bar{\mathcal{C}}_j = \Gamma_i \mathcal{C}_j = H_{ij} \in \mathbb{R}^{\ell i \times mj}$$

Diz-se que o problema tem uma solução a menos duma transformação de similaridade T

Como encontrar uma dessas soluções? I

- $\operatorname{rank}\left(\mathcal{C}_j\right) = \operatorname{rank}\left(\Gamma_i\right) = n$

- $\operatorname{rank}\left(H_{ij}\right) = n$

- **Decomposição em valores singulares de H_{ij} (svd$\left(H_{ij}\right)$):**

$$\begin{aligned} H_{ij} &= USV^T \\ U &\in \mathbb{R}^{\ell i \times \ell i} - \text{Ortonormal } \Rightarrow U^T U = I_{\ell i} \equiv \text{matriz identidade } \ell i \times \ell i \\ V &\in \mathbb{R}^{mj \times mj} - \text{Ortonormal} \Rightarrow V^T V = I_{mj} \\ S &\in \mathbb{R}^{\ell i \times mj} \end{aligned}$$

Como encontrar uma dessas soluções? II

$$S = \begin{cases} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{\ell i} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, & \ell i \leq mj \\ \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{mj} \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \ell i \geq mj \end{cases}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r \geq 0, \quad r = \min(\ell i, mj)$$

$$\sigma_k \; - \; \text{valores singulares}$$

Como encontrar uma dessas soluções? III

$\rightarrow \text{car}(S) = \max(k : \sigma_k \neq 0, k = 1,\ 2,\ \ldots,\ r) = n$

$\rightarrow \text{car}\big(H_{ij}\big) = \text{car}(S) = n \leq r$

$$\rightarrow S = \left[\begin{array}{cc} S_n & 0_{n\times(mj-n)} \\ 0_{(\ell i-n)\times n} & 0_{(\ell i-n)\times(mj-n)} \end{array} \right] \; S_n = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix} = \text{diag}\{\sigma_i\}$$

Como encontrar uma dessas soluções? IV

$\rightarrow$ Decompor U e V da seguinte forma:

$$U = \left.\left[\begin{array}{ccc} \overbrace{U_n}^{n \text{ colunas}} & | & \overbrace{U_{\ell i-n}}^{\ell i-n \text{ colunas}} \end{array} \right]\right\} \ell i \text{ linhas}$$

$$V = \left.\left[\begin{array}{ccc} \overbrace{V_n}^{n \text{ colunas}} & | & \overbrace{V_{mj-n}}^{mj-n \text{ colunas}} \end{array} \right]\right\} mj \text{ linhas}$$

Como encontrar uma dessas soluções? V

$\rightarrow$ Calcular H_{ij}:

$$H_{ij} = \left[\begin{array}{c|c} U_n & U_{\ell i-n} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} S_n & 0_{n\times(mj-n)} \\ \hline 0_{(\ell i-n)\times n} & 0_{(\ell i-n)\times(mj-n)} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} V_n^T \\ \hline V_{mj-n}^T \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} U_n S_n + U_{\ell i-n} 0_{(\ell i-n)\times n} & U_n 0_{n\times(mj-n)} + U_{\ell i-n} 0_{(\ell i-n)\times(mj-n)} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} V_n^T \\ \hline V_{mj-n}^T \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} U_n S_n & 0_{\ell i\times(mj-n)} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} V_n^T \\ \hline V_{mj-n}^T \end{array}\right] = U_n S_n V_n^T + 0_{\ell i\times(mj-n)} V_{mj-n} = U_n S_n V_n^T$$

$$\boxed{H_{ij} = U_n S_n V_n^T = \Gamma_i \mathcal{C}_j}$$

Como encontrar uma dessas soluções? VI

- Fazer $\begin{cases} \Gamma_i = U_n S_n^{1/2} \\ \mathcal{C}_j = S_n^{1/2} V_n^T \end{cases}$ onde $S_n = \mathrm{diag}\{\sigma_i\}_{i=1,\ldots n}$

- $\Gamma_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} = U_n S_n^{1/2} \Rightarrow C =$ primeiras ℓ linhas of Γ_i

- $\bar{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-2} \end{bmatrix} A = \Gamma_{i-1} A = \underline{\Gamma}_i A$

Como encontrar uma dessas soluções? VII

- **Problema de Mínimos Quadrados:**

$$\bar{\Gamma}_i = \underline{\Gamma}_i A$$

- Solução:

$$A = \left(\underline{\Gamma}_i^T \underline{\Gamma}_i\right)^{-1} \underline{\Gamma}_i^T \bar{\Gamma}_i$$

Definindo $\left(\underline{\Gamma}_i^T \underline{\Gamma}_i\right)^{-1} \underline{\Gamma}_i^T = \underline{\Gamma}_i^\dagger$ como o a matriz pseudoinversa de $\underline{\Gamma}_i$,

$$\boxed{A = \underline{\Gamma}_i^\dagger \bar{\Gamma}_i}$$

Como encontrar uma dessas soluções? VIII

De forma idêntica,

- $\mathcal{C}_j = \left[\begin{array}{c|c|c|c} B & AB & \cdots & A^{j-1}B \end{array} \right] = S_n^{1/2} V_n^T \Rightarrow B =$ Primeiras m colunas de $\mathcal{C}_j$
- ${}_{|}\mathcal{C}_j = \left[\begin{array}{ccc} AB & \cdots & A^{j-1}B \end{array} \right] = A \left[\begin{array}{ccc} B & \cdots & A^{j-2}B \end{array} \right] = A\mathcal{C}_{|_j}$

Definindo a pseudoinversa de $\mathcal{C}_{|_j}$ como $\mathcal{C}_{|_j}^{\dagger} = \mathcal{C}_{|_j}^{T} \left(\mathcal{C}_{|_j} \mathcal{C}_{|_j}^{T} \right)^{-1}$,

Então,

$$\boxed{A = {}_{|}\mathcal{C}_j \mathcal{C}_{|_j}^{\dagger}}$$

Como encontrar uma dessas soluções? IX

- Notar que $\begin{cases} \bar{\Gamma}_i = \underline{\Gamma}_i A \Rightarrow \text{vec}\left(\bar{\Gamma}_i\right) = \left(I_n \otimes \underline{\Gamma}_i\right) \text{vec}(A) \\ {}_{|}\mathcal{C}_j = A\mathcal{C}_{|_j} \Rightarrow \text{vec}\left({}_{|}\mathcal{C}_j\right) = \left(\mathcal{C}_{|_j}^T \otimes I_n\right) \text{vec}(A) \end{cases}$

Definindo, ainda

- $X = \begin{bmatrix} I_n \otimes \underline{\Gamma}_i \\ \mathcal{C}_{|_j}^T \otimes I_n \end{bmatrix}, \; Y = \begin{bmatrix} \text{vec}\left(\bar{\Gamma}_i\right) \\ \text{vec}\left({}_{|}\mathcal{C}_j\right) \end{bmatrix}$

Pode-se estimar A a partir de:

$$\boxed{\mathbf{vec}(A) = X^{\dagger} Y}$$

Método de Ho-Kalman

$\rightarrow$ Este algoritmo é conhecido como **MÉTODO de HO-KALMAN**

$\rightarrow$ Constrói um modelo de estado a partir da Resposta Impulsional

$$\begin{cases} h(0) = D \\ h(i) = CA^{i-1}B, \quad i > 0 \end{cases}$$

Estimação da Resposta Impulsional I

Resposta do sistema

$$y(k) = CA^{k-k_0}x(k_0) + \sum_{i=0}^{k_0} h(i)Bu(k-i)$$

$k_0 \to -\infty$, $A^{\infty} = 0$ (condição necessária de estabilidade) e

$$\begin{aligned}
y(k) &= \sum_{i=0}^{\infty} h(i)u(k-i) \approx \sum_{i=0}^{M} h(i)u(k-i) = x(k)^T\theta \\
x(k) &= \begin{bmatrix} u(k) & u(k-1) & \cdots & u(k-M) \end{bmatrix}^T \\
\theta &= \begin{bmatrix} h(0) & h(1) & \cdots & h(M) \end{bmatrix}^T \\
M &- \text{ suficientemente grande para que } A^{k-1} \approx 0, \forall_{k>M}.
\end{aligned}$$

Estimação da Resposta Impulsional II

Definir

$$X = \begin{bmatrix} x^T(0) \\ x^T(1) \\ \vdots \\ x^T(N) \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}$$

O estimador de mínimos quadrados de θ é

$$\hat{\theta} = \left(X^T X\right) X^T Y = \begin{bmatrix} \hat{h}(0) & \hat{h}_1(0) & \cdots & \hat{h}(M) \end{bmatrix}^T$$

Estimação da Resposta Impulsional III

$\rightarrow$ Se $u(k)$ for uma sequência de ruído branco com média nula, então:

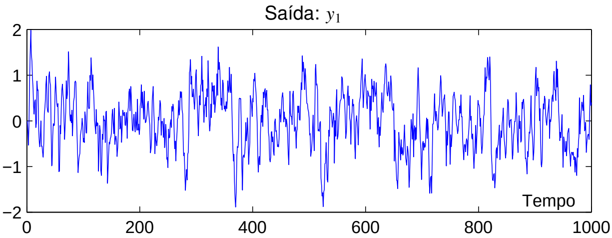
$$\begin{aligned} h(k) &= R_{uu}^{-1}(0)R_{uy}(-k) \\ R_{uu}(0) &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}u(i)u(i) \\ R_{uy}(-k) &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N-k}\sum_{i=k+1}^{N}u(i)y(i+k) \end{aligned}$$

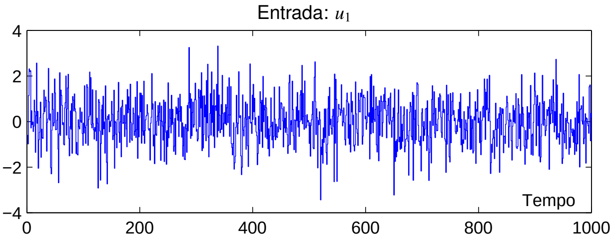
Estimação da Resposta Impulsional IV

$\rightarrow$ A resposta impulsional pode ser estimada através de:

$$\begin{aligned}
\hat{h}(k) &= \hat{R}_{uu}^{-1}(0)\hat{R}_{uy}(-k) \\
\hat{R}_{uu}(0) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u(i)u(i) \\
\hat{R}_{uy}(-k) &= \frac{1}{N-k}\sum_{i=k+1}^{N} u(i)y(i+k)
\end{aligned}$$

Os Dados


Saída: y_1
2
1
0
−1
−2
Tempo
0
200
400
600
800
1000


Entrada: u_1
4
2
0
−2
−4
Tempo
0
200
400
600
800
1000

Estimativa de mínimos quadrados da resposta impulsional (19 pontos):

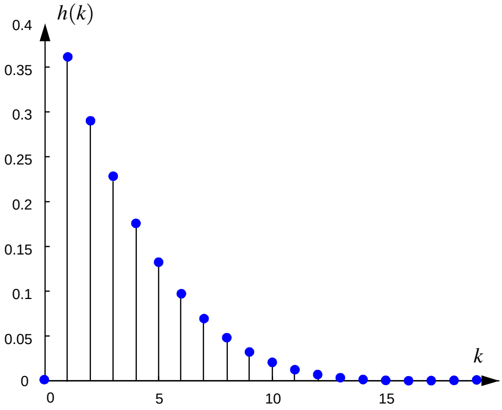


Figura : Resposta impulsional estimada.

Matriz de Hankel

$$\hat{h}(0) = 0$$

$$
\begin{aligned}
H_{10,10} &= \begin{bmatrix} \hat{h}(1) & \hat{h}(2) & \cdots & \hat{h}(10) \\ \hat{h}(2) & \hat{h}(3) & \cdots & \hat{h}(11) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{h}(10) & \hat{h}(11) & \vdots & \hat{h}(19) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}
0.3614 & 0.2902 & 0.2282 & 0.1757 & 0.1323 & 0.0971 & 0.0694 & 0.0481 & 0.0321 & 0.0205 \\
0.2902 & 0.2282 & 0.1757 & 0.1323 & 0.0971 & 0.0694 & 0.0481 & 0.0321 & 0.0205 & 0.0124 \\
0.2282 & 0.1757 & 0.1323 & 0.0971 & 0.0694 & 0.0481 & 0.0321 & 0.0205 & 0.0124 & 0.0069 \\
0.1757 & 0.1323 & 0.0971 & 0.0694 & 0.0481 & 0.0321 & 0.0205 & 0.0124 & 0.0069 & 0.0034 \\
0.1323 & 0.0971 & 0.0694 & 0.0481 & 0.0321 & 0.0205 & 0.0124 & 0.0069 & 0.0034 & 0.0014 \\
0.0971 & 0.0694 & 0.0481 & 0.0321 & 0.0205 & 0.0124 & 0.0069 & 0.0034 & 0.0014 & 0.0004 \\
0.0694 & 0.0481 & 0.0321 & 0.0205 & 0.0124 & 0.0069 & 0.0034 & 0.0014 & 0.0004 & 0.0001 \\
0.0481 & 0.0321 & 0.0205 & 0.0124 & 0.0069 & 0.0034 & 0.0014 & 0.0004 & 0.0001 & 0.0001 \\
0.0321 & 0.0205 & 0.0124 & 0.0069 & 0.0034 & 0.0014 & 0.0004 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0005 \\
0.0205 & 0.0124 & 0.0069 & 0.0034 & 0.0014 & 0.0004 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0005 & 0.0009
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Decomposição em valores singulares $H = USV^T$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0.8875, \quad \sigma_2 = 0.0516, \quad \sigma_3 = 0.0048, \\ \sigma_4 &= 0.0001, \quad \sigma_5 = 0.0001, \quad \sigma_6 = 0.0001, \quad \sigma_{7\ldots10} = 0.0000 \end{aligned}$$

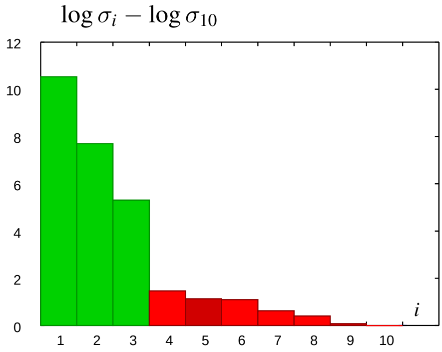


Figura : Valores singulares de H

Matriz Alargada da Observabilidade

Matriz Alargada da Observabilidade:

$$\Gamma_{10} = U_3 S_3^{1/2} = \begin{bmatrix} -0.6121 & 0.1174 & 0.0225 \\ -0.4780 & 0.0190 & -0.0089 \\ -0.3655 & -0.0420 & -0.0203 \\ -0.2733 & -0.0750 & -0.0189 \\ -0.1995 & -0.0883 & -0.0106 \\ -0.1418 & -0.0880 & 0.0007 \\ -0.0977 & -0.0793 & 0.0127 \\ -0.0650 & -0.0660 & 0.0232 \\ -0.0415 & -0.0511 & 0.0324 \\ -0.0252 & -0.0360 & 0.0396 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \\ CA^5 \\ CA^6 \\ CA^7 \\ CA^8 \\ CA^9 \end{bmatrix}$$

$C =$ Primeira linha de $\Gamma_{10} = \begin{bmatrix} -0.6121 & 0.1174 & 0.0225 \end{bmatrix}$

Estimação de A a partir de Γ_i I

Estimação de A:

$$\overline{\Gamma}_{10} = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \\ CA^5 \\ CA^6 \\ CA^7 \\ CA^8 \\ CA^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \\ CA^5 \\ CA^6 \\ CA^7 \\ CA^8 \end{bmatrix} A = \underline{\Gamma}_{10} A = \Gamma_9 A$$

Estimação de A a partir de Γ_i II

Seja $Y = \overline{\Gamma}_{10}$ and $X = \Gamma_9$

$$\begin{aligned} Y &= XA \equiv \textbf{PROBLEMA DE MÍNIMOS QUADRADOS} \\ A &= (X^T X)^{-1} X^T Y, \quad X^T X \text{ é uma matriz não singular} \end{aligned}$$

Não singularidade de $X^T X$:

$X^T X$ é não singular se e só se $\operatorname{rank}(X) = n$ (aqui $n = 3$)

$$X = \Gamma_9 = \Gamma_{i-1} \Rightarrow \operatorname{rank}(X) = \begin{cases} n, & i-1 \geq n \\ i-1, & i-1 < n \end{cases} \Rightarrow i \geq n+1$$

(aqui $i = 10 > 4 = n + 1$)

Estimação de A a partir de Γ_i III

$(X^T X)X^T = X^\dagger$ - Pseudoinversa de Moore Penrose (pseudoinversa generalizada)

$$A = \begin{bmatrix} 0.7598 & 0.1133 & 0.0179 \\ -0.1133 & 0.7204 & -0.1666 \\ 0.0181 & 0.1683 & 0.9680 \end{bmatrix}$$

Matriz da Acessibilidade

Matriz Alargada da Acessibilidade:

$$\mathcal{C}_{10} = S_3^{1/2} V_3^T =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.6121 & -0.4780 & -0.3655 & -0.2733 & -0.1995 & -0.1418 & -0.0977 & -0.0650 & -0.0415 & -0.0252 \\ -0.1174 & -0.0190 & 0.0420 & 0.0750 & 0.0883 & 0.0880 & 0.0793 & 0.0660 & 0.0511 & 0.0360 \\ 0.0225 & -0.0089 & -0.0203 & -0.0189 & -0.0106 & 0.0007 & 0.0127 & 0.0232 & 0.0324 & 0.0396 \end{bmatrix}$$

$$B = \text{Primeira coluna de } \mathcal{C}_{10} = \begin{bmatrix} -0.6121 \\ -0.1174 \\ 0.0225 \end{bmatrix}$$

Estimação de A a partir de $\mathcal{C}_i$

Estimação de A a partir da Matriz Alargada da Acessibilidade:

$$A = {}_{|}\mathcal{C}_{10}\mathcal{C}_9^{\dagger} = \begin{bmatrix} 0.7598 & 0.1133 & 0.0181 \\ -0.1133 & 0.7204 & -0.1683 \\ 0.0179 & 0.1666 & 0.9680 \end{bmatrix}$$

Validação do Modelo

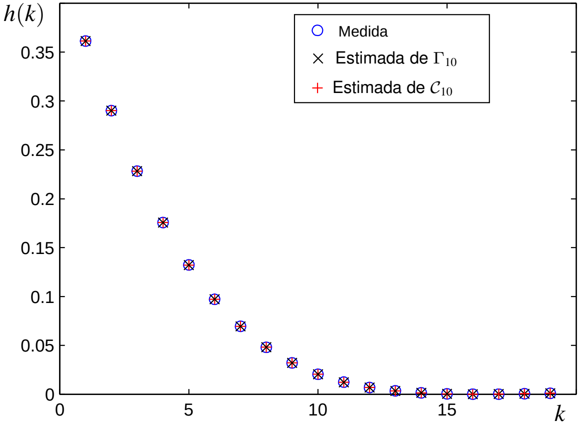


Figura : Resposta impulsional medida vs estimadas

Conclusões I

- Os sistemas dinâmicos são usualmente perturbados.
- Podem ser descritos por modelos de ES ou ME.
- Os modelos podem ser em tempo contínuo ou em tempo discreto.
- Cada modelo tem um vetor de parâmetros.
- A identificação de sistemas consiste em estimar estes parâmetros a partir de dados de entrada-saída.
- Os modelos de estado de sistemas discretos lineares e invariantes no tempo consistem numa equação vetorial às diferenças de primeira ordem e numa esquação estática.

Conclusões II

- Modelos de entrada saída de sistemas lineares e invariantes no tempo (modelos de função de transferência) podem ser calculados a partir de modelos de estado.
- Um sistema tem uma infinidade de modelos de estado.
- As amostras da resposta impulsional são designadas por parâmetros de Markov.
- Os parâmetros de Markov são invariantes do sistema e podem ser calculadas a partir de qualquer modelo de estado.
- Um sistema é acessível se e só se as caraterísticas da suas matrizes de Acessibilidade e Alargada de Acessibilidade for igual a n, sendo n dimensão do vetor das variáveis de estado.

Conclusões III

- Um sistema é observável se e só se a caraterística das suas matrizes da Observabilidade Alargada e da Observabilidade for igual a n.
- Uma realização mínima é um modelo de estado simultaneamente acessível e observável.
- O produto das matrizes Alargadas da Observabilidade e da Acessibilidade de uma realização mínima é uma matriz de Hankel da resposta impulsional.
- O algoritmo de Ho-Kalman estima as matrizes Alargadas da Observabilidade e da Acessibilidade a partir destas matrizes de Hankel.

Conclusões IV

- Os parâmetros de um modelo de estado podem ser estimados a partir destas matrizes.
- A resposta impulsional dum sistema estável pode ser estimada com um estimador de mínimos quadrados.
- Se a entrada do sistema for uma sequência de ruído branco com média nula a resposta impulsional pode ser estimada pelo método da correlação.

Obrigado

☺ ☻

Muito obrigado!