FGV

Álgebra Linear e Aplicações

Lista 2

Sérgio Rodrigues

15 de Julho de 2013

Exercício 1

Quais dos seguintes conjuntos são subespaços vetoriais? Em caso afirmativo exiba uma base deste subespaço.

(a) Vetores do plano $2x + y - z = 0$

Sejam os vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$.

Soma de dois vetores

Hipóteses:

$$u \cdot (2, 1, -1)^T = 2x_1 + y_1 - z_1 = 0$$
$$v \cdot (2, 1, -1)^T = 2x_2 + y_2 - z_2 = 0$$

.

Tese:

$$(u + v) \cdot (2, 1, -1)^T = 0$$

Temos que:

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1, y_1, z_1)^T + (x_2, y_2, z_2)^T \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)^T \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} (u + v) \cdot (2, 1, -1)^T &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)^T \cdot (2, 1, -1)^T \\ &= 2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) \\ &= (2x_1 + y_1 - z_1) + (2x_2 + y_2 - z_2) \\ &= 0 + 0 && \text{Por hipótese.} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Produto por escalar

Hipótese:

$$
\begin{aligned}
u &= (x, y, z)^T \\
u \cdot (2, 1, -1)^T &= 0 \\
2x + y - z &= 0
\end{aligned}
$$

Tese:

$$a \cdot u = 0, a \in \mathbb{R}$$

Temos que:

$$
\begin{aligned}
a \cdot u &= a \cdot (x, y, z)^T \\
&= (ax, ay, az)^T \\
&= 2(ax) + (ay) - (az) \\
&= a(2x + y - z) \\
&= a(0) && \text{Por hipótese.} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Portanto, o conjunto de vetores do plano $2x + y - z = 0$ é um espaço vetorial.

Base do Plano Plano:

$$2x + y - z = 0$$

Temos uma equação com duas variáveis livres. Fazendo

$$z = 2x + y$$

, temos que

$\blacksquare$

(b) Combinações lineares de $u = (1, 0, -1)$, $v = (-1, 1, 1)$ e $w = (-1, 3, 1)$, ou seja, $Span(u, v, w) = \{z \in \mathbb{R}^3 | z = a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w\}$.

Soma duas combinações. Sejam $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, i = \{1, 2\}$.

$$
\begin{aligned}
a_1u + b_1v + c_1w + a_2u + b_2v + c_2w &= (a_1 + a_2)u + (b_1 + b_2)v + (c_1 + c_2)w \\
&= z' \\
z' &\in \mathbb{R}^3
\end{aligned}
$$

Multiplicação de uma combina ção linear $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a, b, c) \in Span(u, v, w)$ por escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, é uma combinação linear pois $\lambda(a, b, c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c) \in \mathbb{R}$.

Portanto $Span(u, v, w)$ é um subespaço vetorial.

(c) Vetores de $\mathbb{R}^n$ cuja primeira coordenada é igual a 1.

Seja $S = \{\forall u \in \mathbb{R}^n, u = (1, ...)\}$.

S não é um espaço vetorial pois a soma de dois vetores $v, w \in S$ resulta em $v + w = (2, ...) \notin S$.

(d) Conjunto E de vetores de $\mathbb{R}^n$ cujas coordenadas formam uma progressão aritmética.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $p, q \in \mathbb{R}$ os termos iniciais e razão de duas P.A, respectivamente.

Sejam $u = (a, a + p, a + 2p, ..., a + (n - 1)p)$ e $v = (b, b + q, a + 2q, ..., a + (n - 1)q)$ dois vetores cujas coordenadas formem uma P.A.

Temos que:

$$\begin{aligned} u + v &= (a, a + p, a + 2p, ..., a + (n - 1)p) + (b, b + q, a + 2q, ..., a + (n - 1)q) \\ &= (a + b, (a + b) + (p + q), (a + b) + 2(p + q), ..., (a + b) + (n - 1)(p + q)) \end{aligned}$$

Que é uma P.A com termo inicial $(a + b)$ e razão $(p + q)$.

Temos ainda que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda u = (\lambda a, \lambda a + \lambda p, \lambda a + 2\lambda p, ..., a + (n - 1)\lambda p)$, que também é uma P.A., com termo inicial λa e razão λp.

Portanto, E é um subespaço vetorial. $\blacksquare$

(e) Conjunto E de vetores de $\mathbb{R}^n$ cujas coordenadas formam uma progressão geométrica.

Por raciocínio análogo ao exercício anterior, vemos que $u+v = (a+b, ap+bq, ap^2 + bq^2, ..., ap^{n-1} + bq^{n-1})$, não é uma P.G, portanto E não é um espaço vetorial. $\blacksquare$

(f) Conjunto E de matrizes $m \times n$ anti-simétricas (A é anti-simétrica se $A^T = -A$)

Sejam P e Q duas matrizes anti-simétricas de E. Entao:

$$\begin{aligned} P^T &= -P \\ Q^T &= -Q \\ P^T + Q^T &= -P - Q \\ (P+Q)^T &= -(P+Q) \qquad\qquad \text{É verdadeiro.} \end{aligned}$$

E:

$$\begin{aligned} P^T &= -P \\ \lambda P^T &= \lambda(-P) \\ (\lambda P)^T &= -(\lambda P) \qquad\qquad \text{É verdadeiro.} \end{aligned}$$

Portanto, E é um espaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. ■

(g) Conjunto E dos polinômios de grau até 3 que têm pelo menos duas raízes $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$.

Seja $P(x) = ax(x-1)(x-2), Q(x) = bx(x-1)(x-2)$,$P(x), Q(x) \in E$, onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Temos que $P(x) + Q(x) \in E$ pois:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= ax(x-1)(x-2) + bx(x-1)(x-2) \\ &= (a+b)x(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

E $\lambda P(x), \lambda \in \mathbb{R} \in e$, dado que:

$$\begin{aligned} \lambda P(x) &= \lambda a x(x-1)(x-2) \\ &= (\lambda a) x(x-1)(x-2) \\ &= \beta c x(x-1)(x-2) \qquad \text{, sendo que } c = \lambda a, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Portanto E é um espaço vetorial.

Exercício 2

Strang - 2.1.8

8. Which of the following descriptions are correct? The solutions x of

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

form

(a) a plane.

(b) a line.

(c) a point.

(d) a subspace.

(e) the nullspace of A.

(f) the column space of A.

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Seja $x_3 = t$. Então $x_2 = t$ e $x_1 = -2t$. Assim, $N(A) = \{x = t \cdot (-2, 1, 1)^T, \forall t \in \mathbb{R}\}$, que é uma reta, pois há apenas uma variável livre, x_3. São corretas as letras (b) e (e).

Strang - 2.1.13

12. The functions $f(x) = x^2$ and $g(x) = 5x$ are "vectors" in the vector space $\mathbf{F}$ of all real functions. The combination $3f(x) - 4g(x)$ is the function $h(x) =$ ____. Which rule is broken if multiplying $f(x)$ by c gives the function $f(cx)$?

$$\begin{aligned} h(x) &= 3f(x) - 4g(x) \\ &= 3(x^2) - 4(5x) \\ &= 3x^2 - 20x \end{aligned}$$

Strang - 2.1.19

20. True or false for $\mathbf{M}$ = all 3 by 3 matrices (check addition using an example)?

(a) The skew-symmetric matrices in $\mathbf{M}$ (with $A^T = -A$) form a subspace.

(b) The unsymmetric matrices in $\mathbf{M}$ (with $A^T \neq A$) form a subspace.

(c) The matrices that have $(1, 1, 1)$ in their nullspace form a subspace.

(a) Verdadeiro:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + A = 2(A) = 2\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Verdadeiro:

$$A + B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d+d' & e+e' & f+f' \\ g+g' & h+h' & i+i' \end{bmatrix}$$

(c) Verdadeiro, pois:

$$Ax = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ d+e+f=0 \\ g+h+i=0 \end{cases}$$

$$Bx = \begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a'+b'+c'=0 \\ d'+e'+f'=0 \\ g'+h'+i'=0 \end{cases}$$

$$(A+B)x = \begin{bmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d+d' & e+e' & f+f' \\ g+g' & h+h' & i+i' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+a'+b+b'+c+c'=0 \\ d+d'+e+e'+f+f'=0 \\ g+g'+h+h'+i+i'=0 \end{cases}$$

$\blacksquare$

Strang - 2.1.22

25. (Recommended) If we add an extra column b to a matrix A, then the column space gets larger unless ____. Give an example in which the column space gets larger and an example in which it doesn't. Why is $Ax = b$ solvable exactly when the column space *doesn't* get larger by including b?

O espaço coluna aumenta a menos que *a nova coluna adicionada não seja uma combinação linear das outras.*

Exemplo de espaço coluna que aumenta:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow N(A) = (0,0)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow N(A) = c(1,1,-1), c \in \mathbb{R}$$

Exemplo de espaço coluna que não aumenta

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow N(A) = (0,0,0)$$

$\blacksquare$

Strang - 2.1.25

26. The columns of AB are combinations of the columns of A. This means: *The column space of AB is contained in* (possibly equal to) *the column space of A.* Give an example where the column spaces of A and AB are not equal.

Seja a matriz A com elementos $a_{ij} \neq 0$. Seja a matriz B com elementos $b_{ij} = 0$. Então temos que $A \neq 0$ mas $AB = 0$.

Por hipótese, o espaço coluna de A tem pelo menos um vetor não nulo, enquanto que o espaço coluna de AB tem apenas o vetor nulo como elemento.

$\blacksquare$

Strang - 2.1.31

30. If the 9 by 12 system $Ax = b$ is solvable for every b, then $C(A) =$ ____.

O espaço coluna é o conjunto com todas as combinações lineares das colunas de A. $C(A) = Span(a_1, ..., a_{12}) = \{z \in \mathbb{R}^{12} | z = r_1 \cdot a_1 + ... + r_{12} \cdot a_{12}, onder_1, ..., r_{12} \in \mathbb{R}\}$. ■

Exercício 3

Strang - 2.2.20

23. Multiplying the rank 1 matrices $A = uv^{\mathrm{T}}$ and $B = wz^{\mathrm{T}}$ gives uz^{T} times the number ____. AB has rank 1 unless ____ $= 0$.

Temos que $AB = (uv^T)(wz^T) = u(v^T w)z^T = uz^T$, logo $v^T w = 1$. O coeficiente que sobra é o número 1, a menos que $v^T w = 0$. ■

Strang - 2.2.21

25. (Important) Suppose A and B are n by n matrices, and $AB = I$. Prove from $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$ that the rank of A is n. So A is invertible and B must be its two-sided inverse. Therefore $BA = I$ (*which is not so obvious!*).

Dado que $AB = I$, I tem dimensões $n \times n$ e $rank(I) = n$ por definição. Logo $n \leq rank(A)$, mas como A tem n linhas, $rank(A) = n$. ■

Strang - 2.2.54

53. True or False? (Give reason if true, or counterexample to show it is false.)
    (a) A square matrix has no free variables.
    (b) An invertible matrix has no free variables.
    (c) An m by n matrix has no more than n pivot variables.
    (d) An m by n matrix has no more than m pivot variables.

(a) FALSO. Nada pode ser dito sobre matrizes quadradas sem conhecer seu *rank*.

(b) VERDADEIRO.

(c) VERDADEIRO. O número de p de *pivots* é $p \leq \min\{m, n\}$.

(d) VERDADEIRO. ■

Exercício 4

Um subconjunto V de um espaço vetorial E é chamado de variedade afim quando a reta que une dois pontos quaisquer de V está contida em V. Ou seja, $x, y \in V$, $t \in R \Rightarrow (1-t)x + ty \in V$.

(a) Mostre que o conjunto das soluções de um sistema linear $Ax = b$ é uma variedade afim.

Quando um sistema $Ax = b$ tem mais que uma solução, ele tem infinitas soluções S, e estas soluções sempre estão no mínimo em uma reta. Sejam b_1 e b_2 soluções do sistema $Ax = b$. Temos que $(1-t)b_1 + tb_2$ nada mais é do que combinações lineares do sistema $Bx = c$, onde $B = (b_1, b_2)$, $x = (1-t, t)^T$, e $c \subset S$. ■

(b) A translação de um conjunto $C \subset E$ pelo vetor $u \in E$ é o conjunto $C + u = \{v + u, v \in C\}$. Mostre que a translação de uma variedade afim V por $-u$, com $u \in V$, é um subespaço de E.

Sejam $v_1, v_2 \in V$. $v_1 + v_2$ é um subespaço de E, pois:

$$\begin{aligned}
v_1 &= (1-t)(x_1 - u) + t(y_1 - u) \\
v_2 &= (1-t)(x_2 - u) + t(y_2 - u) \\
v_1 + v_2 &= (1-t)(x_1 + x_2 - 2u) + t(y_1 + y_2 - 2u) \\
&= (1-t)(x' - u') + t(y' - u') \qquad \text{Sendo } x' = x_1 + x_2, y' = y_1 + y_2, u' = 2u.v_1 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_1 &= (1-t)(x - u) + t(y - u) \\
av_1 &= a((1-t)(x - u) + t(y - u)) \\
&= (1-t)(ax - au) + t(ay - au) \\
&= (1-t)(x' - u') + t(y' - u') \qquad \text{Sendo } x' = ax, u' = au.av_1 \in E
\end{aligned}$$

■

(c) Mostre que o conjunto das soluções de $Ax = b$ é $N(A) + x_p$, onde $N(A) = x|Ax = 0$ e x_p é um vetor qualquer que satisfaz $Ax = b$.

Seja $x_n \in N(A)$. Fazendo $x = x_p + x_n$ temos:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A(x_p + x_n) &= b \\ Ax_p + Ax_n &= b \\ Ax_p + 0 &= b \\ Ax_p &= b \end{aligned}$$

■

Exercício 5

Exiba matrizes 2 x 2 com os seguintes núcleos (espaço nulo) e imagens (espaço coluna):

(a) Núcleo: reta $y = x$. Imagem: reta $x = 2x$.

Núcleo:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = -d \end{cases}$$

Imagem:

$$\begin{bmatrix} a & -a \\ c & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a(r-s) = x \\ c(r-s) = 2x \end{cases}$$

Tomando $x = 1$ temos:

$$\begin{cases} a(r-s) = 1 \\ c(r-s) = 2 \end{cases} \Longrightarrow c = 2a$$

Então, com $a \in \mathbb{R}$, a matriz tem que ser do tipo:

$$a \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

■

(b) Núcleo: reta $y = 3x$. Imagem: tambem a reta $y = 3x$.

Núcleo:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a = -3b \\ c = -3d \end{cases}$$

Imagem:

$$\begin{bmatrix} -3b & b \\ -3d & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} b(s-3r) = x \\ d(s-3r) = 3x \end{cases}$$

Tomando $x = 1$ temos:

$$\begin{cases} b(s-3r) = 1 \\ d(s-3r) = 3 \end{cases} \Longrightarrow d = 3b$$

Então, com $d \in \mathbb{R}$, a matriz tem que ser do tipo:

$$d \begin{bmatrix} -1 & 1/3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

■

Exercício 6

(a) Núcleo da Matriz:

```
1.677973766311703250e-03 0.000000000000000000e+00 1.767687314092614426e-01
1.677973766311696528e-03 -1.185948074507639256e-18 1.767687314092612483e-01
1.677973766311699130e-03 -3.835909500356555330e-19 1.767687314092610262e-01
1.677973766311703467e-03 4.264395780617179721e-20 1.767687314092615813e-01
1.677973766311702600e-03 -7.293598786767946745e-19 1.767687314092614703e-01
1.677973766311702817e-03 2.679145955160461614e-19 1.767687314092612205e-01
1.677973766311703901e-03 1.173909754143035100e-18 1.767687314092614148e-01
1.677973766311702166e-03 -2.021834161122884556e-18 1.767687314092613871e-01
1.677973766311703467e-03 6.199168640278767809e-19 1.767687314092613038e-01
1.677973766311702817e-03 -5.303932202613053200e-19 1.767687314092613871e-01
1.677973766311707370e-03 -8.177921909143439314e-19 1.767687314092612760e-01
1.677973766311708454e-03 -7.464111982340481136e-19 1.767687314092613593e-01
1.677973766311704768e-03 -1.039800982745847407e-18 1.767687314092613871e-01
1.677973766311708671e-03 3.630647036886643598e-19 1.767687314092612483e-01
1.677973766311693926e-03 2.910005254777803055e-19 1.767687314092613593e-01
1.677973766311693926e-03 4.595230905991877430e-19 1.767687314092612760e-01
1.677973766311703467e-03 -5.188426058282119970e-19 1.767687314092612760e-01
1.677973766311703467e-03 9.999056842861902897e-19 1.767687314092612483e-01
1.677973766311699130e-03 2.354240793520684518e-19 1.767687314092612205e-01
1.677973766311719296e-03 -1.965263901625895552e-18 1.767687314092613315e-01
1.677973766311693926e-03 9.516902033975609769e-19 1.767687314092614426e-01
1.677973766311707153e-03 -4.190977997854313779e-19 1.767687314092612205e-01
1.677973766311702600e-03 7.835827389509647143e-19 1.767687314092613315e-01
1.677973766311699130e-03 2.865852979935930437e-18 1.767687314092612205e-01
```

1.677973766311711707e-03 -1.123085420317919328e-18 1.767687314092611928e-01

1.677973766311692842e-03 8.794649268311478463e-19 1.767687314092614148e-01

1.677973766311693276e-03 1.448633621250857267e-19 1.767687314092612760e-01

1.677973766311709755e-03 1.922850547022164194e-18 1.767687314092613038e-01

1.677973766311701732e-03 -5.175202218553887404e-19 1.767687314092613871e-01

1.677973766311699347e-03 -3.088881115272989855e-20 1.767687314092613315e-01

1.677973766311694793e-03 1.265371899990684267e-18 1.767687314092612483e-01

1.677973766311708671e-03 -1.823137572284251637e-18 1.767687314092612483e-01

-2.480276259556235541e-01 3.125305705824453495e-02 2.354397445499253633e-03

-2.480276259556236929e-01 3.125305705824428515e-02 2.354397445499255368e-03

-2.480276259556233320e-01 3.125305705824431984e-02 2.354397445499253633e-03

-2.480276259556236096e-01 3.125305705824443087e-02 2.354397445499277486e-03

-2.480276259556240259e-01 3.125305705824432678e-02 2.354397445499251899e-03

-2.480276259556235818e-01 3.125305705824442393e-02 2.354397445499238021e-03

-2.480276259556231933e-01 3.125305705824439617e-02 2.354397445499304374e-03

-2.480276259556237206e-01 3.125305705824446556e-02 2.354397445499232383e-03

-2.480276259556233598e-01 3.125305705824452801e-02 2.354397445499241490e-03

-2.480276259556237206e-01 3.125305705824442393e-02 2.354397445499218505e-03

-2.480276259556234708e-01 3.125305705824461128e-02 2.354397445499238455e-03

-2.480276259556237761e-01 3.125305705824446556e-02 2.354397445499250164e-03

-2.480276259556238039e-01 3.125305705824461822e-02 2.354397445499259705e-03

-2.480276259556238316e-01 3.125305705824447250e-02 2.354397445499255802e-03

-2.480276259556236929e-01 3.125305705824447944e-02 2.354397445499233250e-03

-2.480276259556237206e-01 3.125305705824456270e-02 2.354397445499244526e-03

6.250329818166079632e-02 4.960776004800627748e-01 -5.933113499239896444e-04

6.250329818166067142e-02 4.960776004800619976e-01 -5.933113499240947036e-04

6.250329818166058815e-02 4.960776004800624417e-01 -5.933113499240416861e-04

```
6.250329818166069917e-02 4.960776004800624972e-01 -5.933113499239356511e-04
```

(b)Compoentes conexos (Numpy,Scipy):

```
[[0,  1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10,  11,  12,  13,  14,  15,  16,  17,
18,  19,  20,  21,  22,  23,  24,  25,  26,  27,  28,  29,  30,  31],
[32, 33,
34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47],
[48, 49, 50, 51]]
```

■