FGV

Álgebra Linear e Aplicações

Lista 1

Sérgio Rodrigues

27 de Junho de 2013

Exercício 1

É verdade que existe um polinômio de grau 3 que passa pelos pontos $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (1,0)$, $P_3 = (2,-1)$, $P_4 = (3,2)$? Como encontrá-lo? Mostre que este problema é equivalente a resolver um sistema linear. Use um pacote computacional para resolver o sistema e para desenhar um gráfico com os pontos P_i e este polinômio interpolador.

Interpolação Polinomial

Sejam n+1 pontos dados por (x_i, f_i), $0 \leq i \leq n$. Então existe um único polinômio de grau n que passa por estes pontos:

$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, sendo $a_i \in \mathbb{R}$.

Dado $P_n(x_i) = f_i$, é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + ... + a_n x_0^n = f_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ... + a_n x_1^n = f_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + ... + a_n x_n^n = f_n \end{cases}$$

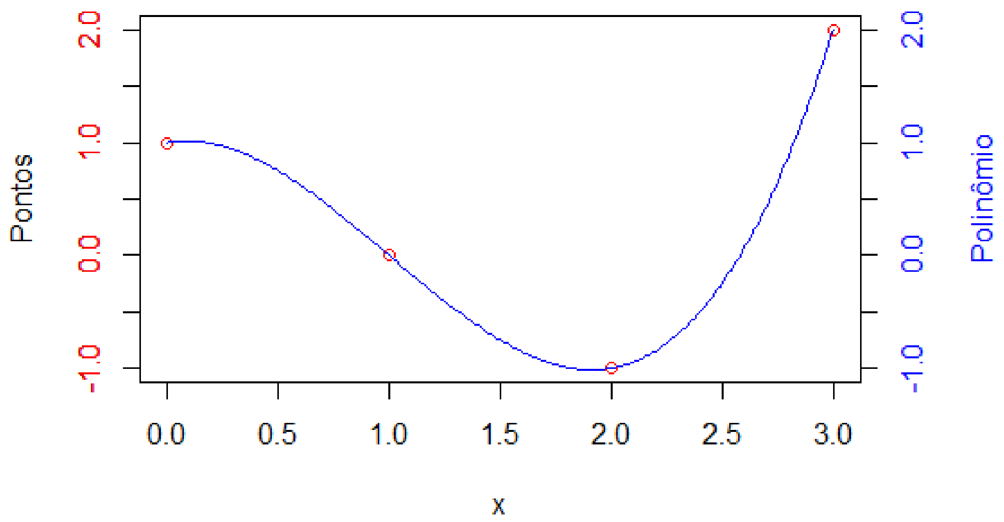
Que pode ser representado como:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Então, conforme o enunciado, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0^2 & 0^3 \\ 1 & 1 & 1^2 & 1^3 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Utilizando o software R, temos que a solução é $a_0 = 1$, $a_1 = 1/3$, $a_2 = -2$ e $a_3 = 2/3$, dando o polinômio $P = 1 + x/3 - 2x^2 + 2x^3/3$:



Script em R:

```
# Exercicio 1.
# Criar matriz com repetição: http://www.ats.ucla.edu/stat/r/library/matrix_alg.h
# Opções de plot http://www.statmethods.net/advgraphs/axes.html

# Construir matrizes A e b.
l = c(0,1,2,3)
A = c()
```

```
for( i in 1:length(l)){
  A = cbind(A,l^(i-1))
}
b = c(1,0,-1,2)

# Solução do sistema linear Ax=b
a = solve(A,b)




X = cbind(A[,2],b) # Pontos originais.

x=seq(0,3,0.01)

Pn = a[1]+a[2]*x+a[3]*x^2+a[4]*x^3
# create extra margin room on the right for an axis
par(mar=c(5, 4, 4, 5) + 0.1)
plot(X,type='p',col='red',ylab='')
lines(x,Pn,type='l',col='blue')

# Eixo esquerdo.
axis(2,col.axis='red')

# Eixo direito.
axis(4,col.axis='blue',las=0)

# add a title for the right axis
```

```
mtext("Polinômio", side=4, line=3, cex.lab=1, las=0, col="blue")

title( ylab='Pontos', xlab='x')
```

■

Exercício 2

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Use eliminação gaussiana para verificar se o sistema $A \cdot x = b$, onde $b = [1, 2, 3, 1]^T$, tem solução.

Eliminação gaussiana:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[1]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

[1]: $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$; $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$; $L_4 \leftarrow (L_4 - 3L_1)/2$

Temos que na matriz G as entradas $G_{3,4}$ e $G_{4,4}$ são diferentes para coeficientes $G_{3,m}$ e $G_{4,n}$ iguais, m e $n \in \{1, 2, 3\}$. O que mostra que o sistema não tem solução. ∎

Exercício 3

Strang, conjunto 1.3 - 15 - Inlgês

If rows 1 and 2 are the same, how far can you get with elimination (allowing row exchange)?

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{[1]} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$[1] : L_2 \leftrightarrow L_3; L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1; L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

Temos que a variável z é livre. Façamos $z = t$, então:

$$\begin{aligned} 0x + 0y + z &= t \\ 0x + 3y - t = 2 &\Rightarrow y = \frac{2+t}{3} \\ 2x - y + t = 0 &\Rightarrow x = \frac{1-t}{3} \end{aligned}$$

O sistema tem infinitas soluções do tipo $(\frac{1-t}{3}, \frac{2+t}{3}, t)$.

If columns 1 and 2 are the same, which pivot is missing?

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{[1]} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$[1] : L_3 \leftrightarrow L_2; L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1; L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$.

Se as colunas 1 e 2 são iguais, mesmo com a troca de linhas, indicada acima o pivot ausente é o da variável y, respectivo à coluna que repetiu. Entretanto, este exemplo apresenta uma contradição nas linhas 2 e 3, que o torna sem solução. ■

Strang, conjunto 1.3 - 15 - Português

É impossivel um sistema de equações lineares ter exatamente duas soluções. Explique porquê.

A solução de um sistema linear é um ponto no espaço n-dimensional comum a todos os hiper planos definidos pelas n equações. Assim, existe o vetor $= (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ que satisfaz $A \cdot x = b$. Se admitirmos que exista outro vetor y tal que $A \cdot y = b$, então temos que $A \cdot x = A \cdot y$, o que leva à conclusao de que $x = y$. $\blacksquare$

(a) Se (x, y, z) e (X, Y, Z) são duas soluções, qual seria outra?

Qualquer ponto na reta onde passa os pontos do enunciado. $\blacksquare$

(b) Se 25 planos se encontram em 2 pontos, onde mais eles se encontram?

Strang, conjunto 1.3 - 22 - Inglês

Apply elimination and back-substitution to solve

$$2u + 3v + 0w = 0$$

$$4u + 5v + w = 3$$

$$2u - v - 3w = 5$$

What are the pivots? List the three operations in which a multiple of one row is subtracted from another.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{[1]} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{[2]} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[3]}$$

$$\xrightarrow{[3]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [u, v, w]^T = [3, -2, 1]^T$$

$[1]: L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1; L_3 \leftarrow L_3 - L_1; L_2 \leftarrow -L_2; L_3 \leftarrow -L_3$

$[2]: L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2; L_3 \leftarrow L_3/7$

$[3]: L_2 \leftarrow L_2 + L_3; L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2; L_1 \leftarrow L_1/2.$ ■

Strang, conjunto 1.3 - 22 - Português

Encontre os pivôts e soluções:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{[1]} \begin{bmatrix} \underline{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{3} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{4} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{5} & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow{[2]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

■

Exercicio 4

Strang, conjunto 1.4 - exercício 8

Do these subroutines multiply Ax *b y rows or columns*? Start with $B(I) = 0$:

DO 10 I = 1, N

DO 10 J = 1, N

10 B(I) = B(I) + A(I,J) * X(J)

DO 10 J = 1, N

DO 10 I = 1, N

10 B(I) = B(I) + A(I,J) * X(J)

The outputs $Bx = Ax$ are the same. The second code is slightly more efficient in FORTRAN and much more efficient on a vector machine (the first changes single entries B(I), the second can update whole vectors).

Strang, conjunto 1.4 - exercício 9 - Inglês

If the entries of A are a_{ij}, use subscript notation to write

(a) the first pivot.

$a_{1,1}$ ■

(b) the multiplier l_{i1} of row 1 to be subtracted from row i.

$a_{i,1} - l_{i,1}a_{1,1} = 0 \Rightarrow l_{i,1} = \dfrac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$ ■

(c) the new entry that replaces a_{ij} after that subtraction.

$a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - \dfrac{a_{i,1}}{a_{1,1}}a_{1,j}$ ■

(d) the second pivot.

$a_{2,2}$ ■

Strang, conjunto 1.4 - exercício 9 - Português

O produto de duas matrizes triangulares inferiores é também triangular inferior. Confirme com um exemplo 3x3 e explique com a lei das multiplicações de matrizes.

Explicação:

Seja $C_{m\times n} = A_{m\times p} \cdot B_{p\times n}$.

Para $\forall i,j$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$: $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p}(a_{i,k} \cdot b_{k,j})$

Mas A, B são triangulares inferiores, então $\forall j > i, a_{i,j} = 0$ e $b_{i,j} = 0$.

Portanto $c_{i,j} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{p}(a_{i,k} \cdot b_{k,j}) & \text{, se } j \leq i \\ 0, & \text{, se j>i} \end{cases}$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 26 & 20 & 0 \\ 11 & 19 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 22 & 0 & 0 \\ 15 & 24 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 286 & 0 & 0 \\ 872 & 480 & 0 \\ 532 & 463 & 1 \end{bmatrix}$$

■

Exercício 5

(Trefethen) Considere a matriz B de dimensões 4x4. Sobre ela são aplicadas as seguintes operações:

(a) Multiplicar a coluna 1 por 2

(b) Dividir a linha 1 por 3

(c) Adicionar a linha 3 à linha 1

(d) Trocar a coluna 1 com a coluna 4 de lugar

(e) Subtrair a linha 2 das demais linhas

(f) Substituir a coluna 4 pela coluna 3

(g) eliminar a coluna 1 (portanto o número de colunas é reduzido para 3)

i.Escreva o resultado como produto de 8 matrizes

$$e \cdot c \cdot b \cdot B \cdot a \cdot d \cdot f \cdot g$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

■

ii. Escreva o resultado novamente como um produto A · B · C (mesmo B do enunciado) de três matrizes.

$$\begin{bmatrix} 0.33 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

■

Exercício 6

Monte um programa que tem como entrada uma matriz $L_{n,n}$triangular inferior e um vetor $b_{n,1}$ e devolve um vetor $x_{n,1}$ que é a solução de $L \cdot x = b$. O algoritmo implementado deve ter complexidade $O(n^2)$.

Script em R:

```
# Retorna a matriz triangular inferior de uma matriz como parâmetro.
lowtri <- function(matr) {
  lt <- matrix(0, nrow=nrow(matr), ncol=ncol(matr))
  for (i in 1:nrow(matr)) {
    for (j in 1:i) {
      lt[i,j] <- matr[i,j]
    }
  }
  return(lt)
}

# INÍCIO DO PROGRAMA.
# Determina tamanho da matriz n*n.
n = 10

# Define matriz triangular inferior com valores aleatórios.
L = lowtri(matrix(sample(1:n^2),c(n,n)))

# Define vetor aleatório.
b = sample(1:n,n)
```

```
# Concatena matrizes para eliminação gaussiana.
matriz = cbind(L,b)

# Resolve com eliminação gaussiana.
n = nrow(matriz)
for(j in 1:(n-1)){
  matriz[j,] = matriz[j,]/matriz[j,j]
  for(i in (j+1):n){
    matriz[i,] = matriz[i,]-(matriz[i,j]*matriz[j,])
  }
}
matriz[n,] = matriz[n,] /matriz[n,n]

# Imprime fim da eliminação.
matriz
```

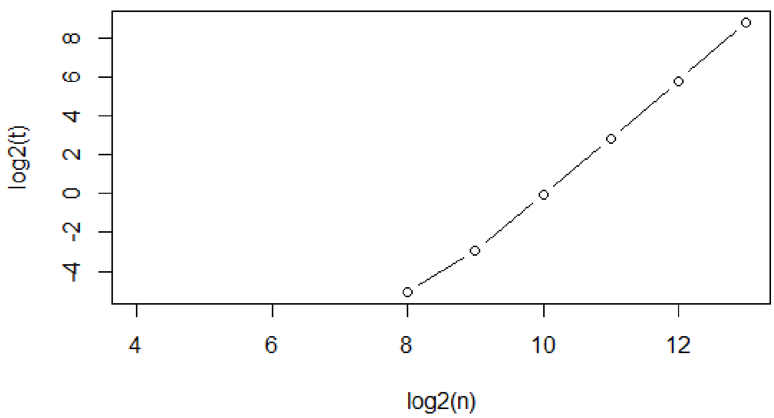
■

Exercicio 7

Estime a complexidade do algoritmo de solução de sistemas lineares do pacote computacional de sua preferência: registre os tempos que o pacote levou para resolver sistemas aleatórios $n \cdot n$, com $n = 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048$. Faça um gráfico do log do número de colunas contra o log dos tempos registrados. O algoritmo do pacote tem complexidade inferior a $O(n^3)$?

Ao executar o script abaixo obtemos o seguinte resultado:

log2(n)	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
log2(t)	0	0	0	0	0.03	0.13	0.95	6.95	55.53	446.83



Script:

```
# Retorna a matriz triangular inferior de uma matriz como parâmetro.
random_matrix <- function(n) {
  matrix(sample(1:n^2),c(n,n))
}
```

```
# Resolve um sistema aleatorio A.x=b de tamanho n onde A é nxn e b é 1xn.
solve_random <- function(n){
  A = random_matrix(n)
  b = sample(1:n,n)

  return(system.time(solve(A,b)))
}




# INÍCIO DO PROGRAMA.
n <- 2^c(5:13)
t = sapply(n, function(n) solve_random(n))
t = t[3,]
plot(log2(n),log2(t),type='b' )

# Regressao linear para determinar inclinação.
# Fonte: http://www.cyclismo.org/tutorial/R/linearLeastSquares.html
fit = lm(t ~ n)
On = fit$coefficients[[2]] # Inclinação é a complexidade.

print(On)
```

■