DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Primer parcial 16/10/2021

2do cuatrimestre 2021 Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

Índice

1. Primer parcial Álgebra I

1.1. Ejercicio 1

Por enunciado se que $v = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y se define R una relación en el conjunto $P(V)$ como:

$$ARB \iff \{1, 2, 3\} \subseteq (A \cup B)^c \tag{1}$$

1.1.A. Pregunta a

Voy a probar cada propiedad de la relación R por separado.

Reflexividad

Por definición, una relación R es reflexiva $\iff \forall A \in P(V) : ARA$

Por (1), $ARA \iff \{1, 2, 3\} \subseteq (A \cup A)^c$

Por definición de la unión de conjuntos, $(A \cup A) = \{a \in V : a \in A \vee a \in A\} \implies (A \cup A) = A$

Por lo tanto, $ARA \iff \{1, 2, 3\} \subseteq A^c$

A simple vista parece una condición dificil de cumplir para cualquier elemento de $P(V)$, busco un contraejemplo.

Sea $M = \{1, 2, 3\} \in P(V)$, por definición de la relación,

$$\begin{aligned} MRM &\iff \{1, 2, 3\} \subseteq M^c \\ &\iff \{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}^c \\ &\iff \{1, 2, 3\} \subseteq \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \end{aligned}$$

Que es falso, luego existe un $M \in P(V) : M \not R M$ y por lo tanto R NO es reflexiva.

Simetría

Por definición, una relación R es simétrica $\iff \forall (A, B) \in P(V)^2 : ARB \implies BRA$

Por (1) se que: $ARB \iff \{1, 2, 3\} \subseteq (A \cup B)^c$
Y quiero probar que $BRA \iff \{1, 2, 3\} \subseteq (B \cup A)^c$

Pero por definición de la unión conjuntos:

$(A \cup B) = \{x \in V : x \in A \vee x \in B\} = (B \cup A)$

Por lo tanto $(A \cup B) = (B \cup A) \implies (A \cup B)^c = (B \cup A)^c$

Así,

$$\begin{aligned} BRA &\iff \{1, 2, 3\} \subseteq (B \cup A)^c \\ &\iff \{1, 2, 3\} \subseteq (A \cup B)^c \\ &\iff ARB \end{aligned}$$

Como se quería probar, luego R es simétrica.

Transitividad

Por definición, una relación R es transitiva $\iff \forall (A, B, C) \in P(V)^3 : (ARB \wedge BRC) \implies ARC$

Por (1) se que
$ARB \iff \{1, 2, 3\} \subseteq (A \cup B)^c$
$BRC \iff \{1, 2, 3\} \subseteq (B \cup C)^c$

Y quiero probar que
$ARC \iff \{1, 2, 3\} \subseteq (A \cup C)^c$

Pero usando propiedades de la unión y el complemento de conjuntos:

$\{1, 2, 3\} \subseteq (A \cup B)^c \implies 1 \notin A \wedge 2 \notin A \wedge 3 \notin A$
$\{1, 2, 3\} \subseteq (B \cup C)^c \implies 1 \notin C \wedge 2 \notin C \wedge 3 \notin C$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
&1 \notin (A \cup C) \wedge 2 \notin (A \cup C) \wedge 3 \notin (A \cup C) \\
\implies &1 \in (A \cup C)^c \wedge 2 \in (A \cup C)^c \wedge 3 \in (A \cup C)^c \\
\implies &\{1,2,3\} \subseteq (A \cup C)^c \\
\implies &ARC
\end{aligned}$$

Como se quería probar. Luego R es transitiva.

Antisimetría

Por definición, una relación R es antisimétrica $\iff \forall (A,B) \in P(V)^2 : (ARB \wedge BRA) \implies A = B$

Por (1) se que
$ARB \iff \{1,2,3\} \subseteq (A \cup B)^c$
$BRA \iff \{1,2,3\} \subseteq (B \cup A)^c$

De nuevo parece ser una condición dificil de cumplir, dado que es fácil ver que varios elementos de $P(V)$ puede no inlcuir el $\{1,2,3\}$

Busco un contraejemplo:

Sean
$A = \{4\}$
$B = \{5\}$

$(A \cup B)^c = (B \cup A)^c = \{1,2,3,6,7,8,9,10\}$

Luego,
$ARB \iff \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,6,7,8,9,10\}$
$BRA \iff \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,6,7,8,9,10\}$

Pero $A \neq B$ y por lo tanto R no es antisimétrica.

1.1.B. Pregunta b

El enunciado me pide que encuentre la cantidad de elementos $A \in P(V)$ tales que:

(a) $A \cap \{4,5,6\} \neq \emptyset$

(b) $AR\{4,5,6\}$

Por definición de la relación, se que

$$\begin{aligned}
AR\{4,5,6\} &\iff \{1,2,3\} \subseteq (A \cup \{4,5,6\})^c \\
AR\{4,5,6\} &\iff \{1,2,3\} \subseteq (A^c \cap \{4,5,6\}^c) \text{ DeMorgan} \\
AR\{4,5,6\} &\iff \{1,2,3\} \subseteq (A^c \cap \{1,2,3,7,8,9,10\})
\end{aligned}$$

Luego $\{1,2,3\} \nsubseteq A$ pues si $\{1,2,3\} \subseteq A \implies \{1,2,3\} \nsubseteq A^c$ y por lo tanto $\{1,2,3\} \nsubseteq (A^c \cap \{1,2,3,7,8,9,10\})$

Así, se que

1. $\{1,2,3\}$: ninguno puede pertenecer a A.
2. $\{4,5,6\}$: alguno tiene que pertenecer pertenecer a A.
3. $\{7,8,9,10\}$: No hay restricciones.

Estas son las condiciones que tengo que cumplir para calcular lo que me piden.

Defino $M = \{4,5,6,7,8,9,10\}$ con $\#P(M) = 2^7$.

Alcanza con quitar del total de conjuntos posibles, aquellos que no tienen a ninguno del conjunto $\{4,5,6\}$

Luego voy a tener 2^4 conjuntos en $P(M)$ que no contienen al $\{4,5,6\}$

Por lo tanto, habrá $2^7 - 2^4$ conjuntos que cumplen lo pedido.

1.2. Ejercicio 2

Voy a hacer la demostración usando el principio de inducción.

Defino $p(n) : \prod_{j=1}^{n}(n+j) \geq 2 \cdot 6^{n-1}; \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base n = 1

$$\begin{aligned} p(1) : \prod_{j=1}^{1}(1+j) &\geq 2 \cdot 6^{1-1} \\ (1+1) &\geq 2 \cdot 6^{0} \\ 2 &\geq 2 \end{aligned}$$

Así $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Dado $k \geq 1$ quiero probar que $p(k) \implies p(k+1)$

HI: $\prod_{j=1}^{k}(k+j) \geq 2 \cdot 6^{k-1}$

Qpq: $\prod_{j=1}^{k+1}((k+1)+j) \geq 2 \cdot 6^{(k+1)-1} \iff \prod_{j=1}^{k+1}(k+1+j) \geq 2 \cdot 6^{k}$

Desarrollo algunos términos de las productorias.

$\prod_{j=1}^{k}(k+j) = (k+1)(k+2)(k+3)...(k+k-1)(k+k)$

$\prod_{j=1}^{k+1}(k+1+j) = (k+2)(k+3)(k+4)...(k+k)(k+k+1)(k+k+2)$

Veo que la productoria de la HI está incluida en la del Qpq.

Luego,

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{k+1}(k+1+j) &= \prod_{j=1}^{k}(k+j) \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)} \\ &\geq 2 \cdot 6^{k-1} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)} \end{aligned}$$

Por lo tanto alcanza probar que,

$$\begin{aligned} 2 \cdot 6^{k-1} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)} &\geq 2 \cdot 6^{k} \\ 2 \cdot 6^{k} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{6(k+1)} &\geq 2 \cdot 6^{k} \\ \frac{(2k+1)(2k+2)}{6(k+1)} &\geq 1 \\ (2k+1)(2k+2) &\geq 6(k+1) \\ 4k^2 + 4k + 2k + 2 &\geq 6k + 6 \\ 4k^2 + 6k + 2 &\geq 6k + 6 \\ 4k^2 + 6k + 2 - 6k - 6 &\geq 0 \\ 4k^2 - 4 &\geq 0 \\ k^2 &\geq 1 \end{aligned}$$

Que es verdadero, $\forall k \geq 1$

Entonces, queda demostrado que dado $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$. Junto con el caso base $p(1)$ también verdadero, el principio de inducción asegura que $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$

1.3. Ejercicio 3

Primero reescribo la expresión del enunciado.

$$\begin{aligned}\frac{2a-1}{5}-\frac{a-1}{2a-3} &= \frac{(2a-3)(2a-1)-5(a-1)}{5(2a-3)}\\ &= \frac{4a^2-2a-6a+3-5a+5}{10a-15}\\ &= \frac{4a^2-13a+8}{10a-15}\end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{4a^2-13a+8}{10a-15}\in\mathbb{Z} \iff 10a-15|4a^2-13a+8$$

Busco entonces uan expresión del tipo $10a-15|n$ con $n\in\mathbb{Z}$

Usando las propiedades del algoritmo de división,

$$\begin{aligned}(10a-15|4a^2-13a+8)\wedge(10a-15|10a-15) &\implies 10a-15|10(4a^2-13a+8)-4a(10a-15)\\ &\implies 10a-15|40a^2-130a+80-40a+60\\ &\implies 10a-15|-70a+80\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}(\implies 10a-15|-70a+80)\wedge(10a-15|10a-15) &\implies 10a-15|-70a+80+7(10a-15)\\ &\implies 10a-15|-70a+80+70a-105\\ &\implies 10a-15|-25\end{aligned}$$

Pero por algoritmo de división, existe $k\in\mathbb{Z}$ tal que,

$$\begin{aligned}10a-15|-25 &\iff -25=k(10a-15)\\ &\iff (-1).5.5=k.5.(2a-3)\\ &\iff -5=k.(2a-3)\\ &\iff (2a-3)|-5\end{aligned}$$

Entonces $2a-3\in Div(5)=\{\pm1,\pm5\}$

- $2a-3=1 \implies a=2 \implies \frac{4a^2-13a+8}{10a-15}=\frac{-2}{5}\notin\mathbb{Z}$
- $2a-3=-1 \implies a=1 \implies \frac{4a^2-13a+8}{10a-15}=\frac{-1}{5}\notin\mathbb{Z}$
- $2a-3=5 \implies a=4 \implies \frac{4a^2-13a+8}{10a-15}=\frac{20}{25}\notin\mathbb{Z}$
- $2a-3=-5 \implies a=-1 \implies \frac{4a^2-13a+8}{10a-15}=\frac{25}{-25}=-1\in\mathbb{Z}$

Luego,

$$\frac{2a-1}{5}-\frac{a-1}{2a-3}\in\mathbb{Z}\iff a=-1$$

1.4. Ejercicio 4

Por enunciado se que $(a:b)=5$.

Sea $d=(2a^3+35ab+25:350)$

Sabiendo el MCD entre a y b, voy a comprimizar d.

Por propiedades del MCD se que existen $\alpha;\beta\in\mathbb{Z}:\alpha\perp\beta$ y,
$a=5\alpha$
$b=5\beta$

Luego,

$$\begin{aligned} d &= (2(5\alpha)^3+35(5\alpha)(5\beta)+25:350) \\ &= (2.5^3.\alpha^3+7.5^3.\alpha.\beta)+5^2:2.5^2.7) \\ &= (5^2(2.5.\alpha^3+7.5.\alpha.\beta+1):5^2(2.7)) \\ &= 5^2.(2.5.\alpha^3+7.5.\alpha.\beta+1:2.7) \end{aligned}$$

Sea ahora $k=(2.5.\alpha^3+7.5.\alpha.\beta+1:2.7)$

Luego $k|2.7$ por lo tanto $k=2^i.7^j$ con $0\leq i,j\leq 1$

Resta definir los i,j tales que $k|2.5.\alpha^3+7.5.\alpha.\beta+1$ con los primos 2 y 7.

Caso p = 2

$2.5.\alpha^3+7.5.\alpha.\beta+1\equiv 0+1.1.\alpha.\beta+1\equiv\alpha.\beta+1(2)$

Entonces,

- Si α y β son ambos pares $\implies\alpha.\beta+1\equiv 1(2)\implies i=0$
- Si uno de ellos es par y el otro impar $\implies\alpha.\beta+1\equiv 1(2)\implies i=0$
- Si son ambos impares $\implies\alpha.\beta+1\equiv 0(2)\implies i=1$

Caso p = 7

$2.5.\alpha^3+7.5.\alpha.\beta+1\equiv 3.\alpha+1(7)$

Entonces busco los α tales que $3.\alpha+1\equiv 0(7)$

(Acá hay que hacer una tabla de restos con totos los posibles escenarios)

Por tabla de restos, $3\alpha^3+1\not\equiv 0(7);\forall\alpha\in\mathbb{Z}$ y por lo tanto $j=0$

Con los i, j hallados; busco k.

$\begin{cases} k=2 & \alpha\equiv 1(2)\wedge\beta\equiv 1(2) \\ k=1 & \text{en otro caso}\end{cases}$

Y con los valores de k hallados, busco $d=25.k$

$\begin{cases} d=25.2=50 & \alpha\equiv 1(2)\wedge\beta\equiv 1(2) \\ d=25.1=25 & \text{en otro caso}\end{cases}$

Ejemplos

$(a,b)=(0,5)\implies(2.0+0+25:350)=25$

$(a,b)=(5,5)\implies(1150:350)=50$