Final 11/06/2021

2do cuatrimestre 2021 Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	`ypajarino@dc.uba.ar`

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

Índice

1. Final 11/06/2021

1.1. Ejercicio 3

Se que $442 = 2.13.17$

Luego,

$$\begin{aligned}(4n^{49}+n+33:442)=221 &\iff (4n^{49}+n+33:2.13.17)=13.17\\ &\iff \begin{cases}13|4n^{49}+n+33\\ 17|4n^{49}+n+33\\ 2\not|4n^{49}+n+33\end{cases}\end{aligned}$$

Ahora busco los n que cumplan cada una de las ecuaciones.

Caso 13

$$\begin{aligned}13|4n^{49}+n+33 &\iff 4n^{49}+n+33\equiv 0(13)\\ &\iff 4n^{49}+n\equiv 6(13)\end{aligned}$$

Ahora separo en casos: $13|n$ y $13\not|n$

Caso $13|n$

$$13|n \implies 4n^{49}+n\equiv 0+0\not\equiv 6(13)$$

Luego $n\not\equiv 0(13)$

Caso $13\not|n$

$$\begin{aligned}13\not|n &\implies 4n^{49}+n\equiv 6(13)\\ &\iff 4n^{r_{12}(49)}+n\equiv 6(13)\\ &\iff 4n+n\equiv 6(13)\\ &\iff 5n\equiv 6(13)\\ &\iff (-5)5n\equiv(-5)6(13)\\ &\iff -25n\equiv -30(13)\\ &\iff n\equiv 9(13)\end{aligned}$$

Luego $n\equiv 9(13)$

Caso 17

$$\begin{aligned}17|4n^{49}+n+33 &\iff 4n^{49}+n+33\equiv 0(17)\\ &\iff 4n^{49}+n\equiv 1(17)\end{aligned}$$

De nuevo tengo dos casos $17|n$ y $17\not|n$

Caso $17|n$

$$17|n \implies 4n^{49}+n\equiv 1(17) \iff 0+0\equiv 1(17)$$

Luego $n\not\equiv 0(17)$

Caso $17 \not| n$

$$\begin{aligned} 17 \not| n \implies & 4n^{49} + n \equiv 1(17) \\ \iff & 4n^{r_{16}(49)} + n \equiv 1(17) \\ \iff & 4n + n \equiv 1(17) \\ \iff & 7.5n \equiv 7.1(17) \\ \iff & 35n \equiv 7(17) \\ \iff & n \equiv 7(17) \end{aligned}$$

Luego $n \equiv 7(17)$

Caso 2

$$\begin{aligned} 2 \not| 4n^{49} + n + 33 \iff & 4n^{49} + n + 33 \not\equiv 0(2) \\ \iff & \begin{cases} n \equiv 0(2) \implies 0 + 0 + 33 \equiv 1 \not\equiv 0(2) \\ n \equiv 1(2) \implies 4 + 1 + 33 \equiv 0(2) \end{cases} \end{aligned}$$

Luego $n \equiv 0(2)$

Entonces juntando todo lo hayado, $S = \begin{cases} n \equiv 9(13) \\ n \equiv 3(17) \\ n \equiv 0(2) \end{cases}$

Por el Teorema Chino del Resto se que existe una única solución mod 442, que es lo que busco.

Separo S en tres sistemas:

$S_0 = \begin{cases} n \equiv 9(13) \\ n \equiv 0(17) \\ n \equiv 0(2) \end{cases}$ $S_1 = \begin{cases} n \equiv 0(13) \\ n \equiv 3(17) \\ n \equiv 0(2) \end{cases}$ $S_2 = \begin{cases} n \equiv 0(13) \\ n \equiv 0(17) \\ n \equiv 0(2) \end{cases}$

Busco soluciones a cada sistema.

$S_0 = \begin{cases} n \equiv 9(13) \\ n \equiv 0(34) \end{cases} \implies n = 34k \implies 34k \equiv 9(13) \iff k \equiv 8(13)$

Luego $x_0 = 8.34 = 272$

$S_1 = \begin{cases} n \equiv 3(17) \\ n \equiv 0(26) \end{cases} \implies n = 26k \implies 26k \equiv 3(17) \iff k \equiv 6(17)$

Luego $x_1 = 6.26 = 156$

$S_2 = \begin{cases} n \equiv 0(2) \\ n \equiv 0(17.13) \end{cases}$

Luego $x_2 = 0$

Entonces $x = x_0 + x_1 + x_2 = 272 + 156 + 0 = 428$

Por lo tanto, $n \equiv 428(442) \implies r_{442}(n) = 428$

1.2. Ejercicio 4

Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, se define R una relación en $\mathbb{C} - \{0\}$ tal que

$$zRw \iff \text{existe } \alpha \in G_n \text{ tal que } z = \alpha w \tag{1}$$

1.2.A. Pregunta i

Probar que es de equivalencia. Voy a probar cada propiedad por separado.

Reflexividad

Por definición de reflexividad, R es reflexiva $\iff \forall k \in \mathbb{C} - \{0\} : kRk$

Por (1), $kRk \iff$ existe $\alpha \in G_n$ tal que $k = \alpha k$

Pero $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \in G_n$ pues $(1)^n = 1$, luego $k = k$ y por lo tanto R es reflexiva.

Simetría

Por definición de simetría, R es simétrica $\iff \forall (k, j) \in (\mathbb{C} - \{0\})^2 : kRj \implies jRk$

Por (1), $kRj \iff$ existe $\alpha \in G_n$ tal que $k = \alpha j$

Y quiero probar $jRk \iff$ existe $\alpha \in G_n$ tal que $j = \alpha k$

Por lo tanto,

$$k = \alpha j; \alpha \in G_n$$
$$\implies j = \beta\alpha j \iff \beta\alpha = 1$$

Pero dado que $\alpha \in G_n \iff \alpha^{-1} \in G_n$ y $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$

Por lo tanto $\beta = \alpha^{-1} \implies j = \alpha^{-1}k$

Luego R es simétrica

Transitividad

Por definición de transitividad, R es transitiva $\iff \forall (j, k, l) \in (\mathbb{C} - \{0\})^3 : (jRk \wedge kRl) \implies jRl$

Por (1),
$jRk \iff \exists \alpha \in G_n : j = \alpha k$
$kRl \iff \exists \alpha \in G_n : k = \alpha l$
$jRl \iff \exists \alpha \in G_n : j = \alpha l$

Luego $jk = \alpha k \beta l \iff j = \alpha\beta l$

Entonces queda demostrar que $\alpha\beta \in G_n$, pero se que $\alpha^n = 1$ y $\beta^n = 1$

Por lo tanto, $(\alpha\beta)^n = \alpha^n\beta^n = 1 \implies \alpha\beta \in G_n$

Luego R es transitiva.

1.2.B. Pregunta ii

$z = 3 + 5i$ y $n = 4$

Busco el conjunto de los $w \in \mathbb{C} - \{0\} : zRw$

Por (1), $zRw \iff \exists \alpha \in G_4 / 3 + 5i = \alpha \cdot w$

Pero $\alpha \in G_4 \iff \alpha \in \{\pm 1, \pm i\}$

Luego,

- $\alpha = 1 \implies w = 3 + 5i$
- $\alpha = -1 \implies w = -3 - 5i$
- $\alpha = i \implies w = 5 - 3i$
- $\alpha = -i \implies w = -5 + 3i$

Luego $\overline{3 + 5i} = \{3 + 5i, -3 - 5i, 5 + 3i, -5 + 3i\}$

1.3. Ejercicio 5

1.3.A. Pregunta i

Factorización sabiendo que una de las raíces es cúbica de la unidad.

$\alpha \in G_3 \iff \alpha \in \{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$

Dado que $P(1) \neq 0 \implies (x - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))|P$

Luego, $(x - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))|P \iff (x^2 + x + 1)|P$

Usando el algoritmo de división, $f = (x^2 + x + 1)(x^4 - 4x^2 + 4)$

Defino $g = x^4 - 4x^2 + 4$

Cambio de variable $y = x^2$

Luego $g' = y^2 - 4y + 4 \implies g' = (y - 2)^2$

Por lo tanto, $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})|g \iff (x^2 - 2)|g$

Usando el algoritmo de división, $g = (x^2 - 2)(x^2 - 2)$

Por lo tanto, juntando todo lo encontrado.

- $f = (x - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - \sqrt{2})^2(x + \sqrt{2})^2$ es la factorización en $\mathbb{C}[x]$
- $f = (x^2 + x + 1)(x - \sqrt{2})^2(x + \sqrt{2})^2$ es la factorización en $\mathbb{R}[x]$
- $f = (x^2 + x + 1)(x^2 - 2)^2$ es la factorización en $\mathbb{Q}[x]$

1.3.B. Pregunta ii

- $mult(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, f) = 1$
- $mult(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, f) = 1$
- $mult(x + \sqrt{2}, f) = 2$
- $mult(x - \sqrt{2}, f) = 2$