DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Segundo parcial 30/11/2021

2do cuatrimestre 2021 Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

Índice

2. Segundo parcial Álgebra I

2.1. Ejercicio 1

Busco $(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : 51a + 33b = 21 \wedge 8a \equiv b(49)$

Primero busco soluciones para la ecuación diofántica $51a + 33b = 21$

1) verificar que existe solución

Existe solución $(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \iff (51:33)|21$

Luego,

$$\begin{aligned}(51:33) &= (3.17:3.11)\\ &= 3\end{aligned}$$

Como $3|21$ existe solución a la ecuación.

2) coprimizar

$$\begin{aligned}51a + 33b = 21 &\iff 3.17.a + 3.11.b = 3.7\\ &\iff 17a + 11b = 7\end{aligned}$$

3) busco solución particular

Por propiedades del MCD, se que existen $(s,t) \in \mathbb{Z}^2 : (17:11) = s.17 + t.11$

Dado que 17 y 11 son ambos primos, en particular $(17:11) = 1 \implies \exists(s,t) \in \mathbb{Z}^2 : 1 = s.17 + t.11$

A ojo veo que $2.17 + (-3).11 = 34 - 33 = 1$

Por lo tanto, $1 = 2.17 + (-3).11 \iff 7 = 14.17 + (-21).11$

Así encuentro que $S_p = (14, -21)$ es solución particular de la ecuación.

4) busco solución del homogeneo asociado

$$17a + 11b = 0 \iff a = 11k \wedge b = -17k; \forall k \in \mathbb{Z}$$

Luego $S_0 = (11k, -17k)$ es solución al homogeneo asociado.

5) busco todas las soluciones

Con lo hallado obtengo que,

$$\begin{aligned}S &= S_0 + S_p\\ &= (11k; -17k) + (14; -21)\\ &= (11k + 14; -17k - 21); k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Y así, S es el conjunto de soluciones a la ecuación diofántica.

6) verifico el conjunto solución

$$\begin{aligned}51a + 33b = 21 &\iff 51(11k + 14) + 33(-17k - 21) = 21\\ &\iff 561k + 714 - 561k - 693 = 21\\ &\iff 714 - 693 = 21\\ &\iff 21 = 21\end{aligned}$$

Como se quería verificar.

Ahora utilizo la otra restricción. Sabiendo que $(a,b) = (11k+14; -17k-21)$ son soluciones de la ecuación diofántica, busco los (a,b) tales que $8a \equiv b(49)$

$$\begin{aligned} 8a \equiv b(49) &\iff 8(11k+14) \equiv -17k-21(49) \\ &\iff 88k+112 \equiv -17k-21(49) \\ &\iff 88k+17k \equiv -21-112(49) \\ &\iff 105k \equiv -133(49) \\ &\iff 7k \equiv 14(49) \\ &\iff k \equiv 2(7) \end{aligned}$$

Entonces para que se cumpla la segunda restricción, necesito que $k = 7h+2; h \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto si $k = 7h+2$,

$$\begin{aligned} (a,b) &= (11k+14; -17k-21) \\ &= (11(7h+2)+14; -17(7h+2)-21) \\ &= (77h+36; -119h-55) \end{aligned}$$

Rta.: $\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 / a = 77h+36 \wedge b = -119h-55 \wedge h \in \mathbb{Z}\}$

2.2. Ejercicio 2

Busco el resto de dividir a 8^{3^n-2} por 20

Usando congruencia, $8^{3^n-2} \equiv a(20)$

Por el teorema chino del resto, se que existe una única solución mod 20 que satisface $\begin{cases} 8^{3^n-2} = x(4) \\ 8^{3^n-2} = y(5) \end{cases}$ pues $(4:5) = 1$

Busco x

Se que $8 \equiv 0(4)$ pero,

$$8^{3^n-2} \equiv 0(4) \iff 3^n - 2 \geq 1$$

Y $3^n - 2 \geq 1; \forall n \in \mathbb{N}$

Luego $x = 0$

Busco y

Por el Pequeño Teorema de Fermat, dados $a \in \mathbb{Z}; p$ primo ; $a \perp p \implies a^{p-1} \equiv 1(p)$

En particular, $8 \perp 5 \wedge 5$ primo $\implies 8^4 \equiv 1(5)$

Usando el algoritmo de división se que, $3^n - 2 = 4j + r_4(3^n-2); j \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 8^{3^n-2} &= 8^{4j+r_4(3^n-2)} \\ &= (8^4)^j \cdot 8^{r_4(3^n-2)} \\ &\equiv 8^{r_4(3^n-2)}(5) \end{aligned}$$

Luego, $r_4(3^n-2) \implies 3^n - 2 \equiv (-1)^n + 2(4)$

- n par $\implies r_4(3^n-2) = 3$
- n impar $\implies r_4(3^n-2) = 1$

Y por lo tanto

- n par $\implies 8^{r_4(3^n-2)} \equiv 8^3 \equiv 3^3 \equiv 2(5)$
- n impar $\implies 8^{r_4(3^n-2)} \equiv 8^1 \equiv 3(5)$

Así, $y = \begin{cases} 2 & n \equiv 0(2) \\ 3 & n \equiv 1(2) \end{cases}$

Volviendo al sistema de ecuaciones con x e y hallados me quedan dos sistemas,:

$S_1 = \begin{cases} 8^{3^n-2} \equiv 0(4) \\ 8^{3^n-2} \equiv 2(5) \end{cases} \quad n \equiv 0(2)$

$S_2 = \begin{cases} 8^{3^n-2} \equiv 0(4) \\ 8^{3^n-2} \equiv 3(5) \end{cases} \quad n \equiv 1(2)$

Por TCR ya enunciado existe una única solución de S_1. A ojo veo que $8^{3^n-2} \equiv 12(20)$ es solución de S_1

Por TCR ya enunciado existe una única solución de S_2. A ojo veo que $8^{3^n-2} \equiv 8(20)$ es solución de S_2

Rta.: $r_{20}(8^{3^n-2}) = \begin{cases} 12 & n \equiv 0(2) \\ 8 & n \equiv 1(2) \end{cases}$

2.3. Ejercicio 3

Pregunta i

Por propiedades de las raíces multiples: $a \in \mathbb{Q}$ es raíz multiple de f $\iff f(a) = 0 \wedge f'(a) = 0$

Luego,

$$\begin{aligned} f'(a) = 0 &\iff 6x^5 - 5(a-1)a^4 - 4(a-1)a^3 - 3(a-1)a^2 - 2(a+2)a + 2a - 2 = 0 \\ &\iff 6x^5 - 5a^5 + 5a^4 - 4a^4 + 4a^3 - 3a^2 - 2a^2 - 4a + 2a - 2 = 0 \\ &\iff a^5 + a^4 + a^3 + a^2 - 2a - 2 = 0 \end{aligned}$$

Busco los $a \in \mathbb{Q} : a^5 + a^4 + a^3 + a^2 - 2a - 2 = 0$

Luego por el lema de Gauss se que: sea $p \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio, $f(\frac{c}{d}) = 0 \implies c|a_0 \wedge d|cp(f)$

Por lo tanto $a \in \{\pm 1, \pm 2\}$

Evalúo f' en los posibles candidatos:

- $f'(-1) = -1 + 1 - 1 + 1 + 2 - 2 = 0$
- $f'(1) = 1 + 1 + 1 + 1 - 2 - 2 = 0$
- $f'(2) = 32 + 16 + 8 + 4 - 4 - 2 \neq 0$
- $f'(-2) = -32 + 16 - 8 + 4 + 4 - 2 \neq 0$

Luego $a = \pm 1$ será raíz multiple de f $\iff f(a) = 0$

Evalúo f en $a = 1$

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^6 - (1-1)1^5 - (1-1)1^4 - (1-1)1^3 - (1+2)1^2 + 2(1-1)1 + 2 \\ &= 1 - 3 + 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego $a = 1$ es raíz multiple de f.

Evalúo f en $a = -1$

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^6 - (-1-1)(-1)^5 - (-1-1)(-1)^4 - (-1-1)(-1)^3 - (-1+2)(-1)^2 + 2(-1-1)(-1) + 2(-1) \\ &= 1 - (-2)(-1) - (-2).1 - (-2)(-1) - 1 + 2(-2)(-1) - 2 \\ &= 1 - 2 + 2 - 2 - 1 + 4 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego $a = -1$ es raíz multiple de f.

Rta.: $a \in \{-1, 1\}$

2.3.A. Pregunta ii

Me piden factorizar f con $a = -1$

Con $a = -1$ f queda:

$$\begin{aligned} f &= x^6 - (-1-1)x^5 - (-1-1)x^4 - (-1-1)x^3 - (-1+2)x^2 + 2(-1-1)x + 2(-1) \\ &= x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2 \end{aligned}$$

Por el inciso anterior se que $a = -1$ es raíz multiple de f. Aca se puede hacer Ruffini dos veces que fue lo que hice en el parcial, o usar el algoritmo de división con $(x+1)^2$

Haciendo Ruffini o por algoritmo de división se obtiene: $f = (x+1)^2(x^4 + x^2 - 2)$

Defino $g = x^4 + x^2 - 2$ y busco sus raíces.

Se ve a simple vista que $g(\pm 1) = 0$

Luego usando Ruffini se obtiene que $g = (x-1)(x+1)(x^2+2)$

Defino $h = x^2 + 2$ y busco sus raíces.

$h(a) = 0 \iff a^2 = -2 \iff a = \pm\sqrt{2}i$

Luego $h = (x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i)$

Con todo lo hallado, armo las factorizaciones.

$f = (x+1)^3(x-1)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$ es la factorización en irreducibles en $\mathbb{C}[x]$ pues todos los factores son mónicos de grado 1.

$f = (x+1)^3(x-1)(x^2+2)$ es la factorización en irreducibles en $\mathbb{Q}[x]; \mathbb{R}[x]$ pues $(x+1)(x-1)$ con mónicos de grado 1 y (x^2+2) tiene grados dos y no tiene raíces en $\mathbb{Q}; \mathbb{R}$

2.4. Ejercicio 4

Busco un polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ mónico de grado mínimo tal que:

1. $1 + \sqrt{2}$ sea raíz de f
2. $x^2(x+1) | (f : f')$
3. $f(1) = 20$

Por (1) se que $1 + \sqrt{2}$ es raíz, pero por propiedades de $f \in \mathbb{Q}[x]$ se que si $a + b\sqrt{d}$ es raíz, $a - b\sqrt{d}$ también lo es.

En particular, $1 + \sqrt{2}$ es raíz de f $\iff$ $1 - \sqrt{2}$ es raíz de f.

Luego se que $(x - (1+\sqrt{2}))(x - (1-\sqrt{2})) | f$

$(x - (1+\sqrt{2}))(x - (1-\sqrt{2})) = x^2 - 2x - 1$

Por (2) se que $x^2 | f$ y $x^2 | f'$, como busco f de menor grado y $mult(0, f) \geq 2 \implies mult(0, f) = 3$

Por (2) se que $(x+1) | f$ y $(x+1) | f'$, como busco f de menor grado y $mult(-1, f) \geq 1 \implies mult(-1, f) = 2$

Luego $x^3(x+1)^2|f$

Juntando lo hallado, $f = x^3(x+1)^2(x^2-2x-2)$ es el de menor grado que cumple (1) y (2)

Además, me piden que $f(1) = 20$ esto solo lo puedo lograr agregando un nuevo termino, podría lograrlo agregando una constante, pero el polinomio dejaría de ser mónico. Luego,

$$\begin{aligned} f(1) = 20 &\iff 1^3(1+1)^2(1^2-2.1-2)(1-a) = 20 \\ &\iff 4(-3)(1-a) = 20 \\ &\iff 1-a = -\frac{20}{12} \\ &\iff a = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Rta.: $f = x^3(x+1)^2(x^2-2x-2)(x-\frac{8}{3})$ es el polinomio mónico de menor grado que cumple lo pedido.