DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Práctica 7

2do cuatrimestre 2021 | Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

Índice

7. Práctica 7

7.1. Ejercicio 1

Rdo. propiedades del producto y suma de polinomios:

- Grado de un producto de polinomios $gr(ab) = gr(a) + gr(b)$
- Coeficiente principal de un prodcuto de polinomios $cp(ab) = ca(a) \cdot cd(b)$
- $\begin{cases} gr(f+g) \leq max(gr(f); gr(g)) \\ gr(f+g) = max(gr(f); gr(g)) \iff gr(f) \neq gr(g) \vee (gr(f) = gr(g) \wedge cp(f) \neq cp(g)) \end{cases}$

7.1.A. Pregunta i

- $gr(p) = 77.gr(4x^6 - 2x^5 + 3x^2 - 2x + 7) = 77.6 = 462$
- $cp(p) = 4^{77}$

7.1.B. Pregunta ii

Sea $p = a^4 - b^7$ con $a = -3x^7 + 5x^3 + x^2 - x + 5$ y $b = 6x^4 + 2x^3 + x - 2$

$$\begin{aligned} gp(p) &= max(gr(a^4); gr(b^7)) \iff gr(a^4) \neq gr(b^7) \vee cp(a^4) \neq cp(b^7) \\ &= max(7.4; 4.7) \iff cp(a^4) \neq cp(b^7) \\ &= 28 \iff (-3)^4 \neq 6^7 \\ &= 28 \iff 81 \neq 279936 \end{aligned}$$

- $gr(p) = 28$
- $cp(p) = 81 - 6^7$

7.1.C. Pregunta iii

Sea $p = a - b + c$ con $\begin{cases} a = (-3x^5 + x^4 - x + 5)^4 \\ b = 82x^{20} \\ c = 19x^{19} \end{cases}$

Luego $p = 81x^{20} + (...) - 81x^{20} + 19x^{19} \implies gr(p) = 19$ pues se cancelan los termino con x^{20}

Entonces busco el coeficiente para x^{19}

$$\begin{aligned} cp(p) &= a_{19} + b_{19} + c_{19} \\ &= (-3. - 3. - 3.1) + 0 + 19 \\ &= -27 + 0 + 19 \\ &= -8 \end{aligned}$$

- $gr(p) = 19$
- $cp(p) = -8$

7.2. Ejercicio 2

1. *a*) En $\mathbb{Q}[x] = 2$

   b) En $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}[x] = 2$

2. Usando bin de Newton, $c(20) = \binom{133}{20}(3i)^{113}$
3. Usando bin de Newton cuatro veces,
   - $a_1 = \binom{4}{1}x^1(-1)^3 \cdot \binom{19}{19}x^{19}5^0 = -4x^{20}$
   - $a_2 = \binom{4}{2}x^2(-1)^2 \cdot \binom{19}{18}x^{18}5^1 = 570x^{20}$
   - $a_3 = \binom{4}{3}x^3(-1)^1 \cdot \binom{19}{17}x^{17}5^2 = -17100x^{20}$
   - $a_4 = \binom{4}{4}x^4(-1)^0 \cdot \binom{19}{16}x^{16}5^3 = 121125x^{20}$

   Luego $c(20) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 5 = -4 + 570 - 17100 + 121125 - 5 = 104586$
4. $c(20) = 21504$

7.3. Ejercicio 3

7.3.A. Pregunta i

Reescribo el polinomio que me dan,

$$\begin{aligned} f^2 = xf + x + 1 &\iff f^2 - xf = x + 1 \\ &\iff f(f - x) = x + 1 \\ &\iff f \neq 0 \wedge f - x \neq 0 \end{aligned}$$

Tomo grado a ambos lados,

$$\begin{aligned} &gr(f) + gr(f - x) = gr(x + 1) \\ &gr(f) + gr(f - x) = 1 \end{aligned}$$

Luego el grado de f tiene que se menor a 2.

Caso gr(f) = 1

Si $gr(f) = 1 \implies gr(f - x) = 0$ para cumplir la igualdad de grados.

Luego f es de la forma $f = ax + b$ con $a = 1$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(f - x) = x + 1 &\iff (x + b)(x + b - x) = x + 1 \\ &\iff xb + b^2 = x + 1 \\ &\iff \text{Por igualdad de polinomios} \begin{cases} b = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases} \iff b = 1 \end{aligned}$$

Así, $f_1 = x + 1$

Caso gr(f) = 0

Que el grado del polinomio sea igual a cero implica que $f = c$ con c una constante.

Entonces,

$$\begin{aligned} f(f - x) = x + 1 &\iff c(c - x) = x + 1 \\ &\iff c^2 - cx = x + 1 \\ &\iff \text{Por igualdad de polinomios} \begin{cases} -c = 1 \\ c^2 = 1 \end{cases} \implies c = -1 \end{aligned}$$

Así, $f_2 = -1$

Rta.: $f = x + 1$ y $f = -1$

7.3.B. Pregunta ii

Reescribo el polinomio que me dan,

$$f^2 - xf = x^2 + 1 \iff f(f-x) = -x^2 + 1$$

Tomo grado a ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned} gr(f) + gr(f-x) &= gr(-x^2+1) \\ 0+2 &= 2 \text{ No puede ser} \\ 1+1 &= 2 \\ 2+0 &= 2 \text{ No puede ser} \end{aligned}$$

Así, el único caso posible es que $gr(f) = 1$ y que $gr(f-x) = 1$

Sea $f = ax + b$,

$$\begin{aligned} f(f-x) = -x^2 + 1 &\iff (ax+b)(ax+b-x) = -x^2+1 \\ &\iff (ax+b)((a-1)x+b) = -x^2+1 \\ &\iff a(a-1)x^2 + abx + b(a-1)x + b^2 = -x^2+1 \\ &\iff a(a-1)x^2 + (ab + b(a-1))x + b^2 = -x^2+1 \\ &\iff \text{Por igualdad de polinomios } \begin{cases} a(a-1) = -1 \\ ab + b(a-1) = 0 \\ b^2 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Busco soluciones para el sistema de tres ecuaciones que resultó.

De la tercera, se que $b = \pm 1$

$b = 1 \implies a + a + 1 = 0 \iff 2a = 1 \iff a = \frac{1}{2}$

Pero con $a = \frac{1}{2} \wedge b = 1 \implies \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \neq -1$

Luego $b = 1$ NO sirve.

$b = -1 \implies -a - a + 1 = 0 \implies -2a = -1 \implies a = \frac{1}{2}$

Se llega al mismo valor de a que con b=1 y ya se probó que no sirve.

Por lo tanto, $\nexists f \in \mathbb{C}[x]$ que cumpla lo pedido.

7.3.C. Pregunta iii

Reescribo el polinomio que me dan,

$$\begin{aligned} (x+1)f^2 = x^6 + xf &\iff (x+1)f^2 - xf = x^6 \\ &\iff f((x+1)f - x) = x^6 \end{aligned}$$

Aplico grado a ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned} gr(f) + gr((x+1)f - x) &= gr(x^6) \\ 0+6 &= 6 \\ 1+5 &= 6 \\ 2+4 &= 6 \\ 3+3 &= 6 \\ 4+2 &= 6 \\ 5+1 &= 6 \\ 6+0 &= 6 \end{aligned}$$

Luego de dar todos los posibles valores a $gr(f)$, se puede ver que no existe $gr((x+1)f-x)$ que cumpla lo pedido.

Por lo tanto, $\nexists f \in \mathbb{C}[x]$ que cumpla lo pedido.

7.3.D. Pregunta iv

Dado que por enunciado se que $f \neq 0$, puedo reescribir la igualdad como,

$$f^3 = gr(f) \cdot x^2 f \iff f^2 = gr(f) \cdot x^2$$

Aplico grado a ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned}
gr(f^2) &= gr(gr(f) \cdot x^2) \\
gr(f^2) &= 2 \\
gr(f.f) &= 2 \\
2gr(f) &= 2 \\
gr(f) &= 1
\end{aligned}$$

Luego, con $f = ax + b$,

$$\begin{aligned}
f^2 = gr(f) \cdot x^2 &\iff (ax+b)^2 = x^2 \\
&\iff a^2x^2 + 2abx + b^2 = x^2 \\
&\iff \text{Por igualdad de polinomios} \begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = 0 \\ b = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Entonces, $a = \pm 1$ y $b = 0$ son las soluciones del sistema.

Rta.: $f_1 = x$ y $f_2 = -x$ son los únicos polinomios que cumplen lo pedido.

7.4. Ejercicio 4

En estos ejercicios hay que hacer la división con la caja. Yo voy a dejar los resultados de cada paso de la división.

7.4.A. Pregunta i

1. C $= 5x^2$; R $= 2x^3 - 10x^2 - x + 4$
2. C $= 2x$; R $= -10x^2 - 5x + 4$
3. C $= -10$; R $= -5x - 16$

Rta:

- C $= 5x^2 + 2x - 10$
- R $= -5x - 16$

7.4.B. Pregunta ii

1. C $= 2x^2$; R $= x^3 - 2x^2 - 4$
2. C $= \frac{1}{2}x$; R $= -2x^2 - \frac{1}{2}x - 4$
3. C $= -1$; R $= -\frac{1}{2}x - 3$

Rta:

- C $= 2x^2 + \frac{1}{2}x - 1$
- R $= -\frac{1}{2}x - 3$

7.4.C. Pregunta iii

1. C = x^{n-1}; R = $x^{n-1} - 1$
2. C = x^{n-2}; R = $x^{n-2} - 1$
3. C = ...; R = ...
4. C = 1; R = 0

Rta:

- C = $\sum_{i=1}^{n} x^{n-i}(x-1)$
- R = 0

7.5. Ejercicio 5

7.5.A. Pregunta i

Haciendo $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ dividido $x^2 + ax + 1$ llego a:

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^2 + ax + 1)(x + 2 - a) + \left(1 - 2a + a^2\right) x - 1 + a$$

Luego busco que el resto $\left(1 - 2a + a^2\right) x - 1 + a$ sea igual a cero, por igualdad de polinomios,

$$\left(1 - 2a + a^2\right) x - 1 + a = 0 \iff \begin{cases} 1 - 2a + a^2 = 0 \\ -1 + a = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se que $-1 + a = 0 \iff a = 1$.

Reemplazando en la primera y verifico que $a = 1$ cumple lo pedido, $1 - 2a + a^2 = 1 - 2 + 1 = 0$

Rta.: $a = 1$

7.5.B. Pregunta ii

Haciendo $x^4 - ax^3 + 2x^2 + x + 1$ dividido $x^2 + x + 1$ llego a:

$$x^4 - ax^3 + 2x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 + (-a - 1)x + 2 + a) + 1 - 2 - a$$

Luego busco que el resto $1 - 2 - a$ sea igual a cero, por igualdad de polinomios,

$$1 - 2 - a = 0 \iff \begin{cases} 1 - 2 - a = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto $a = -1$ es el único que lo cumple.

7.5.C. Pregunta iii

(Esta división es larga y pesada) Haciendo $x^5 - 3x^3 - x^2 - 2x + 1$ dividido $x^2 + ax + 1$ llego a:

$$x^5 - 3x^3 - x^2 - 2x + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^3 - ax^2 + (-4a^2)x + (-1 + 5a - a^3)) + \left[(2 - a^2 + a - 5a^2 + a^4)x + (2 - 5a + a^3)\right]$$

Luego busco que el resto sea igual a $-8x + 4$,

$$\left[(2 - a^2 + a - 5a^2 + a^4)x + (2 - 5a + a^3)\right] = -8x + 4 \iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 2 = -8 \\ a^3 - 5a + 2 = 4 \end{cases}$$

De la segunda ecuación,

$$\begin{aligned} a^3 - 5a + 2 = 4 &\iff a^3 - 5a - 2 = 0 \\ &\iff a(a^2 - 5) - 2 = 0 \end{aligned}$$

A simple vista veo que $a = -2$ es solución, luego usando Ruffini,

$$a^3 - 5a - 2 = (a^2 - 2a - 1)(a + 2)$$

Por lo tanto busco soluciones para $a^2 - 2a - 1 = 0 \iff a = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$

Queda ver cuales de estos valores de a hallados cumple la primer ecuación.

- $a = -2 \implies a^4 - 6a^2 + a + 2 = 16 - 24 - 2 + 2 = -8$
- $a = \frac{2+\sqrt{8}}{2} \implies a^4 - 6a^2 + a + 2 \neq -8$ (Wolfram)
- $a = \frac{2-\sqrt{8}}{2} \implies a^4 - 6a^2 + a + 2 \neq -8$ (Wolfram)

7.6. Ejercicio 6

TODO

7.7. Ejercicio 7

7.7.A. Pregunta i

Por definición de congruencias se que $x^{31} - 2 \equiv 0(x^{31} - 2) \implies x^{31} \equiv 2(x^{31} - 2)$

Luego,

$$\begin{aligned} x^{353} - x - 1 &\equiv (x^{31})^11 \cdot x^{12} - x - 1(x^{31} - 2) \\ &\equiv 2^11 \cdot x^{12} - x - 1(x^{31} - 2) \\ &\equiv 2048x^{12} - x - 1(x^{31} - 2) \end{aligned}$$

Rta.: $r_{x^{31}-2}(x^{353} - x - 1) = 2048x^{12} - x - 1$

7.7.B. Pregunta ii

Se que $x^6 + 1 | x^6 + 1 \iff x^6 + 1 \equiv 0(x^6 + 1) \iff x^6 \equiv -1(x^6 + 1)$

Luego,

$$\begin{aligned} x^{1000} + x^{40} + x^{20} + 1 &\equiv (x^6)^{166} \cdot x^4 + (x^6)^6 \cdot x^4 + (x^6)^3 \cdot x^2 + 1 \\ &\equiv (-1)^{166} \cdot x^4 + (-1)^6 \cdot x^4 + (-1)^3 \cdot x^2 + 1 \\ &\equiv x^4 + x^4 - x^2 + 1 \\ &\equiv 2x^4 - x^2 + 1 \end{aligned}$$

Rta.: $r_{x^6+1}(x^{1000} + x^{40} + x^{20} + 1) = 2x^4 - x^2 + 1$

7.7.C. Pregunta ii

Se que $x^{100} - x + 1 \equiv 0(x^{100} - x + 1) \iff x^{100} \equiv x - 1(x^{100} - x + 1)$

Luego,

$$\begin{aligned} x^{200} - 3x^{101} + 2 &\equiv (x^{100})^2 - 3(x^{100})x + 2 \\ &\equiv (x - 1)^2 - 3(x - 1)x + 2 \\ &\equiv x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 3x + 2 \\ &\equiv -2x^2 + x + 3(x^{100} - x + 1) \end{aligned}$$

Rta.: $r_{x^{100}-x+1}(x^{200} - 3x^{101} + 2) = -2x^2 + x + 3$

7.8. Ejercicio 8

TODO

7.9. Ejercicio 9

Se resuelve con el algoritmo de Euclides en polinomios. Calculadora de MCD de polinomios https://planetcalc.com/7760/

1. - $MCD = -x + 1$
2. - $MCD = x^2 + 1$
   - $x^2 + 1 = f + (-x^3)g$
3. - $MCD = 3$
   - $3 = (-x + 2)f + (1 + 2x^2 - 4x)g$

7.10. Ejercicio 10

Se que el resto tiene que tener grado menor al divisor, luego $gr(r) \leq 2$

Por algoritmo de división de polinomios existen q cociente y r resto tales que:

$$f = q(x^3 - 2x^2 - x + 2) + r$$

El enunciado me da las evaluaciones de f en $1; 2; -1$, luego

$$\begin{aligned} f(1) = q(1)(1 - 2 - 1 + 2) + r(1) &\implies f(1) = r(1) = -2 \\ f(2) = q(1)(8 - 8 - 2 + 2) + r(2) &\implies f(2) = r(2) = 1 \\ f(-1) = q(1)(-1 - 2 + 1 + 2) + r(-1) &\implies f(-1) = r(-1) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto se que r es de la forma $ax^2 + bx + c$, con $a; b; c \in \mathbb{Q}$, luego

$$\begin{cases} r(1) = a + b + c = -2 \\ r(2) = 4a + 2b + c = 1 \\ r(-1) = a - b + c = 0 \end{cases}$$

Restando la tercera a la primera, $2b = -2 \iff b = -1$

Rearmando el sistema con lo hallado,

$$\begin{cases} a + c = -1 \\ 4a + c = 3 \\ a + c = -1 \end{cases}$$

La tercera es igual a la primera así que la puedo eliminar y restando la primera a la segunda:

$3a = 4 \iff a = \frac{4}{3}$

Luego $a + c = -1 \iff \frac{4}{3} + c = -1 \iff c = -\frac{7}{3}$

Así, $r_{x^3-2x^2-x+2}(f) = \frac{4}{3}x^2 - x - \frac{7}{3}$

7.11. Ejercicio 11

Sea $f = x^{2n} + 3x^{n+1} + 3x^n - 5x^2 + 2x + 1$
Sea $g = x^3 - x$

Se que $f = q.g + r$ con $gr(r) \leq 2 \implies r = ax^2 + bx + c$

Busco raíces de g,

$$\begin{aligned} x^3 - x = 0 &\iff x(x^2-1) = 0 \\ &\iff x \in \{-1, 0, 1\} \end{aligned}$$

Evalúo f para las raíces halladas,

$$\begin{aligned} f(0) = q(0)g(0) + r(0) &\implies r(0) = 1 \\ f(1) = q(1)g(1) + r(1) &\implies r(1) = 1+3+3-5+2+1 = 5 \\ f(-1) = q(-1)g(-1) + r(-1) &\implies r(-1) = 1 + 3(-1)^{n+1} + 3(-1)^n - 5 - 2 - 1 = -5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, sabiendo que $r(x) = ax^2 + bx + c$ $\begin{cases} r(0) = 1 = c \\ r(1) = 5 = a + b + c \\ r(-1) = -5 = 25a - 5b + c \end{cases}$

Sabiendo $c = 1 \implies \begin{cases} a + b = 4 \implies a = 4 - b \\ 25a - 5b = -6 \end{cases}$

Sabiendo $a = 4 - b \implies$

$$\begin{aligned} 25(4-b) - 5b &= -6 \\ 100 - 25b - 5b &= -6 \\ -30b &= -106 \\ b &= \frac{53}{15} \end{aligned}$$

Luego $a = 4 - b \implies a = 4 - \frac{53}{15} = \frac{7}{15}$
Así, $r_f(g) = \frac{7}{15}x^2 + \frac{53}{15}x + 1$

7.12. Ejercicio 12

Sea $w = x^3$
Sea $g = w^2 + w - 2$

Busco raíces de g

$$g(w) = 0 \iff w = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4.1.-2}}{2} \iff \begin{cases} w_1 = 1 \\ w_2 = -2 \end{cases}$$

Por lo tanto, recordando que $w = x^3$,

$$w_1 = x^3 = 1 \iff \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Y,

$$w_2 = x^3 = -2 \iff \begin{cases} x_4 = -\sqrt[3]{2} \\ x_5 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} + \sqrt[3]{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_6 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} - \sqrt[3]{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

7.13. Ejercicio 13

Por definición de raíz, $w + w^2 + w^4$ es raíz de f $\iff f(w + w^2 + w^4) = 0$

Luego se que,

- $w = e^{\frac{2}{7}\pi i}$
- $w^2 = e^{\frac{4}{7}\pi i}$
- $w^4 = e^{\frac{8}{7}\pi i}$

Luego defino,

- $r = Re(w + w^2 + w^4) = \cos\frac{2}{7}\pi + \cos\frac{4}{7}\pi + \cos\frac{8}{7}\pi = -\frac{1}{2}$
- $m = Im(w + w^2 + w^4) = \sin\frac{2}{7}\pi + \sin\frac{4}{7}\pi + \sin\frac{8}{7}\pi = \frac{\sqrt{7}}{2}$

Luego evalúo f en $k = r + m.i$

$$\begin{aligned} f(k) &= (r + m.i)^2 + (r + m.i) + 2 \\ &= (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}.i)^2 + (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}.i) + 2 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{2}.i - \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}.i + 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

7.14. Ejercicio 14

7.14.A. Pregunta i

Me piden probar que $(w + w^{-1})$ y $(w^2 + w^{-2})$ son raíces de f.

$$\begin{aligned} w + w^{-1} &= e^{\frac{2}{5}\pi i} + e^{-\frac{2}{5}\pi i} \\ &= \cos\frac{2}{5}\pi + \cos -\frac{2}{5}\pi + i\left(\sin\frac{2}{5}\pi + \sin -\frac{2}{5}\pi\right) \\ &= \cos(\frac{2}{5}\pi) + \cos(-\frac{2}{5}\pi) \end{aligned}$$

Luego sea $A = \cos(\frac{2}{5}\pi) + \cos(-\frac{2}{5}\pi) \implies f(A) = A^2 + A - 1 = 0$
Así, $(w + w^{-1})$ es raíz de f.

$$\begin{aligned} w^2 + w^{-2} &= e^{\frac{4}{5}\pi i} + e^{-\frac{4}{5}\pi i} \\ &= \cos\frac{4}{5}\pi + \cos -\frac{4}{5}\pi + i\left(\sin\frac{4}{5}\pi + \sin -\frac{4}{5}\pi\right) \\ &= \cos(\frac{4}{5}\pi) + \cos(-\frac{4}{5}\pi) \end{aligned}$$

Luego sea $B = \cos(\frac{4}{5}\pi) + \cos(-\frac{4}{5}\pi) \implies f(B) = B^2 + B - 1 = 0$
Así, $(w^2 + w^{-2})$ es raíz de f.

7.14.B. Pregunta ii

TODO

7.15. Ejercicio 15

7.15.A. Pregunta i

a es raíz de $f \iff (x-a)|f \iff f = n(x-a)$
a es raíz de $g \iff (x-a)|g \iff f = m(x-a)$

Por propiedades del MCD se que existen s, t tales que,

$$\begin{aligned}(f:g) = sf + tg &\iff (f:g) = sn(x-a) + tm(x-a)\\ &\iff (f:g) = (x-a)\cdot(sn+tm)\\ &\iff (x-a)|(f:g)\end{aligned}$$

Luego $(x-a)|(f:g) \iff (x-a)$ es raíz de $(f:g)$ como se quería probar.

7.15.B. Pregunta ii

Primero busco el MCD entre x^4+3x-2 y x^4+3x^3-3x+1

(Acá van las cuentas del algo de Euclides)

Luego $MCD = x^2+x-1$

Busco raíces del MCD,

$$\begin{aligned}x^2+x-1=0 &\iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4.1.-1}}{2}\\ &\iff x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Luego que f teng auna raíz común con g $\implies (f:g)|f$

$$x^2+x-1|x^4+3x^3-3x+1 \iff x^4+3x^3-3x+1 = q(x^2+x-1)$$

(Acá va la división)

Obtengo que, $x^4+3x^3-3x+1 = (x^2-x+2)(x^2+x-1)$

Ahora busco raíces de x^2-x+2

$$\begin{aligned}x^2-x+2=0 &\iff x = \frac{1\pm\sqrt{-7}}{2}\\ &\iff x = \frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}\end{aligned}$$

Luego las raíces de f son:

- $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
- $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
- $x_3 = \frac{1+\sqrt{7}i}{2}$
- $x_4 = \frac{1-\sqrt{7}i}{2}$

7.16. Ejercicio 16

7.16.A. Pregunta i

La idea es evaluar en la función y sus derivadas hasta encontrar la derivada en la que no vale cero.

$$\begin{aligned}
f(1) &= 1-2+1 = 0 \implies mult(1,f) \geq 1 \\
f'(x) &= 5x^4 - 6x^2 + 1 \\
f'(1) &= 5-6+1 = 0 \implies mult(1,f) \geq 2 \\
f''(x) &= 20x^3 - 12x \\
f''(1) &= 20-12 \neq 0 \implies mult(1,f) = 2
\end{aligned}$$

7.16.B. Pregunta ii

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^6 - 3x^4 + 4 \\
f(i) &= (i^2)^3 - 3(i^2)^2 + 4 = -1-3+4 = 0 \implies mult(i,f) \geq 1 \\
f'(x) &= 6x^5 - 12x^3 \\
f'(i) &= 6(i^2)^2.i - 12(i^2).i = 6i + 12i \neq 0 \implies mult(i,f) = 1
\end{aligned}$$

7.16.C. Pregunta iii

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-2)^2 \cdot (x^2-4) + (x-2)^3 \cdot (x-1) \\
f(2) &= 0+0 = 0 \implies mult(2,f) \geq 1 \\
f'(x) &= 2(x-2) \cdot (x^2-4) + (x-2)^2 \cdot 2x + 3(x-2)^2 \cdot (x-1) + (x-2)^3 \\
f'(x) &= 8x^3 - 33x^2 + 36x - 4 \\
f'(2) &= 0+0+0+0 = 0 \implies mult(2,f) \geq 2 \\
f''(x) &= 24x^2 - 66x + 36 \\
f''(2) &= 96 - 264 + 36 = 0 \implies mult(2,f) \geq 3 \\
f'''(x) &= 48x - 66 \\
f'''(2) &= 96 - 66 = 30 \neq 0 \implies mult(2,f) = 3
\end{aligned}$$

7.17. Ejercicio 17

Por propiedades de la multiplicidad de raíces, se que f tiene raíces simples si $\forall a \in \mathbb{C} : f(a) = 0 \implies f'(a) \neq 0$

Luego,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (n+1)nx^n - n(n+1)x^{n-1} \\
&= (n+1)nx^{n-1}(x-1) = 0 \iff x \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

Por lo tanto las unicas posibles raíces multiples son $x_0 = 0; x_1 = 1$

Queda ver los valores de a tales que $f(x_1)$, $f(x_2)$ son iguales a cero,

$$\begin{aligned}
f(0) = a = 0 &\iff a = 0 \\
f(1) = n - (n+1) + a = 0 &\iff a = n+1-n = 1
\end{aligned}$$

Rta.: f tiene raíces simples $\iff a \in \{0,1\}$

7.18. Ejercicio 18

Por propiedades de la multiplicidad de raíces, se que f tiene raíces multiples si $\exists a \in \mathbb{C} : f(a) = 0 \wedge f'(a) = 0$

Luego,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2n+1)x^{2n} - (2n+1) \\ &= (2n+1)(x^{2n} - 1) = 0 \iff x = \pm 1 \end{aligned}$$

Entonces busco los a tales que $f(1) = 0$ y $f(-1) = 0$

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - (2n+1) + a = 0 \iff a = 2n \iff a \equiv 0(2) \\ f(-1) &= (-1)^{2n+1} - (2n+1)(-1) + a = -1 + 2n + 1 + a = 0 \iff a = -2n \iff a \equiv 0(2) \end{aligned}$$

Rta.: Tiene raíces multiples $\forall a \in \mathbb{C} : a \equiv 0(2)$

7.19. Ejercicio 19

Al igual que en los anteriores, primero busco la derivada y busco los valores para los que es igual a cero.

$$\begin{aligned} f'(x) = 20x^{19} + 80x^9 &= 0 \\ 20x^9(x^{10} + 4) &= 0 \iff (x = 0) \vee (x^{10} = -4) \end{aligned}$$

Luego $x = 0$ es raíz multiple de f sii $a = 0$ y tiene multiplicidad 10.

Ahora veo el caso $x^{10} = -4$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^{10})^2 + 8x^{10} + 2a \\ f(x) &= (-4)^2 + 8(-4) + 2a \iff 0 = 16 - 32 + 2a \iff a = 8 \end{aligned}$$

Luego si $a = 8$, los x tales que $x^{10} = -4$ serán raíces multiples de f, dado que $gr(f) = 20 \implies$ f tiene 20 raíecs en $\mathbb{C}$. Dado que existen 10 x tales que $x^{10} = -4 \implies$ f tiene 10 raíces de multiplicidad 2.

7.20. Ejercicio 20

Por propiedades de las raíces multiples, se que f tiene raíz múltiple $\iff \exists \alpha \in \mathbb{C} : f(\alpha) = 0 \wedge f'(\alpha) = 0$

Luego busco los x tales que $f'(x) = 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 68x^{67} - 68x^3 = 68x^3(x^{64} - 1) \\ \implies f'(x) &= 0 \iff (x = 0) \vee (x^{64} = 1) \end{aligned}$$

Si $x = 0$, $f(0) = 16 \neq 0$. Luego no es raíz de f.

Si $x^{64} = 1$,

$$\begin{aligned} f(x) = x^{64} \cdot x^4 - 17x^4 - 16 &= 0 \\ x^4 - 17x^4 - 16 &= 0 \\ x^4(1 - 17) &= 16 \\ x^4 &= -1 \end{aligned}$$

Luego los α que cumplen lo pedido son $\{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha \in G_{64} \wedge \alpha^4 = -1\}$

Pero se que,

$$a^{64} = (a^4)^{16} = (-1)^{16} = 1$$

Luego si $a^4 = -1 \implies a \in G_{64}$

Y los α tales que $\alpha^4 = -1$ son:

- $\alpha_0 = e^{\frac{1}{4}\pi i}$
- $\alpha_1 = e^{\frac{3}{4}\pi i}$
- $\alpha_2 = e^{\frac{5}{4}\pi i}$
- $\alpha_3 = e^{\frac{7}{4}\pi i}$

Y cada uno de ellos tiene $mult(\alpha_i, f) = 2$

7.21. Ejercicio 21

Para este ejercicio se puede usar la regla de la división de Ruffini, Calculadora de Ruffini

7.21.A. Pregunta i

Probado usando Ruffini

7.21.B. Pregunta ii

Usando ruffini queda resto igual a $a + 2$, luego f es divisible por $(x-1)^3 \iff a + 2 = 0 \iff a = -2$

7.22. Ejercicio 22

Busco a tales que

- $f(1) = 0$
- $f'(1) = 0$
- $f''(1) \neq 0$

Luego,

$$\begin{aligned}
f(1) &= 1 - a - 3 + 2 + 3a - 2a = 0; \forall a \in \mathbb{C} \implies mult(1, f) \geq 1 \\
f'(x) &= 4x^3 - 3ax^2 - 6x + 2 + 3a \\
f'(1) &= 4 - 3a + 6 + 2 + 3a = 0; \forall a \in \mathbb{C} \implies mult(1, f) \geq 2 \\
f''(x) &= 12x^2 - 6ax + 6 \\
f''(1) &= 12 - 6a - 6 = 12 - 6a
\end{aligned}$$

Luego $f(1) \neq 0 \iff 12 - 6a \neq 0 \iff 12 = 6a \iff a = 2$

Rta.: 1 es raíz doble de f para $a = 2$

7.23. Ejercicio 23

f tiene raíces simples $\iff \forall a \in \mathbb{C} : f(a) = 0 \implies f'(a) \neq 0$

Si defino $f_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

Luego $f' = \sum_{k=1}^{n} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = f_{n-1}$

Ahora supongo $f_n(a) = 0$ y quiero ver que $f_{n-1}(a) \neq 0$

Pero, $f_{n-1}(a) = f_n(a) - \frac{\alpha^n}{n!} = 0 - \frac{\alpha^n}{n!} \neq 0; \forall \alpha \neq 0$

Y si $\alpha = 0 \implies f_n(0) = 1 \neq 0 \implies x = 0$ no es raíz de f_n como se quería probar.

7.24. Ejercicio 24

Demostración usando inducción

Defino $p(n) : f_n(i) = 0 \wedge f'_n(i) = 0 \wedge f''_n(i) \neq 0$

Caso base n = 1

$$\begin{aligned} f_1(i) &= 1 - 2 + 1 = 0 \\ f'_1(x) &= 4x^3 + 4x \\ f'_1(i) &= -4i + 4i = 0 \\ f''_1(x) &= 12x^2 + 4 \\ f''_1(i) &= -12 + 4 \neq 0 \end{aligned}$$

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Dado $h \geq 1$ quiero probar que $p(h) \implies p(h+1)$

HI: $f_h(i) = 0 \wedge f'_h(i) = 0 \wedge f''_h(i) \neq 0$

Qpq: $f_{h+1}(i) = 0 \wedge f'_{h+1}(i) = 0 \wedge f''_{h+1}(i) \neq 0$

Pero,

$$\begin{aligned} f_{h+1} &= (x - i)(f_h + f'_h) \implies f_{h+1}(i) = (i - i)(f_h(i) + f'_h(i)) = 0 \\ f'_{h+1} &= (f_h + f'_h) + (x - i)(f'_h + f''_h) \implies f'_{h+1}(i) = 0 + (i - i)(f'_h + f''_h) = 0 \\ f''_{h+1} &= f'_h + f''_h + f'_h + f''_h + (x - i)(f'_h + f''_h) \implies f''_{h+1}(i) = 0 + f''_h + 0 + f''_h + 0 = 2f''_h \neq 0 \end{aligned}$$

Luego $p(h) \implies p(h+1); \forall h \geq 1$

Por lo tanto $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$

7.25. Ejercicio 25

TODO

7.26. Ejercicio 26

TODO

7.27. Ejercicio 27

Rdo. raíces en $\mathbb{Q}[x]$: Sea $f \in \mathbb{Z}[x] : \frac{c}{d}$ es raíz de $f \iff c|a_n \wedge d|a_0$ con $c\mathbb{Z}; d \in \mathbb{N}$

7.27.A. Pregunta i

Usando el rdo, busco posibles candidatos:

$$\begin{aligned} c &\in Div(-1) = \{\pm 1\} \\ d &\in Div_+(2) = \{1, 2\} \\ \implies \frac{c}{d} &\in \{\pm 1; \pm \frac{1}{2}\} \end{aligned}$$

Evalúo en cada uno de los posibles candidatos y llego a que los unicos a que cumplen $f(a) = 0$ son

- $a = \frac{1}{2}$
- $a = -1$

7.27.B. Pregunta ii

El criterio de Gauss para encontrar raíces enteras, solo funciona con $f \in \mathbb{Z}[x]$

Luego tengo que transformar el polinomio en $\mathbb{Q}$ a uno en $\mathbb{Z}$,

$$f = x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x - 3$$
$$2f = h = 2x^5 - x^4 - 4x^3 + x^2 - 7x - 3$$

Así, $\frac{c}{d}$ es raíz de h $\iff \begin{cases} c| - 6 \implies c \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\} \\ d|2 \implies d \in \{1, 2\} \end{cases}$

Evaluando en los candidatos hallados, encuentro que las raíces racionales de f son: $\{2, -\frac{3}{2}\}$

7.27.C. Pregunta iii

Usando el criterio de Gauss,

$$f(\frac{c}{d}) = 0 \iff \begin{cases} c| - 2 \implies c \in \{\pm 1, \pm 2\} \\ d|1 \implies d = 1 \end{cases}$$

Entonces las posibles raíces enteras de f son $\{\pm 1, \pm 2\}$

Evaluando en los cuatro posibles candidatos se llega a que ninguna anula f. Luego f no tiene raíces enteras.

7.28. Ejercicio 28

7.28.A. PRegunta i

$f = x^2 + 6x - 2$

Usando la resolvente cuadrática, $x = \frac{-6 \pm w}{2}$ con $w^2 = 36 - 4. - 2 = 44$

Luego,
$x_1 = -3 + \sqrt{11}$
$x_2 = -3 - \sqrt{11}$

Entonces,

$f = x^2 + 6x - 2$ es la factorización en $\mathbb{Q}[x]$ pues es de grado 2 son raíces en $\mathbb{Q}$

$f = (x - (3 + \sqrt{11})) \cdot (x - (3 - \sqrt{11}))$ es la factorización en $\mathbb{R}[x]; \mathbb{C}[x]$ pues los factores son polinomios irred de gr 1

7.28.B. Pregunta ii

$f = x^2 + x - 6$

Usando la resolvente, $x = \frac{-1 \pm w}{2}$ con $w^2 = 1 - 4. - 6 = 25$

Luego,
$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$
$x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$

Entonces,

$$f = (x - 2)(x - 3) \text{ es la factorización en } \mathbb{Q}[x]; \mathbb{R}[x]; \mathbb{C}[x]$$

7.28.C. Pregunta iii

$f = x^2 - 2x + 10$

Usando la resolvente, $x = \frac{2 \pm w}{2}$ con $w^2 = 4 - 4.1.10 = -36 \implies w = 6i$

Luego,
$x_1 = \frac{2+6i}{2} = 1 + 3i$
$x_2 = \frac{2-6i}{2} = 1 - 3i$

Por lo tanto,

$$f = x^2 - 2x + 10 \text{ es la factorización en } \mathbb{Q}[x]; \mathbb{R}[x]$$
$$f = (x - (1+3i)) \cdot (x - (1-3i)) \text{ es la factorización en } \mathbb{C}[x]$$

7.29. Ejercicio 29

7.29.A. Pregunta i

$f = x^2 + (1+2i)x + 2i$

Usando la resolvente, $x = \frac{-(1+2i) \pm w}{2}$ con w tal que,

$$w^2 = (1+2i)^2 - 4.1.2i$$
$$w^2 = (1+2i)(1+2i) - 8i$$
$$w^2 = 1 + 2i + 2i - 4 - 8i$$
$$w^2 = -3 - 4i$$

Luego busco los $w = a + bi$ tales que $w^2 = -3 - 4i$

Pero $w^2 = (a+bi) \cdot (a+bi) = a^2 - b^2 + 2abi$ y
$|w^2| = |-3-4i| \iff |w|^2 = 5 \iff a^2 + b^2 = 5$

Usando la igualdad de números complejos,

$$w^2 = -3 - 4i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

Luego (1) + (3) $\implies 2a^2 = 2 \iff a^2 = 1 \iff a = \pm 1$
Luego (3) - (1) $\implies 2b^2 = 8 \iff b^2 = 4 \iff b = \pm 2$

Usando (2): $w_1 = 1 - 2i; w_2 = -1 + 2i$

Con los w hallados, busco los x;

$$x_1 = \frac{-1 - 2i + 1 - 2i}{2} = -2i$$
$$x_2 = \frac{-1 - 2i - 1 + 2i}{2} = -1$$

Luego $f = (x + 2i)(x + 1)$ es la factorización en $\mathbb{C}[x]$

7.29.B. Pregunta ii

$f = x^8 - 1$

Luego busco los $\alpha \in \mathbb{C} : f(\alpha) = 0 \iff \alpha^8 = 1 \implies \alpha \in G_8$

Y se que el grupo $G_8 = \{c \in \mathbb{C} : c = e^{\frac{2k\pi i}{8}}; 0 \leq k \leq 7\}$

Por lo tanto, $f = \prod_{k=0}^{7} (x - e^{\frac{2k\pi i}{8}})$ es la factorización en $\mathbb{C}[x]$

7.29.C. Pregunta iii

$f = x^6 - (2-2i)^{12}$

Idem ejercicio anterior, busco los $\alpha \in \mathbb{C} : f(\alpha) = 0 \iff a^6 = (2-2i)^{12}$

Ahora voy a usar la forma polar para hallar los α que cumplen lo pedido.

Defino $\alpha = |\alpha| \cdot e^{\theta i} \implies \alpha^6 = |\alpha|^6 \cdot e^{6\theta i}$

Además, $2-2i = |2-2i| \cdot e^{\frac{7}{4}\pi i} = \sqrt{8} \cdot e^{\frac{7}{4}\pi i}$

Luego $(2-2i)^{12} = (\sqrt{8})^{12} \cdot e^{12\frac{7}{4}\pi i} = 262144 \cdot e^{21\pi i}$

Por lo tanto usando la igualdad de números complejos,

$$a^6 = (2-2i)^{12} \iff \begin{cases} |\alpha|^6 = 262144 \implies |\alpha| = 8 \\ 6\theta = \pi + 2k\pi \implies \theta = \frac{\pi+2k\pi}{6} \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned} &0 \leq \theta < 2\pi \\ &0 \leq \frac{\pi + 2k\pi}{6} < 2\pi \\ &0 \leq 2k < 12 \\ &0 \leq k < 6 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f = \prod_{k=0}^{5}(x - 8 \cdot e^{\frac{(1+2k)\pi i}{6}})$ es la factorización en $\mathbb{C}[x]$

7.30. Ejercicio 30

7.30.A. Pregunta i

$f = x^6 - 9$

Veo que $x^6 = (x^3)^2$ y $9 = 3^2$ por lo tanto, $x^6 - 9$ es diferencia de cuadrados.

Así, $f = (x^3 - 3(x^3+3))$ es la factorización en $\mathbb{Q}[x]$ pues los factores no tienen raíces en $\mathbb{Q}$

Ahora defino $g = x^3 - 3$ y $h = x^3 + 3$

Busco raíces de g,

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\iff x^3 = 3 \\ &\iff x = \sqrt[3]{3} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{3}}; 0 \leq k \leq 2 \end{aligned}$$

Luego las raíces de g son,

- $x_1 = \sqrt[3]{3}$
- $x_2 = -\frac{\sqrt[3]{3}}{2} + \frac{\sqrt[6]{243}}{2}i$
- $x_3 = -\frac{\sqrt[3]{3}}{2} - \frac{\sqrt[6]{243}}{2}i$

Ahora busco raíces de h,

$$h(x) = 0 \iff x^3 = -3$$

Defino $\beta = |\beta| \cdot e^{\theta i} \implies \beta^3 = |\beta|^3 \cdot e^{3\theta i}$

Y se que $-3 = 3 \cdot e^{\pi i}$

Usando la igualdad de números complejos, $\beta^3 = -3 \iff \begin{cases} |\beta|^3 = 3 \implies |\beta| = \sqrt[3]{3} \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \implies \theta = \frac{\pi+2k\pi}{3}; 0 \leq k \leq 2 \end{cases}$

Luego las raíces de h son,

- $x_1 = \sqrt[3]{3} \cdot e^{\frac{1}{3}\pi i} = \frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[6]{243}i}{2}$
- $x_2 = \sqrt[3]{3} \cdot e^{\pi i} = -\sqrt[3]{3}$
- $x_3 = \sqrt[3]{3} \cdot e^{\frac{1}{3}\pi i} = \frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[6]{243}i}{2}$

Luego queda armar la factorización del polinomio, con todas las raíces halladas. $\square$

7.30.B. Pregunta ii

En $\mathbb{Q}[x]$

Se ve facíl que no tine raíces en $\mathbb{Q}$. Pero el hecho de que sea un polinomio de grado 4 sin raíces, no quiere decir que no sea irreducible en $\mathbb{Q}$ ya que podría ser producto de dos polinomios de grado 2.

Luego,

$$\begin{aligned} x^4 + 3 &= (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \\ &= x^4 + (c + a)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + cb) \end{aligned}$$

Por iguldad de polinomios, $\begin{cases} 1 = 1 \\ 0 = a + c \\ 0 = b + d + ac \\ 1 = bd \end{cases}$

Con un poco de manipulación del sistema, se llega a que no existen soluciones a, b, c, d que cumplan todas las restricciones.

Luego f es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$

En $\mathbb{C}[x]$

Busco los $\alpha \in \mathbb{C} : a^4 = -3$

Los α que lo cumplen son:

- $\alpha_1 = \sqrt[4]{3}$
- $\alpha_2 = -\sqrt[4]{3}$
- $\alpha_3 = \sqrt[4]{3}i$
- $\alpha_4 = -\sqrt[4]{3}i$

Luego, $f = (x - \sqrt[4]{3})(x + \sqrt[4]{3})(x - \sqrt[4]{3}i)(x + \sqrt[4]{3}i)$ es la factorización de f en $\mathbb{C}[x]$

En $\mathbb{R}[x]$

Agrupo los conjugados de las raíces complejas.

Luego, $f = (x - \sqrt[4]{3})(x + \sqrt[4]{3})(x^2 + \sqrt{3})$ es la factorización de f en $\mathbb{R}[x]$

7.30.C. Pregunta iii

$f = x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6$

En $\mathbb{Q}[x]$

Usando el criterio de Gauss, obtengo candidatos en $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

Evaluando, obtengo que $x = -1$ y $x = 2$ son raíces de f.

Luego, $f = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 3)$ es la factorización en $\mathbb{Q}[x]$

En $\mathbb{R}[x]$

Dado que $(x^2 + 3)$ no tiene raíces reales, $f = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 3)$ es la factorización en $\mathbb{R}[x]$

En $\mathbb{C}[x]$

Busco las raíces complejas de (x^2+3),

Luego, $f=(x+1)(x-2)(x-\sqrt{3}i)(x+\sqrt{3}i)$ es la factorización en $\mathbb{C}[x]$

7.31. Ejercicio 31

TODO

7.32. Ejercicio 32

Quiero usar la suma geométrica, por lo que separo en casos $a=1$ y $a\neq 1$

$a=1 \implies f(1)=n\neq 0 \implies a=1$ no es raíz de f

$a\neq 1 \implies f(a)=\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{k+1}-1}{a-1}=0 \iff a^{n+1}=1 \iff a\in G_{n+1}-\{1\}$

Luego $\#(G_{n+1}-\{-1\})=n+1-1=n \implies$ f tiene n raíces $\implies$ todas las raíces deben ser simples, como se quería probar.

7.33. Ejercicio 33

7.33.A. Pregunta i

Rdo.: Sea $a+b\sqrt{d}; a,b,c\in\mathbb{Q}; \sqrt{d}\notin\mathbb{Q}; b\neq 0; d>0 \implies (x-(a+b\sqrt{d}))(x-(a-b\sqrt{d}))|f$

Luego dado que $2-\sqrt{3}$ es raíz, por el rdo, $2+\sqrt{3}$ también los es $\implies (x-(2+\sqrt{3}))(x-(2-\sqrt{3}))|f$

$$\begin{aligned}(x-(2+\sqrt{3}))(x-(2-\sqrt{3})) &= x^2-2x+\sqrt{3}x-2x+4-2\sqrt{3}-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}-3\\ &= x^2+(-2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3})x+(4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3)\\ &= x^2+4x+1\end{aligned}$$

Por lo tanto se que $x^2+4x+1|f$

Usando el algoritmo de división, $f=(x^2+4x+1)(x^3-2x+1)$

Sea ahora $g=x^3-2x+1$

Busco raíces de g. Veo a simple vista que $g(1)=0 \implies x=1$ es raíz de g.

Usando Ruffini, llego a que $g=(x-1)(x^2+x-1)$

Defino $h=x^2+x-1$, $h=0 \iff x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

Usando todo los hallado,

- $f=(x^2-4x+1)(x-1)(x^2+x-1)$ es la factorización en $\mathbb{Q}[x]$
- $f=(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})(x-1)(x-(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}))(x-(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}))$ es la factorización en $\mathbb{R}[x];\mathbb{C}[x]$

7.33.B. Pregunta ii

Se que $1+2i$ es raíz $\iff 1-2i$ es raíz $\implies (x-(1+2i))(x-(1-2i))|f$

Luego $(x-(1+2i))(x-(1-2i))=x^2-2x+5$

Usando el algoritmo de división obtengo que $f=(x^2-2x+5)(x^3+2x^2-2x+3)$

Defino $g=x^3+2x^2-2x+3$

Por el lema de Gauss, las posibles raíces enteras de g son $\{\pm 1;\pm 3\}$

Evaluando, obtengo que -3 es raíz de g

Usando ruffini, $g=(x+3)(x^2-x+1)$

Sea ahora $h = x^2 - x + 1$, busco sus raíces usando la resolvente cuadrática.

$h(x) = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

Luego $h = (x - (\frac{1+\sqrt{3}i}{2}))(x - (\frac{1-\sqrt{3}i}{2}))$

Con todo lo hallado armo las factorizaciones.

- $f = (x^2 - 2x + 5)(x + 3)(x^2 - x + 1)$ es la factorización en $\mathbb{Q}[x]$
- $f = (x^2 - 2x + 5)(x + 3)(x^2 - x + 1)$ es la factorización en $\mathbb{R}[x]$
- $f = (x - (1 + 2i))(x - (1 - 2i))(x + 3)(x - (\frac{1+\sqrt{3}i}{2}))(x - (\frac{1-\sqrt{3}i}{2}))$ es la factorización en $\mathbb{C}[x]$

7.33.C. Pregunta iii

Se que a es raíz con $mult(a, f) = n \iff f^n(a) = 0 \wedge f^{n+1}(a) \neq 0$

Luego busco la multiplicidad de $\sqrt{2}i$ sabiendo que es raíz multiple $\implies f(a) = 0 \wedge f'(a) = 0$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 30x^4 + 20x^3 + 60x^2 + 24x + 16 \\
f''(\sqrt{2}i) &= 30(\sqrt{2}i)^4 + 20(\sqrt{2}i)^3 + 60(\sqrt{2}i)^2 + 24(\sqrt{2}i) + 16 \\
&= 30.4 - 20\sqrt{8}i - 60.2 + 24(\sqrt{2}i) + 16 \\
&= 120 - 40\sqrt{2}i - 120 + 24(\sqrt{2}i) + 16 \\
&= -40\sqrt{2}i + 24(\sqrt{2}i) + 16 \neq 0 \implies mult(\sqrt{2}i, f) = 2
\end{aligned}$$

Luego $(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i)|f \implies (x^2 + 2)^2|f \implies x^4 + 4x^2 + 4|f$

Usando ahora el algoritmo de división, $f = (x^4 + 4x^2 + 4)(x^2 + x + 1)$

Defino $g = x^2 + x + 1$ y busco sus raíces usando la resolvente cuadrática.

Luego $g = (x - (\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}))(x - (\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}))$

Con lo hallado armo las factorizaciones.

- $f = (x^2 + x + 1)(x^2 + 2)^2$ es la factorización en $\mathbb{Q}[x]; \mathbb{R}[x]$
- $f = (x - (\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}))(x - (\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}))(x - \sqrt{2}i)^2(x + \sqrt{2}i)^2$ es la factorización en $\mathbb{C}[x]$

7.33.D. Pregunta iv

Se que existe una raíz imaginaria pura, es decir del tipo bi

Luego bi es raíz de sii,

$$\begin{aligned}
f(bi) = 0 &\iff (bi)^4 + 2(bi)^3 + 3(bi)^2 + 10(bi) - 10 = 0 \\
&\iff b^4 - 2b^3i - 3b^2 + 10bi - 10 = 0 \\
&\iff b^4 - 3b^2 - 10 + (-2b^3 + 10b)i = 0 \\
&\iff \begin{cases} b^4 - 3b^2 - 10 = 0 \\ -2b^3 + 10b = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

De la segunda ecuación obtengo que $b = 0 \vee b = \pm\sqrt{5}$

Reemplazando en la primera $b = 0 \implies 0^4 - 3.0^2 - 10 = -10 \neq 0 \implies b = 0$ no sirve.

Y reemplazando en la primera $b = \sqrt{5} \implies (\sqrt{5})^4 - 3(\sqrt{5})^2 - 10 = 0 \implies b = \sqrt{5}$ sirve.

Luego $\pm\sqrt{5}i$ son raíces de f $\iff$ $(x - \sqrt{5}i)(x + \sqrt{5}i)|f$

Por lo tanto, $(x - \sqrt{5}i)(x + \sqrt{5}i) = (x^2 + 5)|f$

Usando el algoritmo de division, obtngo que $f = (x^2 + 5)(x^2 + 2x - 2)$

Defino $g = x^2 + 2x - 2$ y busco sus raíces usando la resolvente cuadrática.

Luego $g = (x - 1)(x + 3)$

Con lo hallado armo las factorizaciones.

- $f = (x^2 + 5)(x - 1)(x + 3)$ es la factorización en $\mathbb{Q}[x]; \mathbb{R}[x]$
- $f = (x - \sqrt{5}i)(x + \sqrt{5}i)(x - 1)(x + 3)$ es la factorización en $\mathbb{C}[x]$

7.33.E. Pregunta v

Se que sea g un polinomio, $g|f \wedge g|x^3 + 1 \implies g|(f : x^3 + 1)$, luego busco $MCD(f, x^3 + 1)$

Usando el algoritmo de Euclides, $MCD(f, x^3 + 1) = x^2 - x + 1$

Por lo tanto, se que $x^2 - x + 1|f$

Usando el algoritmo de división, $f = (x^2 - x + 1)(x^3 - 2x^2 - 5x + 10)$

Defino $h = x^3 - 2x^2 - 5x + 10$ y busco sus raíces.

Usando el lema de Gauss obtengo posibles candidatos a raíces enteras: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$

Evaluando en los candidatos obtengo que $x = 2$ es raíz de h.

Usando Ruffini, $h = (x - 2)(x^2 - 5)$

Defino $k = x^2 - 5$ y busco sus raíces usando la resolvente cuadrática.

Luego, $k = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$

Defino $m = x^2 - x + 1$ y busco sus raíces usando la resolvente cuadrática.

Luego, $m = (x - (\frac{1+\sqrt{3}i}{2}))(x - (\frac{1-\sqrt{3}i}{2}))$

Con todo lo hallado armo las factorizaciones.

- $f = (x^2 - x + 1)(x - 2)(x^2 - 5)$ es la factorización en $\mathbb{Q}[x]$
- $f = (x^2 - x + 1)(x - 2)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$ es la factorización en $\mathbb{R}[x]$
- $f = (x - (\frac{1+\sqrt{3}i}{2}))(x - (\frac{1-\sqrt{3}i}{2}))(x - 2)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$ es la factorización en $\mathbb{C}[x]$

7.34. Ejercicio 34

$a \in \mathbb{Q}$ es raíz doble $f(a) = 0 \wedge f'(a) = 0 \wedge f''(a) \neq 0$

Luego,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 3(a + 4)x^2 + 2(4a + 5)x - (5a + 2) \\ f''(x) &= 12x^2 - 6(a + 4)x + 8a + 10 \end{aligned}$$

Ahora busco los a que cumplan lo pedido, evalúo f en a,

$$\begin{aligned} f(a) = 0 &\iff a^4 - (a + 4)a^3 + (4a + 5)a^2 - (5a + 2)a + 2a = 0 \\ &\iff a^4 - a^4 - 4a^3 + 4a^3 + 5a^2 - 5a^2 - 2a + 2a = 0 \\ &\iff 0 = 0 \end{aligned}$$

Luego $f(a) = 0; \forall a \in \mathbb{Q}$

Ahora evalúo f' en a,

$$\begin{aligned} f'(a) = 0 &\iff 4a^3 - 3(a+4)a^2 + 2(4a+5)a - (5a+2) = 0 \\ &\iff 4a^3 - 3a^3 - 12a^2 + +8a^2 + 10a - 5a - 2 = 0 \\ &\iff a^3 - 4a^2 + 5a - 2 = 0 \end{aligned}$$

Luego busco las raíces enteras de $g = a^3 - 4a^2 + 5a - 2$

Usando el lema de Gauss, los candidatos son: $\{\pm 1, \pm 2\}$

Evaluando obtengo que 1 es raíz de g. Usando Ruffini obtengo que,

$g = (a-1)(a^2 - 3a + 2)$

Luego defino $h = a^2 - 3a + 2$ y busco sus raíces usando la resolvente cuadrática.

Obtengo que $h = (a-1)(a-2)$

Por lo tanto, $g = (a-1)^2(a-2)$

Entonces los únicos valores de a tales que la derivada primera se anula son $a = 1; a = 2$

Ahora, para que sean raíces dobles no deben anular la derivada segunda,

$$\begin{aligned} f''(1) \neq 0 &\iff 12.1^2 - 6(1+4)1 + 8.1 + 10 \neq 0 \\ &\iff 12 - 30 + 8 + 10 \neq 0 \\ &\iff 0 \neq 0 \end{aligned}$$

Luego $a = 1$ no cumple lo pedido.

$$\begin{aligned} f''(2) \neq 0 &\iff 12.2^2 - 6(2+4)2 + 8.2 + 10 \neq 0 \\ &\iff 12.4 - 6.6.2 + 8.2 + 10 \neq 0 \\ &\iff 48 - 72 + 16 + 10 \neq 0 \\ &\iff 2 \neq 0 \end{aligned}$$

Luego $a = 2$ cumple lo pedido.

Entonces, $f = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$

Se que $a = 2$ es raíz doble $\iff (x-2)^2 | f \iff (x^2 - 4x + 4) | f$

Usando el algoritmo de división, $f = (x-2)^2(x^2 - 2x + 1)$

Y se ve que $x^2 - 2x + 1$ tiene forma del binomio cuadrático $(x-1)^2$

Por lo tanto, $f = (x-2)^2(x-1)^2$ es la factorización de f en $\mathbb{Q}[x]; \mathbb{R}[x]; \mathbb{C}[x]$

7.35. Ejercicio 35

Se que $w \in G_6$ es raíz de f pero $w \notin G_3$

Luego $w^6 = 1 \implies (w^2)^3 = 1 \iff w^2 = 1 \implies w = -1$

Entonces busco $a \in \mathbb{C} : (x+1) | f$

$$\begin{aligned} f(-1) = 0 &\iff 1 - 1 - 3 - 2 + 1 + 3 + a = 0 \\ &\iff -1 + a = 0 \\ &\iff a = 1 \end{aligned}$$

Luego $f = x^6 + x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 3x + 1$

Usando el lema de Gauss y Ruffini obtengo las raíces enteras y la factorización de f.

Luego $f = (x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+2x-1)$

Usando la resolvente cuadrática,

$(x^2-x+1) = (x-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}))(x-(-1-\sqrt{2}))$

$(x^2+2x-1) = (x-(-1-\sqrt{2}))(x-(\sqrt{2}-1))$

Luego,

- $f = (x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+2x-1)$ es la factorización en $\mathbb{Q}[x]$
- $f = (x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x-(-1-\sqrt{2}))(x-(\sqrt{2}-1))$ es la factorización en $\mathbb{R}[x]$
- $f = (x-1)(x+1)(x-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}))(x-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}))(x-(-1-\sqrt{2}))(x-(\sqrt{2}-1))$ es la factorización en $\mathbb{C}[x]$

7.36. Ejercicio 36

7.36.A. Pregunta i

Por TFA se que $x^2|(f:f')$ y que $(x^2+1)|(f:f')$

Luego,

$$\begin{aligned}
f(0) = 0 \wedge f'(0) = 0 \wedge mult(0, f') = 2 &\implies mult(0, f) = 3 \\
f(1) = 0 \wedge f'(1) = 0 \wedge mult(1, f') = 1 &\implies mult(1, f) = 2 \\
f(-1) = 0 \wedge f'(-1) = 0 \wedge mult(-1, f') = 1 &\implies mult(-1, f) = 2
\end{aligned}$$

Por lo tanto para cumplir la primer condición, $f = x^3(x-1)^2(x+1)^2$ es el de menor grado que cumple lo pedido.

7.36.B. Pregunta ii

$$\begin{aligned}
(f:f') &= x^5 - 5x^4 + \frac{25}{4}x^3 \\
(f:f') &= x^3(x^2 - 5x + \frac{25}{4}) \\
(f:f') &= x^3(x - \frac{5}{2})^2
\end{aligned}$$

Luego $f = x^4(x-\frac{5}{2})^3$

$$\begin{aligned}
f(1) = 3 &\iff a.1.(1-\frac{5}{2})^3 = 3 \\
&\iff a.(-\frac{3}{2})^3 = 3 \\
&\iff a = 3.-\frac{8}{23} = -\frac{8}{9}
\end{aligned}$$

Luego $f = -\frac{8}{9}x^3(x-\frac{5}{2})^2$

7.36.C. Pregunta iii

TODO

7.36.D. Pregunta iv

TODO

7.37. Ejercicio 37

Sea $g = \alpha x^3 + \beta x^2 + \sigma x + \theta$ un polinomio genérico de grado 3 con raíces a, b, c

$$\begin{aligned} g &= \alpha((x-a)(x-b)(x-c)) \\ &= \alpha((x^2 - bx - ax + ab)(x-c)) \\ &= \alpha(x^3 - x^2c - bx^2 + bcx - ax^2 + acx + abx - abc) \\ &= \alpha(x^3 + (-a-b-c)x^2 + (bc+ac+ab)x - abc) \\ &= \alpha x^3 + \alpha(-a-b-c)x^2 + \alpha(bc+ac+ab)x - \alpha abc \end{aligned}$$

Luego,

- $-\frac{\beta}{\alpha} = a + b + c$
- $\frac{\sigma}{\alpha} = bc + ac + ab$
- $-\frac{\theta}{\alpha} = abc$

Ahora sea $f = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1 \implies \alpha = 2; \beta = -3; \sigma = 4; \theta = 1$ con a, b, c raíces de f.

- $a + b + c = \frac{3}{2}$
- $ab + ac + bc = \frac{4}{2} = 2$
- $abc = -\frac{1}{2}$

7.38. Ejercicio 38

7.38.A. Pregunta i

Se que tiene una raíz real, luego $\exists a \in \mathbb{R} : f(a) = 0$, la busco.

$$\begin{aligned} f(a) = 0 &\iff a^4 - (i+4)a^3 + (8+4i)a^2 - (2i+24)a + 12 = 0 \\ &\iff a^4 - a^3 i + 4a^3 + 8a^2 + 4a^2 i - 2ai - 24a + 12 = 0 \\ &\iff (a^4 + 4a^3 + 8a^2 - 24a + 12) + (-a^3 + 4a^2 - 2a)i = 0 \\ &\iff \begin{cases} a^4 + 4a^3 + 8a^2 - 24a + 12 = 0 \\ -a^3 + 4a^2 - 2a = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Del sistema obtengo que $a = 2 \pm \sqrt{2}$ cumplen lo pedido

Luego $(x - (2 + \sqrt{2}))(x - (2 - \sqrt{2}))|f \iff (x^2 - 4x + 2)|f$

Usando el algoritmo de división, $f = (x^2 - 4x + 2)(x^2 - ix + 6)$

Defino $g = x^2 - ix + 6$ y busco sus raíces usando la resolvente cuadrática.

Luego $g = (x - 3i)(x + 3i)$

Y por lo tanto, $f = (x - (2 + \sqrt{2}))(x - (2 - \sqrt{2}))(x - 3i)(x + 3i)$ es la factorización de f en $\mathbb{C}[x]$

7.38.B. Pregunta ii

TODO

7.39. Ejercicio 39

TODO