Final 28/07/2021

2do cuatrimestre 2021 Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

Índice

1. Final 28/07/2021

1.1. Ejercicio 1

Demostración usando el principio de inducción

Defino $p(n) : \begin{cases} a_n \in \mathbb{Z} \\ 5^n | a_n & \forall n \in \mathbb{N}_0 \\ 5^{n+1} \not| a_n \end{cases}$

Luego $p(n)$ será verdadero si las tres condiciones son verdaderas.

Casos base n = 0; n = 1

$p(0) : \begin{cases} a_0 \in \mathbb{Z} \iff 1 \in \mathbb{Z} \\ 5^0 | a_0 \iff 1|1 \\ 5^{0+1} \not| a_0 \iff 5 \not| 1 \end{cases}$

Luego $p(0)$ es verdadero.

$p(1) : \begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z} \iff -5 \in \mathbb{Z} \\ 5^1 | a_1 \iff 5|5 \\ 5^{1+1} \not| a_1 \iff 25 \not| 5 \end{cases}$

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Dado $h \geq 0$ quiero probar que $p(h) \wedge p(h+1) \implies p(h+2)$

HI: $p(h) : \begin{cases} a_h \in \mathbb{Z} \\ 5^h | a_h \\ 5^{h+1} \not| a_h \end{cases} \qquad p(h+1) : \begin{cases} a_{h+1} \in \mathbb{Z} \\ 5^{h+1} | a_{h+1} \\ 5^{h+2} \not| a_{h+1} \end{cases}$

Luego busco probar que $p(h+2)$ es verdadero $\iff \begin{cases} a_{h+2} \in \mathbb{Z} \\ 5^{h+2} | a_{h+2} \\ 5^{h+3} \not| a_{h+2} \end{cases}$

Pero,

$$a_{h+2} = \frac{a_{h+1}^3}{5} + 75a_h$$

Y ahora pruebo cada condición en particular.

$$\begin{aligned} a_{h+2} \in \mathbb{Z} &\iff \frac{a_{h+1}^3}{5} + 75a_h \in \mathbb{Z} \\ &\iff \frac{a_{h+1}^3}{5} \in \mathbb{Z} \\ &\iff 5 | a_{h+1}^3 \end{aligned}$$

Pero por HI,

$$\begin{aligned} 5^{h+1} | a_{h+1} &\iff a_{h+1} = 5^{h+1} \cdot k \\ &\iff a_{h+1} = 5^h \cdot 5 \cdot k \\ &\iff a_{h+1} = (5^h \cdot k) \cdot 5 \\ &\iff 5 | a_{h+1} \end{aligned}$$

Y por propiedades de divisibilidad, $5|a \implies 5|\sigma a, \forall \sigma \in \mathbb{Z}$, en particular, $5|a_{h+1}^3$ como se quería probar.

Luego $a_{h+2} \in \mathbb{Z}$

Ahora quiero saber si $5^{h+2}|a_{h+2}$

Por definición $a_{h+2} = \frac{a_{h+1}^3}{5} + 75a_h$

Luego quiero probar que $5^{h+2}|\frac{a_{h+1}^3}{5} + 75a_h$

Pero $75a_h = 25.3.a_h$ y se que $5^h|a_h$, luego

$$\begin{aligned} a_h &= 5^h.p_1^h...p_m^{r_m} \\ 7a_h &= 5^2.5^h.p_1^h...p_m^{r_m} \\ 7a_h &= 5^{h+2}.p_1^h...p_m^{r_m} \\ \implies & 5^{h+2}|75a_h \end{aligned}$$

Entonces, necesito probar que $5^{h+2}|\frac{a_{h+1}^3}{5}$

Pero se que

$$\begin{aligned} 5^{h+1}|a_{h+1} &\iff a_{h+1} = 5^{h+1}.p_1^{r_1}...p_m^{r_m} \\ &\iff a_{h+1}^3 = 5^{3(h+1)}.p_1^{3r_1}...p_m^{3r_m} \\ &\iff \frac{a_{h+1}^3}{5} = 5^{3(h+1)-1}.p_1^{3r_1}...p_m^{3r_m} \end{aligned}$$

Luego $5^{h+2}|\frac{a_{h+1}^3}{5} \iff 3(h+1)-1 \geq h+2 \iff 3h+3-1 \geq h+2 \iff 2h \geq 0$

Que es verdadero, $\forall h \geq 0$

Luego $5^{h+2}|a_{h+2}$ como se quería probar.

Por ultimo quiero ver que $5^{h+3} \not| a_{h+2} \iff 5^{h+3} \not| \frac{a_{h+1}^3}{5} + 75a_h$

Por inciso anterior, $5^{h+3}|\frac{a_{h+1}^3}{5}$ pero $5^{h+3} \not| 5^{h+2}.3.p_1^{r_1}...p_m^{r_m}$

Y como divide a uno de los sumandos pero no al otro, $5^{h+2}|a_{h+2}$ como se quería probar.

Por lo tanto queda probado el paso inductivo y así $p(n)$ es verdadero $\forall n \in \mathbb{N}_0$

1.2. Ejercicio 3

Busco el polinomio f de grado mínimo mónico tal que:

- (a) f tiene copmo raíz a alguna raíz sexta de la unidad
- (b) $(f : f') = x^2(x^2+1)$
- (c) $x - \sqrt{3}|f$ en $\mathbb{R}[x]$

Por (a) se que f tiene raíz $a/a^6 = 1$, pero $f \in \mathbb{Q}[x] \implies a \in \mathbb{Q} \iff a = \pm 1$

Por (b) se que $x^2|f' \implies x^3|f$ y $x^2+1|f' \iff (x^2+1)^2|f$

Luego $f = (x \pm 1)x^3(x^2+1)^2$

Por (c) $x - \sqrt{3}|f$ pero como $f \in \mathbb{Q} \implies (x^2-3)|f$

Así, $f = (x-1)x^3(x^2+1)^2(x^2-3)$ cumple lo pedido

1.3. Ejercicio 4

Por lema de Gauss, si f tiene una raíz racional, $\frac{c}{d} \implies c|p \wedge d|1$

Luego los posibles candidatos son $\{\pm 1, \pm p\}$

Evaluando obtengo que $p = 17$ es el único primo tal que f admite una raíz racional positiva $a = 1$

Busco ahora la factorización de f.

Se que $(x - 1)|f$

Usando Ruffini, $f = (x - 1)(x^3 - x^2 - 17x + 17)$

Defino $g = x^3 - x^2 - 17x + 17$ y a ojo veo que $g(1) = 0 \implies (x - 1)|g$

Usando Ruffini, $g = (x - 1)(x^2 - 17)$

Defino $h = x^2 - 17$ y busco sus raíces usando la resolvente cuadrática.

Luego $h = (x -\sqrt{17})(x +\sqrt{17})$

Usando todo lo hallado armo las factorizaciones.

- $f = (x - 1)(x - 1)(x -\sqrt{17})(x +\sqrt{17})$ es la factorización en $\mathbb{R}[x]; \mathbb{C}[x]$
- $f = (x - 1)(x - 1)(x^2 - 17)$ es la factorización en $\mathbb{Q}[x]$