Final 04/08/2021

2do cuatrimestre 2021 Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

Índice

1. Final 08/04/2021

1.1. Ejercicio 1

Tengo $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ y $f(a, b) = 18a + 60b$

1.1.A. Pregunta i

Me piden decidir si f es inyectiva, si no lo es describir $\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 / f(a, b) = 0\}$

Por definición, una función h es inyectiva $\iff \forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 : h(a) = h(b) \implies a = b$

Pues las inyecctivas son aquellas funciones que asignan a lo sumo 1 elemento del codominio a cada una del dominio.

Luego debo ver si $f(a, b) = 18a + 60b$ es inyectiva. Dados $\alpha, \beta, \sigma, \rho \in \mathbb{Z}$

$$f(\alpha, \beta) = 18\alpha + 60\beta$$
$$f(\sigma, \rho) = 18\sigma + 60\rho$$

Luego,

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) = f(\sigma, \rho) &\iff 18\alpha + 60\beta = 18\sigma + 60\rho \\ &\iff 18\alpha - 18\sigma = 60\rho - 60\beta \\ &\iff 18(\alpha - \sigma) = 60(\rho - \beta) \\ &\iff 3(\alpha - \sigma) = 10(\rho - \beta) \end{aligned}$$

Por lo tanto a ojo veo que valen todas las soluciones tales que $(\alpha - \sigma = 10) \wedge (\rho - \beta = 3)$

Contrejemplo: Sean $\alpha = 11 \wedge \sigma = 1 \wedge \rho = 4\beta = 1$

Luego,

$$f(\alpha, \beta) = 18\alpha + 60\beta = 18.11 + 60.1 = 258$$
$$f(\sigma, \rho) = 18\sigma + 60\rho = 18.1 + 60.4 = 258$$

Pero $(11, 1) \neq (1, 4)$

Por lo tanto f no es inyectiva.

Ahora busco $(a, b)/f(a, b) = 0 \iff 18a + 60b = 0$

Verifico que existe solución

Hay solución, pues $(18 : 60)|0 \iff (3^2.2 : 3.2^2.5) = 3.2 = 6|0$

Coprimizo la ecuación

$18a + 60b = 0 \iff 3a + 10b = 0$

Armo conjunto solución

El conjunto de soluciones es $S_0 = (10k; -3k) \forall k \in \mathbb{Z}$

Verifico que son soluciones

$a = 10k \wedge b = -3k \implies 18a + 60b = 18(10k) + 60(-3k) = 180k - 180k = 0$

Por lo tanto $f(a, b) = 0 \iff (a, b) \in \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / x = 10k \wedge y = -3k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$

1.1.B. Pregunta ii

Por definición, f es sobreyectiva $\iff \forall x \in \mathbb{Z}, \exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2 : f(a, b) = x$

Se que una ecuación diofántica $ax + by = c$ tiene solución cuando $(x : y)|c$

Luego $18a + 60b = c$ no tiene solución cuando $(18 : 60) \not| c$. Por ejemplo, $18a + 60b = 5$ no tiene solución, pues $6 \not| 5$

Así, $\nexists (a, b) \in \mathbb{Z}^2 / f(a, b) = 5 \implies f$ no es sobreyectiva.

Y la $Im(f) = \{x \in \mathbb{Z} : x = 6k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$

1.2. Ejercicio 2

Se que $a \in \mathbb{Z} \wedge 96a \equiv 51(27)$

Defino $d = (4a^2 - a + 3 : 16a^2 + 9)$

Reescribo la congruencia que me dieron

$$\begin{aligned} 96a \equiv 51(27) &\iff 15a \equiv 24(27) \\ &\iff 5a \equiv 8(9) \\ &\iff a \equiv 7(9) \end{aligned}$$

Usando el algoritmo de Euclides, llego a que $d|9 \implies d \in \{1, 3, 9\}$

Caso d = 3

Se que $a \equiv 7(9) \implies a \equiv 1(3)$

$$\begin{aligned} 3|4a^2 - a + 3 &\iff 4a^2 - a + 3 \equiv 0(3) \\ &\iff 1^2 - 1 + 0 \equiv 0(3) \\ &\iff 0 \equiv 0(3) \end{aligned}$$

Y,

$$\begin{aligned} 3|16a^2 + 9 &\iff 16a^2 + 9 \equiv 0(3) \\ &\iff 1^2 + 0 \equiv 0(3) \\ &\iff 1 \equiv 0(3) \end{aligned}$$

Luego $d \neq 3$ y por lo tanto, $d \neq 9$. Así,

Rta.: $(4a^2 - a + 3 : 16a^2 + 9) = 1$

1.3. Ejercicio 4

$f_1 = x^2 - 6x + 9$ y $f_2 = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$ y $f_{n+2} = (x^2 - 9)f_{n+1} \cdot f_n'' + f_{n+1}' \cdot f_n' + f_n^2(x - 2)^n$

Por multiplicidad de raíces, se que $mult(3, f) = 2 \iff \begin{cases} f(3) = 0 \\ f'(3) = 0 \\ f''(3) \neq 0 \end{cases}$

Voy a hacer la prueba por inducción

Defino $p(n) : mult(3, f_n) = 2; \forall n \in \mathbb{N}$

Casos base n = 1, n = 2

$p(1) : mult(3, f_1) = 2 \iff \begin{cases} f_1(3) = 0 \iff 9 - 18 + 9 = 0 \\ f_1'(3) = 0 \iff 6 - 6 = 0 \\ f_1''(3) \neq 0 \iff 2 \neq 0 \end{cases}$

Luego $p(1)$ es verdadero.

$p(n) : mult(3, f_n) = 2 \iff \begin{cases} f_2(3) = 0 \iff 27 - 45 + 9 + 9 = 0 \\ f_2'(3) = 0 \iff 27 - 30 + 3 = 0 \\ f_2''(3) \neq 0 \iff 18 - 10 \neq 0 \end{cases}$

Luego $p(2)$ es verdadero.

Paso inductivo

Dado $h \geq 1$ quiero probar que $p(h) \wedge p(h+1) \implies p(h+2)$

HI: $mult(3, f_h) = 2$ y $mult(3, f_{h+1}) = 2$

Qpq: $mult(3, f_{h+2}) = 2$

Se que $mult(3, f) = x \implies mult(3, f') = x - 1$

Luego

- $f_h = (x-3)^2 \cdot k$ con $(x-3) \not| k$
- $f'_h = (x-3) \cdot q$ con $(x-3) \not| q$
- $f''_h = r$ con $(x-3) \not| r$
- $f_{h+1} = (x-3)^2 \cdot t$ con $(x-3) \not| t$
- $f'_{h+1} = (x-3) \cdot u$ con $(x-3) \not| u$
- $f''_{h+1} = v$ con $(x-3) \not| v$

Reescribo f_{h+2},

$$\begin{aligned} f_{h+2} &= (x+3)(x-3)(x-3)^2 tr + (x-3)q(x-3)u + (x-3)^4 k^2 (x-2)^n \\ &= (x-3)^2 \left[(x+3)(x-3)tr + qu + (x-3)^2 k^2 (x-2)^n\right] \end{aligned}$$

Luego se que $(x-3)^2 | f_{h+2} \implies mult(3, f_{h+2}) \geq 2$

Falta ver que $(x-3) \not| \left[(x+3)(x-3)tr + qu + (x-3)^2 k^2 (x-2)^n\right]$

Pero $\begin{cases} (x-3) | (x+3)(x-3)tr \\ (x-3) | (x-3)^2 k^2 (x-2)^n \\ (x-3) \not| qu \end{cases}$ Luego $mult(3, f_{h+2}) = 2$ como se quería probar.