DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

# Final 21/10/2021

2do cuatrimestre 2021 | Álgebra I

| Integrante | LU | Correo electrónico |
|---|---|---|
| Yago Pajariño | 546/21 | `ypajarino@dc.uba.ar` |

**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

# Índice

**1. Final 21/10/2021** **2**

1.1. Ejercicio 1 . . . . . . . . . . 2

1.1.A. Pregunta i . . . . . . . . . . 2

1.2. Ejercicio 2 . . . . . . . . . . 3

1.3. Ejercicio 3 . . . . . . . . . . 4

1.4. Ejercicio 4 . . . . . . . . . . 5

# 1. Final 21/10/2021

## 1.1. Ejercicio 1

Por enunciado, se define la relación $R$ en $G_{50}$ como,

$$zRw \iff zw^{24} \in G_2$$

Por definición de raíces de la unidad, se que los elementos de $G_{50}$ son aquellos $\alpha \in \mathbb{C} : \alpha^{50} = 1$

Por lo tanto, es el conjunto de los elementos donde se define la relación, luego sean $\alpha, \beta \in G_{50}$ la relación se define como:

$$\begin{aligned}
\alpha R \beta &\iff \alpha\beta^{24} \in G_2 \\
&\iff (\alpha\beta^{24})^2 = 1 \\
&\iff \begin{cases} \alpha\beta^{24} = 1 \\ \alpha\beta^{24} = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

#### 1.1.A. Pregunta i

Busco probar que $R$ es una relación de equivalencia. Por definición, lo es si $R$ es reflexiva, transitiva y simétrica. Pruebo cada uno por separado.

**Reflexividad**

Por definición de reflexividad, $R$ es reflexiva $\iff \forall a \in G_{50} : aRa$

Por definición de $R$,

$$\begin{aligned}
aRa &\iff a.a^{24} \in G_2 \\
&\iff (a.a^{24})^2 = 1 \\
&\iff (a^{25})^2 = 1 \\
&\iff a^5 0 = 1
\end{aligned}$$

Y dado que $a \in G_{50} \implies a^{50} = 1$. Luego $R$ es reflexiva.

**Simetría**

Por definición de simetría, $R$ es simétrica $\iff \forall \alpha, \beta \in G_{50} : \alpha R \beta \implies \beta R \alpha$

Luego, por definición de $R$,

$$\begin{aligned}
\alpha R \beta &\iff (\alpha\beta^{24})^2 = 1 \\
&\iff \alpha^2\beta^{48} = 1 \\
&\iff (\alpha^2\beta^{48})^{-1} = 1^{-1} \\
&\iff \alpha^{-2}\beta^{-48} = 1 \\
&\iff \alpha^{48}\beta^2 = 1 \\
&\iff (\alpha^{24}\beta)^2 = 1 \\
&\iff \beta R \alpha
\end{aligned}$$

Luego $R$ es simétrica.

**Transitividad**

Por definición, $R$ es transitiva $\iff \forall a, b, c \in G_{50} : (aRb \wedge bRc) \implies aRc$

Luego por definición de la relación se que,

$$\begin{aligned}
aRb &\iff ab^{24} \in g_2 \\
bRc &\iff bc^{24} \in g_2
\end{aligned}$$

Y quiero ver que $ac^{24} \in G_2$

Pero,

$$\begin{aligned}(ab^{24})^2 = 1 \wedge (bc^{24})^2 = 1 &\implies (ab^{24})^2 \cdot (bc^{24})^2 = 1\\ &\iff (ab^{24} \cdot bc^{24})^2 = 1\\ &\iff ab^{24} \cdot bc^{24} \in G_2\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}ab^{24} \cdot bc^{24} \in G_2 &\iff (ab^{24} \cdot bc^{24})^2 = 1\\ &\iff (ab^{25}c^{24})^2 = 1\\ &\iff (b^{25})^2 \cdot (ac^{24})^2 = 1\\ &\iff 1 \cdot (ac^{24})^2 = 1\\ &\iff (ac^{24})^2 = 1\\ &\iff aRc\end{aligned}$$

Como se quería probar, luego $R$ es transitiva.

Probado que $R$ es reflexiva, simétrica y transitiva; $R$ es una relación de equivalencia.

## 1.2. Ejercicio 2

Demostración usando el principio de inducción.

Defino $p(n) : F_n = \frac{L_{n-1}+L_{n+1}}{5}; \forall n \geq 1$

**Caso base n = 1, n = 2**

Por definición, p(1)

$$\begin{aligned}p(1) : F_1 &= \frac{L_{1-1} + L_{1+1}}{5}\\ F_1 &= \frac{L_0 + L_2}{5}\\ F_1 &= \frac{2+3}{5}\\ F_1 &= 1\end{aligned}$$

Por enunciado, $F_1 = 1$ luego $p(1)$ es verdadero.

p(2)

$$\begin{aligned}p(2) : F_2 &= \frac{L_{2-1} + L_{2+1}}{5}\\ F_2 &= \frac{L_1 + L_3}{5}\\ F_2 &= \frac{1+4}{5}\\ F_2 &= 1\end{aligned}$$

Por enunciado, $F_2 = F_0 + F_1 = 1$, luego $p(2)$ es verdadero.

**Paso inductivo**

Busco probar que dado $h \geq 1 : (p(h) \wedge p(h+1)) \implies p(h+2)$

HI:
$F_h = \frac{L_{h-1}+L_{h+1}}{5}$
$F_{h+1} = \frac{L_h+L_{h+2}}{5}$

Qpq: $F_{h+2} = \frac{L_{h+1}+L_{h+3}}{5}$

Pero,

$$\begin{aligned} F_{h+2} &= F_h + F_{h+1} \\ &= \frac{L_{h-1}+L_{h+1}}{5} + \frac{L_h+L_{h+2}}{5} \\ &= \frac{L_{h-1}+L_{h+1}+L_h+L_{h+2}}{5} \\ &= \frac{L_{h+1}+L_{h+3}}{5} \end{aligned}$$

Como se quería probar, luego vale el paso inductivo.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

## 1.3. Ejercicio 3

Busco determinar todos los $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tales que:

$$(a:b) = -2a + b \wedge [a:b] = 83a$$

Rdo.: $(a:b)[a:b] = ab$

Usnado esto,

$$\begin{aligned} (a:b)[a:b] = ab &\iff (-2a+b)(83a) = ab \\ &\iff (-2a+b)83 = b \\ &\iff -166a + 83b = b \\ &\iff -166a + 82b = 0 \end{aligned}$$

Entonces, busco los $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ que cumplen la ecuación diofácntica $-166a + 82b = 0$

**Verifico que existe solución**

Existe solución, pues $MCD(166, 82) = 2|0$

**Coprimizo la ecuación**

$-166a + 82b = -83a + 41b = 0$

**Armo el conjunto solución**

$s = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 : a = 41k \wedge b = 83k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$

Para los valores hallados de $a$ y $b$ busco aquellos que cumplen con el MCD y el MCM

$$(a,b) = (41k, 83k) \implies \begin{cases} (a:b) = (41k:83k) = k(41:83) = k \\ [a:b] = [41k:83k] = k[41:83] = k.41.83 \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned} -2a + b = k &\iff -2(41k) + 83k = k \\ &\iff -82k + 83k = k \\ &\iff k = k \end{aligned}$$

Y,

$$83a = k.41.83 \iff a = 41k$$

Por lo tanto $\{(a,b) : a = 41k \wedge b = 83k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$ son todos los que cumplen lo pedido

## 1.4. Ejercicio 4

Se que $(x-a)^3|f$ y que $(x-a)^2|f' \iff f' = (x-a)^2.q$ con $q(a) \neq 0$

Luego $q = (x-a)k + r$ y por algoritmo de división se que $r = 0$ o $gr(r) < 1$

Por lo tanto,

$$f' = (x-a)^2 \cdot [(x-a)k + r]\, f' = (x-a)^3 k + (x-a)^2 r$$

Luego $(x-a)^2 r$ es el resto de dividir a $f'$ por $(x-a)^3$ y $r \in \mathbb{C}$