DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Final 14/05/2021

2do cuatrimestre 2021 Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

Índice

1. Final 14/05/2021

1.1. Ejercicio 1

Defino $p(n) : \frac{4^n}{n+1} < \binom{2n}{n}; \forall n \geq 2$

Caso base n = 2

$$\begin{aligned}
p(2) &: \frac{4^2}{2+1} < \binom{2.2}{2} \\
p(2) &: \frac{16}{3} < \binom{4}{2} \\
p(2) &: \frac{16}{3} < \frac{4!}{2!2!} \\
p(2) &: \frac{16}{3} < 6
\end{aligned}$$

$p(2)$ es verdadero.

Paso inductivo

Dado $h \geq 2$, quiero probar que $p(h) \implies p(h+1)$

HI: $\frac{4^h}{h+1} < \binom{2h}{h} \implies \frac{4^h}{h+2} < \binom{2h}{h}\frac{h+1}{h+2}$

QpQ: $\frac{4^{h+1}}{h+2} < \binom{2(h+1)}{h+1}$

Pero,

$$\begin{aligned}
\frac{4^{h+1}}{h+2} &= \frac{4^h}{h+2} \cdot 4 \\
&\leq \binom{2h}{h}\frac{h+1}{h+2} \cdot 4
\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned}
\binom{2h}{h}\frac{h+1}{h+2} \cdot 4 &< \binom{2(h+1)}{h+1} \\
\frac{(2h)!}{h!h!} \cdot \frac{h+1}{h+2} \cdot 4 &< \frac{(2h+2)!}{(h+1)!(h+1)!} \\
\frac{(2h)!(h+1)4}{h!h!(h+2)} &< \frac{(2h+2)(2h+1)(2h)!}{(h+1)h!(h+1)h!} \\
\frac{(h+1)4}{h+2} &< \frac{(2h+2)(2h+1)}{(h+1)^2} \\
(h+1)^3 \cdot 4 &< 2(h+1)(2h+1)(h+2) \\
(h+1)^2 \cdot \frac{4}{2} &< (2h+1)(h+2) \\
2h^2 + 4h + 2 &< 2h^2 + 4h + h + 2 \\
0 &< h
\end{aligned}$$

Dado que $h \geq 2$ qued probado el paso inductivo.

Luego $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

1.2. Ejercicio 2

Tengo el conjunto $X = P(\{1, 2, 3, ..., 12\})$. Se define R relación tal que $ARB \iff \#\text{pares}(A) = \#\text{pares}(B)$

1.2.A. Pregunta i

Voy a probar cada propiedad de la relación de equivalencia por separado.

Reflexividad

Por definición de reflexividad, R es reflexiva $\iff \forall A \in X : ARA$

Por definición de la relación, $ARA \iff \#\text{pares}(A) = \#\text{pares}(A)$

Dado que $A = A$, en particular tienen los mismos elementos pares, luego R es reflexiva.

Simetría

Por definición de simetría, R es simétrica $\iff \forall (A, B) \in X^2 : ARB \implies BRA$

Por definición de la relación, $ARB \iff \#\text{pares}(A) = \#\text{pares}(B)$

Y quiero probar que $BRA \iff \#\text{pares}(B) = \#\text{pares}(A)$

Pero,

$$\begin{aligned} ARB &\iff \#\text{pares}(A) = \#\text{pares}(B) \\ &\iff \#\text{pares}(B) = \#\text{pares}(A) \\ &\iff BRA \end{aligned}$$

Luego R es simétrica.

Transitividad

Por definición de transitividad, R es transitiva $\iff \forall (A, B, C) \in X^3 : (ARB \wedge BRC) \implies ARC$

Por definición de la relación,

$$\begin{aligned} ARB &\iff \#\text{pares}(A) = \#\text{pares}(B) \\ BRC &\iff \#\text{pares}(B) = \#\text{pares}(C) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} ARB \wedge BRC &\iff \#\text{pares}(A) = \#\text{pares}(B) \wedge \#\text{pares}(B) = \#\text{pares}(C) \\ &\implies \#\text{pares}(A) = \#\text{pares}(C) \\ &\implies ARC \end{aligned}$$

Luego R es transitiva.

Dado que R es reflexiva, simétrica y transitiva; R es una relación de equivalencia.

1.2.B. Pregunta ii

Veo que por definición de la relación, lo que determina que un conjunto pertenezca a una clase de equivalencia es la cantidad de pares que contenga.

Luego existen 7 clases de equivalencia: clases con elementos que contienen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 pares.

Luego la clase del $\#\{3 \text{ pares}\} = \binom{6}{3} \cdot 2^6 = 1280$ tiene más de 1000 elementos como se quería probar.

1.3. Ejercicio 3

Defino $d = (a^{60} + 6 : 560)$ y se que $560 = 7.2^4.5$

Luego la factorización en primos de d será:

$$d = 2^i \cdot 5^j \cdot 7^k \text{ con } \begin{cases} 0 \leq i \leq 4 \\ 0 \leq j \leq 1 \\ 0 \leq k \leq 1 \end{cases}$$

Estudio cada primo en particular.

Caso p = 5

$$\begin{aligned} 5|a^{60}+6 &\iff a^{60}+6 \equiv 0(5) \\ &\iff a^{60} \equiv 4(5) \\ &\iff \begin{cases} 0 \equiv 4(5) & 5|a \\ 1 \equiv 4(5) & 5 \not| a \text{ por PTF} \end{cases} \end{aligned}$$

En ambos casos se llega a un absurdo, luego $j = 0$

Caso p = 7

$$\begin{aligned} 7|a^{60}+6 &\iff a^{60}+6 \equiv 0(7) \\ &\iff a^{60} \equiv 1(7) \\ &\iff \begin{cases} 0 \equiv 1(7) & 7|a \\ 1 \equiv 1(7) & 7 \not| a \text{ por PTF} \end{cases} \end{aligned}$$

Luego $k = 0 \vee k = 1$

Caso p = 2

Si $a \equiv 0(2) \iff a = 2k$,

$$\begin{aligned} a^{60}+6 &\equiv 0^{60}+6 \equiv 0(2) \\ a^{60}+6 &\equiv (2k)^{2^{30}}+6 \equiv 2(4) \end{aligned}$$

Y si no es divisible por 4 tampoco lo es por 8 y por 16

Si $a \equiv 1(2)$,

$$a^{60}+6 \equiv 1^{60}+6 \equiv 1(2)$$

Luego si no es divisible por 2, tampoco lo será por 5, 8, 16

Luego $i = 0 \vee i = 1$

Por lo tanto, los posibles MCD son

- $k = 0 \wedge i = 0 \implies d = 1$
- $k = 0 \wedge i = 1 \implies d = 2$
- $k = 1 \wedge i = 0 \implies d = 7$
- $k = 1 \wedge i = 1 \implies d = 14$

1.4. Ejercicio 5

P tiene una raíz imaginaria pura $\iff \exists a \in \mathbb{R} : P(ai) = 0$

$$\begin{aligned} P(ai) = 0 &\iff (ai)^6 + (ai)^5 + 5(ai)^4 + 4(ai)^3 + 8(ai)^2 + 4(ai) + 4 = 0 \\ &\iff -a^6 + a^5 i + 5a^4 - 4a^3 i - 8a^2 + 4ai + 4 = 0 \\ &\iff (-a^6 + 5a^4 - 8a^2 + 4) + (a^5 - 4a^3 + 4a)i = 0 \\ &\iff \begin{cases} -a^6 + 5a^4 - 8a^2 + 4 = 0 \\ a^5 - 4a^3 + 4a = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

De donde se obtiene que $a = \sqrt{2}$

Luego $\sqrt{2}i$ es raíz de P $\iff$ $-\sqrt{2}i$ es raíz de P.

Por lo tanto $(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i)|P \iff (x^2+2)|P$

Usando el algoritmo de división de polinomios, $P = (x^2+2)(x^4+x^3+3x^2+2x+2)$

Y por enunciado se que son raíces múltiples, luego se que $(x^2+2)|(x^4+x^3+3x^2+2x+2)$

Usando el algoritmo de división, $P = (x^2+2)^2(x^2+x+1)$

Defino $g = x^2+x+1$ y busco sus raíces utilizando la resolvente cuadrática.

Obtengo que $g = (x - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))$

Por lo tanto,

- $P = (x - \sqrt{2}i)^2(x + \sqrt{2}i)^2(x - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))$ es la factorización en $\mathbb{C}[x]$
- $P = (x^2+2)^2(x^2+x+1)$ es la factorización en $\mathbb{Q}[x]; \mathbb{R}[x]$

Las raíces de P son sus multiplicidades son:

- $mult(\sqrt{2}i, f) = 2$
- $mult(-\sqrt{2}i, f) = 2$
- $mult(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, f) = 1$
- $mult(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, f) = 1$