DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Final 20/07/2021

2do cuatrimestre 2021 Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

Índice

1. Final 20/07/2021

1.1. Ejercicio 1

Busco funciones $f : A = \{1, 2, 3, 4, ..., 10, 11\} \to B = \{1, 2, 3, .., 24\}$ que cumplan:

- (a) f es inyectiva
- (b) $10 \leq f(2) \leq 20$
- (c) $f(3) + f(4) = 13$

Pero por definición, f es inyectiva $\iff \forall (a, b) \in A : f(a) = f(b) \implies a = b$

Es decir, cada elemento de A solo puede estar asociado a 0 o 1 de B

Por (b) al elemento 2 solo le puedo asignar uno de $\{10, 11, ..., 20\}$

Por (c), busco formas de sumar 13: $1 + 12; 2 + 11; 3 + 10; 4 + 9; 5 + 8; 6 + 7$ y las permutaciones. Luego hay 12 formas de sumar 13.

Luego separo en dos casos: el primero el caso en el que $f(3)$ o $f(4) \in \{10, 11, ..., 20\}$ y el segundo $f(3)$ o $f(4) \notin \{10, 11, ..., 20\}$

Caso 1

En este caso voy a tener 10 posibilidades para asignarle a 2 y 6 para $f(3); f(4)$

Quedarían $11 - 3 = 8$ elementos a los que asignar $24 - 3 = 21$ elementos.

Luego habrá $10.6.\frac{21!}{8!}$ funciones

Caso 2

En este caso hay 11 posibilidades para asignar al 2 y 6 posibilidades para $f(3); f(4)$

Luego habrá $11.6.\frac{21!}{8!}$ funciones

Por lo tanto en total habrá $10.6.\frac{21!}{8!} + 11.6.\frac{21!}{8!} = 21.6.\frac{21!}{8!}$ funciones.

1.2. Ejercicio 2

Busco p primos tales que $p^4 | 77^{p^2} + 91^{p-1} + 21! \cdot p \implies p | 77^{p^2} + 91^{p-1} + 21! \cdot p$

Se que $p | 21! \cdot p \implies p | 77^{p^2} + 91^{p-1}$ y $77 = 11.7; 91 = 13.7$

Caso $p = 7$

$77^{p^2} + 91^{p-1} \equiv 0(7)$

$p = 7$ es posible solución.

Caso $p = 11$

$77^{p^2} + 91^{p-1} \equiv 3^{10} \equiv 1(11)$

$p = 11$ NO es solución.

Caso $p = 13$

$77^{p^2} + 91^{p-1} \equiv (-1)^{13^2} \equiv -1(13)$

$p = 13$ NO es solución.

Caso $p \notin \{7, 11, 13\}$

$$\begin{aligned} 77^{p^2} + 91^{p-1} &\equiv (77^p)^p + 91^{p-1}(p) \\ &\equiv 77 + 1(p) \\ &\equiv 78(p) \end{aligned}$$

Luego $p | 78 \iff p | 2.3.13$

$p = 2 \implies 77^4 + 91 \equiv 1 + 1 \equiv 0(2)$
$p = 3 \implies 77^9 + 91^2 \equiv 2^9 + 1 \equiv 0(3)$

Luego $p = 2$ y $p = 3$ son posibles soluciones.

Por lo tanto, los posibles p son $2, 3, 7$

Ahora busco ver si para los p hallados $p^4 | 77^{p^2} + 91^{p-1} + 21! \cdot p$

Caso $p = 2$

$$\begin{aligned} p = 2 \implies 16 | 77^4 + 91 + 21!.2 &\iff 77^4 + 91 + 21!.2 \equiv 0(16) \\ &\iff 13^4 + 11 + 0 \equiv 0(16) \\ &\iff 1 + 11 + 0 \equiv 0(16) \\ &\iff 12 \equiv 0(16) \end{aligned}$$

Luego $p = 2$ NO es solución

Caso $p = 3$

$$\begin{aligned} p = 3 \implies 81 | 77^9 + 91^2 + 21!.3 &\iff 77^9 + 91^2 + 21!.3 \equiv 0(81) \\ &\iff 11^9.7^9 + 100 + 0 \equiv 0(81) \\ &\iff 26.55 + 100 + 0 \equiv 0(81) \\ &\iff 72 \equiv 0(81) \end{aligned}$$

Luego $p = 3$ NO es solución

Caso $p = 7$

$$\begin{aligned} p = 7 \implies 7^4 | 77^{7^2} + 91^6 + 21!.7 &\iff 77^{7^2} + 91^6 + 21!.7 \equiv 0(7^4) \\ &\iff (7^7.11^7)^7 + 7^6.13^6 + 7.3.20....15.7.2....8.7....1.7 \equiv 0(7^4) \\ &\iff 0 + 0 + 0 \equiv 0(7^4) \\ &\iff 0 \equiv 0(7^4) \end{aligned}$$

Luego $p = 7$ es el uníco que cumple lo pedido.

1.3. Ejercicio 3

$(4n^2 - 1 : 14) = 7 \implies \begin{cases} 7 | 4n^2 - 1 \\ 2 \not| 4n^2 - 1 \end{cases}$

Luego $4n^2 \equiv 1(7) \iff n^2 \equiv 2(7)$

- $n \equiv 0(7) \implies n^2 \equiv 0(7)$
- $n \equiv 1(7) \implies n^2 \equiv 1(7)$
- $n \equiv 2(7) \implies n^2 \equiv 4(7)$
- $n \equiv 3(7) \implies n^2 \equiv 2(7)$
- $n \equiv 4(7) \implies n^2 \equiv 2(7)$
- $n \equiv 5(7) \implies n^2 \equiv 4(7)$
- $n \equiv 6(7) \implies n^2 \equiv 1(7)$

Luego $n \equiv 3(7)$ o $n \equiv 4(7)$

Por otro lado $4n^2 - 1 \equiv 0(2) \iff 4n^2 \equiv 1(2)$

Pero esto no se cumple para ningún n, luego $2 \not| 4n^2 - 1; \forall n \in \mathbb{N}$

Luego busco los n tales que $n^n \equiv 3(7)$

- $n \equiv 3(7) \implies 3^n \equiv 3^{6k+r_6(n)} \equiv 3^{r_6(n)} \equiv 3(7)$
- $n \equiv 4(7) \implies 4^n \equiv 4^{6k+r_6(n)} \equiv 4^{r_6(n)} \equiv 3(7)$

Luego

- $n \equiv 0(6) \implies 3^0 \equiv 1(7) \wedge 4^0 \equiv 1(7)$
- $n \equiv 1(6) \implies 3^1 \equiv 3(7) \wedge 4^1 \equiv 4(7)$
- $n \equiv 2(6) \implies 3^2 \equiv 2(7) \wedge 4^2 \equiv 2(7)$
- $n \equiv 3(6) \implies 3^3 \equiv 6(7) \wedge 4^3 \equiv 1(7)$
- $n \equiv 4(6) \implies 3^4 \equiv 4(7) \wedge 4^4 \equiv 4(7)$
- $n \equiv 5(6) \implies 3^5 \equiv 5(7) \wedge 4^5 \equiv 2(7)$

Por lo tanto, $n \equiv 1(6) \wedge n \equiv 3(7)$ es la unica solución.

Usando el teorema chino del resto existe una única solución mod $6.7 = 42$ que cumple lo pedido.

A ojo veo que $n \equiv 31(42)$ cumple lo pedido.